

## 6. Simplificação de Funções Booleanas usando Mapas de Karnaugh

O método de simplificação apresentado na seção anterior é de aplicabilidade limitada, uma vez que é bastante difícil certificar-se que todos os pares de mintermos que podiam ser simplificados foram determinados. Alternativamente àquele método, há outro método de simplificação baseado na identificação visual de grupos de mintermos passíveis de serem simplificados. No entanto, para que se possa identificar tais grupos, é necessário que os mintermos sejam dispostos de maneira mais conveniente, ou seja, de forma que os mintermos vizinhos possuam apenas 1 termo que se modifica. A esta estrutura de organização dos mintermos vizinhos damos o nome de Mapa de Karnaugh (criados por Edward Veitch (1952) e aperfeiçoados pelo engenheiro de telecomunicações Maurice Karnaugh). Nas figuras abaixo são apresentadas as reorganizações dos mintermos para 2, 3 e 4 variáveis (Figura 1, Figura 2 e Figura 3 respectivamente) de forma que cada mintermo difere apenas em 1 termo de seus vizinhos.

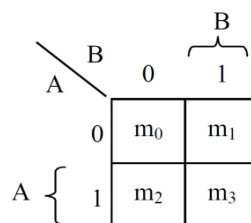


Figura 1. Mapa de Karnaugh de 2 variáveis.

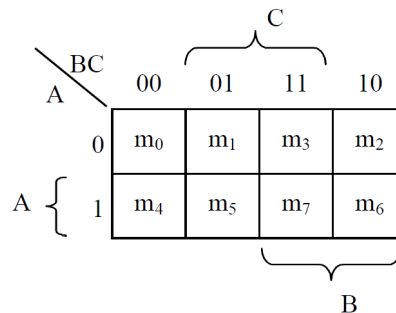


Figura 2. Mapa de Karnaugh de 3 variáveis.

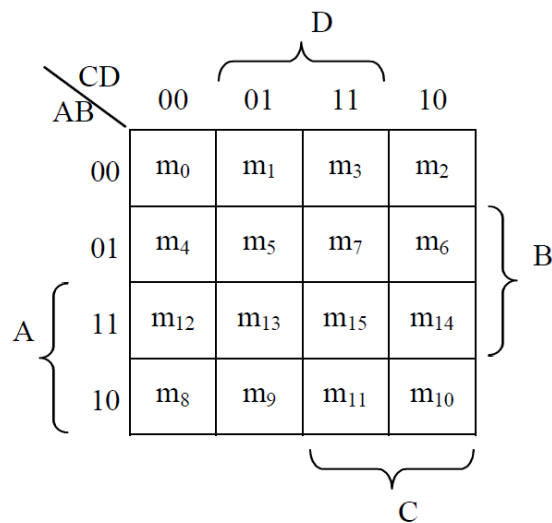


Figura 3. Mapa de Karnaugh de 4 variáveis.

A partir do mapa de Karnaugh de uma função, é possível realizar a simplificação da função de forma mais fácil e direta do que se fossemos utilizar as leis e simplificações da álgebra booleana. O exemplo abaixo ilustra a simplificação de uma função de 3 variáveis utilizando o mapa de Karnaugh.

Exemplo 6.1: Dada a tabela verdade com os mintermos da função  $F$  abaixo (Tabela 1), monte o mapa de Karnaugh e encontre a equação simplificada.

Tabela 1. Tabela Verdade exemplo

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	0

O primeiro passo para simplificar-se uma função usando mapa de Karnaugh é escolher o mapa conforme o número de variáveis da função e preencher os valores dos mintermos conforme a tabela verdade fornecida, ou conforme a equação fornecida. O segundo passo é identificar grupos de mintermos adjacentes que formem grupos de  $2^m$  elementos adjacentes entre si, com ' $m$ ' podendo valer no máximo o número de variáveis da função. Estes grupos são denominados **subcubos**. No caso de se querer encontrar uma expressão em soma de produtos, estaremos interessados nos subcubos de mintermos-1. Então, cada subcubo contendo mintermos-1 irá originar um produto, no qual uma ou mais variáveis poderão estar ausentes devido à simplificação que é obtida. Os produtos associados aos subcubos de mintermos-1, simplificados ou

não, são denominados **implicantes**. É importante ressaltar que quanto maior o número de elementos do subcubo, maior será a simplificação obtida.

Ao mapearmos os mintermos da tabela verdade acima (Tabela 1) e agruparmos os termos vizinhos, obtemos o mapa de Karnaugh de 3 variáveis da Figura 4.

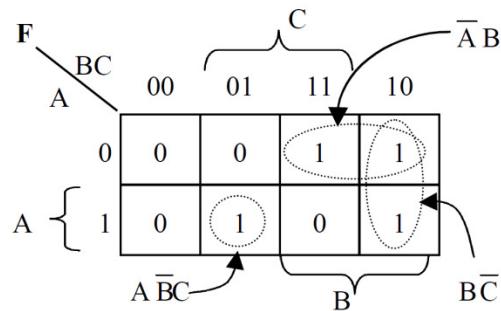


Figura 4. Tabela de adjacências para uma função de 3 variáveis.

Repare que nessa nova tabela, quaisquer dois mintermos adjacentes (na horizontal ou na vertical) são passíveis de serem simplificados, pois só se diferenciam de uma variável. É importante ressaltar que esse conceito de adjacência **não está restrito aos limites da tabela**, uma vez que os elementos extremos de uma mesma linha (ou de uma mesma coluna) também são simplificáveis. Isto implica que a tabela de adjacências de mintermos da Figura 4 pode e deve ser encarada como uma figura geométrica tridimensional do tipo “toróide” (ou uma “rosquinha”).

Após, deve-se identificar todos os grupos de mintermos-1 adjacentes entre si. Cada grupo de mintermos-1 originará um produto, conforme indicado na Figura 4. A equação em soma de produtos simplificada será o **OU** entre os produtos encontrados

$$F = \bar{A} B + A \bar{B} C + B \bar{C}$$

É importante ressaltar que o conceito de adjacência é aplicável na horizontal e na vertical, **mas nunca na diagonal**.

No caso de se querer encontrar uma expressão em produtos de somas, estaremos interessados nos subcubos de mintermos-0. Então, cada subcubo contendo mintermos-0 irá originar uma soma, no qual uma ou mais variáveis poderão estar ausentes devido à simplificação que é obtida. As somas associadas aos subcubos de mintermos-0, simplificadas ou não, são denominadas **implicados**. Também neste caso, quanto maior o número de elementos do subcubo, maior será a simplificação obtida.

### 6.1 Cobertura dos Mapas de Karnaugh

Normalmente, é possível identificar-se numa mesma função Booleana mais de um implicante (ou mais de um implicado). Neste caso, é necessário determinar o conjunto de implicantes (ou implicados) que melhor “cobre” a função, onde a melhor

cobertura significa necessariamente a expressão mais simplificada possível, a qual é denominada expressão mínima.

O procedimento básico para se determinar a melhor cobertura (também chamada cobertura mínima) para uma expressão em soma de produtos é o seguinte:

1. Identificar os subcubos de mintermos-1 com maior número de elementos possível, iniciando do tamanho  $2^n$ , onde  $n$  é o número de variáveis da função. Caso algum mintermo-1 fique isolado (isto é, não há nenhum outro mintermo-1 adjacente a ele), então ele constituirá um subcubo de um elemento;
2. Identificar o menor conjunto de subcubos de modo que cada mintermo-1 pertença pelo menos um subcubo (seja coberto pelo menos uma vez).

Observações:

- a. Cada mintermo-1 pode ser coberto por mais de um subcubo, caso isso resulte numa simplificação maior;
- b. Um último teste para verificar se a expressão obtida é realmente a mínima consiste em verificar se algum subcubo pode ser removido, sem deixar algum mintermo-1 descoberto. Um subcubo que poder ser removido sem descobrir mintermos é dito subcubo **não-essencial**. Logo, todo o subcubo que não pode ser removido é dito **essencial**;
- c. Pode haver mais de uma expressão mínima para uma mesma função Booleana;
- d. A expressão mínima é aquela de menor complexidade. E a complexidade será medida pelo número de literais de uma função.

Conforme já mencionado anteriormente, também é possível obter-se uma expressão mínima em **produto de somas** a partir do mapa de Karnaugh da função Booleana. Para tanto, deve-se identificar os subcubos de mintermos-0, ao invés de subcubos de mintermos-1. Cada subcubo de mintermo-0 irá originar um termo soma, possivelmente já simplificado. Os passos para a obtenção de uma cobertura mínima são os mesmos já descritos para a obtenção da expressão em soma de produtos.