Inferencia, Causalidad y Políticas Públicas ECO-60116

Week 05: Regresión discontinua II

Eduard F. Martinez Gonzalez, Ph.D.

Departamento de Economía, Universidad Icesi

September 26, 2025

RECAP: Regresión Discontinua (Intuición)

- En RD, usamos la "*arbitrariedad*" de ciertas reglas de asignación para estimar *efectos causales*.
- La *asignación a tratamiento* depende únicamente de una variable *continua* z_i observada que determina la *elegibilidad* a un tratamiento en función de un *umbral* de elegibilidad (conocido) z_0.

RECAP: Regresión Discontinua (Intuición)

- En RD, usamos la "*arbitrariedad*" de ciertas reglas de asignación para estimar *efectos causales*.
- La *asignación a tratamiento* depende únicamente de una variable *continua* z_i observada que determina la *elegibilidad* a un tratamiento en función de un *umbral* de elegibilidad (conocido) z_0.
- Supuestos básicos:
    1. No es posible *manipular* (perfectamente) la *regla de asignación*.
    2. Los resultados potenciales son continuos en la vecindad del *umbral de elegibilidad*:

$$\lim_{h \to 0} \mathbb{E}[Y_i^j | z_i = z_0 + \eta] = \lim_{\eta \to 0} \mathbb{E}[Y_i^j | z_i = z_0 - \eta] \quad \text{para } j \in \{1, 0\} \tag{1}$$

RECAP: Regresión Discontinua (Intuición)

- En RD, usamos la "*arbitrariedad*" de ciertas reglas de asignación para estimar *efectos causales*.
- La *asignación a tratamiento* depende únicamente de una variable *continua* z_i observada que determina la *elegibilidad* a un tratamiento en función de un *umbral* de elegibilidad (conocido) z_0.
- Supuestos básicos:
  1. No es posible *manipular* (perfectamente) la *regla de asignación*.
  2. Los resultados potenciales son continuos en la vecindad del *umbral de elegibilidad*:

$$\lim_{h \to 0} \mathbb{E}[Y_i^j | z_i = z_0 + \eta] = \lim_{\eta \to 0} \mathbb{E}[Y_i^j | z_i = z_0 - \eta] \quad \text{para } j \in \{1, 0\} \tag{1}$$

- En **regresión discontinua nítida**, hacemos un supuesto adicional:
  - Todos los elegibles reciben el tratamiento, y los no elegibles no reciben el tratamiento ("*perfect compliance*").

Roadmap

1. RECAP: Regresión Discontinua Nitida (RDN)
   - Especificación de $f()$
   - Elegir la vecindad de Z_0
2. Regresión Discontinua Borrosa (RDB)
3. Aplicación en R
   - Building Rural Entrepreneurial Capacities Programme: Trust and Opportunity

¿Por qué importa modelar $f(z)$?

Modelo de partida: $y_i = \beta_0 + f(z_i) + \tau D_i + \epsilon_i, \quad D_i = \mathbf{1}\{z_i \geq z_0\}$

Contraste ingenuo cerca del umbral (con $\eta > 0$ pequeño):

$$\Delta Y(\eta) \equiv E[y_i \mid z_0{+}\eta] - E[y_i \mid z_0{-}\eta] = \tau \; + \; \underbrace{f(z_0{+}\eta) - f(z_0{-}\eta)}_{\textit{sesgo por tendencia en z}}$$

¿Por qué importa modelar $f(z)$?

Modelo de partida: $y_i = \beta_0 + f(z_i) + \tau D_i + \epsilon_i, \quad D_i = \mathbf{1}\{z_i \geq z_0\}$

Contraste ingenuo cerca del umbral (con $\eta > 0$ pequeño):

$$\Delta Y(\eta) \equiv E[y_i \mid z_0{+}\eta] - E[y_i \mid z_0{-}\eta] = \tau \; + \; \underbrace{f(z_0{+}\eta) - f(z_0{-}\eta)}_{\textit{sesgo por tendencia en } z}$$

Supuesto clave de identificación: Si $E[y_i^0 \mid z]$ y $E[y_i^1 \mid z]$ son *continuas* en z_0, entonces $f(z)$ es continua en z_0 y

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \{f(z_0{+}\eta) - f(z_0{-}\eta)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \; = \; \lim_{z \downarrow z_0} E[Y \,|\, z] - \lim_{z \uparrow z_0} E[Y \,|\, z].$$

¿Por qué importa modelar $f(z)$?

Modelo de partida: $y_i = \beta_0 + f(z_i) + \tau D_i + \epsilon_i, \quad D_i = \mathbf{1}\{z_i \geq z_0\}$

Contraste ingenuo cerca del umbral (con $\eta > 0$ pequeño):

$$\Delta Y(\eta) \equiv E[y_i \mid z_0{+}\eta] - E[y_i \mid z_0{-}\eta] = \tau \; + \; \underbrace{f(z_0{+}\eta) - f(z_0{-}\eta)}_{\textit{sesgo por tendencia en z}}$$

Supuesto clave de identificación: Si $E[y_i^0 \mid z]$ y $E[y_i^1 \mid z]$ son *continuas* en z_0, entonces $f(z)$ es continua en z_0 y

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \{f(z_0{+}\eta) - f(z_0{-}\eta)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \; = \; \lim_{z \downarrow z_0} E[Y \mid z] - \lim_{z \uparrow z_0} E[Y \mid z].$$

Implicación empírica: Para "quitarse el sesgo de encima" hay que *capturar bien la tendencia suave $f(z)$ en la vecindad del corte*:

- Ajustes *locales* a ambos lados (p. ej., lineal local) en lugar de polinomios globales rígidos.
- Elección de vecindad (h) y forma funcional que hagan $f(z)$ "bien aproximada" justo alrededor de z_0.

¿Por qué importa modelar $f(z)$?

Modelo de partida: $y_i = \beta_0 + f(z_i) + \tau D_i + \epsilon_i, \quad D_i = \mathbf{1}\{z_i \geq z_0\}$

Contraste ingenuo cerca del umbral (con $\eta > 0$ pequeño):

$$\Delta Y(\eta) \equiv E[y_i \mid z_0+\eta] - E[y_i \mid z_0-\eta] = \tau \; + \; \underbrace{f(z_0+\eta) - f(z_0-\eta)}_{\textit{sesgo por tendencia en z}}$$

Supuesto clave de identificación: Si $E[y_i^0 \mid z]$ y $E[y_i^1 \mid z]$ son *continuas* en z_0, entonces $f(z)$ es continua en z_0 y

$$\lim_{\eta \downarrow 0}\{f(z_0+\eta) - f(z_0-\eta)\} = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau \; = \; \lim_{z \downarrow z_0} E[Y \mid z] - \lim_{z \uparrow z_0} E[Y \mid z].$$

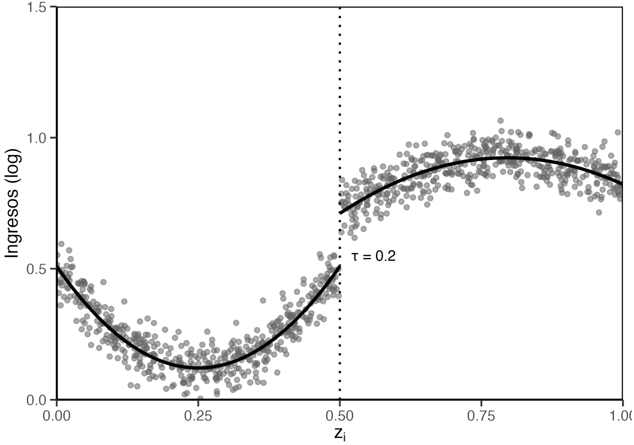
Implicación empírica: Para "quitarse el sesgo de encima" hay que *capturar bien la tendencia suave $f(z)$ en la vecindad del corte*:

- Ajustes *locales* a ambos lados (p. ej., lineal local) en lugar de polinomios globales rígidos.
- Elección de vecindad (h) y forma funcional que hagan $f(z)$ "bien aproximada" justo alrededor de z_0.

Takeaway: La RD identifica el **salto causal** sólo si el **componente suave** $f(z)$ está bien especificado cerca de z_0; si no, la diferencia absorbe tendencia y queda sesgada.

Cuando $f(z)$ está bien especificada (polinomio por lado)

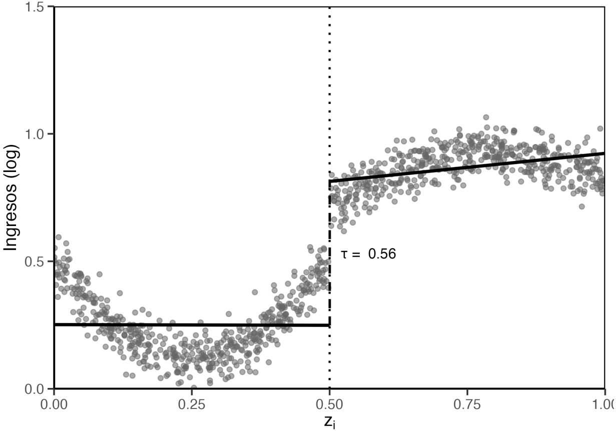
Ecuación: $log(Ingresos) = \beta_0 + f(z_i) + \tau D_i + \epsilon_i$



El estimador MCO de τ es un estimador del salto en la variable de resultado que se genera en z_0.

Cuando $f(z)$ está mal especificada

Ecuación: $log(Ingresos) = \beta_0 + \beta_1 z_i + \tau D_i + \epsilon_i$



- Si $f(z)$ se modela mal, el MCO **atribuye a** τ parte de la *curvatura* de $E[Y \mid z]$ (sesgo de forma funcional).
- La "discontinuidad" estimada **no es el salto causal** en z_0, sino un artefacto del ajuste global.

Polinomios globales

Idea: aproximar la tendencia $f(z)$ en *todo el soporte* con un polinomio de grado P.

$$\underbrace{f(z_i)}_{\text{tendencia}} = \sum_{p=1}^{P} \beta_p \, z_i^{\,p}$$

Entonces,

$$y_i = \beta_0 + \sum_{p=1}^{P} \beta_p z_i^{\,p} + \tau D_i + \varepsilon_i$$

- **Pros:** fácil de estimar (MCO), más flexibilidad al subir P.
- **Contras:** sensibilidad a P, oscilaciones y *peso excesivo* de datos lejanos al umbral $\Rightarrow$ sesgo.
- **Recomendación:** como máximo grados **2–3** y, mejor aún, **polinomios locales por lado** con ventana (h) adecuada.

Referencia: Gelman & Imbens (2019), "Why High-Order Polynomials Should Not Be Used in RD".

Roadmap

1. RECAP: Regresión Discontinua Nitida (RDN)
   - Especificación de $f()$
   - Elegir la vecindad de Z_0
2. Regresión Discontinua Borrosa (RDB)
3. Aplicación en R
   - Building Rural Entrepreneurial Capacities Programme: Trust and Opportunity

Estimación en la vecindad del umbral z_0

- Usamos sólo $|z_i - z_0| \leq h$: cerca del corte, $f(z)$ es suave.
- La comparación izquierda–derecha en esa vecindad aproxima el *salto causal*.
- Justo bajo el umbral $\Rightarrow$ buen contrafactual para justo sobre el umbral.

$$\hat{\tau}(h) = \overline{Y}_R(h) - \overline{Y}_L(h), \quad z \in [z_0 - h,\, z_0 + h]$$

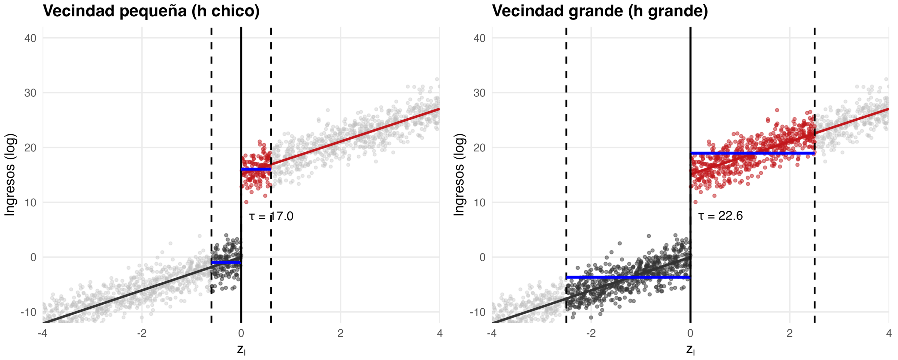
El problema es que a medida que h se acerca a cero, vamos perdiendo observaciones $\to$ **menor precisión** del estimador.

Estimación para un ancho de banda h:

$$\hat{\tau}(h) = \underbrace{\left(\frac{1}{n_R(h)} \sum_{i:\, 0 \leq z_i - z_0 \leq h} Y_i \right)}_{\bar{Y}_R(h)} - \underbrace{\left(\frac{1}{n_L(h)} \sum_{i:\, -h \leq z_i - z_0 < 0} Y_i \right)}_{\bar{Y}_L(h)}$$

donde usamos sólo $z_i \in [z_0 - h,\, z_0 + h]$.

Sensibilidad del estimador a diferentes h



Nota: h controla el compromiso **sesgo–varianza**: h pequeño $\rightarrow$ menos sesgo y más varianza; h grande $\rightarrow$ más sesgo y menos varianza. (Puede ponderarse por distancia con kernels.)

Regresión local: combinar vecindad + forma funcional

En la práctica, usamos una combinación de los dos métodos: restringimos las observaciones a una vecindad de z_0 y usamos alguna aproximación de $f()$.

Tres pasos para la implementación:

1. Seleccionar el orden del polinomio (p) y una función de pesos o función de Kernel $K(.)$
2. Seleccionar un ancho de banda (h).
3. Estimar los parámetros minimizando el cuadrado de los errores ponderados y reportar $\hat{\tau} = \hat{\alpha}^{+} - \hat{\alpha}^{-}$

Para seleccionar el ancho de banda se pueden usar métodos alternativos para la inferencia estadística (Calonico et al., 2014).

Roadmap

1. RECAP: Regresión Discontinua Nitida (RDN)
   - Especificación de $f()$
   - Elegir la vecindad de Z_0
2. Regresión Discontinua Borrosa (RDB)
3. Aplicación en R
   - Building Rural Entrepreneurial Capacities Programme: Trust and Opportunity

Regresión Discontinua Borrosa (RDB)

- En **regresión discontinua borrosa** relajamos el supuesto de "*perfect compliance*": hay una relación probabilística entre participación y z_i.
- La **probabilidad** de estar en el grupo de tratamiento o de control cambia de forma **discontinua** en el umbral. Para un $\eta > 0$,

$$\lim_{\eta \to 0} \Pr[D_i = 1 | z_i = z_0 - \eta] \neq \lim_{\eta \to 0} \Pr[D_i = 1 | z_i = z_0 + \eta]$$

- De forma general:

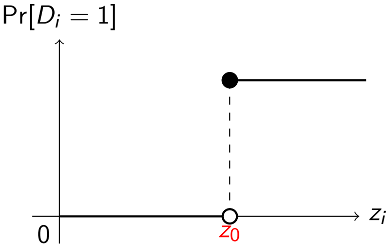
$$\Pr[D_i = 1 | z_i] = \begin{cases} g_1(z_i) & \text{si } z_i \geq z_0 \\ g_0(z_i) & \text{si } z_i < z_0 \end{cases}$$

  donde $g_1(z_0) \neq g_0(z_0)$.

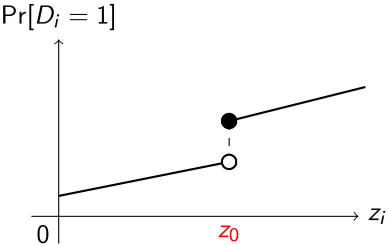
- Podemos ser agnósticos sobre las formas funcionales de g_0 y g_1, pero la probabilidad debe "saltar" en el umbral z_0.

Discontinuidad de la probabilidad de ser tratado

La **asignación al tratamiento** ya no es determinística: otros factores (observados y no observados) pueden afectar la probabilidad de estar en el grupo de tratamiento o de control.



(a) RDN



(b) RDB

Relajando los supuestos de RDN

La probabilidad de ser tratado “salta” exactamente en el punto en el que la variable dummy z_i^* pasa de cero a uno.

- z_i^* está definida por un umbral arbitrario y puede ser usada como una **variable instrumental, condicional en** z_i: afecta la probabilidad de ser tratado, pero es independiente de los resultados potenciales.

- Hacemos un supuesto de **monotonicidad local**: el efecto del instrumento (estar a un lado u otro de umbral) sobre la probabilidad de ser tratado va en la misma dirección para todas las unidades.

- Es local en la medida que el instrumento sólo se “activa” en la vecindad de z_0.

Identificación (I)

- Ecuación estructural:

$$y_i = \beta_0 + f(z_i) + \tau D_i + \epsilon_i \tag{1}$$

- Primera etapa:

$$D_i = \gamma_0 + g(z_i) + \pi z_i^* + \eta_i \tag{2}$$

donde

  - D_i: tratamiento **recibido** (endógeno).
  - z_i^*: indicador de **elegibilidad** (instrumento exógeno).
  - $f(\cdot)$ y $g(\cdot)$: funciones suaves de z_i (misma base por lado y misma vecindad).

- La magnitud del salto en la probabilidad en el umbral de elegibilidad, capturado por π, nos indica la "fuerza" de la primera etapa.
- Si la forma funcional de $g(z_i)$ y $f(z_i)$ coinciden, tenemos un estimador de MC2E.

Identificación (II)

- Suponga que ambas siguen un polinomio del mismo grado

$$f(z_i) = \sum_{p=1}^{P} \beta_p z_i^p, \qquad g(z_i) = \sum_{p=1}^{P} \gamma_p z_i^p. \tag{3}$$

- Podemos reemplazar D_i en la Ecuación (1) usando (2) y escribir la forma reducida:

$$y_i = \alpha_0 + h(z_i) + \rho z_i^* + \zeta_i, \tag{4}$$

donde

  - $\alpha_0 \equiv \beta_0 + \gamma_0 \tau$
  - $h(z_i) \equiv \sum_{p=1}^{P} (\beta_p + \gamma_p \tau) z_i^p$
  - $\zeta_i \equiv \epsilon_i + \eta_i \tau$
  - $\rho \equiv \tau \pi$.

- En ese caso, el efecto causal también se puede recuperar via:

$$\tau = \frac{\rho}{\pi} \tag{5}$$

Interpretación del Efecto

- El tratamiento no afecta a todos los individuos ("*imperfect compliance*"), así que tenemos que **ajustar** la magnitud del salto en y_i por el cambio en la probabilidad de ser tratado. Similar al *estimador de Wald*.
- Sin **ajustar**, el estimador tiene una interpretación *ITT*: efecto de ser *elegible* sobre y_i.
- El efecto estimado por RDB es un *LATE*: efecto sobre aquellos individuos cuya condición de tratamiento puede ser afectada por z_i^*.
- **No obstante:**
  - La identificación sigue dependiendo de la capacidad de *separar* la discontinuidad que se genera en y_i cuando z_i^* pasa de cero a uno, de las funciones continuas $f(z_i)$ y $g(z_i)$ $\implies$ es importante especificar bien la forma funcional que usamos.
  - Igual que RDN, a medida que η se acerca a cero, vamos perdiendo observaciones y el estimador se hace más impreciso.
  - Dado el supuesto de continuidad en la vecindad de z_0, aplican los mismos métodos para verificar supuestos que en RDN.

Roadmap

1. RECAP: Regresión Discontinua Nitida (RDN)
   - Especificación de $f()$
   - Elegir la vecindad de Z_0
2. Regresión Discontinua Borrosa (RDB)
3. Aplicación en R
   - Building Rural Entrepreneurial Capacities Programme: Trust and Opportunity

Laajaj et al. (2023): RD difusa en un programa rural

- **Contexto:** programa de desarrollo rural con cofinanciación y asistencia técnica para planes de negocio de organizaciones, desplegado en 203 municipios. *Mecanismo de selección por ranking y cupos municipales*.
- **Regla de clase (simplificación a individuos):**
  - Cada municipio ordena a las personas por *puntaje* (idoneidad propuesta, vulnerabilidad, etc.).
  - Cupo fijo: **subsidios** de **COP 50 millones** a las propuestas con un puntaje superior a 75 puntos.
- **Diseño (FRD):** $\Pr(D{=}1 \mid z)$ salta en c_m pero < 1 (*take-up* imperfecto).
- **Variables clave:** $Z^*_{im} = \mathbf{1}\{z_{im} \geq c_m\}$ (elegible, instrumento) ; D_{im} (recibe subsidio) ; Y_{im} (resultado).
- **Lectura de resultados:** *LATE* en el umbral para *compliers* municipales (quienes toman el subsidio cuando Z^* cambia de 0 a 1).

Replication

- **Script R (descargable):** pipeline paso a paso para clase (`rd_fuzzy_class.R`). Descargar script