Inferencia, Causalidad y Políticas Públicas ECO-60116

Week 01: Fundamentos de la Inferencia Causal

Eduard F. Martinez Gonzalez, Ph.D.

Departamento de Economía, Universidad Icesi

August 29, 2025

Acerca de este curso

1. **Al finalizar el curso podrás:**
    - Comprender y aplicar el marco conceptual de la inferencia causal.
    - Usar metodologías: OLS, IV, RCT, DiD, RD, Matching.
    - Diseñar e implementar evaluaciones de impacto con datos reales.
2. **Módulos principales:**
    - Fundamentos de la Inferencia Causal
    - Diseños experimentales y cuasi-experimentales
    - Métodos avanzados y robustez
    - Integración y aplicación
3. **Metodología:**
    - Exposición teórica del profesor.
    - Ejemplos prácticos con R y artículos aplicados.
    - Presentación estudiantil de artículos.
4. **Evaluación:**
    - Presentación de un artículo: 30%.
    - Taller aplicado: 20%.
    - Proyecto final: 50%.

Presentación de un artículo (30%)

- Al inicio de cada sesión, un estudiante presentará un **artículo empírico** vinculado al tema de la clase anterior.
- Duración aproximada: **15 minutos**.
- La presentación debe incluir al menos 4 diapositivas, cubriendo como mínimo:
  1. Pregunta de investigación.
  2. Datos utilizados.
  3. Metodología y estrategia de identificación. (Puede necesitar más de una diapositiva)
  4. Resultados principales.
- El artículo debe seleccionarse de:
  - La bibliografía recomendada, o un paper publicado en uno de los Top 5 journals de economía.
  - O un paper publicado en un journal dentro del Top 50 de Financial Times.
- Durante la presentación, profesor y estudiantes pueden intervenir con preguntas para profundizar en el entendimiento.

Proyecto final (50%) — Objetivo y alcance

- Cada estudiante desarrollará un proyecto con una **pregunta de investigación** relevante y el **uso obligatorio de un método de inferencia causal** (p. ej., RCT, IV, RD, DiD, Matching).
- **Sin limitaciones de datos reales:** el estudiante deberá **construir en R** una **base de datos sintética**, ideal para su pregunta, que:
  - incluya las variables necesarias,
  - sea aleatorizable cuando aplique,
  - esté organizada para implementar la metodología elegida.
- Si elige **RCT**, deberá **diseñar el experimento**: unidad de aleatorización, esquema de asignación, tamaño muestral, posibles problemas (no cumplimiento, atrición) y variables de resultado.
- Para **cualquier metodología**, debe explicitar **supuestos de identificación** y cómo los hará plausibles/validará con su base sintética.

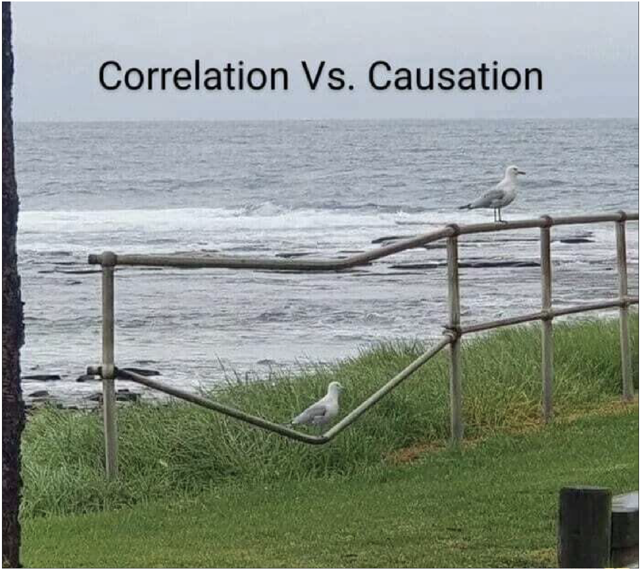
Proyecto final (50%) — Estructura mínima del trabajo

- **Motivación:** relevancia de la pregunta y contexto de política pública.
- **Datos (sección de datos):** cómo se generó la base sintética, definición de variables, tamaño muestral, caracterización (tablas/gráficos), y si aplica, balance inicial.
- **Estrategia de identificación:** diseño/estimador, ecuaciones a estimar, supuestos clave y amenazas.
- **Validación de supuestos:** pruebas y diagnósticos (p. ej., balance, placebos, sensibilidad, verificaciones gráficas).
- **Resultados y conclusiones:** incluir **al menos una tabla con una regresión**; presentar estimaciones principales y una breve discusión de robustez e implicaciones.

Proyecto final (50%) — Entregables y dinámica

- **Documento PDF** (máximo **10** páginas) con el trabajo completo.
- **Paquete de replicación** (`.zip`) con:
  - código para **generación** y **procesamiento** de los datos sintéticos (R),
  - organización de carpetas y `README` con instrucciones de ejecución.
- **Presentación oral** para sustentar en la **última clase**.
- **Interacción en clase:** durante la defensa habrá espacio para preguntas y discusión.
- **Logística:** el detalle paso a paso del proyecto será cargado la próxima semana en la plataforma **Intu**.

El riesgo de confundir correlación con causalidad



¿Por qué estudiar inferencia causal?

Las políticas públicas buscan mejorar el bienestar de la población. En un mundo de recursos limitados, necesitamos saber:

- ¿Qué programas funcionan realmente?
- ¿Cuáles son costo-efectivos?
- ¿Qué intervenciones pueden generar efectos no deseados?
- ¿Qué hubiera pasado si la política no se hubiera implementado?

¿Por qué estudiar inferencia causal?

Las políticas públicas buscan mejorar el bienestar de la población. En un mundo de recursos limitados, necesitamos saber:

- ¿Qué programas funcionan realmente?
- ¿Cuáles son costo-efectivos?
- ¿Qué intervenciones pueden generar efectos no deseados?
- ¿Qué hubiera pasado si la política no se hubiera implementado?

Si atribuimos efectos sin causalidad, podríamos:

- **Implementar** políticas costosas que no funcionan.
- O **descartar** programas efectivos porque la evidencia estaba mal interpretada.
- Terminar con **malas asignaciones** de recursos públicos.

¿Por qué estudiar inferencia causal?

Las políticas públicas buscan mejorar el bienestar de la población. En un mundo de recursos limitados, necesitamos saber:

- ¿Qué programas funcionan realmente?
- ¿Cuáles son costo-efectivos?
- ¿Qué intervenciones pueden generar efectos no deseados?
- ¿Qué hubiera pasado si la política no se hubiera implementado?

Si atribuimos efectos sin causalidad, podríamos:

- **Implementar** políticas costosas que no funcionan.
- O **descartar** programas efectivos porque la evidencia estaba mal interpretada.
- Terminar con **malas asignaciones** de recursos públicos.

Algunas preguntas de investigación que podriamos resolver usando inferencia causal:

- ¿El **PNIS** redujo efectivamente la participación en economías ilegales?
- ¿**Familias en Acción** incrementa la asistencia escolar y mejora la nutrición infantil?
- ¿**Jóvenes en Acción** facilita la inserción laboral de sus beneficiarios?

Pregunta de investigación

Se implementa un programa de becas de sostenimiento dirigido a estudiantes universitarios de bajos recursos en universidades públicas.

Pregunta de investigación

Se implementa un programa de becas de sostenimiento dirigido a estudiantes universitarios de bajos recursos en universidades públicas.

Los beneficiarios son seleccionados por orden de inscripción: solo los primeros N estudiantes inscritos reciben el apoyo financiero.

Pregunta de investigación

Se implementa un programa de becas de sostenimiento dirigido a estudiantes universitarios de bajos recursos en universidades públicas.

Los beneficiarios son seleccionados por orden de inscripción: solo los primeros N estudiantes inscritos reciben el apoyo financiero.

Nuestro objetivo es estimar el efecto de este programa sobre los logros educativos, medidos a través del puntaje de las pruebas Saber Pro de los estudiantes (Y).

Notación básica

Unidades y tratamiento:

$$i = 1, \ldots, n, \qquad D_i \in \{0, 1\}$$

donde $D_i = 1$ si el estudiante recibe la beca y $D_i = 0$ en caso contrario.

Resultados potenciales:

$$Y_i(1),\ Y_i(0) \quad \text{(bien definidos)}$$

$Y_i(1)$ y $Y_i(0)$, puntaje Saber Pro con y sin beca, respectivamente.

Resultado observado:

$$Y_i \;=\; D_i\, Y_i(1) \;+\; (1 - D_i)\, Y_i(0)$$

Efecto individual (inobservable):

$$\tau_i \;=\; Y_i(1) - Y_i(0)$$

Problema fundamental

Para cada i observamos *solo uno* de $\{Y_i(1),\ Y_i(0)\}$.

¿Qué mide realmente la diferencia en medias?

Estimador naive (diferencia de medias): diferencia promedio del puntaje Saber Pro entre becados y no becados:

$$\hat{\beta}_{\text{naive}} \;=\; \mathbb{E}[Y \mid D=1] \;-\; \mathbb{E}[Y \mid D=0]$$

¿Qué mide realmente la diferencia en medias?

Estimador naive (diferencia de medias): diferencia promedio del puntaje Saber Pro entre becados y no becados:

$$\hat{\beta}_{\text{naive}} \;=\; \mathbb{E}[Y \mid D=1] \;-\; \mathbb{E}[Y \mid D=0]$$

Descomposición:

$$\underbrace{\mathbb{E}[Y \mid D=1]-\mathbb{E}[Y \mid D=0]}_{\text{Diferencia observada}}=\underbrace{\mathbb{E}[Y(1)-Y(0)]}_{\text{Efecto causal (ATE)}}+\underbrace{\Big(\mathbb{E}[Y(0) \mid D=1]-\mathbb{E}[Y(0) \mid D=0]\Big)}_{\text{Sesgo de selección}}$$

Interpretación

- **Efecto causal (ATE):** cambio promedio en el puntaje que produciría otorgar la beca.
- **Sesgo de selección:** diferencias *ex ante* entre becados y no becados (p. ej., mayor motivación, mejor preparación o mejor acceso a información entre quienes se inscriben primero).

Implicaciones: Sesgo de selección positivo

Ejemplos de mecanismos: Quienes se inscriben primero tienen mayor motivación/autoeficacia, o pueden tener mejor preparación previa (tutorías, capital académico). Es decir:

$$\mathbb{E}[Y(0) \mid D = 1] > \mathbb{E}[Y(0) \mid D = 0]$$

Entonces el término de selección es positivo:

$$\delta \;\equiv\; (\mathbb{E}[Y(0) \mid D = 1] - \mathbb{E}[Y(0) \mid D = 0]) > 0$$

Por tanto el $\hat{\beta}_{naive}$ atribuye al programa diferencias *ex ante* (motivación, preparación, acceso a información) que ya favorecían a los tratados aun sin beca.

$$\hat{\beta}_{naive} = ATE + \delta$$

Implicaciones: Sesgo de selección negativo

Ejemplos de mecanismos: se inscriben primero estudiantes con mayor necesidad financiera (madres/padres jóvenes o cuidadores) y menor capital académico.
Implica que, *ex ante*, los tratados tenían peores resultados academicos que los no tratados:

$$\mathbb{E}[Y(0) \mid D = 1] \; < \; \mathbb{E}[Y(0) \mid D = 0]$$

Entonces el término de selección es negativo:

$$\delta \; \equiv \; (\mathbb{E}[Y(0) \mid D = 1] - \mathbb{E}[Y(0) \mid D = 0]) < 0$$

Por tanto el $\hat{\beta}_{naive}$ subestima el efecto causal

$$\hat{\beta}_{naive} = ATE + \delta$$

Si $|\delta| > |\mathrm{ATE}|$, la diferencia observada puede incluso *invertir de signo* y sugerir (erróneamente) un efecto negativo.

¿Qué es una regresión?

- Hasta ahora no hemos especificado *cómo* estimar la diferencia de medias del Saber Pro entre becados y no becados.

¿Qué es una regresión?

- Hasta ahora no hemos especificado *cómo* estimar la diferencia de medias del Saber Pro entre becados y no becados.
- La forma más simple es una regresión lineal con un indicador de beca.

¿Qué es una regresión?

- Hasta ahora no hemos especificado *cómo* estimar la diferencia de medias del Saber Pro entre becados y no becados.
- La forma más simple es una regresión lineal con un indicador de beca.
- Una **regresión** consiste en explicar una variable en función de otra(s) variables a través de una función (típicamente lineal).

¿Qué es una regresión?

- Hasta ahora no hemos especificado *cómo* estimar la diferencia de medias del Saber Pro entre becados y no becados.
- La forma más simple es una regresión lineal con un indicador de beca.
- Una **regresión** consiste en explicar una variable en función de otra(s) variables a través de una función (típicamente lineal).

$$y_i = \alpha + \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \varepsilon_i$$

- Y_{1i}: variable de resultado (puntaje Saber Pro).
- X_{1i}: variable de interés (beca de sostenimiento).
- X_{2i}: variable de control (GPA previo, edad, carrera, etc.).
- ε_i: término de error (toda la variación de y_i no explicada por X_{1i} y X_{2i}).

Interpretación de β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).

Interpretación de β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).
- **En introducción a la econometría, se suele leer:**

Interpretación de β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).
- **En introducción a la econometría, se suele leer:**
  - "β_1 es el **efecto** de un cambio de X_{1i} sobre y_i"

Interpretación de β_1

$$\beta_1 \;=\; \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).
- **En introducción a la econometría, se suele leer:**
  - "β_1 es el **efecto** de un cambio de X_{1i} sobre y_i"
  - "Un aumento de una unidad en X_1 está **asociado** a un aumento en y_i de β_1 unidades"

Interpretación de β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).
- **En introducción a la econometría, se suele leer:**
  - "β_1 es el **efecto** de un cambio de X_{1i} sobre y_i"
  - "Un aumento de una unidad en X_1 está **asociado** a un aumento en y_i de β_1 unidades"
- **¿Ven alguna diferencia entre estas dos interpretaciones?**

Interpretación de β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).
- **En introducción a la econometría, se suele leer:**
  - "β_1 es el **efecto** de un cambio de X_{1i} sobre y_i"
  - "Un aumento de una unidad en X_1 está **asociado** a un aumento en y_i de β_1 unidades"
- **¿Ven alguna diferencia entre estas dos interpretaciones?**
  - "Efecto" sugiere **causalidad**.
  - "Asociado" describe **correlación** (relación estadística) sin afirmar causalidad.

Interpretación de β_1

$$\beta_1 = \frac{\partial \mathbb{E}[Y \mid X_1, X_2]}{\partial X_1}$$

- Si X_{1i} es recibir la beca (binaria), β_1 es una *diferencia condicional de medias* entre estudiantes comparables en X_{2i} (GPA previo, carrera, cohorte, etc.).
- **En introducción a la econometría, se suele leer:**
  - "β_1 es el **efecto** de un cambio de X_{1i} sobre y_i"
  - "Un aumento de una unidad en X_1 está **asociado** a un aumento en y_i de β_1 unidades"
- **¿Ven alguna diferencia entre estas dos interpretaciones?**
  - "Efecto" sugiere **causalidad**.
  - "Asociado" describe **correlación** (relación estadística) sin afirmar causalidad.
- **Clave:** misma ecuación, *dos lecturas distintas*. La causalidad depende del **diseño** y los **supuestos**, no solo de estimar una recta.

Interpretación *predictiva* de una regresión

Idea central: la lectura predictiva es **descriptiva**: no afirma causalidad; resume **correlaciones (condicionales)** presentes en los datos para pronosticar Y.

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots$$

- Optimiza **error de predicción** (p. ej., MSE/RMSE), no un parámetro causal.

Interpretación *predictiva* de una regresión

Idea central: la lectura predictiva es **descriptiva**: no afirma causalidad; resume **correlaciones (condicionales)** presentes en los datos para pronosticar Y.

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots$$

- Optimiza **error de predicción** (p. ej., MSE/RMSE), no un parámetro causal.
- Buena predicción $\Rightarrow$ capta patrones útiles aunque provengan de variables omitidas, simultaneidad o pura asociación.

Interpretación *predictiva* de una regresión

Idea central: la lectura predictiva es **descriptiva**: no afirma causalidad; resume **correlaciones (condicionales)** presentes en los datos para pronosticar Y.

$$\hat{Y}_i = \hat{\alpha} + \hat{\beta}_1 X_{1i} + \hat{\beta}_2 X_{2i} + \cdots$$

- Optimiza **error de predicción** (p. ej., MSE/RMSE), no un parámetro causal.
- Buena predicción $\Rightarrow$ capta patrones útiles aunque provengan de variables omitidas, simultaneidad o pura asociación.

¿Cuándo es útil predecir?

- Clasificar hogares por probabilidad de **pobreza** usando variables simples (techo, material de la vivienda, etc.).
- Anticipar **lluvia** a partir de nubosidad, temperatura, humedad, etc.
- *Ejemplo descriptivo (Colombia):* correlación ≈ 0.72 entre **educación de padres** y **educación de hijos**; ≈ 0.83 en **hogares pobres**.

Mensaje: la regresión predictiva "no toma partido" por mecanismos; su meta es acertar pronósticos, no identificar efectos.

Interpretación *causal* de una regresión

Más ambiciosa (y arriesgada): intenta decir *cómo funciona el mundo*, no sólo describir patrones.

Ejemplo motivador:

- "Los beneficiarios de la beca obtienen un puntaje Saber Pro **20% mayor** que los no beneficiarios." *(descriptivo/asociativo)*
- "*Otorgar* la beca **aumenta** el puntaje Saber Pro del estudiante en **20%**." *(causal)*

Interpretación *causal* de una regresión

Más ambiciosa (y arriesgada): intenta decir *cómo funciona el mundo*, no sólo describir patrones.

Ejemplo motivador:

- "Los beneficiarios de la beca obtienen un puntaje Saber Pro **20% mayor** que los no beneficiarios." *(descriptivo/asociativo)*
- "*Otorgar* la beca **aumenta** el puntaje Saber Pro del estudiante en **20%**." *(causal)*

¿Qué necesitamos para leer β_1 como efecto causal?

- Una fuente de variación exogena y supuestos que hagan creíble la interpretación causal.

Interpretación *causal* de una regresión

Más ambiciosa (y arriesgada): intenta decir *cómo funciona el mundo*, no sólo describir patrones.

Ejemplo motivador:

- "Los beneficiarios de la beca obtienen un puntaje Saber Pro **20% mayor** que los no beneficiarios." *(descriptivo/asociativo)*
- "*Otorgar* la beca **aumenta** el puntaje Saber Pro del estudiante en **20%**." *(causal)*

¿Qué necesitamos para leer β_1 como efecto causal?

- Una fuente de variación exogena y supuestos que hagan creíble la interpretación causal.

¿Qué es una variable exógena?

- Un regresor cuya variación es **independiente** de ε_i (*la asignación de la beca no está correlacionada con inobservables que afectan simultáneamente a Y_i*). Es decir, que $(\mathbb{E}[Y(0) \mid D = 1] - \mathbb{E}[Y(0) \mid D = 0]) = 0$
- Por ejemplo, si los cupos se asignan por sorteo entre las personas inscritas, en lugar de por orden de llegada.

El Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Hasta ahora no hemos dicho *cómo* estimar los parámetros β de la regresión.

El Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Hasta ahora no hemos dicho *cómo* estimar los parámetros β de la regresión.

Modelo lineal:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

Dimensiones:

$$\mathbf{X} : n \times k, \quad \mathbf{y} : n \times 1, \quad \hat{\beta} : k \times 1$$

El Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Hasta ahora no hemos dicho *cómo* estimar los parámetros β de la regresión.

Modelo lineal:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

Dimensiones:

$$\mathbf{X} : n \times k, \quad \mathbf{y} : n \times 1, \quad \hat{\beta} : k \times 1$$

Objetivo: Minimizar la suma de los residuos al cuadrado:

$$\min_{\beta} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

El Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Hasta ahora no hemos dicho *cómo* estimar los parámetros β de la regresión.

Modelo lineal:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

Dimensiones:

$$\mathbf{X} : n \times k, \quad \mathbf{y} : n \times 1, \quad \hat{\beta} : k \times 1$$

Objetivo: Minimizar la suma de los residuos al cuadrado:

$$\min_{\beta} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

Solución analítica:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

El Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Hasta ahora no hemos dicho *cómo* estimar los parámetros β de la regresión.

Modelo lineal:

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$$

Dimensiones:

$$\mathbf{X} : n \times k, \quad \mathbf{y} : n \times 1, \quad \hat{\beta} : k \times 1$$

Objetivo: Minimizar la suma de los residuos al cuadrado:

$$\min_{\beta} (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

Solución analítica:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Interpretación

$\hat{\beta}$ es el vector de coeficientes que mejor ajusta $\mathbf{y}$ en el sentido de mínimos cuadrados, siempre que $\mathbf{X}'\mathbf{X}$ sea invertible.

Derivación del Estimador OLS

Problema de optimización: encontrar los coeficientes β que minimizan la suma de los residuos al cuadrado:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\beta)^2 = \varepsilon'\varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

Derivación del Estimador OLS

Problema de optimización: encontrar los coeficientes β que minimizan la suma de los residuos al cuadrado:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\beta)^2 = \varepsilon'\varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

1. Expandimos el producto cuadrático:

$$S(\beta) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \beta'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\beta$$

Derivación del Estimador OLS

Problema de optimización: encontrar los coeficientes β que minimizan la suma de los residuos al cuadrado:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\beta)^2 = \varepsilon'\varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

1. **Expandimos el producto cuadrático:**

$$S(\beta) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \beta'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\beta$$

2. **Derivamos con respecto a β:**

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta$$

Derivación del Estimador OLS

Problema de optimización: encontrar los coeficientes β que minimizan la suma de los residuos al cuadrado:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\beta)^2 = \varepsilon'\varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

1. Expandimos el producto cuadrático:

$$S(\beta) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \beta'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\beta$$

2. Derivamos con respecto a β:

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta$$

3. Igualamos a cero (condición de primer orden):

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Derivación del Estimador OLS

Problema de optimización: encontrar los coeficientes β que minimizan la suma de los residuos al cuadrado:

$$S(\beta) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i'\beta)^2 = \varepsilon'\varepsilon = (\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)'(\mathbf{y} - \mathbf{X}\beta)$$

1. **Expandimos el producto cuadrático:**

$$S(\beta) = \mathbf{y}'\mathbf{y} - 2\beta'\mathbf{X}'\mathbf{y} + \beta'(\mathbf{X}'\mathbf{X})\beta$$

2. **Derivamos con respecto a β:**

$$\frac{\partial S(\beta)}{\partial \beta} = -2\mathbf{X}'\mathbf{y} + 2\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta$$

3. **Igualamos a cero (condición de primer orden):**

$$\mathbf{X}'\mathbf{X}\beta = \mathbf{X}'\mathbf{y}$$

4. **Solución (ecuaciones normales):**

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Insesgadez del Estimador OLS

¿Bajo que supuestos podemos asumir que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β?

Insesgadez del Estimador OLS

¿Bajo que supuestos podemos asumir que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β?

- Linealidad: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$
- Exogeneidad: $\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$
- No multicolinealidad perfecta: $\text{rank}(\mathbf{X}) = k \Rightarrow \mathbf{X}'\mathbf{X}$ invertible

Insesgadez del Estimador OLS

¿Bajo que supuestos podemos asumir que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β?

- Linealidad: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$
- Exogeneidad: $\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$
- No multicolinealidad perfecta: $\text{rank}(\mathbf{X}) = k \Rightarrow \mathbf{X}'\mathbf{X}$ invertible

Sabemos que:

- $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \qquad (1)$
- $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \qquad (2)$

Insesgadez del Estimador OLS

¿Bajo que supuestos podemos asumir que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β?

- Linealidad: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$
- Exogeneidad: $\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$
- No multicolinealidad perfecta: $\text{rank}(\mathbf{X}) = k \Rightarrow \mathbf{X}'\mathbf{X}$ invertible

Sabemos que:

- $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \qquad (1)$
- $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \qquad (2)$

Sustituyendo (1) **en** (2) **tenemos:**

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon$$

Insesgadez del Estimador OLS

¿Bajo que supuestos podemos asumir que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β?

- Linealidad: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$
- Exogeneidad: $\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$
- No multicolinealidad perfecta: $\text{rank}(\mathbf{X}) = k \;\Rightarrow\; \mathbf{X}'\mathbf{X}$ invertible

Sabemos que:

- $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \qquad (1)$
- $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \qquad (2)$

Sustituyendo (1) **en** (2) **tenemos:**

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon$$

Aplicando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}]$$

Insesgadez del Estimador OLS

¿Bajo que supuestos podemos asumir que $\hat{\beta}$ es un estimador insesgado de β?

- Linealidad: $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon$
- Exogeneidad: $\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}] = \mathbf{0}$
- No multicolinealidad perfecta: $\text{rank}(\mathbf{X}) = k \Rightarrow \mathbf{X}'\mathbf{X}$ invertible

Sabemos que:

- $\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \varepsilon \qquad (1)$
- $\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y} \qquad (2)$

Sustituyendo (1) **en** (2) **tenemos:**

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\varepsilon$$

Aplicando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\varepsilon \mid \mathbf{X}]$$

Por exogeneidad:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}] = \beta$$

Sesgo por variable omitida

Modelo verdadero (con omitidas):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u}, \qquad \mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$$

Sesgo por variable omitida

Modelo verdadero (con omitidas):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u}, \qquad \mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$$

Modelo estimado (omite Z):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\tilde{\beta} + \tilde{\mathbf{u}}$$

Sesgo por variable omitida

Modelo verdadero (con omitidas):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u}, \qquad \mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$$

Modelo estimado (omite Z):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\tilde{\beta} + \tilde{\mathbf{u}}$$

Estimador OLS con omitidas:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Sesgo por variable omitida

Modelo verdadero (con omitidas):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u}, \qquad \mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$$

Modelo estimado (omite Z):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\tilde{\beta} + \tilde{\mathbf{u}}$$

Estimador OLS con omitidas:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Sustituyendo y del modelo verdadero:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u})$$

Sesgo por variable omitida

Modelo verdadero (con omitidas):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u}, \qquad \mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$$

Modelo estimado (omite Z):

$$\mathbf{y} = \mathbf{X}\tilde{\beta} + \tilde{\mathbf{u}}$$

Estimador OLS con omitidas:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{y}$$

Sustituyendo y del modelo verdadero:

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'(\mathbf{X}\beta + \mathbf{Z}\phi + \mathbf{u})$$

Resolviendo se obtiene:

$$\hat{\beta} = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{u}$$

Esperanza del estimador con variable omitida

Aplicando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}]$$

Esperanza del estimador con variable omitida

Aplicando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}]$$

Por exogenidad: $\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi$$

Esperanza del estimador con variable omitida

Aplicando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}]$$

Por exogenidad: $\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi$$

Por expectativas iteradas (Fijando Z y condicionando en X):

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}] = \beta + \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}}_{Cor(\mathbf{X},\mathbf{Z})}\phi$$

Esperanza del estimador con variable omitida

Aplicando esperanza condicional:

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}]$$

Por exogenidad: $\mathbb{E}[\mathbf{u} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \mathbf{0}$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}, \mathbf{Z}] = \beta + (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}\phi$$

Por expectativas iteradas (Fijando Z y condicionando en X):

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}] = \beta + \underbrace{(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}}_{Cor(\mathbf{X},\mathbf{Z})}\phi$$

En el caso univariado: $\delta = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Z}$

$$\mathbb{E}[\hat{\beta} \mid \mathbf{X}] = \beta + \delta \cdot \phi$$

Dirección del sesgo por variable omitida

El sesgo depende de dos factores:

- La correlación entre la variable de interés X y la variable omitida Z (signo de δ).
- El efecto causal de la variable omitida Z sobre Y (signo de ϕ).

Dirección del sesgo por variable omitida

El sesgo depende de dos factores:

- La correlación entre la variable de interés X y la variable omitida Z (signo de δ).
- El efecto causal de la variable omitida Z sobre Y (signo de ϕ).

$$\text{Sesgo} = \delta \cdot \phi$$

Correlación X–Z (δ)	Efecto $Z \to Y$ (ϕ)	Dirección del sesgo en $\hat{\beta}$
Positiva	Positiva	$+$ (sobreestima β)
Negativa	Positiva	$-$ (subestima β)
Positiva	Negativa	$-$ (subestima β)
Negativa	Negativa	$+$ (sobreestima β)

Preparación para la Próxima Clase

Para aprovechar al máximo la próxima sesión, por favor:

- **Entorno de Trabajo Instalado**
  - R (versión 4.0 o superior)
  - RStudio
  - Paquetes: `tidyverse` y `rio`
- **Revisar Material Compartido**
  - Introducción a R: Disponible [aquí]
  - Manipulación de Datos con `dplyr`: Disponible [aquí]
  - Gestión y Organización de Datos: Disponible [aquí]
  - Lectura y Escritura de Datos: Disponible [aquí]

Elección del artículo académico

Dinámica y plazos

- **Hoy:** los estudiantes revisan la bibliografía cargada y piensan su tema de interés.
- **Próxima clase:** definimos quién presenta el artículo del *RCT* y asignaremos los responsables de los temas de las semanas siguientes.
- La comunicación puede cerrarse en clase; de requerirse, enviar confirmación por correo electrónico antes del siguiente encuentro.

Recursos y tips para presentar (lecturas sugeridas)

- *How to Give a Great Seminar* (Tabarrok)
- *Tips on Giving a Presentation in Economics* (Lubotsky)
- *How to Give an Applied Micro Talk* (Shapiro)
- *Beamer Tips for Presentations* (Goldsmith-Pinkham)
- *The Discussant's Art* (Blattman)
- *Public Speaking for Academic Economists* (Meager)

Referencias esenciales

- Angrist, J., & Pischke, J.-S. (2009). *Mostly Harmless Econometrics*. Princeton.
- Bernal, R., & Peña, X. (2011). *Guía práctica para la evaluación de impacto*. Universidad de los Andes.
- Gertler, P., Martinez, S., Premand, P., Rawlings, L., & Vermeersch, C. (2017). *La evaluación de impacto en la práctica* (2ª ed.). Banco Mundial.
- Hernán, M., & Robins, J. (2020). *Causal Inference*. Chapman & Hall/CRC (libro abierto).
- Imbens, G., & Rubin, D. (2015). *Causal Inference for Statistics, Social, and Biomedical Sciences*. CUP.
- Rubin, D. B. (1974). *Estimating Causal Effects of Treatments in Randomized and Nonrandomized Studies*. J. Educ. Psychology.