3. Álgebra Booleana

Em 1854, George Boole introduziu o formalismo que até hoje se usa para o tratamento sistemático da lógica, que é a chamada Álgebra Booleana. Álgebra Booleana pode ser definida com um conjunto de operadores e um conjunto de axiomas, que são assumidos verdadeiros sem necessidade de prova. Foi somente em 1938 que C. E. Shannon fez a relação entre a álgebra booleana e circuitos elétricos. Ele demonstrou que as propriedades de circuitos elétricos de chaveamento podem ser representadas por uma álgebra Booleana com dois valores. Diferentemente da álgebra ordinária dos reais, onde as variáveis podem assumir valores no intervalo $(-\infty;+\infty)$, as variáveis Booleanas só podem assumir um número finito de valores. Em particular, na álgebra Booleana de dois valores, cada variável pode assumir um dentre dois valores possíveis, os quais podem ser denotados por [F,V] (falso ou verdadeiro), [H,L] (*high and low*, em português alto e baixo) ou ainda [0,1]. Nesta disciplina, adotaremos a notação [0,1], a qual também é utilizada em eletrônica digital. Como o número de valores que cada variável pode assumir é finito (e pequeno), o número de estados que uma função Booleana pode assumir também será finito, o que significa que podemos descrever completamente as funções Booleanas utilizando tabelas. Devido a este fato, uma tabela que descreva uma função Booleana recebe o nome de tabela verdade, e nela são listadas todas as combinações de valores que as variáveis de entrada podem assumir e os correspondentes valores da função (saídas).

Na álgebra Booleana, existem três operações lógicas ou funções básicas. São elas, operação 'OU', operação 'E' e complementação ou inversão. Todas as funções Booleanas podem ser representadas em termos destas operações básicas.

3.1 Operação ou lógica OU

Uma definição para a operação **OU**, que também é denominada adição lógica, é:
"A operação **OU** resulta **1** se pelo menos uma das variáveis de entrada vale **1**". Como uma variável Booleana ou vale **1** ou vale **0**, e como o resultado de uma operação qualquer pode ser atribuído a uma variável Booleana, basta que definamos quando a operação vale **1**. Automaticamente, a operação resultará **0** nos demais casos. Assim, pode-se dizer que a operação **OU** resulta **0** somente quando todas as variáveis de entrada valem **0**. Um símbolo possível para representar a operação **OU** é "+", tal como o símbolo da adição algébrica (dos reais). Porém, como estamos trabalhando com variáveis Booleanas, sabemos que não se trata da adição algébrica, mas sim da adição lógica. Outro símbolo também encontrado na bibliografia é "$\vee$". Listando as possibilidades de combinações entre dois valores Booleanos e os respectivos resultados para a operação **OU**, tem-se:

$0 + 0 = 0$	$0 \vee 0 = 0$
$0 + 1 = 1$	$0 \vee 1 = 1$
$1 + 0 = 1$	$1 \vee 0 = 1$
$1 + 1 = 1$	$1 \vee 1 = 1$

Note que a operação **OU** só pode ser definida se houver, pelo menos, duas variáveis envolvidas. Ou seja, não é possível realizar a operação sobre somente uma variável. Devido a isso, o operador "+" ou "$\vee$"(lêem-se **OU**) são ditos **binários**.

Nas equações, não se costuma escrever todas as possibilidades de valores e portanto, adotamos uma letra (ou uma letra com um índice) para designar uma variável Booleana. Com isso, já se sabe que aquela variável pode assumir ou o valor **0** ou o valor **1**. Para demonstrar o comportamento da lógica **OU** através da equação A+B ou $A \vee B$ (lê-se A ou B), utilizamos o que se chama de tabela verdade. Uma tabela verdade consiste basicamente de um conjunto de colunas, nas quais são listadas todas as combinações possíveis entre as variáveis de entrada (à esquerda) e o resultado da função (à direita). A Tabela 1 apresenta a tabela verdade do operador lógico **OU.** Também, podem-se criar colunas intermediárias, onde são avaliados os resultados de subexpressões contidas na expressão principal. Isto normalmente facilita a avaliação, principalmente no caso de equações muito complexas e/ou contendo muitas variáveis.

Tabela 1. **Tabela Verdade do operador binário OU**

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

3.2 Operação ou lógica E

A operação **E**, ou **multiplicação** lógica, pode ser definida da seguinte forma:

"A operação **E** resulta '**0'**se pelo menos uma das variáveis de entrada vale '**0**.Pela definição dada, pode-se deduzir que o resultado da operação **E** será **1** se, e somente se, todas as entradas valerem **1**.O símbolo usualmente utilizado na operação **E** é " · " porém, outra notação possível é"$\wedge$". Podemos, também, listar as possibilidades de combinações entre dois valores Booleanos e os respectivos resultados, para a operação **E**:

$0 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$
$1 \cdot 0 = 0$
$1 \cdot 1 = 1$

$0 \wedge 0 = 0$
$0 \wedge 1 = 0$
$1 \wedge 0 = 0$
$1 \wedge 1 = 1$

Assim como a operação **OU**, a operação **E** só pode ser definida entre pelo menos duas variáveis. Ou seja, o operador "·" ou "$\wedge$" (lêem-se **E**) também são ditos **binários**. Para mostrar o comportamento da equação $A \wedge B$ (lê-se A e B), a Tabela 2 apresenta a tabela verdade:

Tabela 2. **Tabela Verdade do operador binário E**

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

3.3 Complementação (ou Negação, ou Inversão)

A operação **complementação** dispensa uma definição. É a operação cujo resultado é simplesmente o valor complementar ao que a variável apresenta. Também devido ao fato de uma variável Booleana poder assumir um entre somente dois valores, o valor complementar será **1** se a variável vale **0** e será **0** se a variável vale **1**.
Os símbolos utilizados para representar a operação complementação sobre uma variável Booleana A são $\overline{A}$, ~A e A' (lê-se A negado). Nesta disciplina, adotaremos o primeiro símbolo. O resultado da operação complementação pode ser listado:

$$\overline{0} = 1$$
$$\overline{1} = 0$$

Diferentemente das operações **OU** e **E,** a **complementação** só é definida sobre uma variável, ou sobre o resultado de uma expressão. Ou seja, o operador **complementação** édito **unário**. E a tabela verdade Tabela 3 para A é:

Tabela 3. **Tabela Verdade do operador Complementação**

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

3.4 Lógicas OU e E com Múltiplas Variáveis

Como ficará a lógica OU com mais de 2 variáveis?

Pode-se determinar o resultado da equação $A \vee B \vee C$ (lê-se A ou B ou C) utilizando diretamente a definição da operação **E**: o resultado será **1** se pelo menos uma das variáveis de entrada valer **1**

No exemplo a seguir, temos a Tabela 4 apresenta a tabela verdade do operador **OU** com três variáveis e abaixo a Tabela 5 apresenta a tabela com o operador **E**.

Tabela 4. **Tabela Verdade do operador binário OU com 3 variáveis.**

A	B	C	$A \vee B \vee C$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

De forma semelhante, pode-se determinar o resultado da equação $A \wedge B \wedge C$ (lê-se A e B e C) utilizando diretamente a definição da operação **E**: o resultado será **0** se pelo menos uma das variáveis de entrada valer **0**.

Tabela 5. **Tabela Verdade do operador binário E com 3 variáveis.**

A	B	C	$A \wedge B \wedge C$
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

3.5 Propriedades da Lógica Booleana

Outra maneira de avaliar uma equação booleana é avaliando-a em pares. Por exemplo, pode-se primeiramente achar o resultado de $A \vee B$, para depois operar os valores resultantes com os respectivos valores de C. Esta propriedade é conhecida como **associatividade**. Também a ordem em que são avaliadas as variáveis A, B e C é irrelevante (propriedade **comutatividade**). Estas propriedades são ilustradas pela Tabela 6 a seguir. Nela, os parêntesis indicam subexpressões já avaliadas em coluna imediatamente à esquerda. Note que os valores das colunas referentes às expressões $A \vee B \vee C$, $(A \vee B) \vee C$ e $(B \vee C) \vee A$ são os mesmos (na mesma ordem).

Tabela 6. **Tabela Verdade demonstrando as propriedades de associatividade e comutatividade do operador lógico OU**

A	B	C	$A \vee B \vee C$	$A \vee B$	$(A \vee B) \vee C$	$B \vee C$	$(B \vee C) \vee A$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

Também para a operação **E** valem as propriedades de **associatividade** e **comutatividade**. Logo, da mesma forma que acontece para a lógica **OU**, a equação $A \wedge B \wedge C$ pode ainda ser avaliada tomando-se as variáveis aos pares, em qualquer ordem.

Tabela 7. **Tabela Verdade demonstrando as propriedades de associatividade e comutatividade do operador lógico E**

A	B	C	$A \wedge B \wedge C$	$A \wedge B$	$(A \wedge B) \wedge C$	$B \wedge C$	$(B \wedge C) \wedge A$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0	1	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0	0
1	1	0	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1

3.6 Avaliação de Expressões Booleanas

Dada a equação que descreve uma função Booleana qualquer, deseja-se saber detalhadamente como esta função se comporta para qualquer combinação das variáveis de entrada. O comportamento de uma função é descrito pela sua tabela verdade e este problema é conhecido como **avaliação** da função ou da expressão que descreve a função considerada. Em suma, deseja-se achar a tabela verdade para a função Booleana.

Como já foi dito anteriormente, uma tabela verdade consiste basicamente de um conjunto de colunas, nas quais são listadas todas as combinações possíveis entre as variáveis de entrada (à esquerda) e o resultado da função (à direita). Também, pode-se criar colunas intermediárias, onde são listados os resultados de subexpressões contidas na expressão principal. Isto normalmente facilita a avaliação, principalmente no caso de equações muito complexas e/ou contendo muitas variáveis.

Quando numa mesma equação Booleana aparecem operações **E** e **OU**, é necessário seguir a ordem de precedência. Tal como na álgebra dos reais, a multiplicação (lógica) tem precedência sobre a adição (lógica). Além disso, expressões entre parêntesis têm precedência sobre operadores **E** e **OU** que estejam no mesmo nível. Quanto à complementação, esta deve ser avaliada tão logo seja possível. Caso a complementação seja aplicada sobre uma subexpressão inteira, é necessário que se avalie primeiramente a subexpressão para, só após, inverter o seu resultado.

O número de combinações que as variáveis de entrada podem assumir pode ser calculado por 2^n, onde n é o número de variáveis de entrada. O procedimento para a criação da tabela verdade a partir de uma equação Booleana é:

1. Criar colunas para as variáveis de entrada e listar todas as combinações possíveis, utilizando a fórmula no de combinações = 2^n (onde n é o número de variáveis de entrada);
2. Criar uma coluna para cada variável de entrada que apareça complementada na equação e anotar os valores resultantes;
3. Avaliar a equação seguindo a ordem de precedência, a partir do nível de parêntesis mais internos:
    1º multiplicação lógica
    2º adição lógica

Tomemos como exemplo a expressão $W = X + Y\cdot \overline{Z}$, onde a variável W representa a função Booleana propriamente dita. Esta variável depende das variáveis que estão à direita do sinal '=', ou seja, depende de X, Y e Z o que nos dá um total de 3 variáveis de entrada. O total de combinações entre 3 variáveis será $2^3=8$. Então, a tabela verdade para W deverá ter 3 colunas à esquerda e 8 linhas conforme o número total de combinações possível das entradas. Seguindo o procedimento dado acima, cria-se uma coluna, na qual se listam os valores para $\overline{Z}$. Após, inicia-se a avaliação propriamente dita, a partir do nível mais interno de parêntesis. Como não há parêntesis na expressão, resolvem-se as subexpressões que envolvem a operação **E**. No caso em questão, há somente uma subexpressão, que é $\overline{Y}\cdot Z$. Então, cria-se uma coluna para $Y\cdot \overline{Z}$, na qual anotam-se os resultados para este produto. Finalmente, utilizam-se os resultados de $Y\cdot \overline{Z}$, listados na coluna anterior, para operar o **OU** com a variável X. A 0 apresenta o resultado final da tabela verdade para a expressão de W.

Tabela 8. **Tabela verdade que apresenta a solução para a equação de W**

X	Y	Z	$\overline{Z}$	$Y\cdot\overline{Z}$	W
0	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	1	0	1
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1
1	1	1	0	0	1

3. Portas Lógicas

Vimos que uma função Booleana pode ser representada por uma equação ou expressada pela sua tabela verdade. Veremos nesta seção, que uma função Booleana também pode ser representada de forma gráfica, onde cada operador lógico é associado a um símbolo específico, permitindo um reconhecimento visual da operação de forma mais direta. Tais símbolos são conhecidos por **portas lógicas**.

Na realidade, mais do que símbolos de operadores lógicos ou as portas lógicas representam recursos físicos, isto é, circuitos eletrônicos capazes de realizar as operações lógicas. Na eletrônica que trabalha com somente dois níveis, a qual é denominada eletrônica digital, o nível lógico 0 normalmente está associado à ausência de tensão (0 volt) enquanto o nível lógico 1, à presença de tensão (a qual geralmente é 5 volts). Nesta disciplina, nos limitaremos ao mundo da álgebra Booleana, admitindo que as portas lógicas representam circuitos eletrônicos que, de alguma maneira, realizam as funções Booleanas. Então, ao conjunto de portas lógicas e respectivas conexões que simbolizam uma **equação Booleana**, chamaremos de **circuito lógico**.

3.1 Porta OU

O símbolo da **porta OU** pode ser visto na Figura 1. Como pode ser visto na figura as entradas são colocadas à esquerda da porta e a saída, à direita. Deve haver no mínimo duas entradas, mas há somente uma saída. O funcionamento da porta **OU** segue a definição da operação **OU**, dada na seção 3.1.

(a) (b)

Figura 1. Símbolo da porta lógica **OU** com 2 entradas (a) e com 3 entradas (b).

3.2 Porta E

O símbolo da **porta E** é mostrado na Figura 2. À esquerda estão dispostas as entradas (no mínimo duas, obviamente) e à direita, a saída (única). As linhas que conduzem as variáveis de entrada e saída podem ser interpretadas como fios que transportam os sinais elétricos associados às variáveis. O comportamento da porta **E** segue estritamente a definição (e tabela verdade) dadas na seção 3.2.

(a) (b)

Figura 2. Símbolo da porta lógica **E** com 2 entradas (a) e com 3 entradas (b).

3.3 Inversor (ou Porta Inversora, ou Negador)

A porta que simboliza a operação **complementação** é conhecida como **inversor** (ou porta inversora, ou negador). Como a operação complementação só pode ser realizada sobre uma variável por vez (ou sobre o resultado de uma sub expressão), o inversor só possui uma entrada e, obviamente, uma saída. Caso se queira complementar uma expressão, é necessário obter-se primeiramente o seu resultado, para só então aplicar a complementação. O símbolo do inversor é mostrado na 3.

Figura 3. Símbolo do **inversor** (também conhecido como negador ou porta inversora).

3.4 Exemplo de Circuito Lógico

Dada uma equação Booleana qualquer, é possível desenhar-se o circuito lógico que a implementa. O circuito lógico é composto das portas lógicas relacionadas às operações que são realizadas sobre as variáveis de entrada. Os resultados das operações são conduzidos por fios, os quais, no desenho, são representados por linhas simples.

Os passos a serem seguidos para se realizar o desenho do circuito lógico a partir de uma equação são praticamente os mesmos usados na avaliação da expressão. Tomemos como exemplo a equação $W = X + Y \cdot \overline{Z}$, avaliada na seção 3.6. Inicialmente, identificamos as variáveis independentes, que no caso são X, Y e Z. Para cada uma destas, traçamos uma linha (da esquerda para a direita), representando os fios que conduzem os valores. Feito isto, deve-se seguir desenhando as portas necessárias para representar cada uma das sub expressões, na mesma ordem tomada para a avaliação, ou seja:

1º parêntesis (dos mais internos para os mais externos);
2º operações E;
3º operações OU.

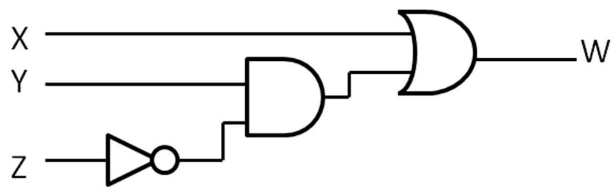


Figura 4. Circuito lógico para a equação $W = X + Y \cdot \overline{Z}$.

Exercícios propostos

1 Desenhe a forma de onda de saída para a porta OR da figura 2.1 abaixo

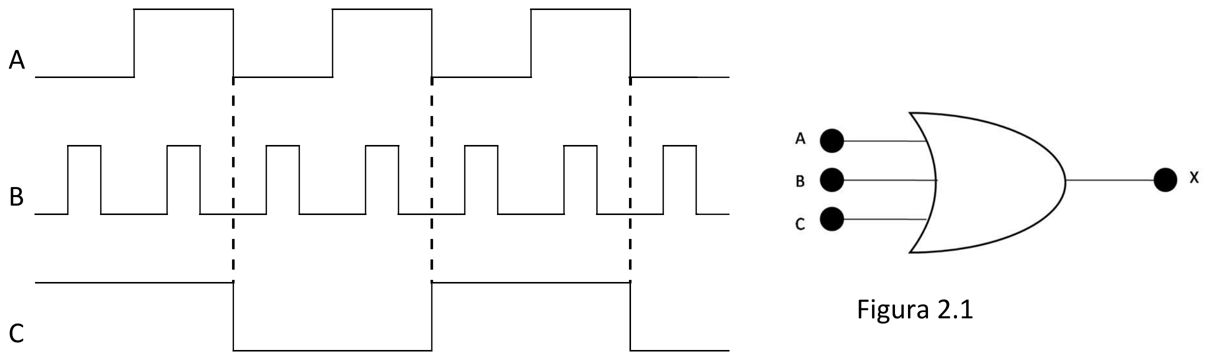


Figura 2.1

2 Suponha que a entrada A da figura 2.1 esteja ligada curto-circuitada com a linha de alimentação +5 V ou seja, A=1. Redesenhe a forma de onda da saída resultante.

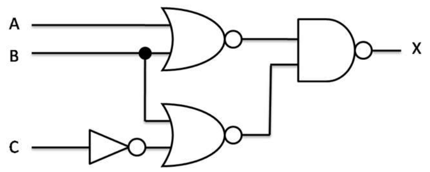
3 Troque a porta OR da Figura 2.1 por uma porta AND e desenhe a saída x para esta nova situação.

4 Para cada uma das expressões a seguir, desenhe o circuito lógico correspondente usando portas AND, OR e INVERSORES.

a) x = $\overline{AB(C + D)}$

b) z =$\overline{(A + B + \bar{C}D\bar{E})} + \bar{B}C\bar{D}$

5 Escreva a expressão lógica que representa o circuito abaixo e utilize-a para escrever a tabela verdade da função que descreve o circuito. Em seguida, aplique as formas de ondas da figura 2.2.



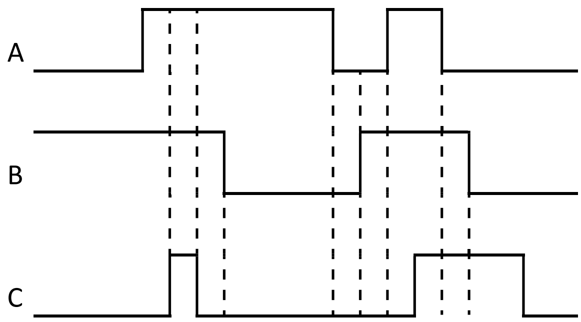
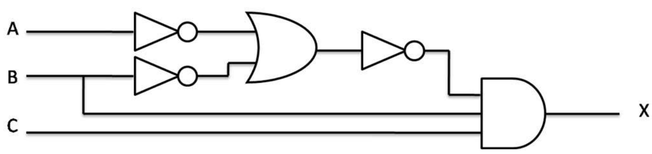


Figura 2.2

6 Escreva a expressão booleana para os circuitos abaixo e determine o valor de x para todas as condições possíveis de entrada, relacionando-os em uma tabela verdade.

a)



b)