



UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD

MÉTODOS DE INFERENCIA PARA ECUACIONES
DIFERENCIALES ESTOCÁSTICAS APLICADAS A
MODELOS EPIDEMIOLÓGICOS COMPARTAMENTALES

T E S I S

QUE PARA OBTENER EL TÍTULO DE:

MATEMÁTICO APLICADO

P R E S E N T A :

EDGAR ARMANDO TREJO LÓPEZ

TUTOR

DR. FERNANDO BALTAZAR LARIOS

CIUDAD UNIVERSITARIA, CDMX, 2025



Índice general

Introducción	5
1. Principios de probabilidad e inferencia estadística	7
1.1. Resultados básicos de probabilidad	7
1.1.1. Variables y vectores aleatorios	7
1.1.2. Independencia	8
1.1.3. Distribuciones	9
1.2. Procesos estocásticos	9
1.2.1. Movimiento Browniano	9
1.3. Inferencia bayesiana	10
1.3.1. Modelos de Markov parcialmente observados	11
1.3.2. Filtrado	12
2. Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión	13
2.1. Solución numérica de EDEs	13
2.1.1. Convergencia y consistencia	13
2.1.2. Método de Euler-Maruyama	14
2.1.3. Esquema de Milstein	15

Capítulo 0.

2.1.4. Esquema de Runge-Kutta-Milstein	15
3. Algunos métodos de inferencia para EDEs	17
3.1. Observaciones directas de todas las variables	17
3.1.1. Aproximación por esquema de simulación	17
4. Aplicaciones a modelos epidemiológicos compartamentales	19
4.1. Modelo SIS	19
4.2. Modelo SIR	19
5. Conclusiones	21

Introducción

Capítulo 1

Principios de probabilidad e inferencia estadística

En este capítulo se hace un breve repaso de las definiciones y resultados necesarios para el uso de ecuaciones diferenciales estocásticas (EDSs) en el modelaje de fenómenos físicos. Esto incluye los fundamentos teóricos para la construcción de las EDEs y las herramientas de la inferencia estadística que serán de utilidad para el ajuste de modelos contruidos con EDEs a datos reales. Los conceptos de probabilidad que se decidieron incluir están inspirados en los capítulos introductorios de Arnold [1], Øksendal [2], Mao [3], Rincón [4] y Dobrow [5]. La parte estadística corresponde a la que usan un subconjunto de métodos de inferencia presentados en Iacus [6] y Fuchs [7].

1.1. Resultados básicos de probabilidad

[8]

Considerese un espacio de probabilidad (Ω, \mathcal{F}, P) definido como en [9].

1.1.1. Variables y vectores aleatorios

Definición 1.1.1. *Se dice que una función $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es Borel medible si $g^{-1}(B) \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ para cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$.*

Capítulo 1. Principios de probabilidad e inferencia estadística

Proposición 1.1.1. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua, entonces es Borel medible.

Teorema 1.1.1 (Teorema de cambio de variable). Sea X una variable aleatoria continua con soporte en $(a, b) \subseteq \mathbb{R}$ y función de densidad f_X . Sea $g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua, estrictamente creciente o decreciente y cuya inversa es diferenciable. Entonces $Y = g(X)$ toma valores en el intervalo $g(a, b)$ y su función de densidad es

$$f_Y(y) = \begin{cases} f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right| & \text{para } y \in g(a, b) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Ejemplo. Sea $Y = \frac{1}{X}$ donde $X \sim U(a, b)$, con $0 < a < b$. La función $g(x) = \frac{1}{x}$ es continua y estrictamente decreciente en (a, b) y su inversa, que es ella misma, es diferenciable. Entonces

$$f_Y(y) = \frac{1}{(b-a)y^2} \cdot \mathbb{I}_{(\frac{1}{b}, \frac{1}{a})}(y)$$

1.1.2. Independencia

Definición 1.1.2. Los vectores aleatorios $X = (X_1, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_m)$ son independientes, si para cada $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ y cada $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^m)$ se cumple que

$$P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$$

Proposición 1.1.2. Sean $X = (X_1, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_1, \dots, Y_p)$ independientes. Si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ y $g : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$ son dos funciones Borel medibles, entonces los vectores aleatorios $f(X)$ y $g(Y)$ son independientes.

Demostración. Sean A y B cualesquiera dos conjuntos de Borel en \mathbb{R}^n y \mathbb{R}^m , respectivamente. Entonces

$$\begin{aligned} P(f(X) \in A, g(Y) \in B) &= P(X \in f^{-1}(A), Y \in g^{-1}(B)) \\ &= P(X \in f^{-1}(A))P(Y \in g^{-1}(B)) \\ &= P(f(X) \in A)P(g(Y) \in B) \end{aligned}$$

□

1.2 Procesos estocásticos

1.1.3. Distribuciones

Definición 1.1.3 (Distribución Normal Multivariada). *Se dice que el vector aleatorio X tiene una distribución Normal p -variada (multivariada si no se hace referencia a la dimensión de X) si y solo si $v^T X$ es Normal univariada para todo $v \in \mathbb{R}^p$.*

Además, si X se distribuye Normal p -variada y tiene media $\mu \in \mathbb{R}^p$ y matriz de covarianza definida positiva $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$, entonces se escribe $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \det(\Sigma)}} \cdot \exp\left(-\frac{1}{2}(x - \mu)^T \Sigma^{-1}(x - \mu)\right)$$

Teorema 1.1.2. *Si $X \sim N_p(\mu, \Sigma)$ y $Y = AX + c$, donde $A \in \mathbb{R}^{p \times q}$ y $c \in \mathbb{R}^q$, entonces $Y \sim N_q(A\mu + c, A\Sigma A^T)$.*

1.2. Procesos estocásticos

[4]

Definición 1.2.1. *Un proceso estocástico es una colección de variables aleatorias $X = \{X_t, t \in I\}$ parametrizadas por el conjunto T , donde todas las variables toman valores dentro del conjunto S llamado espacio de estados.*

Definición 1.2.2. *Sea $X = \{X_t, t \in I\}$ un proceso estocástico. Si para cualesquiera tiempos $0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n$ en I se cumple que*

$$p(x_{t_n} | x_{t_{n-1}}, \dots, x_{t_1}) = p(x_{t_n} | x_{t_{n-1}})$$

entonces se dice que X tiene la propiedad de Markov.

Definición 1.2.3. *Dos procesos estocásticos $\{X_t\}_{t \geq 0}$ y $\{Y_t\}_{t \geq 0}$*

1.2.1. Movimiento Browniano

Definición 1.2.4. *Un movimiento Browniano (unidimensional) estándar es un proceso estocástico $\{W_t\}_{t \geq 0}$ que cumple con las siguientes propiedades:*

Capítulo 1. Principios de probabilidad e inferencia estadística

1. $W_0 = 0$, c.s.
2. Las trayectorias son continuas.
3. El proceso tiene incrementos independientes.
4. Para cualesquiera $0 \leq s < t$, $W_t - W_s \sim N(0, t - s)$

Definición 1.2.5. Un proceso estocástico d -dimensional $W = \{W_t^1, \dots, W_t^d\}_{t \geq 0}$ es un movimiento Browniano estándar d -dimensional si $\{W_t^i\}$ es un movimiento Browniano estándar para cada $i = 1, \dots, d$ y los procesos $\{W_t^1\}, \dots, \{W_t^d\}$ son independientes dos a dos.

Proposición 1.2.1. Sea W un movimiento Browniano estándar d -dimensional. Entonces para $0 \leq s < t$ se tiene que

$$W_t - W_s \sim N_d(0, (t - s)I_d)$$

Demostración. Considerese a $X = (W_t^i, W_s^i)$ y $Y = (W_t^j, W_s^j)$, para $i, j = 1, \dots, d$ con $i \neq j$. Sea $g(x, y) = x - y$, que por su continuidad es Borel medible. Dado que los procesos son independientes, entonces X y Y son independientes y por la proposición 1.1.2 se tiene que $g(X) = W_t^i - W_s^i$ y $g(Y) = W_t^j - W_s^j$ son independientes.

Luego, para cada $i = 1, \dots, d$, $W_t^i - W_s^i \sim N(0, t - s)$. Por la independencia dos a dos se tiene que $W_t - W_s \sim N_d(0, (t - s)I_d)$ \square

1.3. Inferencia bayesiana

Supongamos que tenemos una muestra $\mathcal{D}_N = (y_1, \dots, y_N)$ de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas cuya función de densidad f está parametrizada por $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K) \in \Theta$, cuyo valor real es desconocido. La *inferencia (estadística)* toma las observaciones \mathcal{D} , las procesa y trata de encontrar formas de describir a θ .

En el *enfoque Bayesiano* de la inferencia estadística suponemos que la probabilidad es una medida de la incertidumbre, que resulta útil para analizar fenómenos que no podemos reproducir tantas veces como queramos. En este contexto, se trata a θ como una variable aleatoria (o vector aleatorio, según el valor de K) y las observaciones que recolectemos nos ayudarán a ajustar nuestras creencias acerca de θ .

1.3 Inferencia bayesiana

El análisis Bayesiano sigue este proceso:

1. Toda la información y creencias que tenemos acerca de θ se cuantifican dentro de la *distribución a priori*, $p(\theta)$.
2. Se recolecta una muestra \mathcal{D}_n , cuya generación suponemos que depende del parámetro. Debemos entonces relacionar las observaciones y el parámetro a través de la función de *verosimilitud*, $p(\mathcal{D}_n|\theta)$.
3. Ajustamos la información que tenemos de θ dado que hemos observado la muestra. Esto se hace a través del Teorema de Bayes,

$$p(\theta|\mathcal{D}_n) = \frac{p(\mathcal{D}_n|\theta)p(\theta)}{p(\mathcal{D}_n)}$$

La inferencia se hace sobre la llamada *distribución posteriori*, $p(\theta|\mathcal{D}_n)$.

1.3.1. Modelos de Markov parcialmente observados

Sea $\theta \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^K$. Para cada valor fijo de θ , el proceso estocástico $\mathbf{X} = \{X(t, \theta)\}_{t \in T}$ representa un sistema dinámico que no podemos observar directamente y cuya evolución futura depende únicamente del valor actual del sistema,

$$p(X_{\tau_{n+1}} | X_{\tau_0}, \dots, X_{\tau_n}, \theta) = f(X_{\tau_{n+1}} | X_{\tau_n}, \theta) \quad (1.1)$$

es decir, \mathbf{X} es un proceso de Markov, para $\tau_0 < \dots < \tau_n < \tau_{n+1}$. En favor de la claridad, se utilizará la siguiente notación X_i para denotar a $X(t_i, \theta)$ cuando sea claro que θ está fijo y $X_{i:j}$ para aludir a $(X_i, X_{i+1}, \dots, X_j)$.

El proceso \mathbf{X} sólo puede ser observado indirectamente y es través de otro proceso $\mathbf{Y} = \{Y(t, \theta)\}_{t \in T_{obs}}$ donde $T_{obs} = \{t_i \in T, i = 1, \dots, N\}$ son los tiempos en los que se realizan estas observaciones. Sea $t_0 \in T$ el tiempo en que inicia el proceso \mathbf{X} y $t_0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_N$. En general, el conjunto de índices de las observaciones es subconjunto de los Naturales. Las variables aleatorias observables $Y_{1:N}$ son condicionalmente independientes dadas $X_{0:N}$ y la observación al tiempo actual sólo depende del estado del sistema en tal momento,

$$p(Y_n | Y_{1:n-1}, X_{0:n}, \theta) = g(Y_n | X_n, \theta) \quad (1.2)$$

Finalmente, al tiempo t_0 , el estado inicial del sistema está sujeto a la distribución inicial

$$p(X_0|\theta) = \mu(\theta) \quad (1.3)$$

Capítulo 1. Principios de probabilidad e inferencia estadística

Definición 1.3.1. *Un sistema dinámico X con conjunto de observaciones Y que cumple con 1.1, 1.2 y 1.3 es un proceso de Markov parcialmente observado, denotado como*

$$\begin{aligned}X_n &\sim f(X_{n-1}, \boldsymbol{\theta}) \\Y_n &\sim g(X_n, \boldsymbol{\theta}) \\X_0 &\sim \mu(\boldsymbol{\theta})\end{aligned}\tag{1.4}$$

En la literatura, a 1.4 también se le conoce como *state-space model* o *hidden Markov model*.

1.3.2. Filtrado

En general, buscamos estimar los estados ocultos del sistema $X_{0:N}$ dadas las observaciones $Y_{1:N}$. En teoría, la *distribución a posteriori* de los estados está dada por el Teorema de Bayes,

$$p(X_{0:N}|Y_{1:N}) = \frac{P(Y_{1:N}|X_{0:N})P(X_{0:N})}{P(Y_{1:N})}\tag{1.5}$$

Capítulo 2

Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión

2.1. Solución numérica de EDEs

Rackauckas y Nie [10] Dado que la solución analítica de una ecuación diferencial estocástica es, en general, imposible de calcular, se tiene que recurrir a métodos numéricos que aproximen esa solución. Hay una amplia variedad de métodos numéricos desarrollados para este fin, sin embargo se optó por usar un método que es fácil de implementar si el proceso de difusión es multivariado, el método de Euler-Maruyama. Otros métodos existen y, en general, tienen un mejor desempeño pero su implementación implica un mayor esfuerzo. Entre estos se encuentran los métodos de Milstein, Runge-Kutta.

2.1.1. Convergencia y consistencia

Definición 2.1.1. *Una aproximación a tiempo discreto Y^δ , donde δ es el tamaño de paso máximo, tiene un nivel de convergencia fuerte γ al proceso X si existe una constante positiva K , que no depende de δ , y un $\delta_0 > 0$ tal que*

$$\mathbb{E}(|X_t - Y_t^\delta|) \leq K\delta^\gamma$$

para todo $t \geq 0$ y toda $\delta \in (0, \delta_0)$.

Capítulo 2. Ecuaciones diferenciales estocásticas y procesos de difusión

2.1.2. Método de Euler-Maruyama

Si quiere obtenerse una aproximación de la solución a la ecuación tal en el intervalo $[t_0, T]$ tal que $X_0 = x_0$. Considérese la partición $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$ y defínase $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ para $i = 0, \dots, n-1$. El proceso estocástico continuo $Y = \{Y_t\}_{t \geq t_0}^T$ se define, generalmente, como la interpolación lineal del conjunto de puntos $\{(\tau_i, Y_{\tau_i}) : i = 0, \dots, n\}$ donde $Y_{\tau_0} = x_0$ y el resto satisfacen la relación iterativa

$$Y_{\tau_{i+1}} = Y_{\tau_i} + f(X_{\tau_i}, \tau_i)\Delta_i + g(Y_{\tau_i}, \tau_i)\Delta_i(W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i}) \quad (2.1)$$

para $i = 0, \dots, n-1$. En general, se toma una partición con puntos equidistantes, es decir, $\Delta_i = \Delta = \frac{T-t_0}{n}$ y $\tau_i = \tau_0 + i\Delta$. Para simular este proceso, se usa la normalidad de los incrementos del movimiento Browniano (ver algoritmo 1). La paquetería `DifferentialEquations.jl` permite resolver una ecuación estocástica con este esquema especificnado `EM()` como método y un valor para Δ por medio del parámetro `dt`, siendo $\Delta = \frac{T-t_0}{n}$, para algún $n \in \mathbb{N}_+$, de modo que el valor en la última posición del vector arrojado por el algoritmo corresponda a Y_T .

Algoritmo 1 Esquema de Euler-Maruyama

Input: Función de deriva f , función de difusión g , tamaño de paso Δ , lapso de tiempo (t_0, T) , valor inicial x_0

Output: Aproximación de la solución a $dX_t = f(X_t, t)dt + g(X_t, t)W_t$ sujeta a $X_{t_0} = x_0$ evaluada en $t \in \{t_i = t_0 + i\Delta : t_i \leq T, i \in \mathbb{N}_+\}$

```

1   $d \leftarrow \dim(x_0)$ 
2   $n \leftarrow \lfloor (T - t_0)/\Delta \rfloor$ 
3   $Y \leftarrow [n + 1, d]$ 
4   $Y[1, :] \leftarrow x_0$ 
5  for  $i \in 1, \dots, n$  do
6       $\varepsilon \sim N_d(0, I_d)$ 
7       $t \leftarrow t_0 + i\Delta$ 
8       $Y[i + 1, :] \leftarrow f(Y[i, :], t)\Delta + g(Y[i, :], t)\Delta\varepsilon$ 
9  end for
```

El método de Euler-Maruyama tiene un orden de convergencia de $\gamma = \frac{1}{2}$, mientras que los métodos de Milstein y Runge-Kutta tienen tal y tal, respectivamente [7].

2.1 Solución numérica de EDEs

2.1.3. Esquema de Milstein

De forma análoga que en el método de Euler-Maruyama, considerese una partición $t_0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_n = T$ equidistante, de forma que $\Delta_i = \tau_{i+1} - \tau_i$ sea una constante Δ para todo $i = 0, \dots, n-1$. Entonces la componente k -ésima del proceso aproximación cumple la relación iterativa siguiente

$$\begin{aligned} Y_{\tau_{i+1}}^{(k)} = & Y_{\tau_i}^{(k)} + f_k(Y_{\tau_i}, \tau_i)\Delta + \sum_{j=1}^m g_{kj}(Y_{\tau_i}, \tau_i)\Delta W_i^{(j)} \\ & + \sum_{j,l=1}^m \sum_{r=1}^d g_{rj}(Y_{\tau_i}, \tau_i) \left(\frac{\partial g_{kl}}{\partial x^{(r)}}(Y_{\tau_i}, \tau_i) \right) \int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \int_{\tau_i}^s dW_u^{(j)} dW_s^{(l)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

para $i = 0, \dots, n-1$ y donde $\Delta W_i = W_{\tau_{i+1}} - W_{\tau_i}$. Para una dimensión, la implementación del método no tiene mayor complicación, sin embargo, en el caso multivariado el cálculo de las derivadas parciales de g y de la doble integral representa un problema que puede atacarse desde distintos enfoques y que, en ciertas condiciones, se simplifica [11]. Por ejemplo, cuando el coeficiente de difusión es diagonal

2.1.4. Esquema de Runge-Kutta-Milstein

Capítulo 3

Algunos métodos de inferencia para ecuaciones diferenciales estocásticas

3.1. Observaciones directas de todas las variables

3.1.1. Aproximación por esquema de simulación

Este método no aproxima las densidades de transición directamente sino que aproxima la solución de la ecuación diferencial estocástica de forma tal que el proceso discretizado tiene una densidad de transición que conozcamos [6]. Según el esquema usado para aproximar la solución, obtenemos una u otra densidad de transición. El esquema de Euler-Maruyama, al ser la aproximación más básica de la solución, es generalmente el más elegido cuando se usa este método de inferencia [12]. La aproximación de la solución a la ecuación diferencial estocástica

$$dX_t = f_\theta(X_t, t)dt + g_\theta(X_t, t)dW_t$$

donde $X_t \in \mathbb{R}^d$, $f_\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $g_\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^{d \times q}$ y $W_t \in \mathbb{R}^q$, por el esquema de Euler-Maruyama está dado de forma recursiva por

$$Y_{t_{i+1}} = Y_{t_i} + f_\theta(Y_{t_i}, t_i)\Delta t_i + g_\theta(Y_{t_i}, t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \quad (3.1)$$

Capítulo 3. Algunos métodos de inferencia para EDEs

De la Proposición 1.2.1, se sabe que $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$ tiene distribución $N_q(0, \Delta t_i I_q)$ y al aplicarle la transformación lineal en 3.1, se sigue que

$$Y_{t_{i+1}} \sim N_d \left(Y_{t_i} + f_\theta(Y_{t_i}, t_i) \Delta t_i, \Delta t_i g_\theta(Y_{t_i}, t_i) g_\theta(Y_{t_i}, t_i)^T \right)$$

Se tiene entonces que el proceso aproximado tiene densidades de transición

$$p(Y_{t_{i+1}} | Y_{t_i}, \theta) = \frac{\exp \left(-\frac{1}{2\Delta t_i} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i} - f_i \Delta t_i) (g_i g_i^T)^{-1} (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i} - f_i \Delta t_i)^T \right)}{\sqrt{2\pi \Delta t_i \det(g_i g_i^T)}}$$

Capítulo 4

Aplicaciones a modelos epidemiológicos compartamentales

En cada uno de los modelos tratados a continuación, el ruido fue introducido en el proceso de transmisión de la enfermedad, tal lo hacen Gourieroux y Lu [13].

4.1. Modelo SIS

El modelo SIS estocástico. En la práctica este modelo ha sido usado para ajustar datos reales. Özdemir Çalikuşu y Erdoğan [12] realizan inferencia con el método de aproximación de la densidad de transición por medio de un esquema de simulación (Euler-Maruyama en este caso) usando datos de la pandemia de COVID-19. Si bien el modelo parece ajustar correctamente a los datos, las características de la enfermedad rompen con los supuestos en los que se fundamenta el modelo SIS.

4.2. Modelo SIR

El modelo SIR fue introducido por tal. Se trata de un sistema de ecuaciones diferenciales ...

Meter ruido...

Capítulo 4. Aplicaciones a modelos epidemiológicos compartamentales

La demostración de la existencia y unicidad de la solución de este sistema de ecuaciones diferenciales estocásticas puede consultarse en [14]. Si consideramos una población cerrada, es decir que $\mu = 0$, entonces $dS_t + dI_t + dR_t = 0$, por lo que $S_t + I_t + R_t = C$, con C una constante. Si los valores iniciales son tales que su suma es igual a uno, entonces aseguramos que $S_t + I_t + R_t = 1$, para todo $t \geq 0$.

Capítulo 5

Conclusiones

Bibliografía

- [1] L. Arnold, *Stochastic differential equations: theory and applications*. New York: Wiley, 1974, 228 págs., ISBN: 978-0-471-03359-2.
- [2] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations* (Universitext). Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2003, ISBN: 978-3-540-04758-2. DOI: 10.1007/978-3-642-14394-6. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-642-14394-6> (visitado 15-06-2025).
- [3] X. Mao, *Stochastic Differential Equations and Applications*, Second edition, reprinted. Oxford: Woodhead Publishing, 2011, 1 pág., ISBN: 978-0-85709-940-2.
- [4] L. Rincón, *Introducción a Los Procesos Estocásticos*. México: UNAM, Facultad de Ciencias, 2012, ISBN: 978-607-02-3044-8. dirección: [http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/Rinc%C3%B3n\(2012\)Procesos-estoc%C3%A1sticos.pdf](http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/Rinc%C3%B3n(2012)Procesos-estoc%C3%A1sticos.pdf).
- [5] R. P. Dobrow, *Introduction to Stochastic Processes with R*. Hoboken, New Jersey: Wiley, 2016, 1 pág., ISBN: 978-1-118-74065-1. DOI: 10.1002/9781118740712.
- [6] S. M. Iacus, *Simulation and Inference for Stochastic Differential Equations: With R Examples* (Springer Series in Statistics Ser). New York, NY: Springer, 2008, 1 pág., ISBN: 978-0-387-75838-1.
- [7] C. Fuchs, *Inference for Diffusion Processes: With Applications in Life Sciences*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 2013, ISBN: 978-3-642-25969-2. DOI: 10.1007/978-3-642-25969-2. dirección: <https://link.springer.com/10.1007/978-3-642-25969-2> (visitado 23-06-2025).
- [8] P. Billingsley, *Probability and Measure* (Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics), 3. ed. New York, NY: Wiley, 1995, 593 págs., ISBN: 978-0-471-00710-4.

Capítulo 5. Bibliografía

- [9] L. Rincón, *Curso intermedio de probabilidad*. México: UNAM, Facultad de Ciencias, 2007, ISBN: 978-970-32-4269-6. dirección: [http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/Rinc%C3%B3n\(2007\)Curso-intermedio-de-probabilidad.pdf](http://lya.fciencias.unam.mx/lars/libros/Rinc%C3%B3n(2007)Curso-intermedio-de-probabilidad.pdf).
- [10] C. Rackauckas y Q. Nie, «DifferentialEquations.jl – A Performant and Feature-Rich Ecosystem for Solving Differential Equations in Julia,» *Journal of Open Research Software*, vol. 5, n.º 1, 25 de mayo de 2017, ISSN: 2049-9647. DOI: 10.5334/jors.151. dirección: <https://openresearchsoftware.metajnl.com/articles/10.5334/jors.151> (visitado 30-06-2025).
- [11] P. E. Kloeden y E. Platen, *Numerical Solution of Stochastic Differential Equations*. Berlin, Heidelberg: Springer Berlin Heidelberg, 1992, ISBN: 978-3-642-08107-1 978-3-662-12616-5. DOI: 10.1007/978-3-662-12616-5. dirección: <http://link.springer.com/10.1007/978-3-662-12616-5> (visitado 22-06-2025).
- [12] S. Özdemir Çalikuşu y F. Erdoğan, «Fitting the Itô Stochastic differential equation to the COVID-19 data in Turkey,» *MANAS Journal of Engineering*, vol. 9, n.º 2, págs. 192-197, 6 de dic. de 2021, ISSN: 1694-7398. DOI: 10.51354/mjen.929656. dirección: <http://dergipark.org.tr/en/doi/10.51354/mjen.929656> (visitado 15-06-2025).
- [13] C. Gourieroux e Y. Lu. «SIR Model with Stochastic Transmission.» arXiv: 2011.07816 [q-bio]. (16 de nov. de 2020), dirección: <http://arxiv.org/abs/2011.07816> (visitado 15-06-2025), prepublicado.
- [14] M. Ali, F. E. Guma, A. Qazza et al., «Stochastic modeling of influenza transmission: Insights into disease dynamics and epidemic management,» *Partial Differential Equations in Applied Mathematics*, vol. 11, pág. 100886, sep. de 2024, ISSN: 26668181. DOI: 10.1016/j.padiff.2024.100886. dirección: <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S2666818124002729> (visitado 15-06-2025).