Числовые характеристики случайных величин. Семинар 4. 25 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 3 §6, Гл. 4 §1, 3, 5, 6, 7, Приложение 3], [Коралов, §1.2, 3.1, 3.2, 3.3], [Ширяев, Гл. 2 §6], [Гнеденко, Гл. 4 §22, Гл. 5, §23-26]

Ключевые слова: интеграл Лебега по вероятностной мере, интеграл Лебега-Стильтьеса, интеграл Римана-Стильтьеса, математическое ожидание и дисперсия случайной величины, моменты случайной величины, ковариация, коэффициент корреляции, неравенство Коши-Буняковского, неравенство Йенсена, неравенство Юнга, неравенство Гёльдера, неравенство Минковского, неравенство Ляпунова

Интеграл Лебега по вероятностной мере и интеграл Стильтьеса

Пусть задано вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Интеград Лебега по вероятностной мере (далее в этом разделе будем называть это просто интегралом) от произвольной измеримой функции определяется в 3 этапа. Начнём с определения для **простых функций**.

Определение 1. Случайная величина $\xi(\omega)$ называется **простой**, если множество её значений конечно.

Определение 2. Индикатором множества $A \in \mathcal{F}$ называется простая функция, заданная на элементах Ω следующим образом:

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что любая простая функция $\xi(\omega)$ представима в виде

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega),$$

где $a_k, k = 1, \ldots, n$ — **различные** значения, принимаемые ξ, а $A_k = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\}$. Множества A_k попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \Omega$.

Определение 3. Интегралом от простой случайной величины $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^{n} a_k \mathbb{P}\{A_k\}.$$

Интегралом по множеству $A \in \mathcal{F}$ от простой измеримой функции $\xi(\omega)$ называется

$$\int\limits_A \xi d\mathbb{P} \overset{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) \mathbb{I}_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Теперь определим интеграл от положительной случайной величины.

Лемма 1. Пусть случайная величина $\xi(\omega) \geqslant 0$. Тогда существует последовательность $\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^{\infty}$ измеримых простых функций такая, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \to \infty$ (сходимость поточечная, т. е. для каждого $\omega \hookrightarrow \xi(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$).

Доказательство. Доказательство можно прочитать в **[Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 1]** или **[Коралов, Глава 3, §3.1, Теорема 3.1]**. □

Определение 4. **Интегралом неотрицательной функции** $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} = \lim_{n\to\infty} \int \xi_n d\mathbb{P},$$

где ξ_n — последовательность простых измеримых функций таких, что $\xi_n \uparrow \xi$ при $n \to \infty$. Будем говорить, что интеграл $\int \xi d\mathbb{P}$ **существует**, а ξ **интегрируема**, если $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$.

Интеграл неотрицательной функции корректно определён, т. к. его значения не зависит от выбора последовательности простых функций ξ_n монотонно сходящихся к ξ (см. **[Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 2]** или **[Коралов, Гл. 3, §3.1, Теорема 3.4]**).

Определение 5. **Интегралом от произвольной измеримой функции** $\xi(\omega)$ называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi^+ d\mathbb{P} - \int \xi^- d\mathbb{P}, \quad \xi^\pm = \max\{0, \pm\xi\},$$

если хотя бы одно из значений $\int \xi^\pm d\mathbb{P}$ конечно. В противном случае говорят, что **интеграла не существует**, а функция ξ **не интегрируема**.

Нетрудно показать, что $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$ тогда и только тогда, когда $\int |\xi| d\mathbb{P} < \infty$. Кроме того, если существует $\int \xi d\mathbb{P}$, то существует и $\int\limits_A \xi d\mathbb{P} = \int \xi \mathbb{I}_A d\mathbb{P}$ для любого $A \in \mathcal{F}$.

Выполняются привычные свойства интегралов.

1. Если множества $A_i \in \mathcal{F}$ попарно не пересекаются и $\bigcup\limits_i A_i = \Omega$, то
$$\int \xi d\mathbb{P} = \sum_i \int\limits_{A_i} \xi d\mathbb{P}.$$
2. $\int (\xi + \eta) d\mathbb{P} = \int \xi d\mathbb{P} + \int \eta d\mathbb{P}$.
3. Если a — произвольная постоянная, то
$$\int a\xi d\mathbb{P} = a \int \xi d\mathbb{P}.$$
4. Если $\xi \leqslant \eta$, то $\int \xi d\mathbb{P} \leqslant \int \eta d\mathbb{P}$.
5. $\left|\int \xi d\mathbb{P}\right| \leqslant \int |\xi| d\mathbb{P}$.
6. Если $c_1 \leqslant \xi \leqslant c_2$, то $c_1 \leqslant \int \xi d\mathbb{P} \leqslant c_2$ (здесь аквтивно используется тот факт, что $\mathbb{P}$ — вероятностная мера).
7. Если $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$ и $\int \xi d\mathbb{P}$ существует, то $\int \xi d\mathbb{P} = \int \eta d\mathbb{P}$.

Теорема 1. Пусть $g(x)$ — борелевская функция на прямой $\mathbb{R}$. Определим случайную величину $\eta = g(\xi(\omega))$. Если $\int \eta d\mathbb{P}$ существует, то

$$\int\limits_\Omega \eta d\mathbb{P} = \int\limits_\mathbb{R} g(x) d\mathbb{P}_\xi(x).$$

Доказательство. Доказательство можно прочитать в **[Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 3]** или **[Коралов, Глава 3, §3.2, Теорема 3.8]**. □

Интеграл в правой части может быть записан также в форме

$$\int g(x) dF_\xi(x).$$

В таком виде он называется **интегралом Лебега-Стильтьеса** от функции $g(x)$ по распределению F_ξ. Более того, если $g(x)$ — непрерывная функция, то интеграл Лебега-Стильтьеса совпадает с интегралом **Римана-Стильтьеса**, равным по определению

$$\int g(x) dF_\xi(x) = \lim_{\substack{a\to-\infty \\ b\to+\infty}} \lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(\tilde{x}_k) \left[F_\xi(x_{k+1}) - F_\xi(x_k)\right],$$

где предел в правой части берётся при мелкости разбиения $\max\limits_k (x_{k+1} - x_k) \xrightarrow[N\to\infty]{} 0$, где $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_N = b$ и $\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1})$. Можно показать, что предел не зависит от выбора разбиения. Более того, в силу Теоремы 1 мы знаем, что все свойства интеграла Лебега по вероятностной мере сохраняются и для интеграла Римана-Стильтьеса в случае непрерывной $g(x)$.

Перед тем как двигаться дальше рассмотрим следующее упражнение.

Упражнение 1. Докажите, что функция распределения имеет не более чем счётное число точек разрыва.

Пусть $F(x)$ — произвольная функция распределения. Тогда её можно представить в виде суммы $F(x) = F_{\text{Н}}(x) + F_{\text{Д}}(x)$ непрерывной и дискретных компонент. Пусть $x_1, x_2, \ldots$ — точки разрывов $F_{\text{Д}}(x)$:

$$p_k = F_{\text{Д}}(x_k + 0) - F_{\text{Д}}(x_k) > 0.$$

Тогда по определению

$$\int g(x) dF(x) = \sum_k p_k g(x_k) + \int g(x) dF_{\text{Н}}(x).$$

Рассмотрим два важнейших частных случая.

1. **Дискретное распределение.** Из определения интеграла Стильтьеса получаем, что в случае дискретного распределения интеграл превращается в сумму (функция распределения F является ступенчатой функцией):
$$\int g(x) dF(x) = \sum_k g(x_k)(F(x_k + 0) - F(x_k)) = \sum_k g(x_k)\mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$
где $x_1, x_2, \ldots$ — точки скачков $F(x)$.

2. **Абсолютно непрерывное распределение.** В случае абсолютно непрерывного распределения $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(t) dt$ интеграл Стильтьеса праврващается в интеграл Римана:
$$\int g(x) dF(x) = \int g(x) f(x) dx.$$

Некоторые свойства интеграла Стильтьеса, вытекающие из определения:

1) $\int\limits_a^b dF = F(b) - F(a)$;

2) $\int\limits_a^b g dF = \int\limits_a^c g dF + \int\limits_c^b g dF$;

3) $\int (\alpha g + \beta h) dF = \alpha \int g dF + \beta \int h dF$, где $a, b = \text{const}$.

Математическое ожидание

Определение 6. **Математическим ожиданием** случайной величины ξ на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ называется число

$$\mathbb{E}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

если интеграл, стоящий в правой части, существует.

Иными словами, математическое ожидание обобщает понятие среднего для случайной величины, ведь $\int d\mathbb{P}(\omega) = 1$. Кроме того, по теореме 1 справедливо равенство, которое более удобно для практики:

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{\xi}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_{\xi}(x).$$

Следствие 1. Если ξ — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k} x_k \mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$

где $x_1, x_2, \ldots$ — набор значений случайной величины ξ (при условии, что ряд абсолютно сходится; в противном случае говорят, что случайная величина ξ **не имеет математического ожидания**).

Следствие 2. Если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения $f(x)$, то

$$\mathbb{E}\xi = \int\limits_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно (иначе случайная величина ξ **не имеет математического ожидания**).

Следствие 3. Если $g(x)$ — борелевская функция на прямой, то $\eta = g(\xi)$ — тоже случаная величина и

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int\limits_{\Omega} g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\xi}(x) = \int\limits_{\mathbb{R}} x dF_{g(\xi)}(x),$$

где последнее равенство следует из теоремы 1.

Из определения следует, что $\mathbb{E}\xi < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi| < \infty$. Можно показать, что $\mathbb{E}\xi$ не ограничено или не существует, если, например, $F(x) < 1 - \frac{1}{x}$ для всех достаточно больших x.

Основные свойства математического ожидания следуют из свойств интеграла Лебега.

1. Если a и b постоянные, то $\mathbb{E}[a + b\xi] = a + b\mathbb{E}\xi$.
2. $\mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$, если существуют какие-нибудь два участвующих в равенстве математических ожидания. Отметим, что случайные величины совсем не обязательно должны быть независимыми. Данное свойство не совсем очевидно, если задавать математическое ожидание по формулам, которые мы получили в Следствиях 1 и 2, но оно легко получается из определение через интеграл Лебега.
3. Если $a \leqslant \xi \leqslant b$, то $a \leqslant \mathbb{E}\xi \leqslant b$.
4. $|\mathbb{E}\xi| \leqslant \mathbb{E}|\xi|$.
5. Если $\xi \geqslant 0$ и $\mathbb{E}\xi = 0$, то $\xi = 0$ с вероятностью 1. Данное свойство легко получить, если представить интеграл Лебега по Ω в виде суммы интеграла Лебега по A и B, где $A = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = 0\}, B = \Omega \setminus A$.
6. $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{E}\mathbb{I}_A$.

7. Если ξ, η — независимые случайные величины, то $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$. Данное свойство доказывается через произведение мер и **теорему Фубини** (см. **[[Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 4]]**).

Пример 1. Пусть ξ — число выпавших очков на игральном кубике. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^{6} k\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2} = 3,5.$$

Пример 2. Пусть $\xi \sim \mathrm{Be}(p)$. Найдите $\mathbb{E}\xi$.

Пример 3. Рассмотрим случайную величину ξ с распределением $\mathbb{P}\{\xi = 2^n\} = 2^{-n}, n \geqslant 1$. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{n} 2^n \cdot 2^{-n} = +\infty.$$

У случайной величины η с распределением $\mathbb{P}\{\eta = 2^n\} = \mathbb{P}\{\eta = -2^n\} = 2^{-n-1}$ нет мат. ожидания, так как $\mathbb{E}\xi_+ = \mathbb{E}\xi_- = +\infty$.

Пример 4. Примером абсолютно непрерывной случайной величины, не имеющей мат. ожидания, является случайная велична $\xi \sim \mathrm{Ca}(0,1)$. Действительно, её плотность $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2+1}$, а интеграл

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} dx$$

не сходится абсолютно.

Упражнение 2. Используя линейность мат. ожидания, найдите мат. ожидания случайной величины $\xi \sim \mathrm{Binom}(n,p)$.

Свойство линейности математического ожидания бывает очень полезно для поиска мат. ожидания количества чего-нибудь. В таких задачах часто работает следующий приём: представляем исходную случайную величину в виде суммы индикаторов каких-то событий (возможно, зависимых) и пользуемся линейностью мат. ожидания.

Упражнение 3. (Задача №79) Имеется n пронумерованных конвертов и n пронумерованных писем. Письма случайным образом раскладываются по конвертам (все $n!$ способов равновероятны). Найдите мат. ожидание числа совпадений номеров письма и конверта (письмо лежит в конверте с тем же номером).

Пример 5. Пусть $\xi \sim \mathrm{Exp}(1)$ (т.е. $F_\xi(x) = 1 - e^{-x}$) и $\eta = \frac{e^\xi \sin \xi}{\xi}$. Тогда существует несобственный интеграл Римана-Стильтьеса

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} dF_\xi(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} e^{-x} dx = \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

но $\int\limits_0^{+\infty} \left|\frac{\sin x}{x}\right| dx = \infty$, а значит, η не имеет математического ожидания.

Пример 6. Пусть $\xi \sim \mathcal{U}[0,1]$ и $\eta = R(\xi)$, где

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тогда $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$, т. к. $\xi = \eta$ *почти наверное*, что означает, что $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$. Однако итеграла Римана (Римана-Стильтьеса) $\int\limits_0^1 R(x)dx$ не существует.

Дисперсия и другие числовые характеристики случайных величин

Определение 7. Величину $\mathbb{E}[\xi^k], k = 1, 2, \ldots$ будем называть **k-м моментом** случайной величины ξ.

Определение 8. Величину $\mathbb{E}\left[(\xi-\mathbb{E}\xi)^k\right], k=1,2,\ldots$ будем называть **центральным k-м моментом** случайной величины ξ.

Определение 9. **Дисперсией** случайной величины ξ называется второй цетральный момент:

$$\mathbb{D}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(\xi-\mathbb{E}\xi)^2\right].$$

Перечислим некоторые свойства дисперсии.

1. $\mathbb{D}\xi \geqslant 0$. $\mathbb{D}\xi = 0$ тогда и только тогда, когда существует такая константа c, что $\mathbb{P}\{\xi=c\}=1$.
2. $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}\left[\xi^2-2\xi\mathbb{E}\xi+(\mathbb{E}\xi)^2\right] = \mathbb{E}\left[\xi^2\right]-(\mathbb{E}\xi)^2$.
3. $\mathbb{D}[a+b\xi]=b^2\mathbb{D}[\xi]$, где $a,b=\text{const}$.
4. Если ξ и η — независимые случайные величины, то $\mathbb{D}[\xi+\eta]=\mathbb{D}\xi+\mathbb{D}\eta$.
5. $\mathbb{D}\xi$ минимизирует значение $\mathbb{E}\left[(\xi-a)^2\right], a\in\mathbb{R}$.

Упражнение 4. Найти дисперсию случайной величины ξ, если

(a) $\xi\sim\text{Binom}(n,p)$;

(b) $\xi\sim\mathcal{U}[a,b]$.

Пространство L_2

Случайные величины с конечным вторым моментов образуют пространство линейное функциональное пространство $L_2(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$. Кроме того, отождествим случайные величины, которые отличаются на множестве вероятностной меры ноль. Это делается для того, чтобы ввести скалярное произведение:

$$\langle\xi,\eta\rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi\eta].$$

Действительно, равенство $\langle\xi,\xi\rangle=0$ означает только, что $\xi=0$ почти наверное, но не для любого $\omega\in\Omega$. Но мы их отождествили, поэтому все аксиомы скалярного произведения выполнены. Таким образом, мы получили евклидово пространство. Норма вводится естественным образом: $\|\xi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle\xi,\xi\rangle}$. Отсюда следует, что

$$\mathbb{D}\xi = \|\xi-\mathbb{E}\xi\|^2.$$

Для скалярного произведения выполняется **неравенство Коши-Буняковского-Шварца**:

$$|\mathbb{E}[\xi\eta]| \stackrel{\text{def}}{=} |\langle\xi,\eta\rangle| \leqslant \|\xi\|\cdot\|\eta\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]\mathbb{E}[\eta^2]}.$$

Определение 10. **Ковариацией случайных величин** ξ,η называется число

$$\text{cov}(\xi,\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(\xi-\mathbb{E}\xi)(\eta-\mathbb{E}\eta)\right] = \mathbb{E}[\xi\eta]-\mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Из неравенства КБШ следует, что для ковариации выполняется неравенство:

$$|\text{cov}(\xi,\eta)| \leqslant \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}.$$

Нетрудно видеть, что если ξ,η — независимые, то $\text{cov}(\xi,\eta)=0$. Обратное неверно: если ковариация величин равна 0, из этого не следует их независимость. Тем не менее, ковариация часто используется, как некоторая мера зависимости величин, т.к. ей удобно пользоваться.

Определение 11. **Коэффициентом корреляции случайных величин** ξ,η называется число

$$r_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(\xi,\eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}}.$$

Он принимает значения из $[-1, 1]$ и лучше отражает зависимость случайных величин ξ и η. Заметим также, что если $r_{\xi\eta} = 0$, то $\mathbb{D}[\xi + \eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$.

Неравенства, связанные с моментами

Неравенства Коши-Буняковского:

$$|\mathbb{E}\xi\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$$

$$|\mathrm{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}$$

Неравенство Йенсена:

$$f(\mathbb{E}\xi) \leq \mathbb{E}f(\xi), \quad f \text{ – выпуклая функция}$$

Неравенство Юнга:

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|^p}{p} + \frac{\mathbb{E}|\eta|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q \geq 0$$

Неравенство Гёльдера:

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq \left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \left(\mathbb{E}|\xi|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,\ p, q \geq 0$$

Неравенство Минковского:

$$\left(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\mathbb{E}|\eta|^p\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

Неравенство Ляпунова:

$$\left(\mathbb{E}|\xi|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\mathbb{E}|\xi|^q\right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < p \leq q$$