Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа. Центральная предельная теорема. Теорема Берри-Эссеена. Семинар 12. 20 ноября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 8], [Ширяев, Гл. 1, §6, Гл. 3, §4], [Боровков, Гл. 5, §2, 3, Гл. 8 §2, 4, 7], [Гнеденко, Гл. 2, §10-12, Гл. 8, §39-40]

Ключевые слова: локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, классическая цетральная предельная теорема, центральная предельная теорема в форме Линдеберга, центральная предельная теорема в форме Ляпунова, теорема Берри-Эссеена

Локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа

Рассмотрим для начала последовательности независимых одинаково распределённых случайных величин, имеющих распределение Бернулли.

Теорема 1. (Локальная теорема Муавра-Лапласа). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ с распределением $\mathrm{Be}(p)$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Пусть последовательность целых чисел $\{c_n\}_{n=1}^\infty$ такова, что существуют числа $a < b$, для которых выполняется неравенство

$$a \leqslant \frac{c_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда

$$\frac{\mathbb{P}\{S_n = c_n\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(c_n-np)^2}{2np(1-p)}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

Замечание 1. Отметим, что

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{-\frac{(c_n-np)^2}{2np(1-p)}} = f\left(c_n\right),$$

где $f(\cdot)$ — плотность распределения $\mathcal{N}(np, np(1-p))$.

Сходимость в доказанной теореме равномерная, поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 2. Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ — последовательность независимых случайных величин $\{\xi_n\}_{n=1}^\infty$ с распределением $\mathrm{Be}(p)$. Обозначим

$$S_n = \sum_{k=1}^n \xi_k.$$

Тогда

$$\frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

В частности, для любых $a, b \in \mathbb{R}, a < b$ выполнено

$$\mathbb{P}\left\{a \leqslant \frac{S_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leqslant b\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(b) - \Phi(a),$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ — функция распределения стандартной нормальной случайной величины.

Упражнение 1. В тесто для выпечки булок с изюмом замешано N изюмин. Всего из данного теста выпечено K булок. Оцените вероятность того, что в случайно выбранной булке число изюмин находится в пределах от a до b.

Центральная предельная теорема

Получим результаты, имеющие похожий на интегральную теорему Муавра-Лапласа вид, но для более широкого класса последовательностей случайных величин.

Теорема 3. (Классическая ЦПТ). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин с $\mathbb{E}\xi_n = \mu$ и $\mathbb{D}\xi_n = \sigma^2$. Пусть $\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - \mathbb{E}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right]}{\sqrt{\mathbb{D}\left[\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k\right]}} = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - m)}{\sigma\sqrt{n}}$. Тогда

$$\eta_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Заметим, что из доказанной теоремы следует, что

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k - nm}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,\sigma^2).$$

Данное утверждение можно обобщить на случай последовательностей случайных векторов (причём доказательство будет не сильно отличаться, от доказательства в одномерном случае; подробности можно прочитать в **[Боровков, Гл.8, §7]**).

Теорема 4. (Классическая ЦПТ для случайных векторов). Пусть $\{\vec{\xi}_i\}$ — последовательность независимых одинаково распределённых случайных величин таких, что $\mathbb{E}[\vec{\xi}_n] = \vec{m}$ и $\mathbb{E}\left[(\vec{\xi}_n - \vec{m})(\vec{\xi}_n - \vec{m})^\top\right] = \Sigma$, $\det\Sigma \neq 0$. Тогда

$$\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \vec{\xi}_k - n\vec{m}}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,\Sigma).$$

Вообще говоря, сходимость к нормальному распределению для величин типа η_n из условия классической ЦПТ можно гарантировать и в более общем случае.

Теорема 5. (ЦПТ в форме Линдеберга). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. Обозначим

$$B_n^2 = \mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^{n} \xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{D}\xi_k, \quad \eta_n = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1} (\xi_k - \mathbb{E}\xi_k),$$

и для каждого $\tau > 0$ рассмотрим события

$$A_{n,\tau} = \{|\xi_n - \mathbb{E}\xi_n| > \tau B_n\}.$$

Пусть для всех $\tau > 0$ выполнено **условие Линдеберга**:

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k)^2 \mathbb{I}_{A_{n,\tau}}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{B_n^2}\sum_{k=1}^{n} \int\limits_{|x-\mathbb{E}\xi_k|>\tau B_n} (x - \mathbb{E}\xi_k)^2\, dF_{\xi_k}(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

В частности,

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Упражнение 2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — случайная перестановка на n элементах (X_i — номер позиции, в которую переходит i-й элемент; все перестановки равновероятны). Будем говорить, что X_k образует инверсию с X_j, если $j > k$ и $X_k > X_j$. Тогда случайная величина

$$\xi_k = \sum_{j=k+1}^{n} \mathbb{I}_{X_k > X_j}$$

равна числу инверсий X_k с $X_{k+1}, \ldots, X_n$, а случайная величина

$$T = \sum_{k=1}^{n-1} \xi_k$$

равна общему числу инверсий в перестановке. Найдите $\mathbb{E}T$ и $\mathbb{D}T$. Что можно сказать о предельном распределении величины $\frac{T-\mathbb{E}T}{\mathbb{D}T}$?

Условие Линдеберга требует знания хвостов распределения ξ_k. Однако его можно упростить и перейти к ограничению моментов.

Теорема 6. (ЦПТ в форме Ляпунова). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями. Обозначим

$$B_n^2 = \mathbb{D}\left[\sum_{k=1}^{n}\xi_k\right] = \sum_{k=1}^{n}\mathbb{D}\xi_k, \quad \eta_n = \frac{1}{B_n}\sum_{k=1}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k).$$

Пусть для некоторого $\delta > 0$ выполнено **условие Ляпунова**:

$$\frac{1}{B_n^{2+\delta}}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}\left[|\xi_k - \mathbb{E}\xi_k|^{2+\delta}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Тогда равномерно по $x \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x\right\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt.$$

В частности,

$$\frac{1}{B_n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathcal{N}(0,1).$$

Замечание 2. Существуют результаты о сходимости и к другим распределениям. Например, на десятом семинаре мы доказали предельную теорему Пуассона (упражнение 4), которая утверждает, что если $\xi_n \sim \mathrm{Binom}(n, p_n)$ и $np_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lambda > 0$, то $\xi_n \xrightarrow[n\to\infty]{d} \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

Замечание 3. Отметим, что ЦПТ в форме Линдеберга и Ляпунова дают равномерную сходимость $\mathbb{P}\left\{\frac{1}{B_n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k - \mathbb{E}\xi_k) < x\right\}$ по $x \in \mathbb{R}$ к $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$, что сильнее поточечной сходимости функций распределения к функции распределения нормальной случайной величины (что по сути и есть сходимость по распределению), т. е. эти результаты достаточно сильные. Однако эти теоремы не устанавливают скорости сходимости к нормальному распределению.

Оценивание скорости сходимости в центральной предельной теореме

Рассмотрим без доказательства следующий факт.

Теорема 7. (Теорема Берри-Эссеена). Пусть $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и дисперсией σ^2. Обозначим

$$\eta_n = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k}{\sigma\sqrt{n}}$$

Пусть $\mathbb{E}\left[|\xi_1|^3\right] \leqslant \rho$. Тогда

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |\mathbb{P}\{\eta_n < x\} - \mathbb{P}\{\zeta < x\}| \leqslant \frac{c\rho}{\sigma^{\frac{3}{2}}\sqrt{n}}, \quad \zeta \sim \mathcal{N}(0,1).$$

Замечание 4. Известно, что $0.4 \leqslant c < 0.8$. Если есть интерес разобраться с результатами в этой области, то стоит посмотреть ссылки в статье в Википедии.