

## Числовые характеристики случайных величин. Семинар 4. 25 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

**Источники:** [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 3 §6, Гл. 4 §1, 3, 5, 6, 7, Приложение 3], [Коралов, §1.2, 3.1, 3.2, 3.3], [Ширяев, Гл. 2 §6], [Гнеденко, Гл. 4 §22, Гл. 5, §23-26]

**Ключевые слова:** ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА ПО ВЕРОЯТНОСТНОЙ МЕРЕ, ИНТЕГРАЛ ЛЕБЕГА-СТИЛЬТЬЕСА, ИНТЕГРАЛ РИМАНА-СТИЛЬТЬЕСА, МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ И ДИСПЕРСИЯ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, МОМЕНТЫ СЛУЧАЙНОЙ ВЕЛИЧИНЫ, КОВАРИАЦИЯ, КОЭФФИЦИЕНТ КОРРЕЛЯЦИИ, НЕРАВЕНСТВО КОШИ-БУНЯКОВСКОГО, НЕРАВЕНСТВО ЙЕНСЕНА, НЕРАВЕНСТВО ЮНГА, НЕРАВЕНСТВО ГЁЛЬДЕРА, НЕРАВЕНСТВО МИНКОВСКОГО, НЕРАВЕНСТВО ЛЯПУНОВА

### Интеграл Лебега по вероятностной мере и интеграл Стильтьеса

Пусть задано вероятностное пространство  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Интеграл Лебега по вероятностной мере (далее в этом разделе будем называть это просто интегралом) от произвольной измеримой функции определяется в 3 этапа. Начнём с определения для **простых функций**.

**Определение 1.** Случайная величина  $\xi(\omega)$  называется **простой**, если множество её значений конечно.

**Определение 2.** **Индикатором** множества  $A \in \mathcal{F}$  называется простая функция, заданная на элементах  $\Omega$  следующим образом:

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } \omega \in A, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что любая простая функция  $\xi(\omega)$  представима в виде

$$\xi(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{I}_{A_k}(\omega),$$

где  $a_k, k = 1, \dots, n$  — **различные** значения, принимаемые  $\xi$ , а  $A_k = \{\omega \mid \xi(\omega) = a_k\}$ . Множества  $A_k$  попарно не пересекаются и  $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ .

**Определение 3.** **Интегралом от простой случайной величины**  $\xi(\omega)$  называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{k=1}^n a_k \mathbb{P}\{A_k\}.$$

**Интегралом по множеству**  $A \in \mathcal{F}$  от простой измеримой функции  $\xi(\omega)$  называется

$$\int_A \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi(\omega) \mathbb{I}_A(\omega) d\mathbb{P}(\omega).$$

Теперь определим интеграл от положительной случайной величины.

**Лемма 1.** Пусть случайная величина  $\xi(\omega) \geq 0$ . Тогда существует последовательность  $\{\xi_n(\omega)\}_{n=1}^\infty$  измеримых простых функций такая, что  $\xi_n \uparrow \xi$  при  $n \rightarrow \infty$  (сходимость поточечная, т. е. для каждого  $\omega \hookrightarrow \xi(\omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n(\omega)$ ).

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в [Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 1] или [Коралов, Глава 3, §3.1, Теорема 3.1]. □

**Определение 4.** Интегралом неотрицательной функции  $\xi(\omega)$  называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int \xi_n d\mathbb{P},$$

где  $\xi_n$  — последовательность простых измеримых функций таких, что  $\xi_n \uparrow \xi$  при  $n \rightarrow \infty$ . Будем говорить, что интеграл  $\int \xi d\mathbb{P}$  существует, а  $\xi$  интегрируема, если  $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$ .

Интеграл неотрицательной функции корректно определён, т. к. его значения не зависят от выбора последовательности простых функций  $\xi_n$  монотонно сходящихся к  $\xi$  (см. [Боровков, Приложение 3, §2, Лемма 2] или [Коралов, Гл. 3, §3.1, Теорема 3.4]).

**Определение 5.** Интегралом от произвольной измеримой функции  $\xi(\omega)$  называется число

$$\int \xi d\mathbb{P} \stackrel{\text{def}}{=} \int \xi^+ d\mathbb{P} - \int \xi^- d\mathbb{P}, \quad \xi^\pm = \max\{0, \pm \xi\},$$

если хотя бы одно из значений  $\int \xi^\pm d\mathbb{P}$  конечно. В противном случае говорят, что интеграла не существует, а функция  $\xi$  не интегрируема.

Нетрудно показать, что  $\int \xi d\mathbb{P} < \infty$  тогда и только тогда, когда  $\int |\xi| d\mathbb{P} < \infty$ . Кроме того, если существует  $\int \xi d\mathbb{P}$ , то существует и  $\int_A \xi d\mathbb{P} = \int \xi \mathbb{I}_A d\mathbb{P}$  для любого  $A \in \mathcal{F}$ .

Выполняются привычные свойства интегралов.

1. Если множества  $A_i \in \mathcal{F}$  попарно не пересекаются и  $\bigcup_i A_i = \Omega$ , то

$$\int \xi d\mathbb{P} = \sum_i \int_{A_i} \xi d\mathbb{P}.$$

2.  $\int (\xi + \eta) d\mathbb{P} = \int \xi d\mathbb{P} + \int \eta d\mathbb{P}$ .
3. Если  $a$  — произвольная постоянная, то

$$\int a\xi d\mathbb{P} = a \int \xi d\mathbb{P}.$$

4. Если  $\xi \leq \eta$ , то  $\int \xi d\mathbb{P} \leq \int \eta d\mathbb{P}$ .
5.  $|\int \xi d\mathbb{P}| \leq \int |\xi| d\mathbb{P}$ .
6. Если  $c_1 \leq \xi \leq c_2$ , то  $c_1 \leq \int \xi d\mathbb{P} \leq c_2$  (здесь активно используется тот факт, что  $\mathbb{P}$  — вероятностная мера).
7. Если  $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$  и  $\int \xi d\mathbb{P}$  существует, то  $\int \xi d\mathbb{P} = \int \eta d\mathbb{P}$ .

**Теорема 1.** Пусть  $g(x)$  — борелевская функция на прямой  $\mathbb{R}$ . Определим случайную величину  $\eta = g(\xi(\omega))$ . Если  $\int \eta d\mathbb{P}$  существует, то

$$\int_{\Omega} \eta d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} g(x) d\mathbb{P}_{\xi}(x).$$

*Доказательство.* Доказательство можно прочитать в [Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 3] или [Коралов, Глава 3, §3.2, Теорема 3.8].  $\square$

Интеграл в правой части может быть записан также в форме

$$\int g(x) dF_{\xi}(x).$$

В таком виде он называется **интегралом Лебега-Стильтьеса** от функции  $g(x)$  по распределению  $F_{\xi}$ . Более того, если  $g(x)$  — непрерывная функция, то интеграл Лебега-Стильтьеса совпадает с интегралом **Римана-Стильтьеса**, равным по определению

$$\int g(x) dF_{\xi}(x) = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{N-1} g(\tilde{x}_k) [F_{\xi}(x_{k+1}) - F_{\xi}(x_k)],$$

где предел в правой части берётся при мелкости разбиения  $\max_k (x_{k+1} - x_k) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{} 0$ , где  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_N = b$  и  $\tilde{x}_k \in [x_k, x_{k+1})$ . Можно показать, что предел не зависит от выбора разбиения. Более того, в силу Теоремы 1 мы знаем, что все свойства интеграла Лебега по вероятностной мере сохраняются и для интеграла Римана-Стильтьеса в случае непрерывной  $g(x)$ .

Перед тем как двигаться дальше рассмотрим следующее упражнение.

**Упражнение 1.** Докажите, что функция распределения имеет не более чем счётное число точек разрыва.

Пусть  $F(x)$  — произвольная функция распределения. Тогда её можно представить в виде суммы  $F(x) = F_H(x) + F_D(x)$  непрерывной и дискретных компонент. Пусть  $x_1, x_2, \dots$  — точки разрывов  $F_D(x)$ :

$$p_k = F_D(x_k + 0) - F_D(x_k) > 0.$$

Тогда по определению

$$\int g(x) dF(x) = \sum_k p_k g(x_k) + \int g(x) dF_H(x).$$

Рассмотрим два важнейших частных случая.

1. **Дискретное распределение.** Из определения интеграла Стильтьеса получаем, что в случае дискретного распределения интеграл превращается в сумму (функция распределения  $F$  является ступенчатой функцией):

$$\int g(x) dF(x) = \sum_k g(x_k) (F(x_k + 0) - F(x_k)) = \sum_k g(x_k) \mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$

где  $x_1, x_2, \dots$  — точки скачков  $F(x)$ .

2. **Абсолютно непрерывное распределение.** В случае абсолютно непрерывного распределения  $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$  интеграл Стильтьеса превращается в интеграл Римана:

$$\int g(x) dF(x) = \int g(x) f(x) dx.$$

Некоторые свойства интеграла Стильтьеса, вытекающие из определения:

- 1)  $\int_a^b dF = F(b) - F(a)$ ;
- 2)  $\int_a^b g dF = \int_a^c g dF + \int_c^b g dF$ ;
- 3)  $\int (\alpha g + \beta h) dF = \alpha \int g dF + \beta \int h dF$ , где  $a, b = \text{const}$ .

## Математическое ожидание

**Определение 6.** Математическим ожиданием случайной величины  $\xi$  на вероятностном пространстве  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  называется число

$$\mathbb{E}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Omega} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega),$$

если интеграл, стоящий в правой части, существует.

Иными словами, математическое ожидание обобщает понятие среднего для случайной величины, ведь  $\int d\mathbb{P}(\omega) = 1$ . Кроме того, по теореме 1 справедливо равенство, которое более удобно для практики:

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x d\mathbb{P}_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{\xi}(x).$$

**Следствие 1.** Если  $\xi$  — дискретная случайная величина, то

$$\mathbb{E}\xi = \sum_k x_k \mathbb{P}\{\xi = x_k\},$$

где  $x_1, x_2, \dots$  — набор значений случайной величины  $\xi$  (при условии, что ряд абсолютно сходится; в противном случае говорят, что случайная величина  $\xi$  **не имеет математического ожидания**).

**Следствие 2.** Если  $\xi$  — абсолютно непрерывная случайная величина, имеющая плотность распределения  $f(x)$ , то

$$\mathbb{E}\xi = \int_{\mathbb{R}} x f(x) dx,$$

при условии, что интеграл сходится абсолютно (иначе случайная величина  $\xi$  **не имеет математического ожидания**).

**Следствие 3.** Если  $g(x)$  — борелевская функция на прямой, то  $\eta = g(\xi)$  — тоже случайная величина и

$$\mathbb{E}g(\xi) = \int_{\Omega} g(\xi(\omega)) d\mathbb{P}(\omega) = \int_{\mathbb{R}} g(x) dF_{\xi}(x) = \int_{\mathbb{R}} x dF_{g(\xi)}(x),$$

где последнее равенство следует из теоремы 1.

Из определения следует, что  $\mathbb{E}\xi < \infty \Leftrightarrow \mathbb{E}|\xi| < \infty$ . Можно показать, что  $\mathbb{E}\xi$  не ограничено или не существует, если, например,  $F(x) < 1 - \frac{1}{x}$  для всех достаточно больших  $x$ .

Основные свойства математического ожидания следуют из свойств интеграла Лебега.

1. Если  $a$  и  $b$  постоянные, то  $\mathbb{E}[a + b\xi] = a + b\mathbb{E}\xi$ .
2.  $\mathbb{E}[\xi + \eta] = \mathbb{E}\xi + \mathbb{E}\eta$ , если существуют какие-нибудь два участвующих в равенстве математических ожидания. Отметим, что случайные величины совсем не обязательно должны быть независимыми. Данное свойство не совсем очевидно, если задавать математическое ожидание по формулам, которые мы получили в Следствиях 1 и 2, но оно легко получается из определения через интеграл Лебега.
3. Если  $a \leq \xi \leq b$ , то  $a \leq \mathbb{E}\xi \leq b$ .
4.  $|\mathbb{E}\xi| \leq \mathbb{E}|\xi|$ .
5. Если  $\xi \geq 0$  и  $\mathbb{E}\xi = 0$ , то  $\xi = 0$  с вероятностью 1. Данное свойство легко получить, если представить интеграл Лебега по  $\Omega$  в виде суммы интеграла Лебега по  $A$  и  $B$ , где  $A = \{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) = 0\}$ ,  $B = \Omega \setminus A$ .
6.  $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{E}\mathbb{I}_A$ .

7. Если  $\xi, \eta$  — независимые случайные величины, то  $\mathbb{E}[\xi\eta] = \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta$ . Данное свойство доказывается через произведение мер и **теорему Фубини** (см. [[Боровков, Приложение 3, §3, Теорема 4]]).

**Пример 1.** Пусть  $\xi$  — число выпавших очков на игральном кубике. Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_{k=1}^6 k\mathbb{P}\{\xi = k\} = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^6 k = \frac{7}{2} = 3,5.$$

**Пример 2.** Пусть  $\xi \sim \text{Be}(p)$ . Найдите  $\mathbb{E}\xi$ .

**Пример 3.** Рассмотрим случайную величину  $\xi$  с распределением  $\mathbb{P}\{\xi = 2^n\} = 2^{-n}, n \geq 1$ . Тогда

$$\mathbb{E}\xi = \sum_n 2^n \cdot 2^{-n} = +\infty.$$

У случайной величины  $\eta$  с распределением  $\mathbb{P}\{\eta = 2^n\} = \mathbb{P}\{\eta = -2^n\} = 2^{-n-1}$  нет мат. ожидания, так как  $\mathbb{E}\xi_+ = \mathbb{E}\xi_- = +\infty$ .

**Пример 4.** Примером абсолютно непрерывной случайной величины, не имеющей мат. ожидания, является случайная величина  $\xi \sim \text{Ca}(0, 1)$ . Действительно, её плотность  $f(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{1}{x^2+1}$ , а интеграл

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{x}{x^2+1} dx$$

не сходится абсолютно.

**Упражнение 2.** Используя линейность мат. ожидания, найдите мат. ожидания случайной величины  $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$ .

Свойство линейности математического ожидания бывает очень полезно для поиска мат. ожидания количества чего-нибудь. В таких задачах часто работает следующий приём: представляем исходную случайную величину в виде суммы индикаторов каких-то событий (возможно, зависимых) и пользуемся линейностью мат. ожидания.

**Упражнение 3.** (Задача №79) Имеется  $n$  пронумерованных конвертов и  $n$  пронумерованных писем. Письма случайным образом раскладываются по конвертам (все  $n!$  способов равновероятны). Найдите мат. ожидание числа совпадений номеров письма и конверта (письмо лежит в конверте с тем же номером).

**Пример 5.** Пусть  $\xi \sim \text{Exp}(1)$  (т.е.  $F_\xi(x) = 1 - e^{-x}$ ) и  $\eta = \frac{e^\xi \sin \xi}{\xi}$ . Тогда существует несобственный интеграл Римана-Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} dF_\xi(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^x \sin x}{x} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2},$$

но  $\int_0^{+\infty} \left| \frac{\sin x}{x} \right| dx = \infty$ , а значит,  $\eta$  не имеет математического ожидания.

**Пример 6.** Пусть  $\xi \sim \mathcal{U}[0, 1]$  и  $\eta = R(\xi)$ , где

$$R(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Тогда  $\mathbb{E}\eta = \mathbb{E}\xi = \frac{1}{2}$ , т. к.  $\xi = \eta$  почти наверное, что означает, что  $\mathbb{P}\{\xi = \eta\} = 1$ . Однако интеграла Римана (Римана-Стилтьеса)  $\int_0^1 R(x) dx$  не существует.

## Дисперсия и другие числовые характеристики случайных величин

**Определение 7.** Величину  $\mathbb{E}[\xi^k], k = 1, 2, \dots$  будем называть  **$k$ -м моментом** случайной величины  $\xi$ .

**Определение 8.** Величину  $\mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^k]$ ,  $k = 1, 2, \dots$  будем называть **центральным  $k$ -м моментом** случайной величины  $\xi$ .

**Определение 9.** **Дисперсией** случайной величины  $\xi$  называется второй центральный момент:

$$\mathbb{D}\xi \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)^2].$$

Перечислим некоторые свойства дисперсии.

1.  $\mathbb{D}\xi \geq 0$ .  $\mathbb{D}\xi = 0$  тогда и только тогда, когда существует такая константа  $c$ , что  $\mathbb{P}\{\xi = c\} = 1$ .
2.  $\mathbb{D}\xi = \mathbb{E}[\xi^2 - 2\xi\mathbb{E}\xi + (\mathbb{E}\xi)^2] = \mathbb{E}[\xi^2] - (\mathbb{E}\xi)^2$ .
3.  $\mathbb{D}[a + b\xi] = b^2\mathbb{D}[\xi]$ , где  $a, b = \text{const}$ .
4. Если  $\xi$  и  $\eta$  — независимые случайные величины, то  $\mathbb{D}[\xi + \eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$ .
5.  $\mathbb{D}\xi$  минимизирует значение  $\mathbb{E}[(\xi - a)^2]$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .

**Упражнение 4.** Найти дисперсию случайной величины  $\xi$ , если

- (a)  $\xi \sim \text{Binom}(n, p)$ ;
- (b)  $\xi \sim \mathcal{U}[a, b]$ .

### Пространство $L_2$

Случайные величины с конечным вторым моментом образуют пространство линейное функциональное пространство  $L_2(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Кроме того, отождествим случайные величины, которые отличаются на множестве вероятностной меры ноль. Это делается для того, чтобы ввести скалярное произведение:

$$\langle \xi, \eta \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi\eta].$$

Действительно, равенство  $\langle \xi, \xi \rangle = 0$  означает только, что  $\xi = 0$  почти наверное, но не для любого  $\omega \in \Omega$ . Но мы их отождествили, поэтому все аксиомы скалярного произведения выполнены. Таким образом, мы получили евклидово пространство. Норма вводится естественным образом:  $\|\xi\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ . Отсюда следует, что

$$\mathbb{D}\xi = \|\xi - \mathbb{E}\xi\|^2.$$

Для скалярного произведения выполняется **неравенство Коши-Буняковского-Шварца**:

$$|\mathbb{E}[\xi\eta]| \stackrel{\text{def}}{=} |\langle \xi, \eta \rangle| \leq \|\xi\| \cdot \|\eta\| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{\mathbb{E}[\xi^2]\mathbb{E}[\eta^2]}.$$

**Определение 10.** **Ковариацией случайных величин  $\xi, \eta$**  называется число

$$\text{cov}(\xi, \eta) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(\xi - \mathbb{E}\xi)(\eta - \mathbb{E}\eta)] = \mathbb{E}[\xi\eta] - \mathbb{E}\xi\mathbb{E}\eta.$$

Из неравенства КБШ следует, что для ковариации выполняется неравенство:

$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}.$$

Нетрудно видеть, что если  $\xi, \eta$  — независимые, то  $\text{cov}(\xi, \eta) = 0$ . Обратное неверно: если ковариация величин равна 0, из этого не следует их независимость. Тем не менее, ковариация часто используется, как некоторая мера зависимости величин, т.к. ей удобно пользоваться.

**Определение 11.** **Коэффициентом корреляции случайных величин  $\xi, \eta$**  называется число

$$r_{\xi\eta} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\text{cov}(\xi, \eta)}{\sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}}.$$

Он принимает значения из  $[-1, 1]$  и лучше отражает зависимость случайных величин  $\xi$  и  $\eta$ . Заметим также, что если  $r_{\xi\eta} = 0$ , то  $\mathbb{D}[\xi + \eta] = \mathbb{D}\xi + \mathbb{D}\eta$ .

### Неравенства, связанные с моментами

**Неравенства Коши-Буняковского:**

$$|\mathbb{E}\xi\eta| \leq \sqrt{\mathbb{E}\xi^2\mathbb{E}\eta^2}$$
$$|\text{cov}(\xi, \eta)| \leq \sqrt{\mathbb{D}\xi\mathbb{D}\eta}$$

**Неравенство Йенсена:**

$$f(\mathbb{E}\xi) \leq \mathbb{E}f(\xi), \quad f - \text{выпуклая функция}$$

**Неравенство Юнга:**

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq \frac{\mathbb{E}|\xi|^p}{p} + \frac{\mathbb{E}|\eta|^q}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 1$$

**Неравенство Гёльдера:**

$$\mathbb{E}|\xi\eta| \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} (\mathbb{E}|\eta|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p, q \geq 1$$

**Неравенство Минковского:**

$$(\mathbb{E}|\xi + \eta|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} + (\mathbb{E}|\eta|^p)^{\frac{1}{p}}, \quad p \geq 1$$

**Неравенство Ляпунова:**

$$(\mathbb{E}|\xi|^p)^{\frac{1}{p}} \leq (\mathbb{E}|\xi|^q)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < p \leq q$$