Eduard Ursov

Продолжение локального экстремума

Решим еще одну задачу для тренировки.

Задание 20

Найдите точки локальных экстремумов функции
$f(x;y) = 3x^2 + y^2 - 2x + 12y - 8\ln x - 14\ln y - 1$ и определите их вид.

1. Находим частные производные функции $f(x;y)$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 6x - 2 - \frac{8}{x} = 0,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2y + 12 - \frac{14}{y} = 0.$$

2. Решаем получившуюся систему уравнений:

$$6x^2 - 2x - 8 = 0, \to x = \frac{4}{3}; x = -1.$$
$$2y^2 + 12y - 14 = 0. \to y = -7; y = 1.$$

   Отрицательные решения не принадлежат области определения, так как у нас в функции есть логарифм!

3. Итого у нас имеется 1 точка возможного экстремума: $A(\frac{4}{3}, 1)$.
4. Находим вторые производные функции $f(x;y)$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 6 + \frac{8}{x^2},$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = 2 + \frac{14}{y^2},$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = 0.$$

5. Исследуем точку возможного экстремума:

- точка $A(\frac{4}{3}, 1)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B) = 6 + 9/2 = 21/2 > 0,$$
$$a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = 2 + 14/1 = 16 > 0,$$
$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0.$$

$$D = a_{11}a_{22} > 0, a_{11} > 0 \Rightarrow B(\frac{4}{3}, 1) - \text{локальный минимум.}$$

Задача решена. Ответ: точка $B(\frac{4}{3}, 1)$ является локальным минимумом функции $f(x; y)$.

Наибольшее и наименьшее значение функций

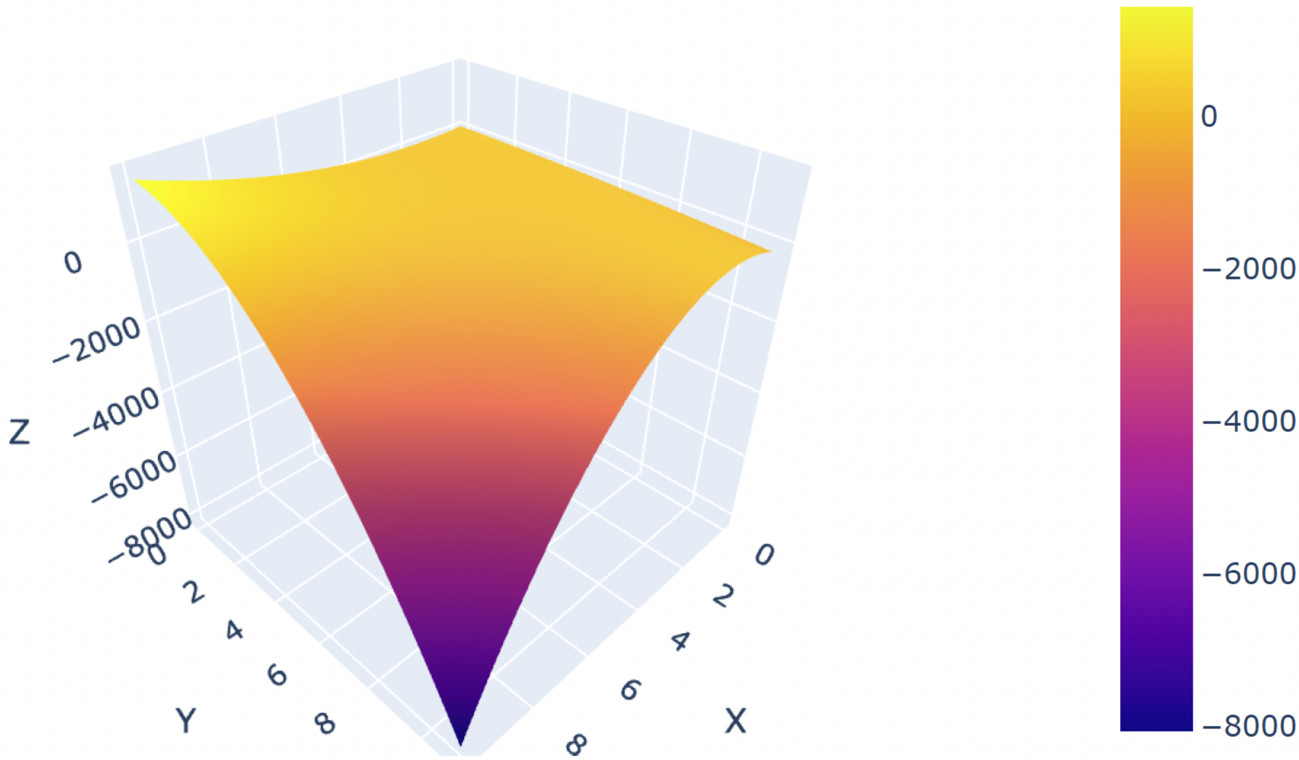
Тут лучше сразу начать решать задачи.

Задание 27

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции
$f(x; y) = (x^2 - 3x + 2)(-y^2 - y + 20)$ на прямоугольнике, ограниченном линиями
$x = 0, x = 10, y = 0, y = 11$.

Идея следующая. Нас будут интересовать значения функции ТОЛЬКО на границах прямоугольника и в экстремумах внутри прямоугольника. Сначала мы найдем точки возможного экстремума и отберем те, которые находятся внутри прямоугольника. Потом отыщем среди них экстремумы и найдем значения функции в экстремумах. Потом рассмотрим, как ведет себя функция на границах. На каждой границе мы попытаемся найти точки экстремума и в них значения функции. Если на какой-то границе точки экстремума находятся вне границы, мы найдем значения функций в ребрах прямоугольника. В итоге у нас будет массив различных точек, среди которых мы будем искать точки, в которых функция принимает наибольшее и наименьшее значения.

Ответ мы можем угадать, если нарисуем график функции внутри этого прямоугольника:



Видно, что наибольшее и наименьшее значения функций находятся в ребрах прямоугольника, а, значит, нас ждет целая плеяда напрасных вычислений :C

1. Находим частные производные функции $f(x;y)$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = (2x-3)(-y^2-y+20)=0,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = (x^2-3x+2)(-2y-1)=0.$$

2. Решаем получившуюся систему уравнений:

$$-(2x-3)(y^2+y-20)=0 \to (2x-3)(y+5)(y-4)=0,$$
$$(x^2-3x+2)(-2y-1)=0 \to (x-2)(x-1)(-2y-1)=0.$$

Занулим первое уравнение. Есть несколько вариантов:

- $x=3/2$. Тогда второе уравнение зануляется только при $y=-1/2$. Получаем точку $A(3/2,-1/2)$. Точка не входит в прямоугольник, поэтому ее не рассматриваем.
- $y=-5$. Тогда второе уравнение зануляется только при $x=1$ и $x=2$. Получаем две точки $B(1,-5), C(2,-5)$. Эти точки так же не входят прямоугольник.

- $y = 4$. Тогда второе уравнение зануляется только при $x = 1$ и $x = 2$. Получаем две точки $D(1, 4), E(2, 4)$. Эти точки входят в прямоугольник, и мы их будем рассматривать.

4. Находим вторые производные функции $f(x; y)$:

$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2} = 2(-y^2 - y + 20),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2} = -2(x^2 - 3x + 2),$$
$$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x \partial y} = (2x - 3)(-2y - 1).$$

5. Исследуем точки возможного экстремума:

- точка $D(1, 4)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) = 2(-16 - 4 + 20) = 0,$$
$$a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(D) = -2(1 - 3 + 2) = 0,$$
$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(D) = -1 \cdot (-9) = 9.$$

$$D = -a_{12}^2 < 0 \Rightarrow D(1, 4) - \text{не является локальным экстремумом.}$$

- точка $E(2, 4)$:

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(D) = 2(-16 - 4 + 20) = 0,$$
$$a_{22} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(D) = -2(4 - 6 + 2) = 0,$$
$$a_{12} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(D) = 1 \cdot (-9) = -9.$$

$$D = -a_{12}^2 < 0 \Rightarrow E(2, 4) - \text{не является локальным экстремумом.}$$

6. Теперь рассмотрим границы прямоугольника.
   1. Начнем с нижней стороны прямоугольника $y = 0, 0 \leq x \leq 10$. А значит рассмотрим функцию $f(x; 0) = 20 \cdot (x^2 - 3x + 2)$. Мы получили функцию одной переменной. Найдем экстремум этой функции и посмотрим, какие значения функция принимает на границах области. Перед нами парабола с ветвями вниз, следовательно она имеет минимум в точке $x = 3/2$. Получаем следующее: на этой границе функция имеет минимальное значение $f(3/2; 0) = 20 \cdot (9/4 - 9/2 + 2) = -5$ и максимальное значение на границе: $f(10; 0) = 20 \cdot 72 = 1440$. Запомнили эти значения.

2. Рассмотрим верхнюю сторону прямоугольника $y = 11, 0 \le x \le 10$. А значит рассмотрим функцию $f(x; 11) = -112 \cdot (x^2 - 3x + 2)$. Перед нами парабола с ветвями вверх, а значит она имеет максимум в точке $x = 3/2$. Получаем следующее: на этой границе функция имеет максимальное значение $f(3/2; 11) = -112 \cdot (9/4 - 9/2 + 2) = 28$ и минимальное значение на границе: $f(10; 11) = -112 \cdot 72 = -8064$. Запомнили эти значения.
3. Рассмотрим левую сторону прямоугольника $x = 0, 0 \le y \le 11$. А значит рассмотрим функцию $f(0; y) = 2(-y^2 - y + 20)$. Перед нами парабола с ветвями вверх, а значит она имеет максимум в точке $y = -1/2$. Эта точка находится вне стороны прямоугольника, она нам не интереса. Минимальное значение функции на этой стороне: $f(0; 11) = 2 \cdot (-112) = -224$. Максимальное значение функции на этой стороне: $f(0; 0) = 40$. Запомнили.
4. Рассмотрим правую сторону прямоугольника $x = 10, 0 \le y \le 11$. А значит рассмотрим функцию $f(10; y) = 72 \cdot (-y^2 - y + 20)$. Перед нами парабола с ветвями вверх, а значит она имеет максимум в точке $y = -1/2$. Эта точка находится вне стороны прямоугольника, она нам не интереса. Минимальное значение функции на этой стороне: $f(10; 11) = -8064$. Максимальное значение функции на этой стороне: $f(10; 0) = 1440$. Запомнили.

7. Теперь посмотрим, что у нас получилось. Максимальное значение функции находится в точке $(10, 0)$: $f(10; 0) = 1440$. Минимальное значение функции находится в точке $(10, 11)$: $f(10; 11) = -8064$.

Задача решена. Ответ: Максимальное значение функции находится в точке $(10, 0)$: $f(10; 0) = 1440$. Минимальное значение функции находится в точке $(10, 11)$: $f(10; 11) = -8064$. Это совпадает с нашей картинкой, которую мы нарисовали в начале задачи.

Множество значений значений функции на множестве

Задание 27

Найдите множество значений функции $f(x; y) = 4x^2 + 6xy + 2y^2 + 4x - 2y + 3$ на треугольнике, ограниченном линиями $x = 0, y = 0, 6x + y = 24$.

Задача такая же. Делаем то же самое: пытаемся найти экстремумы и смотрим значение функции на границе множества.

1. Находим частные производные функции $f(x; y)$ и приравниваем их к нулю:

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 8x + 6y + 4 = 0,$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 6x + 4y - 2 = 0.$$

2. Решаем получившуюся систему уравнений:

$$x = -8,$$
$$y = -10.$$

   Точка не находится внутри заданного треугольника, она нам не интересна.

3. Теперь рассмотрим границы треугольника. Ребра находятся в точках $(0,0), (0,24), (4,0)$

   1. Рассмотрим первую сторону $y = 0, 0 \le x \le 4$. Рассмотрим функцию $f(x;0) = 4x^2 + 4x + 3$. Это парабола, ветви вверх. Минимум находится в точке $x = -1/2$. Эта точка не входит в треугольник, она нам не интересна. Рассмотрим значения функций в ребрах: $f(0;0) = 3$, $f(4;0) = 83$. Запомнили.
   2. Рассмотрим вторую сторону $x = 0, 0 \le y \le 24$. $f(0;y) = 2y^2 - 2y + 3$. Парабола с минимумом в точке $y = 1/2$, $f(0, 1/2) = 1/2 - 1 + 3 = 5/2$. Максимальное значение функции на ребре $f(0;24) = 2 \cdot 24^2 - 2 \cdot 24 + 3 = 1107$.
   3. Рассмотрим последнюю сторону $6x + y = 24$. Функция выглядит так:

$$f(x, 24-6x) = 4x^2 + 6x(24-6x) + 2(24-6x)^2 + 4x - 2(24-6x) + 3 =$$
$$4x^2 + 144x - 36x^2 + 1152 - 576x + 72x^2 + 4x - 48 + 12x + 3 = 40x^2 - 416x + 1107.$$

      Миниум находится в точке $x = 26/5$: $f(26/5; 24-6x = -36/5) = 127/5 = 25.4$

4. Теперь посмотрим, что у нас получилось. Максимальное значение функции находится в точке $(0,24)$: $f(0;24) = 1107$. Минимальное значение функции находится в точке $(0,1/2)$: $f(0;1/2) = 5/2$. Множество значений функции в треугольнике $y \in [5/2, 1107]$.

Задача решена. Ответ: Множество значений функции в треугольнике $y \in [5/2, 1107]$.

Полезная литература и ссылки

1. Ссылка на код с визуализацией
2. Mathprofi
3. *Математический анализ в вопросах и задачах*, Бутузов В.Ф., Крутицкая Н.Ч., Медведев Г.Н., Шишкин А.А.