Objectius:

- estudiar el comportament de l'aproximació amb polinomis amb els criteris d'interpolació i de mínims quadrats,
- repàs de les propietats de les famílies de polinomis ortogonals.

Es considera l'exemple del fenòmen de Runge,

$$f(x) = 1/(1+25\,x^2) \qquad x \in [-1,1].$$

1. Aproximar la funció f(x) amb el criteri d'interpolació (pura) fent servir n+1=3,5,7,9 punts equiespaiats. Dibuixar la funció i els polinomis interpoladors obtinguts en una mateixa figura, fent servir la instrucció legend per identificar cada gràfica. Els coeficients del polinomi interpolador es poden calcular amb la funció polyfit, i el polinomi es pot avaluar amb polyval.

2. Aproximar la funció f(x) amb el criteri de mínims quadrats fent servir n+1=101 punts equiespaiats, amb grau m=2,4,6,8. Dibuixar la funció i els polinomis obtinguts en una segona figura, fent servir la instrucció figure(2) abans del plot. Es poden fer servir les mateixes funcions polyfit i polyval.
   Avaluar el residu de l'aproximació per mínims quadrats per cadascun dels polinomis. Com es comporta el residu? És raonable esperar que el residu sempre es comporti així per a qualsevol funció f(x) i interval? Per què?

3. Aproximar la funció f(x) per un polinomi amb grau m=2,4,6,8 fent servir un criteri de mínims quadrats amb producte escalar continu en l'interval [-1,1]. Emprar les families de polinomis ortogonals de Legendre i de Txebixov. S'obté el mateix resultat amb totes dues famílies de polinomis ortogonals? Per què? Quina de les dues famílies dóna resultats similars als de l'apartat 2?

   Per fer el darrer apartat es poden calcular les integrals numèricament fent servir la instrucció quad de Matlab, o bé analíticament amb la instrucció int de Maple. Si es fa servir Maple, es pot aprofitar la llibreria orthopoly per a la definició dels polinomis de Legendre (P) i de Txebixov (T). A la intranet de l'assignatura es pot trobar un full Maple d'exemple.