

---

## Неравенство Маркова и его следствия. Сходимость последовательностей случайных величин. Семинар 10. 6 ноября 2018 г.

---

*Подготовил: Горбунов Э.*

**Источники:** [НатанТВ, Гл. 8], [Ширяев, Гл. 2 §10], [Боровков, Гл. 6 §1-2]

**Ключевые слова:** неравенство Маркова, обобщённое неравенство Маркова, неравенство Чебышёва, неравенство Чернова, сходимость по вероятности, сходимость почти наверное, сходимость в среднем, сходимость по распределению, теорема Леви о непрерывности, предельная теорема Пуассона

### Неравенства Маркова, Чебышёва, Чернова

**Теорема 1. (Неравенство Маркова).** Пусть  $\xi$  — неотрицательная случайная величина с конечным математическим ожиданием. Тогда для любого  $t > 0$  выполнено

$$\mathbb{P}(\xi \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}(\xi \geq t) = \int_{x \geq t} dF_{\xi}(x) \leq \int_{x \geq t} \frac{x}{t} dF_{\xi}(x) \leq \int_{x \geq 0} \frac{x}{t} dF_{\xi}(x) = \frac{\mathbb{E}\xi}{t}.$$

□

Приведем несколько следствий из неравенства Маркова.

**Следствие 1. (Обобщенное неравенство Маркова).** Пусть неотрицательная функция  $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$  (нестрого) монотонно возрастает на положительной полуоси, а неотрицательная случайная величина  $\xi$  такова, что  $\mathbb{E}[g(\xi)] < \infty$ . Тогда для любого  $t > 0$  выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi \geq t\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(\xi)]}{g(t)}.$$

*Доказательство.*

$$\mathbb{P}\{\xi \geq t\} \leq \mathbb{P}\{g(\xi) \geq g(t)\} \leq \frac{\mathbb{E}[g(\xi)]}{g(t)}.$$

□

**Следствие 2. (Неравенство Чебышёва).** Пусть  $\xi$  — случайная величина с конечной дисперсией. Тогда для любого  $t > 0$  выполнено

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t\} \leq \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

*Доказательство.* Применим неравенство Маркова к случайной величине  $(\xi - \mathbb{E}\xi)^2$ :

$$\mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi| \geq t\} = \mathbb{P}\{|\xi - \mathbb{E}\xi|^2 \geq t^2\} \leq \frac{\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2]}{t^2} = \frac{\mathbb{D}\xi}{t^2}.$$

□

**Следствие 3. (Неравенство Чернова)** Пусть  $\xi$  — случайная величина с конечными экспоненциальными моментами  $\mathbb{E}e^{\lambda\xi}$  для всех  $\lambda > 0$ . Тогда для любого  $t > 0$  выполнено

$$\mathbb{P}\{\xi \geq t\} \leq \inf_{\lambda > 0} \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda\xi}]}{e^{\lambda t}}.$$

*Доказательство.* Для любого  $\lambda > 0$  в силу неравенства Маркова справедливо:

$$\mathbb{P}\{\xi \geq t\} = \mathbb{P}\{\lambda\xi \geq \lambda t\} = \mathbb{P}\{e^{\lambda\xi} \geq e^{\lambda t}\} \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda\xi}]}{e^{\lambda t}}.$$

Так как неравенство выполнено для любого  $\lambda > 0$ , то, беря  $\inf_{\lambda > 0}$  от левой и правой частей, получим

$$\mathbb{P}\{\xi \geq t\} \leq \inf_{\lambda > 0} \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda\xi}]}{e^{\lambda t}}.$$

□

**Замечание 1.** Неравенство Чернова часто используется для анализа сумм независимых случайных величин.

### Сходимость последовательностей случайных величин

Рассмотрим вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  и последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ , заданных на этом вероятностном пространстве. В математическом анализе вы сталкивались с разными видами сходимости функций. Случайные величины — функции, поэтому существуют разные способы определить сходимость последовательности случайных величин.

**Определение 1.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  **сходится по вероятности** к случайной величине  $\xi$  ( $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$ ), если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Определение 2.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  **сходится почти наверное (с вероятностью 1)** к случайной величине  $\xi$  ( $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi$ ), если

$$\mathbb{P}\left\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi(\omega)\right\} = 1.$$

**Замечание 2.** Эти понятия вам уже хорошо известны из курса функционального анализа: первое соответствует сходимости по мере, а второе — сходимости почти всюду. В курсе функционального анализа доказывался следующий факт: из каждой последовательности, сходящейся по мере, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти всюду. Если перевести этот факт на язык теории вероятностей, то получим, что из любой последовательности случайных величин, сходящейся по вероятности, можно выделить подпоследовательность, сходящуюся почти наверное.

**Определение 3.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$  **сходится в среднем  $p$ -го порядка** к случайной величине  $\xi$  ( $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi$ ), если

$$\mathbb{E}[|\xi_n - \xi|^p] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

**Замечание 3.** В случае, когда  $p = 1$ , данную сходимость называют **сходимостью в среднем**, а когда  $p = 2$ , — **сходимостью в среднеквадратичном** ( $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{с.к.}} \xi$ ).

Аналогичным образом, как это делалось в математическом анализе, можно определить для каждого типа сходимости понятие фундаментальной последовательности (если возникают затруднения или если хочется себя проверить, см. [Боровков, Гл.6, §1]).

**Теорема 2. (Признак сходимости Коши).**  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \xi$  в каком-нибудь смысле (по вероятности, п.н., в среднем порядка  $p$ ) тогда и только тогда, когда  $\xi_n$  фундаментальна в соответствующем смысле.

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в [Боровков, Гл. 6, §1, Теорема 3].  $\square$

**Определение 4.** Последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  **сходится по распределению** к случайной величине  $\xi$  ( $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$ ), если для любой ограниченной непрерывной функции  $\psi$

$$\mathbb{E}[\psi(\xi_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\psi(\xi)].$$

**Замечание 4.** Заметим, что последний тип сходимости зависит только от распределений случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  и  $\xi$  и описывает на самом деле близость распределений. Пусть  $F_n$  — функции распределения соответствующих  $\xi_n$ ,  $F$  — функция распределения  $\xi$ . Говорят, что  $F_n$  **слабо сходится** к  $F$  ( $F_n \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{} F$ ), если для любой ограниченной непрерывной функции  $\psi$

$$\int_{\mathbb{R}} \psi(x) dF_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \int_{\mathbb{R}} \psi(x) dF(x),$$

то есть  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi \iff F_n \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{} F$ .

Следующая теорема устанавливает связь между слабой сходимостью и поточечной сходимостью в точках непрерывности предельной функции распределения.

**Теорема 3.**  $F_n \xRightarrow[n \rightarrow \infty]{} F$  тогда и только тогда, когда  $F_n(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)$  в каждой точке  $x$ , в которой функция  $F$  непрерывна.

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в [Боровков, Гл. 6, §2, Теорема 6].  $\square$

Следующая лемма оказывается часто полезной при доказательстве предельных теорем.

**Лемма 1. (Лемма Бореля-Кантелли).** Пусть  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  — последовательность событий. Пусть событие  $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ , которое по определению содержит те и только те элементарные исходы, которые принадлежат бесконечному числу событий (поэтому часто говорят, что событие  $A$  означает, что бесконечно много событий из  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  наступили). Тогда

- 1) если  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} < \infty$ , то  $\mathbb{P}\{A\} = 0$ ;
- 2) если события  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$  независимы в совокупности и  $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_n\} = \infty$ , то  $\mathbb{P}\{A\} = 1$ .

*Доказательство.* 1) Пусть  $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ . Применяя теорему непрерывности вероятности, получим

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{B_n\} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{A_k\} = 0.$$

- 2) Нужно показать, что  $\mathbb{P}\{A\} = 1$ . Это равносильно тому, что  $\mathbb{P}\{\bar{A}\} = 0$ . Пусть  $C_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k$ . Тогда  $\bar{A} =$

$$\overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n. \text{ Пользуясь теоремой непрерывности вероятности и независимостью } \bar{A}_k,$$

получаем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{\bar{A}\} &= \mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\{C_n\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}\left\{\bigcap_{k=n}^{\infty} \bar{A}_k\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{\bar{A}_k\} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=n}^{\infty} (1 - \mathbb{P}\{A_k\}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \underbrace{\exp\left(-\sum_{k=n}^{\infty} \mathbb{P}\{A_k\}\right)}_0 = 0.\end{aligned}$$

□

**Упражнение 1.** Докажите, что если для любого  $\varepsilon > 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \infty,$$

то  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} \xi$ .

*Доказательство.* Из леммы Бореля-Кантелли следует, что  $\mathbb{P}\{A_\varepsilon\} = 0$  для любого  $\varepsilon > 0$ , где  $A_\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$ . Рассмотрим множество  $B = \{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \not\rightarrow \xi(\omega), n \rightarrow \infty\}$ . Если  $\omega \in B$ , то существует  $\varepsilon_\omega > 0$  такое, что для бесконечного числа индексов  $k$  выполнено  $|\xi_k(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon_\omega$ , а значит,  $\omega \in A_{\varepsilon_\omega}$ . Заметим, что в качестве  $\varepsilon_\omega$  всегда можно взять число вида  $\frac{1}{m(\omega)}$ , где  $m(\omega) \in \mathbb{N}$  (если  $\varepsilon_\omega$  не представимо в таком виде, то выберем достаточно большое  $m(\omega)$ , чтобы  $\frac{1}{m(\omega)} < \varepsilon_\omega$ , и положим  $\varepsilon_\omega = \frac{1}{m(\omega)}$ ). Обозначим через  $B_n = A_{1/n}$ . Тогда

$$B \subseteq \underbrace{\bigcup_{\omega \in B} B_{m(\omega)}}_{\text{несчётное объединение}} \subseteq \underbrace{\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m}_{\text{счётное объединение}},$$

откуда

$$\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{m=1}^{\infty} B_m\right\} \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{B_m\} = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{1/m}\} = 0.$$

□

**Упражнение 2.** Докажите, что из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} c$ , где  $c \in \mathbb{R}$  — константа, следует, что  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} c$ .

*Доказательство.* Функция распределения константы  $c$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq c, \\ 1, & x > c \end{cases}$$

непрерывна во всех точках, кроме  $x = c$ . Тогда из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} c$  получаем, что для всех  $x \neq c$  имеет место сходимость  $F_{\xi_n}(x) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} F(x)$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\{|\xi_n - c| > \varepsilon\} &= \mathbb{P}\{\xi_n > c + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{\xi_n < c - \varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{\xi_n \geq c + \varepsilon\} + \mathbb{P}\{\xi_n < c - \varepsilon\} \\ &= 1 - F_{\xi_n}(c + \varepsilon) + F_{\xi_n}(c - \varepsilon) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 - 1 + 0 = 0.\end{aligned}$$

□

**Упражнение 3.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые случайные величины и  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$ . Покажите, что существует число  $c \in \mathbb{R}$  такое, что  $\xi = c$  с вероятностью 1.

*Доказательство.* Предположим противное: пусть  $\xi$  не является константой с вероятностью 1. Тогда существуют два вещественных числа  $x_1 < x_2$  такие, что  $\mathbb{P}\{\xi < x_1\} = p > 0$  и  $\mathbb{P}\{\xi \geq x_2\} = q > 0$ . Рассмотрим произвольные числа  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$ . Тогда по признаку сходимости Коши существует такое  $N \in \mathbb{N}$ , что для всех  $n, m > N$  выполнено  $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} < \delta$ ,  $\mathbb{P}\{|\xi_m - \xi| > \varepsilon\} < \delta$  и  $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} < \delta$ . Подберём  $\varepsilon$  так, чтобы  $3\varepsilon < x_2 - x_1$ . Оценим  $\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon\}$  сверху и снизу. Оценка сверху:

$$\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon\} \leq \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} < \delta,$$

так как из  $\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon$  следует  $|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon$ . Чтобы воспользоваться оценкой снизу, воспользуемся независимостью  $\xi_n$  и  $\xi_m$ :

$$\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon\} \mathbb{P}\{\xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon\}.$$

Первый множитель оценивается снизу следующим образом (считаем, что  $\delta < p$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon\} &\geq \mathbb{P}\{\xi < x_1, |\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi < x_1\} + \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\} - \mathbb{P}\{\{\xi < x_1\} \cup \{|\xi_n - \xi| \leq \varepsilon\}\} \\ &\geq p + 1 - \delta - 1 = p - \delta, \end{aligned}$$

где первое неравенство справедливо, так как из  $\xi < x_1, |\xi_n - \xi| \leq \varepsilon$  следует  $\xi_n < x_1 + \varepsilon$ . Аналогичным образом оценивается и второй множитель (считаем, что  $\delta < q$ ):

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\{\xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon\} &\geq \mathbb{P}\{\xi \geq x_2, |\xi_m - \xi| \leq \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi \geq x_2\} + \mathbb{P}\{|\xi_m - \xi| \leq \varepsilon\} - \mathbb{P}\{\{\xi \geq x_2\} \cup \{|\xi_m - \xi| \leq \varepsilon\}\} \\ &\geq q + 1 - \delta - 1 = q - \delta, \end{aligned}$$

где первое неравенство справедливо, так как из  $\xi \geq x_2, |\xi_m - \xi| \leq \varepsilon$  следует  $\xi \geq x_1 + 3\varepsilon, |\xi_m - \xi| \leq \varepsilon$ , откуда следует  $\xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon$ . В итоге получаем, что если взять  $\delta < \min\{p, q\}$ , то

$$\mathbb{P}\{\xi_n < x_1 + \varepsilon, \xi_m \geq x_1 + 2\varepsilon\} \geq (p - \delta)(q - \delta),$$

откуда и из верхней оценки данной вероятности следует, что

$$(p - \delta)(q - \delta) \leq \delta.$$

Если взять  $\delta$  достаточно маленьким, что  $(p - \delta)(q - \delta) \geq \frac{pq}{2}$  и  $\delta < \frac{pq}{2}$ , то получим противоречивое неравенство  $\delta < \delta$ . Значит, наше предположение неверно, т. е. существует число  $c \in \mathbb{R}$  такое, что  $\xi = c$  с вероятностью 1.  $\square$

Следующая теорема замечательным образом связывает сходимость по распределению со сходимостью характеристических функций.

**Теорема 4. (Теорема Леви о непрерывности).** Пусть последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  такова, что для всех  $t \in \mathbb{R}$  выполнено:  $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi(t)$ . Пусть  $\varphi(t)$  непрерывна в нуле. Тогда существует такая случайная величина  $\xi$ , что  $\varphi = \varphi_{\xi}$  и  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$ . Обратно, если  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$ , то  $\varphi_{\xi_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \varphi_{\xi}(t)$  при всех  $t \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в книге [Боровков, Гл. 7, §3, Теорема 2].  $\square$

**Упражнение 4. (Предельная теорема Пуассона).** Пусть  $\xi_n \sim \text{Binom}(n, p_n)$  и  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$ . Покажите, что  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi \sim \text{Poisson}(\lambda)$ .

*Доказательство.* Как мы знаем из предыдущего семинара производящая функция  $\xi_n$  равна

$$g_{\xi_n}(z) = (1 + p_n(z - 1))^n.$$

Тогда её характеристическая функция задаётся формулой

$$\varphi_{\xi_n}(t) = g_{\xi_n}(e^{it}) = (1 + p_n(e^{it} - 1))^n.$$

Так как  $np_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \lambda > 0$ , то  $np_n = \lambda + o(1)$ ,  $n \rightarrow \infty$ , а значит,  $p_n = \frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Отсюда следует, что для любого  $t \in \mathbb{R}$

$$\varphi_{\xi_n}(t) = \left(1 + \left(\frac{\lambda}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)(e^{it} - 1)\right)^n = \left(1 + o\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{\lambda}{n}(e^{it} - 1)\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(\lambda(e^{it} - 1)).$$

□

Теперь займёмся вопросом о связи различных типов сходимости. Схематически эти связи обозначены на Рисунке 1.

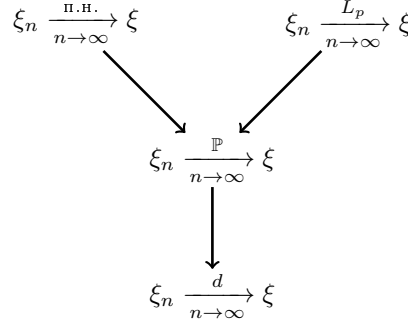


Рис. 1: Связь разных типов сходимости случайных величин.

Перечислим важные свойства типов сходимости случайных величин.

1. Из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} \xi$  следует  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$ . Чтобы это показать, докажем сначала **критерий сходимости с вероятностью 1**:  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} \xi$  тогда и только тогда, когда для любого  $\varepsilon > 0$  выполняется

$$\mathbb{P} \left\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ Если это доказать, то цепочка рассуждений}$$

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} \xi \iff \mathbb{P} \left\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \varepsilon > 0 \implies \mathbb{P} \{ |\xi_n - \xi| > \varepsilon \} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \varepsilon > 0 \iff \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$$

докажет то, что мы хотим. Рассмотрим события  $A_n^\varepsilon = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \varepsilon\}$ ,  $A^\varepsilon = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^\varepsilon$ . Тогда

$$\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} A^\varepsilon = \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{1/m}.$$

Далее заметим, что

$$\begin{aligned} \xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{П.Н.}} \xi &\iff 0 = \mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \xi_n(\omega) \not\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \xi(\omega)\} = \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{m=1}^{\infty} A^{1/m} \right\} \\ &\iff \mathbb{P} \{A^{1/m}\} = 0, m \geq 1 \\ &\iff \mathbb{P} \{A^\varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0. \end{aligned}$$

В силу теоремы непрерывности вероятности получаем, что

$$\mathbb{P} \{A^\varepsilon\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^\varepsilon \right\},$$

а значит,

$$\mathbb{P} \{A^\varepsilon\} = 0, \varepsilon > 0 \iff \mathbb{P} \left\{ \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k^\varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \varepsilon > 0 \iff \mathbb{P} \left\{ \sup_{k \geq n} |\xi_k - \xi| > \varepsilon \right\} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \varepsilon > 0.$$

2. Из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi$  следует  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$ . Действительно, применяя неравенство Маркова к случайной величине  $|\xi_n - \xi|^p$ , получим, что для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi|^p > \varepsilon^p\} \leq \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi|^p \geq \varepsilon^p\} \leq \frac{\mathbb{E}[|\xi_n - \xi|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

3. Из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$  следует  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$ . Пусть  $\psi(x)$  — произвольная ограниченная непрерывная на  $\mathbb{R}$  функция. Тогда существует такая константа  $c > 0$ , что для всех  $x \in \mathbb{R} \hookrightarrow |\psi(x)| < c$ . Рассмотрим произвольное число  $\varepsilon > 0$  и подберём натуральное число  $N$  так, чтобы  $\mathbb{P}\{|\xi| > N\} \leq \frac{\varepsilon}{4c}$ . Так как функция  $\psi$  непрерывна на  $\mathbb{R}$  и  $[-N, N]$  — компакт, то по теореме Кантора она равномерно непрерывна на  $[-N, N]$ . Тогда подберём такое число  $\delta$ , что для всех таких  $x \in [-N, N]$  и  $y \in \mathbb{R}$ , что  $|x - y| < \delta$ , выполняется  $|\psi(x) - \psi(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ . Рассмотрим разбиение  $\Omega = A \cup B \cup C$ , где  $A = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta, |\xi(\omega)| \leq N\}$ ,  $B = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| \leq \delta, |\xi(\omega)| > N\}$ ,  $C = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi(\omega)| > \delta\}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\psi(\xi_n) - \psi(\xi)|] &= \int_{\Omega} |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} \\ &= \int_A |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} + \int_B |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} + \int_C |\psi(\xi_n) - \psi(\xi)| d\mathbb{P} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + 2c \cdot \frac{\varepsilon}{4c} + 2c \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\} \\ &= \varepsilon + 2c \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\}. \end{aligned}$$

Но  $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \delta\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ , а значит, для всех достаточно больших  $n$  выполняется неравенство  $\mathbb{E}[|\psi(\xi_n) - \psi(\xi)|] \leq 2\varepsilon$ , откуда следует, что

$$|\mathbb{E}[\psi(\xi_n) - \psi(\xi)]| \leq \mathbb{E}[|\psi(\xi_n) - \psi(\xi)|] \leq 2\varepsilon$$

для всех достаточно больших  $n$ . В силу произвольности выбора  $\varepsilon$  получаем, что  $\mathbb{E}[\psi(\xi_n)] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[\psi(\xi)]$ , а в силу произвольности выбора ограниченной непрерывной функции  $\psi$  имеем:  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$ .

4. Если последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  возрастает почти наверное, т. е. с вероятностью 1 выполнено  $\xi_n \leq \xi_{n+1}$ , то из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$  следует  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi$ . Во-первых, заметим, что с вероятностью 1  $\xi \geq \xi_n$  для всех  $n$ . Действительно, если найдётся такое  $k$ , что  $\mathbb{P}\{\xi < \xi_k\} = p > 0$ , то существует такое число  $\varepsilon > 0$ , что  $\mathbb{P}\{\xi < \xi_k - \varepsilon\} = \frac{p}{2} > 0$ . Но тогда для всех  $n > k$  будет выполнено  $\mathbb{P}\{\xi < \xi_n - \varepsilon\} \geq \frac{p}{2}$  в силу монотонности с вероятностью 1. Это противоречит тому, что  $\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Отсюда следует, что последовательность  $\{|\xi_n - \xi|^p\}_{n=1}^{\infty}$  убывает почти наверное. Кроме того,  $\{|\xi_n - \xi|^p\}_{n=1}^{\infty}$  сходится по вероятности к нулю: для любого  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi|^p - 0 > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{|\xi_n - \xi| > \varepsilon^{1/p}\} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Тогда из неё можно выделить подпоследовательность  $\{|\xi_{n_k} - \xi|^p\}_{k=1}^{\infty}$ , которая сходится почти наверное, причём к нулю. Итак, имеем убывающую почти наверное и сходящуюся к нулю с вероятностью 1 последовательность  $\{|\xi_{n_k} - \xi|^p\}_{k=1}^{\infty}$ . Тогда по теореме о монотонной сходимости из курса функционального анализа получаем, что

$$\mathbb{E}[|\xi_{n_k} - \xi|^p] \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \mathbb{E}[0] = 0.$$

В силу монотонности последовательности  $\{\mathbb{E}[|\xi_n - \xi|^p]\}_{n=1}^{\infty}$  получаем, что она тоже сходится к нулю, а значит,  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi$ .

5. Если последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  равномерно ограничена, т. е. существует такое число  $a > 0$ , что  $|\xi_n| < a$  для всех  $n$ , то из  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \xi$  следует  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi$ . Выберем некоторые  $\varepsilon > 0$  и  $\delta > 0$ . Тогда из сходимости по вероятности следует фундаментальность последовательности  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  по вероятности, т. е. найдётся номер  $N$  такой, что для всех  $n, m > N$  выполняется неравенство

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - \xi_m| > \varepsilon\} \leq \delta.$$

Рассмотрим разбиение  $\Omega = A \cup B$ , где  $A = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| > \varepsilon\}$ ,  $B = \{\omega \in \Omega \mid |\xi_n(\omega) - \xi_m(\omega)| \leq \varepsilon\}$ . Тогда для всех  $n, m > N$  выполнено (считаем, что  $\varepsilon < 1$ , откуда  $\varepsilon^p < \varepsilon$ )

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|\xi_n - \xi_m|^p] &= \int_{\Omega} |\xi_n - \xi_m|^p d\mathbb{P} \\ &= \int_A |\xi_n - \xi_m|^p d\mathbb{P} + \int_B |\xi_n - \xi_m|^p d\mathbb{P} \\ &\leq 2a^p \delta + \varepsilon. \end{aligned}$$

Подбирая  $\delta$  достаточно маленьким, можно добиться выполнения  $\mathbb{E}[|\xi_n - \xi_m|^p] \leq 2\varepsilon$  для всех достаточно больших номеров  $n$  и  $m$ . В силу произвольности выбора  $\varepsilon > 0$  получаем, что  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  фундаментальна в среднем порядка  $p$ , а значит, по признаку сходимости Коши в среднем порядка  $p$  получаем  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L_p} \xi$ .

**Пример 1.** Придумайте последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая сходится по распределению к  $\xi$ , но не сходится по вероятности к  $\xi$ .

*Решение.* Рассмотрим случайную величину  $\eta \sim \text{Be}(\frac{1}{2})$ . Пусть  $\xi_n = \eta$  для всех  $n$  и пусть  $\xi = 1 - \eta$ . Тогда  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \eta$  и  $\xi \sim \text{Be}(\frac{1}{2})$ , а значит,  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{d} \xi$ . Но так как  $|\xi_n - \xi| = 1$  для всех  $n$  с вероятностью 1, то  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$  не сходится по вероятности к  $\xi$ .  $\square$

**Пример 2.** Придумайте последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая сходится по вероятности к  $\xi$ , но не сходится почти наверное к  $\xi$ .

*Решение.* Рассмотрим последовательность независимых случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , где  $\xi_n \sim \text{Be}(p_n)$ . Заметим, что из леммы Бореля-Кантелли следует, что

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} p_n < \infty,$$

достаточно взять  $A_n = \{\xi_n = 1\}$ , ведь в таком случае событие  $A$  из формулировки леммы будет состоять из тех и только элементарных исходов, которые принадлежат бесконечному числу событий из набора  $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ , а значит,  $\bar{A}$  состоит из тех и только тех элементарных исходов для которых  $\xi_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$ . Аналогично

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 1 \iff \sum_{n=1}^{\infty} (1 - p_n) < \infty.$$

Возьмём  $p_n = \frac{1}{n}$ . Тогда получим, что  $\xi_n$  не может стремиться ни к 1, ни к 0 с вероятностью 1. Так как 0 и 1 — единственные возможные значения для членов  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , то данная последовательность не сходится с вероятностью 1. Но она сходится по вероятности к нулю: для любого  $\varepsilon > 0$  выполнено

$$\mathbb{P}\{|\xi_n - 0| > \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = p_n = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

$\square$

**Пример 3.** Придумайте последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая сходится по вероятности к  $\xi$ , но не сходится в среднем порядка  $p$  к  $\xi$  ни для какого  $p > 0$ .

*Решение.* Рассмотрим последовательность случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\mathbb{P}\{\xi_n = e^n\} = \frac{1}{n} = 1 - \mathbb{P}\{\xi_n = 0\}.$$

Тогда для всякого  $\varepsilon > 0$  (не умаляя общности, считаем, что  $\varepsilon < 1$ )

$$\mathbb{P}\{|\xi_n| \leq \varepsilon\} = \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1,$$



т. е.  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 0$ . С другой стороны, для любого  $p > 0$

$$\mathbb{E}[|\xi_n - 0|^p] = \frac{e^{np}}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty,$$

т. е.  $\xi_n$  не сходится в среднем порядка  $p$  к нулю ни для какого  $p > 0$ .  $\square$

**Пример 4.** Придумайте последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая сходится почти наверное к  $\xi$ , но не сходится в среднем порядка  $p$  к  $\xi$  ни для какого  $p > 0$ .

*Решение.* Рассмотрим последовательность независимых случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\mathbb{P}\{\xi_n = e^n\} = \frac{1}{n^2}, \quad \mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

Из леммы Бореля-Кантелли получаем

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n = e^n\} < \infty.$$

Так как

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n = e^n\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} < \infty,$$

а значит,  $\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{п.н.}} 0$ , что следует из леммы Бореля-Кантелли (по аналогии с примером 2). Однако при каждом  $p > 0$

$$\mathbb{E}[|\xi_n - 0|^p] = \frac{e^{pn}}{n^2} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \infty,$$

т. е.  $\xi_n$  не сходится в среднем порядка  $p$  к нулю ни для какого  $p > 0$ .  $\square$

**Пример 5.** Придумайте последовательность  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ , которая сходится в среднем порядка  $p$  к  $\xi$ , но не сходится почти наверное к  $\xi$ .

*Решение.* Рассмотрим последовательность независимых случайных величин  $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ :

$$\mathbb{P}\{\xi_n = 0\} = 1 - \frac{1}{n}, \quad \mathbb{P}\{\xi_n = 1\} = \mathbb{P}\{\xi_n = -1\} = \frac{1}{2n}.$$

Тогда

$$\mathbb{E}[|\xi_n - 0|^p] = 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) + 1^p \cdot \frac{1}{2n} + 1^p \cdot \frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Из леммы Бореля-Кантелли получаем

$$\xi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \iff \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n \neq 0\} < \infty.$$

Но

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\{\xi_n \neq 0\} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty,$$

а значит,  $\xi_n$  не сходится к нулю почти наверное.  $\square$