Eduard Ursov

Градиент, производная по направлению

Из прошлого семинара:
Пусть мы имеем *вектор* $\vec{l} = (l_x, l_y)$ в двумерном пространстве, вдоль которого мы хотим узнать информацию об изменении функции $z = f(x, y)$. Этот вектор находится в плоскости XOY, мы же двигаемся вдоль направления этого вектора, начиная с точки M, в которой нам и нужно найти производную по направлению. Определим также единичный вектор, коллинеарный (т.е. сонаправленный) вектору $\vec{l}$: $\vec{e} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|}$. Производную по направлению будем вычислять следующим образом (формальное определение находится в прилагаемой литературе):

$$\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{e}} = \frac{\partial z(M)}{\partial x} e_x + \frac{\partial z(M)}{\partial y} e_y.$$

Для удобства введем еще одно определение.

> ***Определение 9***. Градиентом функции $z = f(x, y)$ в точке $M(x, y)$ называется вектор:
>
> $$gradz|_{M(x,y)} = (\frac{\partial z(M)}{\partial x}; \frac{\partial z(M)}{\partial y})$$

Градиент показывает направление наибольшего роста функции в данной точке. Длина градиента показывает скорость роста функции. Тогда можно заметить, что производная по направлению можно переписать в виде скалярного произведения двух векторов:

$$\frac{\partial z(M)}{\partial \vec{e}} = gradz|_{M(x,y)} \cdot \vec{e}.$$

Здесь "точка" означает скалярное произведение двух векторов. Введем самое простое определение скалярного произведения.

> ***Определение 10***. В m-евклидовом пространстве скалярное произведение векторов $\vec{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ определяется следующим выражением:
>
> $$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \dots + a_m \cdot b_m$$

Получается, что мы просто суммируем произведения соответсвующих координат векторов. Потренируемся находить градиенты и производные по направлению.

Задание 8

Найдите производную функции $f(x;y) = 4xy - 4y^3 + 2y^4$ в точке $A(-2;-1)$ в направлении вектора $\vec{v} = (-5;-6)$.

1. Первый шаг всегда одинаковый. Находим направление, вдоль которого нам нужно найти производную. Под направлением мы понимаем *единичный* вектор. Нам сказано найти производную по направлению $\vec{v} = (-5;-6)$, значит, первым шагом нужно будет найти коллинеарный (то есть сонаправленный) ему вектор $\vec{e}$:

$$\vec{e} = \frac{\vec{l}}{|\vec{l}|} = \frac{\vec{l}}{\sqrt{(-5)^2 + (-6)^2}} = (-5/\sqrt{61}, -6/\sqrt{61}).$$

2. Дальше находим ЧП функции $f(x;y)$:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 4y,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 4x - 12y^2 + 8y^3.$$

3. Находим градиент функции $f(x;y)$ в точке $A(-2;-1)$:

$$gradf|_{A(-2;-1)} = (4y, 4x - 12y^2 + 8y^3)|_{A(-2;-1)} =$$
$$= (-4; -8 - 12 \cdot (-1)^2 + 8 \cdot (-1)^3) = (-4; -28).$$

4. Дополнительно найдем длину градиента:

$$|gradf|_{A(-2;-1)}| = \sqrt{(-4)^2 + (-28)^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-28)^2} = \sqrt{800} = 20\sqrt{2}.$$

5. Находим производную по направлению:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial \vec{e}}|_{A(-2;-1)} = gradf|_{A(-2;-1)} \cdot \vec{e} = -4 \cdot (-5/\sqrt{61}) - 28 \cdot (-6/\sqrt{61}) = 188/\sqrt{61}.$$

Доп задание

Найдите производную функции $f(x;y) = \ln(\sin xy)$ в точке $A(1;\pi/4)$ в направлении вектора $\vec{v} = (-1;0)$.

1. Вектор $\vec{v} = (-1;0)$ уже является единичным, значит, идем дальше.
2. Находим ЧП функции $f(x;y)$ (производная по внешней функции (логарифмы) на производную от внутренней функции (синусу)):

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{1}{\sin xy} \cdot \frac{\partial \sin xy}{\partial x} = \frac{y \cos xy}{\sin xy} = y \cot xy,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = \frac{1}{\sin xy} \cdot \frac{\partial \sin xy}{\partial y} = \frac{x \cos xy}{\sin xy} = x \cot xy.$$

3. Находим градиент функции $f(x;y)$ в точке $A(-2;-1)$:

$$grad f|_{A(1;\pi/4)} = (y \cot xy, x \cot xy)|_{A(1;\pi/4)} =$$
$$= \cot xy \cdot (y,x)|_{A(1;\pi/4)} = \cot \pi/4 \cdot (\pi/4, 1) = (\pi/4, 1).$$

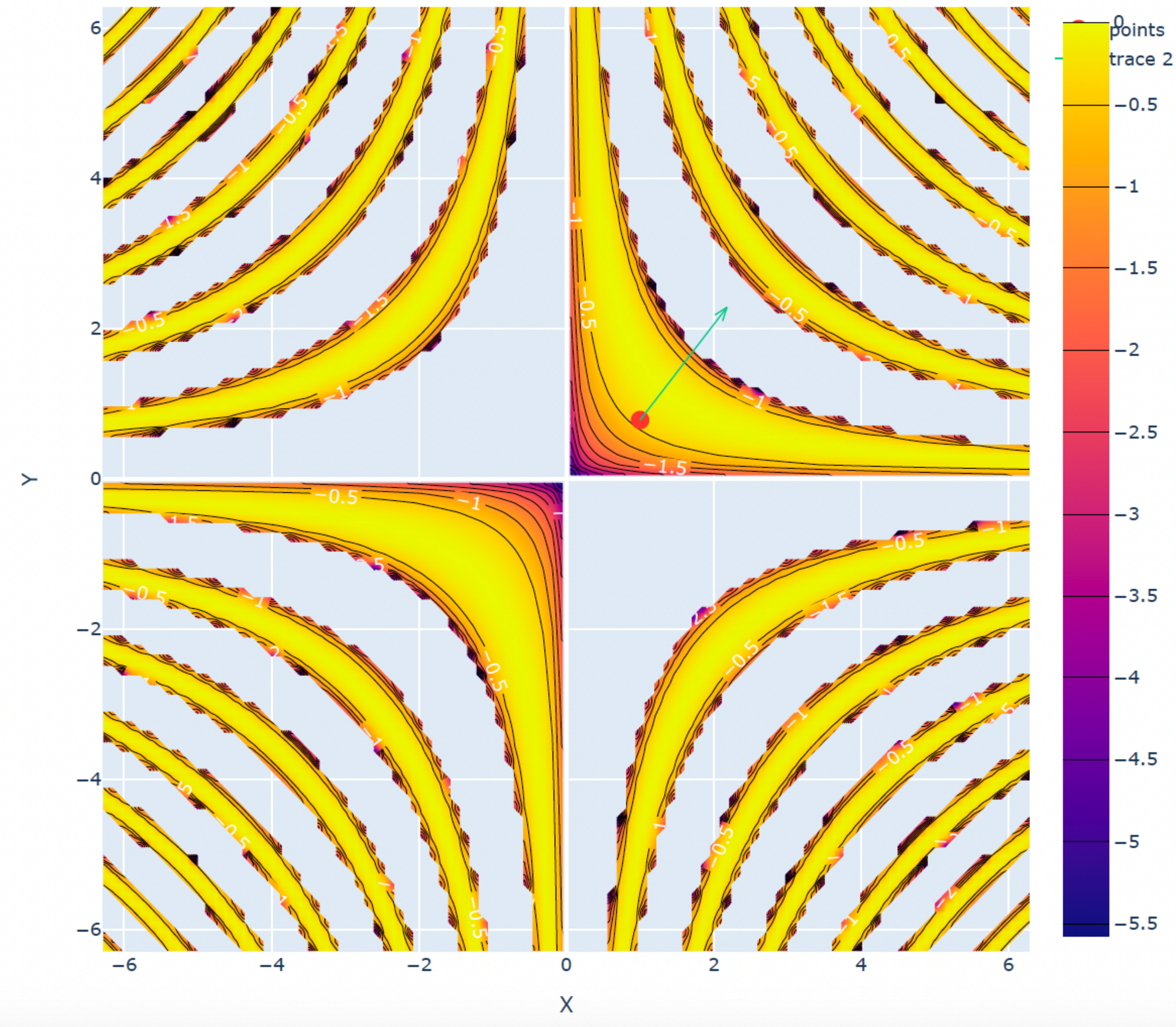
4. Дополнительно найдем длину градиента:

$$|grad f|_{A(1;\pi/4)}| = \sqrt{(\pi/4)^2 + (1)^2} = \sqrt{\pi^2/16 + 1}.$$

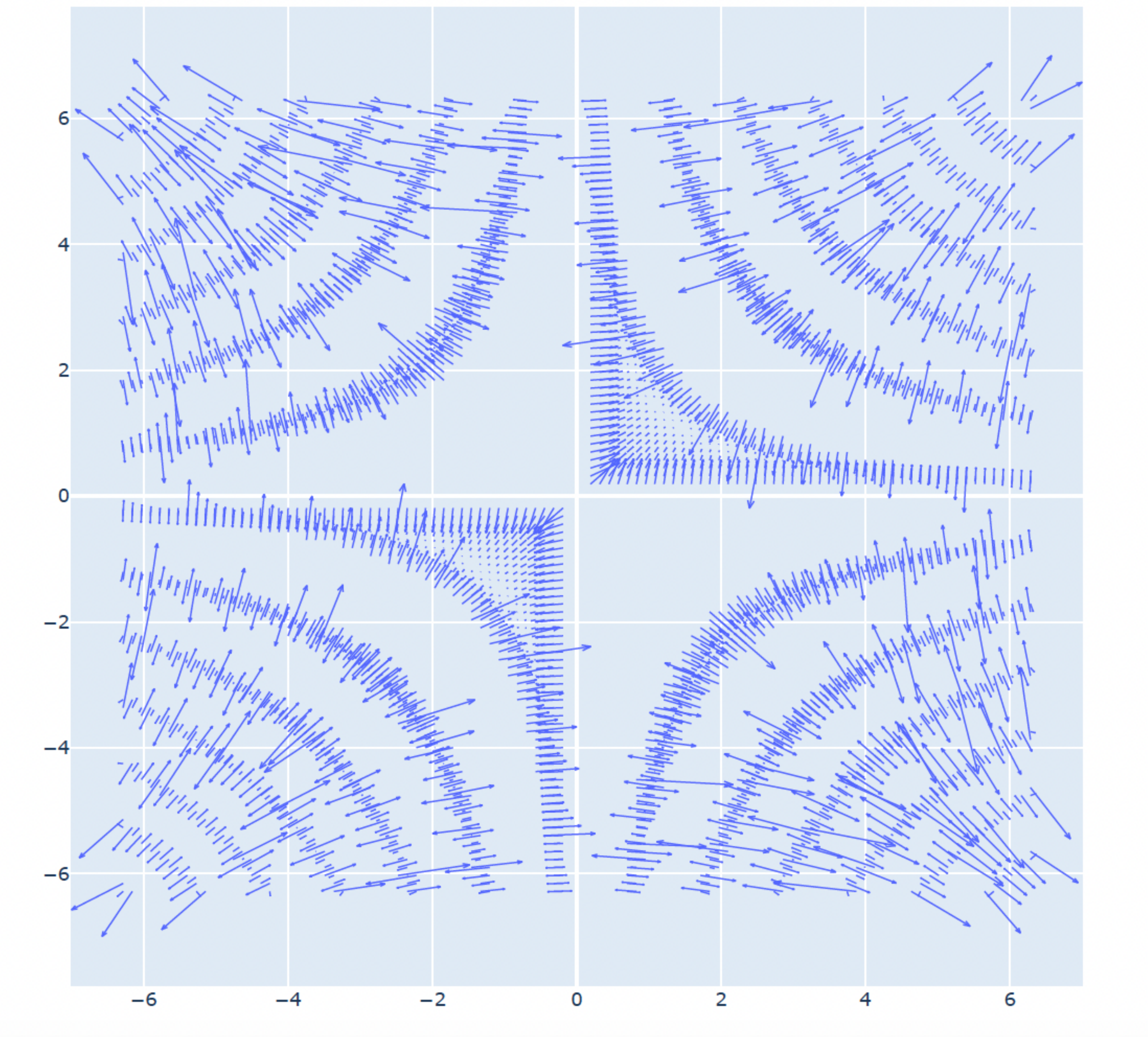
5. Находим производную по направлению:

$$\frac{\partial f(x;y)}{\partial \vec{v}}|_{A(1;\pi/4)} = grad f|_{A(1;\pi/4)} \cdot \vec{v} = \pi/4 \cdot (-1) + 1 \cdot 0 = -\pi/4.$$

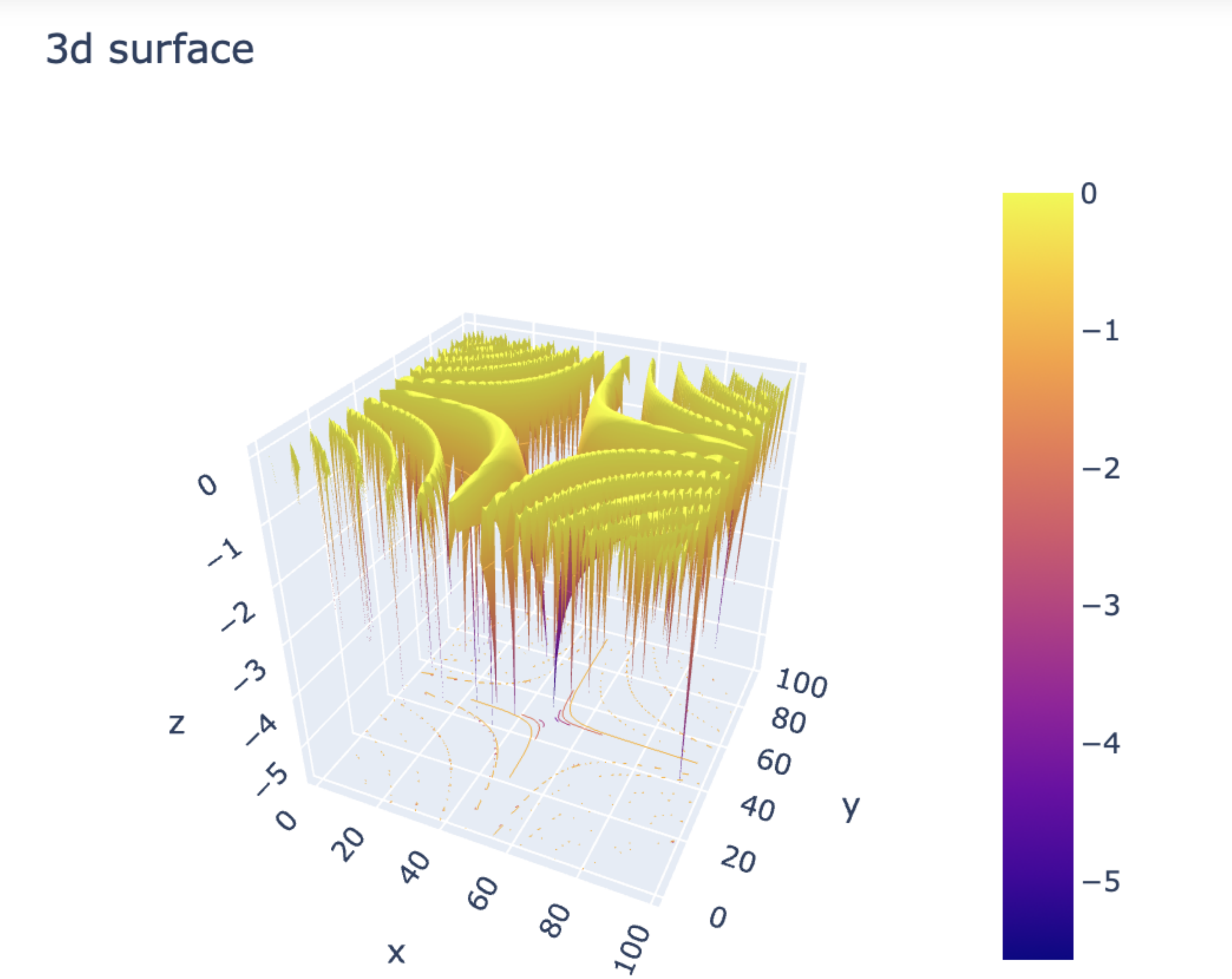
Сделаем визуализацию линий уровня этого графика и нарисуем на нем вектор градиента:



Видно, что градиент действительно показывает направление повышения уровня. Нарисуем также все поле градиентов в заданной области:



Сам же график выглядит так и точно соответсвует нарисованным линиям уровня:



Локальный экстремум функции нескольких переменных

> ***Теорема. Необходимое условие экстремума***. Если функция $f(x;y)$ имеет в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум, то дифференциал функции в этой точке равен нулю:
>
> $$df|_{M_0}=\frac{\partial f}{\partial x}(M_0)dx+\frac{\partial f}{\partial y}(M_0)dy=0$$
>
> .

Если функция имеет в точке нулевой дифференциал, это не значит, что в этой точке функция имеет максимум/минимум. Назовем точки, при которых дифференциал зануляется, точками *возможного экстремума*. Чтобы такая точка стала действительно экстремумом, нужно от нее потребовать дополнительное условие (точно так же, как и в случае функции одной переменной мы требовали, чтобы слева и справа от точки производная имела разный знак):

> ***Теорема. Достаточное условие экстремума***. Пусть функция $f(x;y)$ дифференцируема в окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ и дважды дифференцируема в самой точке $M_0(x_0,y_0)$, причем $df|_{M_0}=0$ (т.е. M_0 является точкой возможного экстремума). Введем следующие обозначения:
>
> $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_0)=a_{11}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M_0)=a_{12}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_0)=a_{22}.$$
>
> Тогда:
>
> 1. Если $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2>0$, то в точке M_0 функция имеет локальный экстремум (при $a_{11}<0$ имеет локальный максимум, при $a_{11}>0$ локальный минимум).
> 2. Если $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2<0$, то в точке M_0 функция не имеет локального экстремума.
> 3. Если $D=a_{11}a_{22}-a_{12}^2=0$, то в точке M_0 функция может иметь локальный экстремум, а может и не иметь.

В формулировке теоремы виден сам алгоритм поиска локального экстремума. Сначала ищем точки возможных локальных экстремумов, затем ищем ЧП второго порядка в этих точках и проверяем знак D.

Задание 17

Найдите точки локальных экстремумов функции $f(x;y)=\frac{36}{x}+\frac{3}{y}+x+3y+4$, лежащие в области $G=\{(x;y)|x>0,y>0\}$, и определите их вид.

1. Находим частные производные функции $f(x;y)$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=-\frac{36}{x^2}+1=0,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=-\frac{3}{y^2}+3=0.$$

2. Решаем получившуюся систему уравнений:

$$x^2=36, \rightarrow x=\pm 6$$
$$y^2=1. \rightarrow y=\pm 1$$

3. Итого у нас имеется 4 точки возможного экстремума: $A(-6,-1), B(6,-1), C(-6,1), D(6,1)$.
4. Находим вторые производные функции $f(x;y)$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{72}{x^3},$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{6}{y^3},$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

5. Исследуем точки возможного экстремума:

- точка $A(-6,-1)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \frac{72}{(-6)^3} = -\frac{1}{3},$$
$$a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{6}{(-1)^3} = -6,$$
$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0.$$

$$D = a_{11}a_{22} > 0, a_{11} < 0 \Rightarrow A(-6,-1) - \text{локальный максимум}$$

- точка $B(6,-1)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = \frac{72}{(6)^3} = \frac{1}{3},$$
$$a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B) = \frac{6}{(-1)^3} = -6,$$
$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(B) = 0.$$

$$D = a_{11}a_{22} < 0, a_{11} > 0 \Rightarrow B(6,-1) - \text{не является локальным экстремумом}$$

- точка $C(-6,1)$ даст в итоге $D > 0$ аналогично точке B, поэтому она тоже не является локальным экстремумом.
- точка $D(6,1)$ даст в итоге $D < 0, a_{11} > 0$ по аналогии с точкой A, точка $D(6,\sqrt{3})-$ локальный минимум.

А теперь стоит вспомнить условие: нам нужно найти точки локального экстремума в положительной области. Поэтому нам подойдет только точка $D(6,1)$.

Задача решена. Ответ: точка $D(6,1)$ является локальным минимумом функции $f(x;y)$.

Задание 24

Найдите точки локальных экстремумов функции $f(x;y) = y \cdot e^{-9x^2+16x+9y}$ и определите их вид.

1. Находим частные производные функции $f(x;y)$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = y\cdot e^{-9x^2+16x+9y}\cdot\frac{\partial(-9x^2+16x+9y)}{\partial x} = y(-18x+16)\cdot e^{-9x^2+16x+9y} = 0,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = e^{-9x^2+16x+9y} + y\cdot e^{-9x^2+16x+9y}\cdot\frac{\partial(-9x^2+16x+9y)}{\partial y} = (1+9y)e^{-9x^2+16x+9y} = 0.$$

2. Решаем получившуюся систему уравнений:

$$y(-18x+16)\cdot e^{-9x^2+16x+9y} = 0, \to y(-18x+16) = 0 \to x = \frac{8}{9}$$
$$(1+9y)e^{-9x^2+16x+9y} = 0. \to (1+9y) = 0 \to y = -\frac{1}{9}.$$

3. Итого у нас имеется 1 точка возможного экстремума: $A(\frac{8}{9}, -\frac{1}{9})$.
4. Находим вторые производные функции $f(x;y)$ (заметим, что $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = f(x,y)\cdot(-18x+16)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = f(x,y)\cdot(1/y+9)$):

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\cdot(-18x+16) - 18f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot(1/y+9) - \frac{1}{y^2}f(x,y),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y} = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\cdot(-18x+16).$$

5. Исследуем точку возможного экстремума:

- точка $A(\frac{8}{9}, -\frac{1}{9})$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 0 - 18f(A) = -18\cdot(-\frac{1}{9})e^{-9(8/9)^2+16\cdot(8/9)+9(-1/9)} = 2\cdot e^{55/9} > 0,$$
$$a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 0 - 9^2\cdot(-\frac{1}{9})e^{55/9} = 9\cdot e^{55/9} > 0,$$
$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) = 0.$$

$$D = a_{11}a_{22} > 0, a_{11} > 0 \Rightarrow A(\frac{8}{9}, -\frac{1}{9}) - \text{локальный минимум.}$$

Задача решена. Ответ: точка $A(\frac{8}{9}, -\frac{1}{9})$ является локальным минимумом функции $f(x;y)$.

Полезная литература и ссылки

1. Ссылка на код с визуализацией
2. Mathprofi
3. *Математический анализ в вопросах и задачах*, Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.