# Числовые характеристики случайных величин. Семинар 4. 25 сентября 2018 г.

*Подготовил: Горбунов Э.*

**Источники: [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 3 §6, Гл. 4 §1, 3, 5, 6, 7, Приложение 3], [Коралов, §1.2, 3.1, 3.2, 3.3], [Ширяев, Гл. 2 §6], [Гнеденко, Гл. 4 §22, Гл. 5, §23-26]**

Ключевые слова: интеграл Лебега по вероятностной мере, интеграл Лебега-Стильтьеса, интеграл Римана-Стильтьеса, математическое ожидание и дисперсия случайной величины, моменты случайной величины, ковариация, коэффициент корреляции, неравенство Коши-Буняковского, неравенство Йенсена, неравенство Юнга, неравенство Гёльдера, неравенство Минковского, неравенство Ляпунова

## Интеграл Лебега по вероятностной мере и интеграл Стильтьеса

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Интеград Лебега по вероятностной мере (далее в этом разделе будем называть это просто интегралом) от произвольной измеримой функции определяется в 3 этапа. Начнём с определения для **простых функций**.

**Определение 1.** Случайная величина $\xi(\omega)$ называется **простой**, если множество её значений конечно.

**Определение 2. Индикатором** множества $A \in \mathcal{F}$ называется простая функция, заданная на элементах $\Omega$ следующим образом:

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что любая простая функция $\xi(\omega)$ представима в виде

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega),$$

где $a_k, k = 1, \ldots, n$ — **различные** значения, принимаемые $\xi$, а $A_k = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\}$. Множества $A_k$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

**Определение 3. Интегралом от простой случайной величины** $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{P}\{A_k\}.$$

**Интегралом по множеству** $A \in \mathcal{F}$ от простой измеримой функции $\xi(\omega)$ называется

$$\int\limits_A \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) \mathbb{I}_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Теперь определим интеграл от положительной случайной величины.

**Лемма 1.** Пусть случайная величина $\xi(\omega) \geqslant 0$. Тогда существует последовательность $\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых простых функций такая, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \to \infty$ (сходимость поточечная, т. е. для каждого $\omega \hookrightarrow \xi(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$).

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в **[Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 1]** или **[Коралов, Глава 3, §3.1, Теорема 3.1]**. $\square$

**Определение 4.** **Интегралом неотрицательной функции** $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int \xi_n d\mathbb{P},$$

где $\xi_n$ — последовательность простых измеримых функций таких, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \to \infty$. Будем говорить, что интеграл $\int \xi d\mathbb{P}$ **существует**, а $\xi$ **интегрируема**, если $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$.

Интеграл неотрицательной функции корректно определён, т. к. его значения не зависит от выбора последовательности простых функций $\xi_n$ монотонно сходящихся к $\xi$ (см. **[Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 2]** или **[Коралов, Гл. 3, §3.1, Теорема 3.4]**).

**Определение 5.** **Интегралом от произвольной измеримой функции** $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi^+ d\mathbb{P} - \int \xi^- d\mathbb{P}, \quad \xi^\pm = \max\{0, \pm\xi\},$$

если хотя бы одно из значений $\int \xi^\pm d\mathbb{P}$ конечно. В противном случае говорят, что **интеграла не существует**, а функция $\xi$ **не интегрируема**.

Нетрудно показать, что $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$ тогда и только тогда, когда $\int |\xi| d\mathbb{P} < \infty$. Кроме того, если существует $\int \xi d\mathbb{P}$, то существует и $\int\limits_A \xi d\mathbb{P} = \int \xi \mathbb{I}_A d\mathbb{P}$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Выполняются привычные свойства интегралов.

1. Если множества $A_i \in \mathcal{F}$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_i A_i = \Omega$, то

$$\int \xi d\mathbb{P} = \sum_i \int\limits_{A_i} \xi d\mathbb{P}.$$

2. $\int (\xi + \eta) d\mathbb{P} = \int \xi d\mathbb{P} + \int \eta d\mathbb{P}$.
3. Если $a$ — произвольная постоянная, то

$$\int a\xi d\mathbb{P} = a \int \xi d\mathbb{P}.$$

4. Если $\xi \leqslant \eta$, то $\int \xi d\mathbb{P} \leqslant \int \eta d\mathbb{P}$.
5. $\left|\int \xi d\mathbb{P}\right| \leqslant \int |\xi| d\mathbb{P}$.
6. Если $c_1 \leqslant \xi \leqslant c_2$, то $c_1 \leqslant \int \xi d\mathbb{P} \leqslant c_2$ (здесь аквтивно используется тот факт, что $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
7. Если $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$ и $\int \xi d\mathbb{P}$ существует, то $\int \xi d\mathbb{P} = \int \eta d\mathbb{P}$.

**Теорема 1.** Пусть $g(x)$ — борелевская функция на прямой $\mathbb{R}$. Определим случайную величину $\eta = g(\xi(\omega))$. Если $\int \eta d\mathbb{P}$ существует, то

$$\int\limits_\Omega \eta d\mathbb{P} = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_\xi(x).$$

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в **[Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 3]** или **[Коралов, Глава 3, §3.2, Теорема 3.8]**. □

Интеграл в правой части может быть записан также в форме

$$\int g(x)dF_\xi(x).$$

В таком виде он называется **интегралом Лебега-Стильтьеса** от функции $g(x)$ по распределению $F_\xi$. Более того, если $g(x)$ — непрерывная функция, то интеграл Лебега-Стильтьеса совпадает с интегралом **Римана-Стильтьеса**, равным по определению

$$\int g(x)dF_\xi(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty\\ b\to+\infty}} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(\tilde{x}_k)\left[F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)\right],$$

где предел в правой части берётся при мелкости разбиения $\max\limits_k(x_{k+1}-x_k) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и $\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1})$. Можно показать, что предел не зависит от выбора разбиения. Более того, в силу Теоремы 1 мы знаем, что все свойства интеграла Лебега по вероятностной мере сохраняются и для интеграла Римана-Стильтьеса в случае непрерывной $g(x)$.

Перед тем как двигаться дальше рассмотрим следующее упражнение.

**Упражнение 1.** Докажите, что функция распределения имеет не более чем счётное число точек разрыва.

Пусть $F(x)$ — произвольная функция распределения. Тогда её можно представить в виде суммы $F(x) = F_{\text{Н}}(x) + F_{\text{Д}}(x)$ непрерывной и дискретных компонент. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — точки разрывов $F_{\text{Д}}(x)$:

$$p_k = F_{\text{Д}}(x_k + 0) - F_{\text{Д}}(x_k) > 0.$$

Тогда по определению

$$\int g(x)dF(x) = \sum_k p_k g(x_k) + \int g(x)dF_{\text{Н}}(x).$$

Рассмотрим два важнейших частных случая.

1. **Дискретное распределение.** Из определения интеграла Стильтьеса получаем, что в случае дискретного распределения интеграл превращается в сумму (функция распределения $F$ является ступенчатой функцией):
$$\int g(x)dF(x) = \sum_k g(x_k)(F(x_k+0) - F(x_k)) = \sum_k g(x_k)\mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$
где $x_1, x_2, \ldots$ — точки скачков $F(x)$.

2. **Абсолютно непрерывное распределение.** В случае абсолютно непрерывного распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt$ интеграл Стильтьеса правращается в интеграл Римана:
$$\int g(x)dF(x) = \int g(x)f(x)dx.$$

Некоторые свойства интеграла Стильтьеса, вытекающие из определения:

1) $\int\limits_a^b dF = F(b) - F(a)$;

2) $\int\limits_a^b g dF = \int\limits_a^c g dF + \int\limits_c^b g dF$;

3) $\int(\alpha g + \beta h)dF = \alpha\int g dF + \beta\int h dF$, где $a, b = \text{const}$.

## Математическое ожидание

**Определение 6. Математическим ожиданием** случайной величины $\xi$ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется число

$$\mathbb{E}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

если интеграл, стоящий в правой части, существует.

Иными словами, математическое ожидание обобщает понятие среднего для случайной величины, ведь $\int d\mathbb{P}(\omega) = 1$. Кроме того, по теореме 1 справедливо равенство, которое более удобно для практики:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_\xi(x).$$

**Следствие 1.** Если $\xi$ — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — набор значений случайной величины $\xi$ (при условии, что ряд абсолютно сходится; в противном случае говорят, что случайная величина $\xi$ **не имеет математического ожидания**).

**Следствие 2.** Если $\xi$ — абсолютно непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$, то

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно (иначе случайная величина $\xi$ **не имеет математического ожидания**).

**Следствие 3.** Если $g(x)$ — борелевская функция на прямой, то $\eta = g(\xi)$ — тоже случаная величина и

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int\limits_{\Omega} g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) dF_\xi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_{g(\xi)}(x),$$

где последнее равенство следует из теоремы 1.

Из определения следует, что $\mathbb{E}\xi < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi| < \infty$. Можно показать, что $\mathbb{E}\xi$ не ограничено или не существует, если, например, $F(x) < 1 - \frac{1}{x}$ для всех достаточно больших $x$.

Основные свойства математического ожидания следуют из свойств интеграла Лебега.

1. Если $a$ и $b$ постоянные, то $\mathbb{E}[a + b\xi] = a + b\mathbb{E}\xi$.
2. $\mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, если существуют какие-нибудь два участвующих в равенстве математических ожидания. Отметим, что случайные величины совсем не обязательно должны быть независимыми. Данное свойство не совсем очевидно, если задавать математическое ожидание по формулам, которые мы получили в Следствиях 1 и 2, но оно легко получается из определение через интеграл Лебега.
3. Если $a \leqslant \xi \leqslant b$, то $a \leqslant \mathbb{E}\xi \leqslant b$.
4. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$.
5. Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ с вероятностью 1. Данное свойство легко получить, если представить интеграл Лебега по $\Omega$ в виде суммы интеграла Лебега по $A$ и $B$, где $A = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = 0\}, B = \Omega \setminus A$.
6. $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{E}\mathbb{I}_A$.

7. Если $\xi, \eta$ — независимые случайные величины, то $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$. Данное свойство доказывается через произведение мер и **теорему Фубини** (см. **[[Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 4]]**).

**Пример 1.** Пусть $\xi$ — число выпавших очков на игральном кубике. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2} = 3,5.$$

**Пример 2.** Пусть $\xi \sim \mathrm{Be}(p)$. Найдите $\mathbb{E}\xi$.

**Пример 3.** Рассмотрим случайную величину $\xi$ с распределением $\mathbb{P}\{\xi = 2^n\} = 2^{-n}, n \geqslant 1$. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n} 2^n \cdot 2^{-n} = +\infty.$$

У случайной величины $\eta$ с распределением $\mathbb{P}\{\eta = 2^n\} = \mathbb{P}\{\eta = -2^n\} = 2^{-n-1}$ нет мат. ожидания, так как $\mathbb{E}\xi_+ = \mathbb{E}\xi_- = +\infty$.

**Пример 4.** Примером абсолютно непрерывной случайной величины, не имеющей мат. ожидания, является случайная велична $\xi \sim \mathrm{Ca}(0,1)$. Действительно, её плотность $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2+1}$, а интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} dx$$

не сходится абсолютно.

**Упражнение 2.** Используя линейность мат. ожидания, найдите мат. ожидания случайной величины $\xi \sim \mathrm{Binom}(n,p)$.

Свойство линейности математического ожидания бывает очень полезно для поиска мат. ожидания количества чего-нибудь. В таких задачах часто работает следующий приём: представляем исходную случайную величину в виде суммы индикаторов каких-то событий (возможно, зависимых) и пользуемся линейностью мат. ожидания.

**Упражнение 3.** (Задача №79) Имеется $n$ пронумерованных конвертов и $n$ пронумерованных писем. Письма случайным образом раскладываются по конвертам (все $n!$ способов равновероятны). Найдите мат. ожидание числа совпадений номеров письма и конверта (письмо лежит в конверте с тем же номером).

**Пример 5.** Пусть $\xi \sim \mathrm{Exp}(1)$ (т.е. $F_\xi(x) = 1 - e^{-x}$) и $\eta = \frac{e^\xi \sin \xi}{\xi}$. Тогда существует несобственный интеграл Римана-Стильтьеса

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} dF_\xi(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} e^{-x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

но $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$, а значит, $\eta$ не имеет математического ожидания.

**Пример 6.** Пусть $\xi \sim \mathcal{U}[0,1]$ и $\eta = R(\xi)$, где

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тогда $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$, т. к. $\xi = \eta$ *почти наверное*, что означает, что $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$. Однако итеграла Римана (Римана-Стильтьеса) $\int\limits_0^1 R(x)dx$ не существует.

## Дисперсия и другие числовые характеристики случайных величин

**Определение 7.** Величину $\mathbb{E}[\xi^k], k = 1, 2, \ldots$ будем называть **$k$-м моментом** случайной величины $\xi$.

**Определение 8.** Величину $\mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k\right], k = 1, 2, \ldots$ будем называть **центральным $k$-м моментом** случайной величины $\xi$.

**Определение 9. Дисперсией** случайной величины $\xi$ называется второй цетральный момент:

$$\mathbb{D}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2\right].$$

Перечислим некоторые свойства дисперсии.

1. $\mathbb{D}\xi \geqslant 0$. $\mathbb{D}\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа $c$, что $\mathbb{P}\{\xi = c\} = 1$.
2. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left[\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right] - (\mathbb{E}\xi)^2$.
3. $\mathbb{D}[a + b\xi] = b^2\mathbb{D}[\xi]$, где $a, b = \text{const}$.
4. Если $\xi$ и $\eta$ — независимые случайные величины, то $\mathbb{D}[\xi + \eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$.
5. $\mathbb{D}\xi$ минимизирует значение $\mathbb{E}\left[(\xi - a)^2\right], a \in \mathbb{R}$.

**Упражнение 4.** Найти дисперсию случайной величины $\xi$, если

(a) $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$;

(b) $\xi \sim \mathcal{U}[a, b]$.

## Пространство $L_2$

Случайные величины с конечным вторым моментов образуют пространство линейное функциональное пространство $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Кроме того, отождествим случайные величины, которые отличаются на множестве вероятностной меры ноль. Это делается для того, чтобы ввести скалярное произведение:

$$\langle \xi, \eta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi\eta].$$

Действительно, равенство $\langle \xi, \xi \rangle = 0$ означает только, что $\xi = 0$ почти наверное, но не для любого $\omega \in \Omega$. Но мы их отождествили, поэтому все аксиомы скалярного произведения выполнены. Таким образом, мы получили евклидово пространство. Норма вводится естественным образом: $\|\xi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{D}\xi = \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2.$$

Для скалярного произведения выполняется **неравенство Коши-Буняковского-Шварца**:

$$|\mathbb{E}[\xi\eta]| \stackrel{\text{def}}{=} |\langle \xi, \eta \rangle| \leqslant \|\xi\| \cdot \|\eta\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]\mathbb{E}[\eta^2]}.$$

**Определение 10. Ковариацией случайных величин** $\xi, \eta$ называется число

$$\text{cov}(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)\right] = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Из неравенства КБШ следует, что для ковариации выполняется неравенство:

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leqslant \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}.$$

Нетрудно видеть, что если $\xi, \eta$ — независимые, то $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$. Обратное неверно: если ковариация величин равна 0, из этого не следует их независимость. Тем не менее, ковариация часто используется, как некоторая мера зависимости величин, т.к. ей удобно пользоваться.

**Определение 11. Коэффициентом корреляции случайных величин** $\xi, \eta$ называется число

$$r_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}}.$$

Он принимает значения из $[-1,1]$ и лучше отражает зависимость случайных величин $\xi$ и $\eta$. Заметим также, что если $r_{\xi\eta}=0$, то $\mathbb{D}[\xi+\eta]=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta$.

## Неравенства, связанные с моментами

**Неравенства Коши-Буняковского:**

$$|\mathbb{E}\xi\eta| \le \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$$

$$|\mathrm{cov}(\xi,\eta)| \le \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}$$

**Неравенство Йенсена:**

$$f(\mathbb{E}\xi) \le \mathbb{E}f(\xi), \quad f \text{ – выпуклая функция}$$

**Неравенство Юнга:**

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \le \frac{\mathbb{E}|\xi|^p}{p}+\frac{\mathbb{E}|\eta|^q}{q}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p,q\ge 0$$

**Неравенство Гёльдера:**

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \le \left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\mathbb{E}|\xi|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,\ p,q\ge 0$$

**Неравенство Минковского:**

$$\left(\mathbb{E}|\xi+\eta|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\mathbb{E}|\eta|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p\ge 1$$

**Неравенство Ляпунова:**

$$\left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\mathbb{E}|\xi|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0<p\le q$$