

## Формула включений-исключений. Независимость событий. Условная вероятность. Семинар 2. 11 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

**Источники:** [НатанТВ, Гл. 3], [Боровков, Гл.2 §3, 4], [Коралов, §4.1 и 4.2], [Ширяев, Гл. 1 §3], [Гнеденко, Гл. 1 §7]

**Ключевые слова:** ФОРМУЛА ВКЛЮЧЕНИЙ-ИСКЛЮЧЕНИЙ, УСЛОВНАЯ ВЕРОЯТНОСТЬ, НЕЗАВИСИМОСТЬ СОБЫТИЙ, ФОРМУЛА ПОЛНОЙ ВЕРОЯТНОСТИ, ФОРМУЛА БАЙЕСА

### Формула включений-исключений

**Теорема 1. Формула включений-исключений.** Пусть  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  — вероятностное пространство,  $\{A_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathcal{F}$  — конечный набор событий. Пусть  $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$ , и для произвольного подмножества индексов  $J \subseteq [n]$  определим событие  $B_J = \bigcap_{i \in J} A_i$ . Тогда справедлива следующая формула, называемая формулой включений-исключений:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^n A_i\right\} &= \sum_{J \subseteq [n]} (-1)^{|J|+1} \mathbb{P}\{B_J\} \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}\{A_i\} - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}\{A_i \cap A_j\} + \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}\{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n\}. \end{aligned}$$

**Упражнение 1.** После официальной части «посвята»  $n$  первокурсников собрались на культурное чаепитие в одной из комнат седьмого общежития. Каждый из первокурсников оставил свою куртку на вешалке в комнате. В 23:00 все вспомнили, что пора готовиться к коллоквиуму по математическому анализу, и побежали в свои комнаты, чтобы поскорее продолжить ботать. При этом каждый схватил куртку случайно из имеющихся, так как нужно было спешить. Найдите вероятность того, что ни один из первокурсников не взял свою куртку, и найдите предел этой вероятности при  $n \rightarrow \infty$ .

### Независимость событий

Везде далее рассматривается некоторое вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

**Определение 1.** События  $A$  и  $B$  называются **независимыми**, если  $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$ .

Заметим, что если  $A = \emptyset$  или  $A = \Omega$ , то оно независимо от любого события  $B$ . На самом деле, верен даже чуть более общий результат: если  $\mathbb{P}\{A\} = 0$  или  $\mathbb{P}\{A\} = 1$ , то оно независимо от любого события  $B$  (*подсказка:* в первом случае воспользуйтесь монотонностью вероятностной меры; во втором случае рассмотрите события  $A$  и  $B \setminus A$  и вероятность  $\mathbb{P}\{A \cup B\}$ ).

**Упражнение 2.** Пусть  $(A, B)$  — пара независимых событий. Покажите, что  $(\bar{A}, B), (A, \bar{B}), (\bar{A}, \bar{B})$  — также пары независимых событий.

Если между событиями есть причинно-следственная связь, например,  $A \subset B$  и  $0 < \mathbb{P}\{A\} \leq \mathbb{P}\{B\} < 1$ , то они являются зависимыми и в вероятностном смысле:  $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} \neq \mathbb{P}\{A\} \cdot \mathbb{P}\{B\}$ . Обратное, вообще говоря, неверно: из вероятностной зависимости может не следовать причинно-следственная зависимость.

**Определение 2.** События  $A_1, A_2, \dots, A_n$  называются **независимыми в совокупности**, если для любого  $k, 2 \leq k \leq n$  и любых индексов  $i_1, \dots, i_k$  таких, что  $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ , выполняется равенство

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{j=1}^k A_{i_j}\right\} = \prod_{j=1}^k \mathbb{P}\{A_{i_j}\}.$$

Из независимости в совокупности легко следует попарная независимость событий. Обратно, вообще говоря, неверно при  $n \geq 3$ .

**Упражнение 3.** (Задача №37) Приведите пример вероятностного пространства и трёх событий на этом пространстве, которые попарно независимы, но зависимы в совокупности.

### Условная вероятность

**Определение 3.** Условной вероятностью события  $A$  при условии события  $B$ , имеющего ненулевую вероятность ( $\mathbb{P}\{B\} > 0$ ), называется число

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}}.$$

**Пример 1.** Пусть известно, что при бросании двух костей в сумме выпало больше 6 (событие  $B$ ). Какова вероятность, что на первой кости выпало не больше 2 (событие  $A$ )?

Условная вероятность зависит и от  $A$ , и от  $B$ , но зависит по-разному. Как функция от  $A$  условная вероятность обладает обычными свойствами вероятности:

- 1)  $\mathbb{P}\{A|B\} \geq 0$ ;
- 2)  $\mathbb{P}\{\Omega|B\} = \frac{\mathbb{P}\{\Omega \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = 1$ ;
- 3) для конечной или бесконечной последовательности попарно непересекающихся событий  $A_i$  и для  $A = \bigcup_i A_i$  выполняется равенство

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\left\{\left(\bigcup_i A_i\right) \cap B\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\left\{\bigcup_i (A_i \cap B)\right\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \sum_i \frac{\mathbb{P}\{A_i \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \sum_i \mathbb{P}\{A_i|B\}.$$

Кроме того, отметим также и другие интересные свойства условной вероятности:

- 4) если  $A \subseteq B$ , то  $\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A\}}{\mathbb{P}\{B\}} \geq \mathbb{P}\{A\}$ ;
- 5) если  $B \subseteq A$ , то  $\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = 1$ ;
- 6) для любого набора событий  $A_1, A_2, \dots, A_n$  такого, что  $\mathbb{P}\{A_2 \cap \dots \cap A_n\} > 0$ . Тогда

$$\mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=1}^n A_i\right\} = \mathbb{P}\left\{A_1 \mid \bigcap_{i=2}^n A_i\right\} \mathbb{P}\left\{\bigcap_{i=2}^n A_i\right\} = \dots = \left(\prod_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}\left\{A_k \mid \bigcap_{i=k+1}^n A_i\right\}\right) \mathbb{P}\{A_n\};$$

- 7) если события  $A$  и  $B$  независимы, то

$$\mathbb{P}\{A|B\} = \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}}{\mathbb{P}\{B\}} = \mathbb{P}\{A\};$$

- 8) если  $0 < \mathbb{P}\{B\} < 1$  и  $\mathbb{P}\{A|B\} = \mathbb{P}\{A|\bar{B}\}$ , то  $A$  и  $B$  независимы: действительно, из равенства указанных условных вероятностей следует

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}\{A \cap B\}}{\mathbb{P}\{B\}} &= \frac{\mathbb{P}\{A \cap \bar{B}\}}{\mathbb{P}\{\bar{B}\}} = \frac{\mathbb{P}\{A\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}}{1 - \mathbb{P}\{B\}}, \\ \mathbb{P}\{A \cap B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}\mathbb{P}\{B\} &= \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}\mathbb{P}\{B\}, \\ \mathbb{P}\{A \cap B\} &= \mathbb{P}\{A\}\mathbb{P}\{B\}; \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь в качестве нового пространства элементарных исходов множество  $B$ . Можно показать, что семейство  $\mathcal{F}_B \stackrel{\text{def}}{=} \{A \cap B \mid A \in \mathcal{F}\}$  является  $\sigma$ -алгеброй на множестве  $B$ , а условная вероятность  $\mathbb{P}_B\{A\} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{A|B\}$  является вероятностной мерой на этом пространстве, что следует из доказанных нами свойств. Тройка  $(B, \mathcal{F}_B, \mathbb{P}_B)$  называется **условным вероятностным пространством**.

Как функция от  $B$  условная вероятность удовлетворяет так называемой **формуле полной вероятности**. Пусть  $\{B_1, B_2, \dots\}$  — конечное или счётное разбиение пространства  $\Omega$ , т. е.  $B_i \cap B_j = \emptyset$  при  $i \neq j$  и  $\bigcup_i B_i = \Omega$ .

Не умаляя общности, предположим, что  $\mathbb{P}\{B_i\} > 0$  при всех  $i$ . Тогда для любого события  $A \in \mathcal{F}$  выполняется соотношение

$$\mathbb{P}\{A\} = \sum_i \mathbb{P}\{A \cap B_i\} = \sum_i \mathbb{P}\{A|B_i\}\mathbb{P}\{B_i\},$$

которое и называется **формулой полной вероятности**.

В математической статистике события  $B_i$  часто называют гипотезами, а вероятности  $\mathbb{P}\{B_i\}$  — *априорными вероятностями* (т.е. заданными до опыта). Предположим, что в результате эксперимента осуществилось событие  $A$ , и мы хотим на основании этого решить, какая из гипотез  $B_i$  наиболее правдоподобна. Оценка делается путём вычисления *апостериорных вероятностей*  $\mathbb{P}\{B_k|A\}$  (полученных в результате опыта):

$$\mathbb{P}\{B_k|A\} = \frac{\mathbb{P}\{B_k \cap A\}}{\mathbb{P}\{A\}} = \frac{\mathbb{P}\{A|B_k\}\mathbb{P}\{B_k\}}{\sum_i \mathbb{P}\{B_i\}\mathbb{P}\{A|B_i\}}.$$

Это равенство называется **формулой Байеса**.

**Упражнение 4.** (Задача №50, про мужика) Пусть некоторый мужик говорит правду с вероятностью 75% и лжёт с вероятностью 25%. Он подбрасывает симметричную кость и говорит, что «выпала 6». С какой вероятностью выпала 6?

**Упражнение 5.** (Задача №47, парадокс Монти Холла) Представьте, что вы стали участником игры, в которой находитесь перед тремя дверями. Ведущий поместил за одной из трех пронумерованных дверей автомобиль, а за двумя другими дверями — по козе (козы тоже пронумерованы) случайным образом — это значит, что все  $3! = 6$  вариантов расположения автомобиля и коз за пронумерованными дверями равновероятны. У вас нет никакой информации о том, что за какой дверью находится. Ведущий говорит: «Сначала вы должны выбрать одну из дверей. После этого я открою одну из оставшихся дверей (при этом если вы выберете дверь, за которой находится автомобиль, то я с вероятностью  $1/2$  выберу дверь, за которой находится коза номер 1, и с вероятностью  $1 - 1/2 = 1/2$  дверь, за которой находится коза номер 2). Затем я предложу вам изменить свой первоначальный выбор и выбрать оставшуюся закрытую дверь вместо той, которую вы выбрали сначала. Вы можете последовать моему совету и выбрать другую дверь либо подтвердить свой первоначальный выбор. После этого я открою дверь, которую вы выбрали, и вы выиграете то, что находится за этой дверью.» Вы выбираете дверь номер 3. Ведущий открывает дверь номер 1 и показывает, что за ней находится коза. Затем ведущий предлагает вам выбрать дверь номер 2. Увеличатся ли ваши шансы выиграть автомобиль, если вы последуете его совету?

**Упражнение 6.** Из урны, содержащей  $a$  белых и  $b$  черных шаров, извлекается наугад один шар и откладывается в сторону. Какова вероятность того, что извлеченный наугад второй шар окажется белым, если:

- (а) первый извлеченный шар белый;
- (б) цвет первого извлеченного шара остается неизвестным?