

---

## Условное математическое ожидание. Семинар 7. 16 октября 2018 г.

---

Подготовил: Горбунов Э.

**Источники:** [Ширяев, Гл. 1 §8, Гл. 2 §7], [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 4 §2], [Гнеденко, Гл. 5 §23]

**Ключевые слова:** УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО СОБЫТИЯ НЕНУЛЕВОЙ МЕРЫ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗБИЕНИЯ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ ОТНОСИТЕЛЬНО СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, ПРИНИМАЮЩЕЙ КОНЕЧНЫЙ НАБОР ЗНАЧЕНИЙ, УСЛОВНОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО РАЗБИЕНИЯ

Первая половина семинара — контрольная работа на 40 минут.

### Условное математическое ожидание относительно события ненулевой меры

На [втором семинаре](#) мы обнаружили, что условная вероятность относительно события ненулевой меры является *вероятностной мерой* на исходном измеримом пространстве  $(\Omega, \mathcal{F})$ . Следовательно, относительно неё можно ввести интеграл Лебега и определить *математическое ожидание*. Однако мы начнём с эквивалентного определения, записанного в другой форме.

**Определение 1.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство,  $B \in \mathcal{F}$  — событие ненулевой вероятностной меры,  $\xi$  — случайная величина на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . **Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно события  $B$**  называется величина

$$\mathbb{E}[\xi|B] \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{E}[\xi \cdot \mathbb{I}_B]}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

**Замечание 1.** Введённое определение обобщает понятие условной вероятности. Действительно, если рассмотреть произвольное измеримое множество  $A \in \mathcal{F}$  и его индикаторную случайную величину  $\xi = \mathbb{I}_A$ , то её условное математическое ожидание относительно множества  $B$  совпадает с условной вероятностью  $A$  при условии  $B$ :

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_A \cdot \mathbb{I}_B]}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{I}_{A \cap B}]}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \mathbb{P}\{A|B\}.$$

Из определения следует, что

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \frac{1}{\mathbb{P}\{B\}} \int_{\Omega} \xi \cdot \mathbb{I}_B d\mathbb{P}(\omega) = \int_B \xi \frac{d\mathbb{P}(\omega)}{\mathbb{P}\{B\}} = \int_B \xi d\mathbb{P}(\omega|B) = \int_{\Omega} \xi d\mathbb{P}(\omega|B),$$

где последнее равенство следует из того, что  $\mathbb{P}\{\overline{B}|B\} = 0$ . Итак, условное математическое ожидание относительно события ненулевой вероятностной меры есть интеграл Лебега относительно вероятностной меры  $\mathbb{P}\{\cdot | B\}$ . Если переписать это утверждение через интеграл Стильтьеса, то получим

$$\mathbb{E}[\xi|B] = \int_{\mathbb{R}^n} x dF_{\xi}(x|B),$$

где  $F_{\xi}(x|B) = \mathbb{P}\{\xi < x|B\}$ .

Пусть теперь  $B_1, B_2, \dots$  — конечное или счётное объединение попарно непересекающихся множеств ненулевой меры. Тогда из формулы полной вероятности

$$F(x) = \sum_i \mathbb{P}\{B_i\} F(x|B_i)$$

и представления условного математического ожидания относительно события через интеграл Стильтьеса получаем **формулу полного математического ожидания**:

$$\mathbb{E}\xi = \sum_i \mathbb{P}\{B_i\} \mathbb{E}[\xi|B_i].$$

Данная формула оказывается очень удобной для вычисления математических ожиданий.

**Пример 1.** Пусть  $\xi_1, \xi_2, \dots$  — независимые одинаково распределённые случайные величины с конечными математическими ожиданиями,  $N$  — случайная величина, независимая от них, принимающая натуральные значения и имеющая конечное математическое ожидание. Определим случайную величину  $\eta = \sum_{i=1}^N \xi_i$ . Докажите *тождество Вальда*:

$$\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi_1 \cdot \mathbb{E}N.$$

### Условное математическое ожидание относительно разбиения

Двигаясь от частного к общему, мы сначала определим условное математическое ожидание относительно разбиения для дискретных случайных величин, а затем дадим определение в общем случае.

Итак, пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — дискретное вероятностное пространство и  $D = \{B_1, \dots, B_n\}$  — **разбиение**  $\Omega$ , т. е.  $B_i \in \mathcal{F}, \mathbb{P}\{B_i\} > 0$  и  $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \Omega$ .

**Определение 2.** Условной вероятностью события  $A \in \mathcal{F}$  относительно разбиения  $D$  называется *случайная величина*

$$\mathbb{P}\{A|D\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A|B_i\} \mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Отметим, что данная случайная величина является простой и принимает на множествах  $B_i$  значения  $\mathbb{P}\{A|B_i\}$ . Перечислим простейшие свойства условной вероятности относительно разбиения.

1. Для любых  $A, B \in \mathcal{F}$  выполнено:  $\mathbb{P}\{A \cup B|D\}(\omega) = \mathbb{P}\{A|D\}(\omega) + \mathbb{P}\{B|D\}(\omega)$ .
2. Если  $D = \{\Omega\}$  (тривиальное разбиение), то  $\mathbb{P}\{A|D\}(\omega) = \mathbb{P}\{A\}$ .
3.  $\mathbb{E}[\mathbb{P}\{A|D\}(\omega)] = \mathbb{P}\{A\}$  (формула полной вероятности).

Рассмотрим теперь некоторую случайную величину  $\eta$ , принимающую конечное число значений:

$$\eta(\omega) = \sum_{i=1}^n y_i \mathbb{I}_{B_i}(\omega),$$

где  $B_i = \{\omega \mid \eta(\omega) = y_i\}$ . Разбиение  $D_\eta = \{B_1, \dots, B_n\}$  называется **разбиением, порождаемым случайной величиной  $\eta$** .

**Определение 3.** Условной вероятностью события  $A \in \mathcal{F}$  относительно случайной величины  $\eta$ , принимающей конечный набор значений будем называть следующую *случайную величину*:

$$\mathbb{P}\{A|\eta\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|D_\eta\}.$$

Данное определение легко обобщается на случай конечного числа случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , имеющих конечное множество значений. Рассмотрим разбиение  $D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$ , состоящее из событий

$$D_{y_1, \dots, y_m} = \{\omega \mid \eta_1(\omega) = y_1, \dots, \eta_m(\omega) = y_m\}$$

для всех возможных наборов  $(y_1, \dots, y_m)$ .

**Определение 4.** Условной вероятностью события  $A \in \mathcal{F}$  относительно случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , принимающих конечный набор значений будем называть следующую случайную величину:

$$\mathbb{P}\{A|\eta_1, \dots, \eta_m\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|D_{\eta_1, \dots, \eta_m}\}.$$

Рассмотрим случайную величину  $\xi$ , принимающую конечное число значений,

$$\xi = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{I}_{A_i}, \quad A_i = \{\omega \mid \xi(\omega) = x_i\}$$

и некоторое разбиение  $D = \{B_1, \dots, B_m\}$ . Математическое ожидание  $\xi$ , как мы знаем, определяется через вероятности  $\mathbb{P}\{A_i\}$  по формуле

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}\{A_i\}.$$

Если в данной формуле заменить  $\mathbb{P}\{A_i\}$  на  $\mathbb{P}\{A_i|D\}$ , то получим определение **условного математического ожидания  $\xi$ , принимающей конечный набор значений, относительно разбиения  $D$** :

$$\mathbb{E}[\xi|D](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^m x_i \mathbb{P}\{A_i|D\}(\omega).$$

Отметим, что условное математическое ожидание относительно разбиения — это случайная величина. Кроме того,  $\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$  для всех  $\omega$  из одного элемента разбиения  $B_i$  принимает одно и то же значение  $\sum_{i=1}^{\infty} x_i \mathbb{P}\{A_i|B_i\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|B_i]$ . Данное наблюдение приводит нас к общему определению математического ожидания относительно разбиения.

**Определение 5.** Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно разбиения  $D = \{B_1, \dots, B_n\}$  называется случайная величина

$$\mathbb{E}[\xi|D](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[\xi|B_i] \mathbb{I}_{B_i}(\omega).$$

Перечислим некоторые важные свойства условного математического ожидания относительно разбиения ( $\xi, \eta$  — случайные величины, имеющие конечные мат. ожидания).

1.  $\mathbb{E}[a\xi + b\eta|D](\omega) = a\mathbb{E}[\xi|D](\omega) + b\mathbb{E}[\eta|D](\omega)$ , где  $a, b$  — константы.
2.  $\mathbb{E}[\xi|\{\Omega\}](\omega) = \mathbb{E}\xi$ .
3.  $\mathbb{E}[C|D] = C$ , где  $C$  — константа.
4.  $\mathbb{E}[\mathbb{I}_A|D] = \mathbb{P}\{A|D\}$ .
5.  $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|D]] = \mathbb{E}\xi$  (обобщение формулы полной вероятности).
6. Если  $\eta = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{B_i}$ , то  $\mathbb{E}[\xi\eta|D](\omega) = \eta(\omega)\mathbb{E}[\xi|D](\omega)$ .

**Упражнение 1.** Показать, что если  $\mathbb{D}\xi < \infty$ , то  $\mathbb{E}[\xi|D]$  минимизирует средний квадрат отклонения  $\mathbb{E}[(\xi - \eta)^2]$  среди всех случайных величин  $\eta$ , измеримых относительно  $\sigma$ -алгебры, порождённой разбиением  $D$ .

Данное упражнение показывает, что условное математическое ожидание случайной величины  $\xi$  относительно разбиения  $D$  — это проекция в пространстве  $L_2$  (было определено на [четвёртом семинаре](#)) случайной величины  $\xi$  на подпространство случайных величин, измеримых относительно  $\sigma(D)$ , то есть оператор условного математического ожидания относительно разбиения является проектором на указанное подпространство.

Рассмотрим конечное число случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_m$ , имеющих конечное множество значений. Рассмотрим разбиение  $D_{\eta_1, \dots, \eta_m}$ , состоящее из событий

$$D_{y_1, \dots, y_m} = \{\omega \mid \eta_1(\omega) = y_1, \dots, \eta_m(\omega) = y_m\}$$

для всех возможных наборов  $(y_1, \dots, y_m)$ .

**Определение 6.** Условным математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  относительно случайных величин  $\eta_1, \dots, \eta_m$  будем называть следующую случайную величину:

$$\mathbb{E}[\xi \mid \eta_1, \dots, \eta_m] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi \mid D_{\eta_1, \dots, \eta_m}].$$

Некоторые свойства, следующие из определения:

- 1) если  $\xi$  и  $\eta$  независимы, то  $\mathbb{E}[\xi \mid \eta] = \mathbb{E}\xi$ ;
- 2)  $\mathbb{E}[\eta \mid \eta] = \eta$ .