Комбинаторное, геометрическое, статистическое и аксиоматическое определения вероятности. Семинар 1. 4 сентября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [НатанТВ, Гл. 1 и 2], [Боровков, Гл.1 §1, 2], [Коралов, §1.1], [Ширяев, Гл. 1 §1, Гл. 2 §1 и 2], [Гнеденко, Гл. 1 §1-6]

Ключевые слова: комбинаторное, геометрическое, статистическое и аксиоматическое определения вероятности

Организационные вопросы

1. Лекции будут проходить по четвергам в 15:30-16:55 в акт. зале ЛК. Семинары будут проходить по вторникам в 17:05-18:30 в 123 ГК.

2. Вас ждут 2 контрольных работы на семинарских занятиях. *Ориентировочные* даты контрольных: 16 октября и 27 ноября.

3. Курс условно делится на 2 части. По каждой из частей курса нужно будет сдать *домашнее задание* и *теоретический минимум*.
   Сдача задания происходит следующим образом. Будут подготовлены билеты с задачами из задания. На каждом билете ровно одна задача. Идеальная ситуация: студент приходит, тянет билет, готовится и рассказывает правильное решение задачи, отвечая по ходу рассказа на простые вопросы семинариста, связанные с решением (пользоваться при этом ничем нельзя). Если студент не справляется, то он отправляется на «следующий круг», т.е. попытаться сдать задание снова он может не ранее, чем через час. При этом он должен будет рассказать правильное решение задачи, с которой он не справился в предыдущий раз, и опять тянуть билет. Если студент отправляется на «следующий круг» в третий раз, то задание не засчитывается.
   Чтобы сдать теоретический минимум, нужно ответить на все вопросы из списка вопросов для сдачи данной части курса, причём разрешается допустить не более двух ошибок. Если студент не справляется, то он отправляется на «новый круг», т.е. попытаться сдать теоретический минимум снова он может не ранее, чем полчаса. При этом у студента всегда есть возможность пойти на «новый круг», пока не закроются сдачи.
   В семестре будет несколько сдач, на которых я буду принимать только первую часть курса. В конце семестра будут сдачи, на которых можно будет сдать обе части курса. Кроме того, на сдачах в конце семестра можно будет поднять оценку, но не более, чем на 3 балла из 10. Поднять оценку можно только при условии, что сданы обе части курса, т.е. домашние задания и теоретический минимум.

4. **Как формируется оценка.** Студент по ходу семестра может набрать: по $1,5$ балла за сдачу теор. минимума по каждой из частей курса; по $0,5$ баллов за каждое из домашних заданий; по $1,5$ балла за каждую из контрольных, при условии, что сданы оба теор. минимума. Кроме того, на сдачах в конце семестра студент может заработать максимум 3 балла за решение задач на зачёте, если он сдал оба задания и оба теор. минимума. Набранное количество баллов округляется вниз, если оно меньше 8, и к ближайшему целому — в противном случае. Полученное в результате округления число и есть оценка за семестр. Для студентов, которые пропустили одну или две контрольных по уважительной причине, будет возможность набрать дополнительные $1,5$ балла на сдачах в конце семестра за решение задач, при условии, что они сдали оба задания и оба теор. минимума. Даты сдач будут определены позднее.

   Следствие 1. Для получения зачёта необходимо и достаточно сдать оба теоретических минимума.

   Следствие 2. Для получения оценки “хор(5)” и выше недостаточно сдать только домашние задания и теоретические минимумы.

5. После каждого семинара я буду давать несколько задач в качестве *необязательного* домашнего задания. В первую очередь они нужны для вашей тренировки самостоятельного решения задач каждую неделю. Решения можно присылать мне на почту ed-gorbunov@yandex.ru, оформленные в формате LaTeX, либо приносить в письменном виде на семинары.

Официальная программа курса

1. Интуитивные предпосылки теории вероятностей. Множество элементарных исходов опыта, событие. Классическое и статистическое определение вероятности. Математическое определение вероятности. Алгебра и сигма-алгебра событий, минимальная сигма-алгебры. Аксиомы теории вероятностей и следствия из них. Вероятностное пространство.

2. Теорема непрерывности вероятности. Теорема сложения вероятностей. Зависимые и независимые события. Условная вероятность события. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Леммы Бореля–Кантелли. Закон "0–1" Колмогорова.

3. Случайная величина как измеримая функция. Функция распределения случайной величины. Дискретные и непрерывные случайные величины. Плотность распределения вероятностей.

4. Формула включений-исключений. Конкретные распределения случайных величин. Схема Бернулли, геометрическое и биномиальное распределение. Простейший поток событий и распределение Пуассона. Показательное, равномерное, нормальное, log-нормальное и отрицательно-биномиальное распределения. Бета-распределение и гамма-распределение.

5. Случайный вектор. Функция распределения случайного вектора. Зависимые и независимые случайные величины, условные законы распределения. Функции случайных величин. Невырожденное функциональное преобразование случайного вектора.

6. Интеграл Стилтьеса. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины. Моменты случайной величины. Условное математическое ожидание. Корреляционная матрица случайного вектора. Коэффициент корреляции двух случайных величин.

7. Характеристическая функция и ее свойства. Связь моментов случайной величины с ее характеристической функцией. Разложение характеристической функции в ряд.

8. Сходимость последовательностей случайных величин с вероятностью единица (почти наверное), порядка p (в среднем квадратичном), по вероятности, по распределению. Соотношение между различными типами сходимости.

9. Неравенство Чебышева. Закон больших чисел. Критерий Колмогорова. Теоремы Хинчина и Чебышева. Усиленный закон больших чисел. Теорема Колмогорова и Бореля. Оценивание скорости сходимости частоты к вероятности в схеме Бернулли. Неравенство Бернштейна.

10. Интегральная и локальная теоремы Муавра–Лапласа. Дискретная поправка. Теорема Линдберга. Центральная предельная теорема для одинаково распределенных случайных величин. Центральная предельная теорема в форме Натана. Условие Ляпунова. Теорема Гливенко.

Литература

1. **[Колмогоров]** Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. М.: Наука, 1974.120 с.

2. **[Феллер]** Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984. 528 с.

3. **[Боровков]** Боровков А.А. Теория вероятностей. М.: Наука, 1986. 432 с.

4. **[Гнеденко]** Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. М: Наука, 1988. 451 с.

5. **[НатанТВ]** Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А. Теория вероятностей: учеб. пособие. М.: МЗ Пресс–МФТИ, 2007. 174 с.

6. **[НатанСП]** Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А. Основы теории случайных процессов: учеб. пособие. М.: МЗ Пресс–МФТИ, 2003. 163 с.

7. **[НатанМС]** Натан А.А., Горбачев О.Г., Гуз С.А. Математическая статистика: учеб. пособие. М.: МЗ Пресс–МФТИ, 2005. 156 с.

8. **[Розанов]** Розанов Ю.А. Лекции по теории вероятностей. Долгопрудный: Издательский дом «Интеллект», 2008. 134 с.

9. **[Чеботарёв]** Чеботарев А.М. Введение в теорию вероятностей и математическую статистику для физиков. М.: МФТИ, 2009. 250с с.

10. **[Малышев]** Малышев В.А. Кратчайшее введение в современные вероятностные модели. М.: Изд-во мехмата МГУ, 2009. 11. DurrettR.Probability:TheoryandExamples.CambridgeUniv.Press,2010.

12. **[Ширяев]** Ширяев А.Н. Вероятность. В 2-х кн. М.: МЦНМО, 2011. 968 с.

13. **[Шень]** Шень А. Вероятность: примеры и задачи. М.: МЦНМО, 2012. 72 с.

14. **[Босс]** Босс В. Лекции по математике: Вероятность, информация, статистика. Т. 4 (см. также Т. 10, 12). М.: УРСС, 2013. 216 с.

15. **[Кораллов]** Коралов Л.Б., Синай Я.Г. Теория вероятностей. Случайные процессы. М.: МЦНМО, 2013. 408 с.

16. **[Гмурман]** Гмурман В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике. М.: Высшая школа, 1979. 400 с.

17. **[Прохоров]** Прохоров А.В., Ушаков В.Г., Ушаков Н.Г. Задачи по теории вероятностей. Основные понятия. Предельные теоремы. Случайные процессы. М.: Наука, 1986. 528 с.

18. **[Зубков]** Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. М.: Наука, 1989. 320 с.

19. **[Кельберт 1]** Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 1. Основные понятия теории вероятностей и математической статистики. М.: МЦНМО, 2007. 456 с.

20. **[Кельберт 2]** Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т.2. Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов. М.: МЦНМО, 2010. 550 с.

21. **[Кельберт 3]** Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т.3. Теория информации и кодирования. М.: МЦНМО, 2014. 568 с.

22. **[ШиряевЗ]** Ширяев А.Н. Задачи по теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2011. 416 с.

23. **[ШиряевТЗ]** Ширяев А.Н., Эрлих И.Г., Яськов П.А. Вероятность в теоремах и задачах. М.: МЦНМО, 2013. 648 с.

24. **[Кац]** Кац М. Вероятность и смежные вопросы в физике. М.: Мир, 1965. 409 с.

25. **[Секей]** Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. М.: РХД, 2003. 272 с.

26. **[Стоянов]** Стоянов Й. Контрпримеры в теории вероятностей. М.: МЦНМО, 2012. 294 с.

27. **[Грэхем]** Грэхем Р., Кнут Д., Паташник О. Конкретная математика. Основание информатики. М.: Мир; Бином. Лаборатория знаний, 2009. 703 с.

28. **[Ландо]** Ландо С.К. Лекции о производящих функциях. М.: МЦНМО, 2007. 144 с.

29. **[Кингман]** Кингман Дж. Пуассоновские процессы. М.: МЦНМО, 2007. 136 с.

30. **[Дасгупта]** DasGupta A. Asymptotic theory of statistic and probability. Springer, 2008. 687 p. 31. Flajolet P., Sedgewick R. Analytic combinatorics. Cambridge Univ. Press, 2009. 810 p.

32. **[Гардинер]** Гардинер К.В. Стохастические модели в естественных науках. М.: Мир, 1986. 591 с.

33. **[Ethier]** Ethier N.S., Kurtz T.G. Markov processes // Wiley Series in Probability and Mathematical Statistics. New York: John Wiley & Sons, Inc., 2005.

34. **[Sandholm]** Sandholm W. Population games and Evolutionary dynamics. Economic Learning and Social Evolution. Cambridge: MIT Press, 2010.

35. **[Михайлов]** Михайлов Г.А., Войтишек А.В Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. М.: Академия, 2006. 368 с.

36. **[Levin]** Levin D.A., Peres Y., Wilmer E.L. Markov chain and mixing times. Providence: AMS, 2009. 387 p.

37. **[Алон]** Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. М.: Бином, 2011. 320 с.

Статистическое определение вероятности

Приведу здесь цитату из книги **[Ширяев]**, поскольку она очень хорошо описывает предмет теории вероятностей.

“Предметом теории вероятностей является математический анализ случайных явлений, т. е. таких эмпирических феноменов, которые — при заданном комплексе условий — могут быть охарактеризованы тем, что ***для них отсутствует детерминистическая регулярность (наблюдения над ними не всегда приводят к одним и тем же исходам)*** *и в то же самое время* ***они обладают некоторой статистической регулярностью (проявляющейся в статистической устойчивости частот).”***

Написанное выше можно пояснить на простом примере *честного* подбрасывания *симметричной* монеты. С одной стороны, мы не можем быть уверены в предсказании исхода каждого из подбрасываний. Однако, это вовсе не означает, что мы не можем узнать какие-либо закономерности, например, из серии подбрасываний монеты: если провести большое число *независимых* подбрасываний, то можно заметить, что для *симметричной* монеты частота выпадения орла будет близка к $\frac{1}{2}$.

Данное наблюдение приводит нас к **статистическому определению вероятности**. Пусть проводится серия независимых одинаковых экспериментов, в результате которых может произойти или не произойти некоторое событие A. **Вероятностью события** A будем называть предел частоты его встречаемости:

$$\mathbb{P}\{A\} \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \frac{N_n(A)}{n},$$

где $N_n(A)$ — количество произошедших событий A в первых n опытах. Существование такого предела можно считать законом природы (в квантовой механике существование вероятностей постулируется).

Классическое определение вероятности

Рассмотрим n взаимоисключающих исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$. Множество Ω называют **пространством исходов** (или **пространством элементарных событий**). В результате эксперимента можно наблюдать (или не наблюдать) событие A, отождествляемое с некоторым подмножеством множества Ω

Пример 1. Рассмотрим пример игральной кости. В этом случае $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Пусть событие A заключается в том, что выпавшее число — степень двойки с целым показателем. Это событие наблюдается тогда и только тогда когда выпавшее число принадлежит множеству $\{1, 2, 4\}$, а значит, A можно отождествить с этим множеством.

Определение 1. Суммой двух событий A и B называется событие $A \cup B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих хотя бы одному из событий A или B. **Произведением** событий A и B называется событие $A \cap B$, состоящее из элементарных событий, принадлежащих и A, и B. **Разность** событий A и B соответствует множеству $A \setminus B$, состоящему из элементов A, не принадлежащим B. Ω называется **достоверным** событием. Пустое множество $\varnothing$ называется **невозможным** событием. Событие $\overline{A} = \Omega \setminus A$ называется **дополнительным** событием к событию A.

Определим понятие **классическое определение вероятности**: вероятность события A равна доле подмножества A, т.е.

$$\mathbb{P}\{A\} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{|A|}{n}.$$

В этом случае подсчёт вероятностей сводится к чисто комбинаторным задачам, поэтому данное определение также называют **комбинаторным определением вероятности**.

При таком определении вероятность имеет ряд свойств.

1. $0 \leqslant \mathbb{P}\{A\} \leqslant 1$.
2. Для несовместных событий A и B (т.е. $A \cap B = \varnothing$): $\mathbb{P}\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\}$.

3. Если события A и B совместны, то $\mathbb{P}\{A \cup B\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{B\} - \mathbb{P}\{A \cap B\}$. Поскольку мы работаем сейчас с классическим определением вероятности, то выписанная формула эквивалентна формуле включений-исключений для мощности объединения множеств, которая хорошо известна вам из курса комбинаторики.

4. $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$, т.е. достоверное событие обладает единичной вероятностью. Это всегда так для классического определения вероятности, однако скоро мы дойдём до аксиоматического определения вероятности, при котором единичной вероятностью может обладать не только достоверное событие.

5. $\mathbb{P}\{\varnothing\} = 0$, т.е. невозможное событие обладает единичной вероятностью. При использовании аксиоматического определения вероятности в более сложных случаях нулевой вероятностью может обладать не только невозможное событие.

6. $\mathbb{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbb{P}\{A\}$, как следствие свойства 2.

Пример 2. Вернёмся к предыдущему примеру с игральной костью. В данном случае $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}$ — равновероятные взаимоисключающие исходы. Пусть $A = \{1, 2, 4\}$. Тогда $P(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Упражнение 1. (Задача №3)[1] Казалось бы, при бросании двух игральных костей как 9, так и 10 можно получить двумя разными способами: $9 = 3+6 = 4+5$, $10 = 4+6 = 5+5$. В случае бросания трех костей 9 и 10 получаются 6 различными способами. Почему тогда 9 появляется чаще, когда бросают две кости, а 10, когда бросают три?

Решение. Когда бросают 2 игральные кости то 9 может выпасть в четырёх случаях: $3+6$, $4+5$, $5+4$, $6+3$ (важно, что выпало конкретно на каждой кости, не только сумма). А вот 10 может выпасть лишь в трёх случаях, когда бросают 2 игральные кости: $4+6$, $5+5$, $6+4$. Поэтому 9 появляется чаще, когда бросают две кости.

Аналогичными рассуждениями можно аккуратно показать, что когда бросают три игральных кости, то чаще будет выпадать 10. $\square$

Упражнение 2. Пусть события A и B конечного пространства исходов Ω имеют вероятности $\mathbb{P}\{A\} = \frac{3}{4}$ и $\mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{3}$. Покажите, что $\frac{1}{12} \leqslant \mathbb{P}\{A \cap B\} \leqslant \frac{1}{3}$, и придумайте примеры пространств исходов и событий, когда имеют место граничные случаи. Найдите соответствующие границы для $\mathbb{P}\{A \cup B\}$.

Решение. Пусть $|\Omega| = n$, тогда $|A| = \frac{3n}{4}$ и $|B| = \frac{n}{3}$, а доказать нужно следующее:

$$\frac{n}{12} \leqslant |A \cap B| \leqslant \frac{n}{3}.$$

Пользуясь простой оценкой $|A \cap B| \leqslant \min\{|A|, |B|\}$ получаем, что $|A \cap B| \leqslant \frac{n}{3}$. Пользуясь тем, что $|A| > |B|$, замечаем, что $|A \cap B| = |B| - |\overline{A} \cap B| \geqslant \frac{n}{3} - \min\{|\overline{A}|, |B|\} = \frac{n}{3} - \frac{n}{4} = \frac{n}{12}$.

В качестве примера рассмотрим некоторое пространство исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_1 2\}$ и следующие конфигурации множеств: $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_9\}$ и $B = \{\omega_9, \omega_{10}, \omega_{11}, \omega_{12}\}$, $P\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{\omega_9\} = \frac{1}{12}$ — достигается нижняя граница; $A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_9\}$ и $B = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, $P\{A \cap B\} = \mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{3}$ — достигается верхняя граница.

Соответствующие границы для $\mathbb{P}\{A \cup B\}$ ищутся аналогично. В результате получаются следующие границы: $\frac{3}{4} \leqslant \mathbb{P}\{A \cup B\} \leqslant 1$. $\square$

Упражнение 3. (Задача №6) Из урны, содержащей a белых, b чёрных и c красных шаров, последовательно извлекаются три шара. Найдите вероятность следующих событий:

а) все три шара разного цвета;

б) шары извлечены в последовательности “белый, чёрный, красный”.

[1] Если в скобках указывается номер задачи, что это соответсвующая задача из сборника задач “Стохастический анализ в задачах”, Н. О. Бузун, А. В. Гасников, Ф. О. Гончаров, О. Г. Горбачёв, С. А. Гуз, Е. А. Крымова, А. А. Натан, Е. О. Черноусова.

Решение. Здесь очень важен порядок вытянутых шаров, поскольку шары вытаскиваются последовательно. Существует $3! = 6$ различных перестановок разноцветных шаров. Вероятность того, что шары извлечены в порядке "белый, чёрный, красный", равна $\frac{a}{a+b+c} \cdot \frac{b}{a+b+c-1} \cdot \frac{c}{a+b+c-2} = \frac{abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}$. Заметим, что при любой другой последовательности цветов шаров числители перемножаемых дробей будут равны a, b, c в некотором порядке, а знаменатели будут всегда те же и в том же порядке $a+b+c, a+b+c-1, a+b+c-2$. Отсюда следует, что вероятность того, что все шары разного цвета, равна $\frac{6abc}{(a+b+c)(a+b+c-1)(a+b+c-2)}$. □

Упражнение 4. (Задача №2) Ребёнок играет с десятью буквами разрезаной азбуки: А, А, А, Е, И, К, М, М, Т, Т. Какова вероятность, что при случайном расположении букв в ряд он получит слово «МАТЕМАТИКА»?

Решение. Всего есть 10 букв. Для удобства мысленно пометим каждую из букв числом от 1 до 10. Элементарными исходами будут служить перестановки помеченных букв. Отметим сразу, что слово «МАТЕМАТИКА» соответствует сразу $2! \cdot 3! \cdot 2! = 24$ последовательностям помеченных букв, так как можно переставить буквы М, А и Т местами, не изменив при этом слово. Значит, вероятность того, что получится слово «МАТЕМАТИКА» равна $\frac{24}{10!}$. □

Геометрическое определение вероятности

Рассмотрим следующий эксперимент: точка случайно бросается в круг радиуса 2 с центром в точке X. Какова вероятность того, что случайно кинутая точка попадёт в круг радиуса 1 с центром в точке X. Как решать такую задачу? Классический подход не подходит, потому что существует бесконечное число благоприятных и неблагоприятных исходов. Интуиция говорит, что вероятность попадания точки указанный круг должна быть пропорциональна площади этого круга, а именно, она должна быть равна $\frac{\pi \cdot 1^2}{\pi \cdot 2^2} = \frac{1}{4}$.

В более общем случае **геометрическую вероятность** можно определить следующим образом. Пусть в $\mathbb{R}^n$ задана некоторое измеримое множество Ω и в нём содержится другое измеримое множество A. Пусть на обеих областях определена одна и та же мера μ (в случае, когда рассматривается "бросание точки наудачу", рассматривается мера Лебега), причём пусть $\mu\Omega \neq 0$. Тогда в случае "бросания точки наудачу" во множество Ω определим вероятность попасть во множество A следующим образом:

$$\mathbb{P}\{A\} = \frac{\mu A}{\mu \Omega},$$

что соответствует нашей интуиции.

Мы рассмотрели задачу, которая имеет чисто геометрическую постановку. Однако геометрический подход к подсчёту вероятностей оказывается успешным и при решении задач, которые, на первый взгляд, не имеют ничего общего с геометрией. Продемонстрируем это на следующем примере.

Упражнение 5. (Задача о встрече) Саша и Паша договорились встретиться в 123 ГК между 17:00 и 18:00, но так и не договорились о конкретном времени. Человек, который приходит первым, ждёт другого в течение 20 минут, после чего уходит. Чему равна вероятность встречи двух друзей, если приход каждого из них в течение указанного часа может произойти наудачу, и моменты прихода независимы?

Решение. Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи. Пусть t_1 — время, прошедшее после 17:00 до прихода Саши (в часах), а t_2 — время, прошедшее после 17:00 до прихода Паши (в часах). Тогда время прихода обоих друзей можно задать точкой в квадрате $[0,1] \times [0,1]$: первая координата будет задавать t_1, а вторая — t_2. Заметим, что друзья встретяться тогда и только тогда, когда $|t_1 - t_2| < \frac{1}{3}$ (отметим, что всё измеряется в часах, поэтому в правой части не 20, а $\frac{1}{3}$). Данное неравенство задаёт "полоску" на плоскости, которая пересекает наш квадрат $[0,1]^2$ по зелёной области (см. Рис. 1). Площадь данной фигуры равна $1 - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{5}{9}$, а значит, вероятность друзьям встретиться равна

$$\mathbb{P}\{\text{вероятность встречи}\} = \frac{5/9}{1} = \frac{5}{9}$$

□

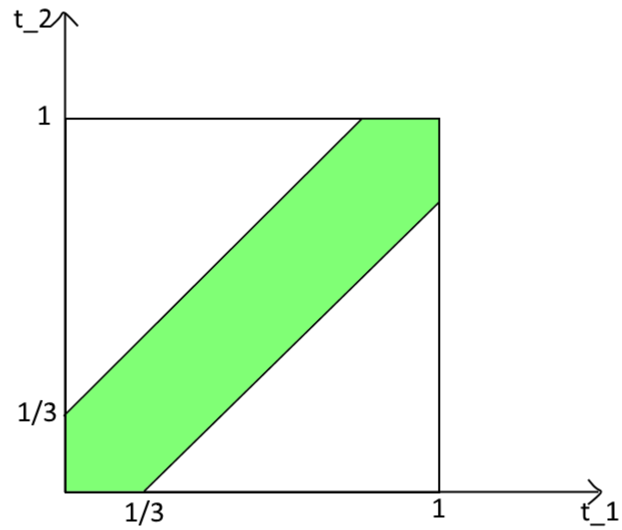

Рис. 1: Задача о встрече.

Аксиоматическое определение вероятности

Перейдём же теперь к аксиоматическому подходу для подсчёт вероятностей. Именно построение аксиоматики теории вероятностей, завершённое к середине прошлого столетия А. Н. Колмогоровым, сделало её полноценной математической дисциплиной.

Определение 2. **Пространство элементарных событий** Ω — множество базовых взаимоисключающих исходов эксперимента. Элементы множества Ω также называют **элементарными исходами**.

Определение 3. **Событие** $A \subseteq \Omega$ — некоторое подмножества множества элементарных исходов.

Определение 4. Говорят, что **событие** A **произошло**, если произошёл один из элементарных исходов, составляющих событие.

Определение 5. Совокупность $\mathcal{A}$ подмножеств множества Ω называется **алгеброй**, если выполняются следующие три условия:

1) $\Omega \in \mathcal{A}$;
2) из $C \in \mathcal{A}$ вытекает, что $\overline{C} \in \mathcal{A}$;
3) из $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ вытекает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{A}$.

Пример 3. Пусть $\Omega = \{1, 2, 3\}$. Рассмотрим некоторые примеры алгебр на множестве Ω.

1. $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing\} = \{\{1, 2, 3\}, \varnothing\}$ — тривиальная алгебра.
2. $\mathcal{A} = \{\Omega, \varnothing, \{1\}, \Omega \setminus \{1\}\} = \{\{1, 2, 3\}, \varnothing, \{1\}, \{2, 3\}\}$ — алгебра.
3. $\mathcal{A} = 2^{\Omega}$ — множество всех подмножеств множества Ω — алгебра.

Нетрудно проверить, что для произвольной алгебры $\mathcal{A}$ выполняются следующие свойства.

1. $\varnothing \in \mathcal{A}$. Действительно, $\varnothing = \overline{\Omega} \in \mathcal{A}$ по первому свойству алгебры.

2. Из $C_1, \ldots, C_n \in \mathcal{A}$ следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{A}$. Доказывается это свойство в два этапа. Во-первых, множества $\overline{C_1}, \ldots, \overline{C_n} \in \mathcal{A}$ по второму свойству алгебры. Во-вторых, заметим, что
$$\Omega \setminus \bigcap_{i=1}^{n} C_i = \bigcup_{i=1}^{n} (\Omega \setminus C_i) \in \mathcal{A}$$
по третьему свойству алгебры, откуда и из второго свойства алгебры получаем $\bigcap\limits_{i=1}^{n} C_i \in \mathcal{A}$.

3. Из $C_1, C_2 \in \mathcal{A}$ следует, что $C_1 \setminus C_2 \in \mathcal{A}$. Действительно, $\Omega \setminus C_1 \in \mathcal{A}$, откуда $(\Omega \setminus C_1) \cup C_2 \in \mathcal{A}$, откуда $C_1 \setminus C_2 = \Omega \setminus ((\Omega \setminus C_1) \cup C_2) \in \mathcal{A}$.

Для наших целей (построение аксиоматики теории вероятностей) требуется расширить понятие алгебры множеств.

Определение 6. Совокупность $\mathcal{F}$ подмножеств множества Ω называется **σ-алгеброй**, если выполняются следующие три условия:

1) $\Omega \in \mathcal{F}$;
2) из $C \in \mathcal{F}$ вытекает, что $\overline{C} \in \mathcal{F}$;
3) из $C_i \in \mathcal{F}, i \geqslant 1$ вытекает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

Аналогично доказываются следующие свойства произвольной σ-алгебры $\mathcal{F}$:

1. $\varnothing \in \mathcal{F}$;
2. из $C_i \in \mathcal{F}, i \geqslant 1$ следует, что $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{F}$.

Заметим, что любая σ-алгебра является алгеброй, но не наоборот.

Упражнение 6. Привести пример алгебры $\mathcal{A}$, не являющейся σ-алгеброй.

Решение. Рассмотрим произвольное множество Ω, содержащее бесконечное число элементов (для удобства будем считать, что множество Ω континуально). Пусть $\mathcal{A}$ — совокупность таких подмножеств $A \subseteq \Omega$, что конечно либо A, либо его дополнение $\overline{A}$. Заметим, что $\mathcal{A}$ является алгеброй. Однако она не является σ-алгеброй. Чтобы это показать, рассмотрим счётное подмножество B множества Ω (такое множество всегда найдётся, так как Ω — бесконечное; при этом $B \neq \Omega$). Занумеруем в некотором порядке элементы множества B: $B = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \{b_i\}$. Рассмотрим множества $C_i = \Omega \setminus \{b_i\}, i \geqslant 1$. Заметим, что все C_i лежат в $\mathcal{A}$, так как являются дополнениями конечных множеств. Предположим, что $\mathcal{A}$ — σ-алгебра. Тогда из вышеупомянутого свойства σ-алгебры имеем: $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} C_i \in \mathcal{A}$. С другой стороны,
$$\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i = \bigcap_{i=1}^{\infty} \Omega \setminus \{b_i\} = \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\infty} \{b_i\} = \Omega \setminus B.$$
Но в силу счётности B и континуальности Ω множества B и $\Omega \setminus B$ являются бесконечными, а значит, не лежат в $\mathcal{A}$. Противоречие. Значит, $\mathcal{A}$ не является σ-алгеброй. $\square$

Пример 4. Пусть $\Omega = \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})$ — **борелевская σ-алгебра**, т.е. *минимальная* σ-алгебра, содержащая все открытые множества в $\mathbb{R}$ (эквивалентно: все замкнутые множества; все интервалы (a, b); все лучи $(-\infty, a)$).

Определение 7. Измеримым пространством называется пара $(\Omega, \mathcal{F})$, где Ω — пространство элементарных исходов, а $\mathcal{F}$ — некоторая σ-алгебра подмножеств Ω.

Определение 8. Пусть $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство. Функция $\mu : \mathcal{F} \to [0, +\infty)$ называется **конечной неотрицательной мерой**, если для любых множеств $C_i \in \mathcal{F}, i \geqslant 1$, таких что $C_i \cap C_j = \varnothing$ при $i \neq j$, выполняется свойство *счётной аддитивности*:

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i.$$

Определение 9. Конечную неотрицательную меру $\mathbb{P}$ на измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ будем называть **вероятностной мерой** или **распределением вероятностей**, если $\mathbb{P}\{\Omega\} = 1$.

Определение 10. **Вероятностным пространством** называется тройка $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, где $(\Omega, \mathcal{F})$ — измеримое пространство и $\mathbb{P}$ — вероятностная мера на этом измеримом пространстве. Если $C \in \mathcal{F}$, то число $\mathbb{P}\{C\}$ называется **вероятностью** события C.

Отметим некоторые важные свойства вероятностной меры.

1. $\mathbb{P}\{\varnothing\} = 0$ (следует из σ-аддитивности вероятностной меры).
2. $\mathbb{P}\{\overline{A}\} = 1 - \mathbb{P}\{A\}$ (следует из σ-аддитивности вероятностной меры).
3. $\forall A \in \mathcal{F} \hookrightarrow 0 \leqslant \mathbb{P}\{A\} \leqslant 1$.
4. Если $A, B \in \mathcal{F}$ и $A \subseteq B$, то $\mathbb{P}\{A\} \leqslant \mathbb{P}\{B\}$. Действительно, $\mathbb{P}\{B\} = \mathbb{P}\{A \cup (B \setminus A)\} = \mathbb{P}\{A\} + \mathbb{P}\{A \cup (B \setminus A)\} \geqslant \mathbb{P}\{A\}$.
5. **Теорема непрерывности вероятности.** Если $A_i, B_i \in \mathcal{F}$ и $A_i \subseteq A_{i+1}, B_i \supseteq B_{i+1}$ для $i \geqslant 1$, то

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{A_n\} \text{ и } \mathbb{P}\left\{\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{B_n\}.$$

Доказательство. (a) Пусть $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Рассмотрим последовательность событий $C_1 = A_1, C_2 = A_2 \setminus A_1, C_3 = A_3 \setminus A_2, \ldots, C_k = A_k \setminus A_{k-1}, \ldots$, обладающая следующими свойствами:

1) $C_i \cap C_j = \varnothing$ для $i \neq j$;

2) $A_n = \bigcup\limits_{i=1}^{n} C_i$.

Из свойства 2) получаем, что

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{k=1}^{\infty} C_k,$$

а из счётной аддитивности вероятностной меры и свойства 1) получаем

$$\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{\infty} C_k\right\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}\{C_k\} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}\{C_k\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left\{\bigcup_{k=1}^{n} C_k\right\} = \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{A_n\}.$$

(b) Пусть $B = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$. Рассмотрим последовательность событий $D_1 = B_1 \setminus B_2, D_2 = B_2 \setminus B_3, D_3 = B_3 \setminus B_4, \ldots, D_k = B_k \setminus B_{k+1}, \ldots$, обладающая следующими свойствами:

1) $D_i \cap D_j = \varnothing$ для $i \neq j$ и $B \cap D_i = \varnothing$ для всех $i \geqslant 1$;

2) $B_n = B \cup \left(\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} D_k\right)$.

Отсюда и из счётной аддитивности вероятностной меры получаем

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\{B_n\}=\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}\left\{B\cup\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}D_k\right)\right\}=\mathbb{P}\{B\}+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\{D_k\}=\mathbb{P}\{B\},$$

так как $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n}^{\infty}\mathbb{P}\{D_k\}=0$ в силу того, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}\{D_k\}$ сходится.

□

Упражнение 7. Неравенства Бонферрони. Пусть $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ — вероятностное пространство, $A_1,A_2,\ldots,A_n\in\mathcal{F}$. Доказать следующие неравенства:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}A_i\right\}&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{A_i\},\\ \mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}A_i\right\}&\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{A_i\}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{P}\{A_i\cap A_j\}.\end{aligned}$$

Доказательство. (a) Докажем первое неравенство. Рассмотрим множества $B_1=A_1, B_2=A_2\setminus A_1, B_3=A_3\setminus(A_1\cup A_2),\ldots,B_n=A_n\setminus\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n-1}B_i\right)$, обладающими следующими свойствами:

1) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i$;
2) $B_i\cap B_j=\varnothing$ для $i\neq j$;
3) $\mathbb{P}\{B_i\}\leqslant\mathbb{P}\{A_i\}$.

Отсюда и из счётной аддитивности вероятностной меры следует, что

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right\}=\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{n}B_i\right\}=\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{B_i\}\leqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{A_i\}.$$

(b) Заметим, что $\mathbb{P}\{B_1\}=\mathbb{P}\{A_1\}$ и для $2\leqslant k\leqslant n$ выполняется неравенство:

$$\mathbb{P}\{A_k\}=\mathbb{P}\left\{B_k\cup\left(A_k\cap\left(\bigcup_{i=1}^{k-1}A_i\right)\right)\right\}=\mathbb{P}\{B_k\}+\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}^{k-1}(A_k\cap A_i)\right\}\leqslant\mathbb{P}\{B_k\}+\sum_{i=1}^{k-1}\mathbb{P}\{A_k\cap A_i\},$$

где последний переход справедлив по первой формуле Бонферрони. Складывая полученные неравенства для $k=1,2,\ldots,n$ и учитывая, что $\mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right\}=\mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=1}^{n}B_i\right\}=\sum\limits_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{B_i\}$, получаем

$$\mathbb{P}\left\{\bigcup_{i=1}A_i\right\}\geqslant\sum_{i=1}^{n}\mathbb{P}\{A_i\}-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\mathbb{P}\{A_i\cap A_j\}.$$

□

Упражнение 8. Опыт состоит в подбрасывании монеты до тех пор, пока два раза подряд она не выпадет одной и той же стороной. Считается, что монетка «правильная», то есть орёл выпадает с вероятностью $\frac{1}{2}$. Задать вероятностное пространство элементарных событий и найти вероятности следующих событий:

1. событие A — опыт закончится до шестого бросания;
2. событие B — опыт закончится спустя чётное число подбрасываний монеты;
3. событие C — опыт закончится спустя нечётное число подбрасываний монеты;
4. событие D — опыт никогда не закончится.

Решение. Пространством элементарных исходов Ω в данной задаче будут все конечные последовательности из чередующихся нулей и единиц, последние 2 цифры которых равны между собой (нулями будем обозначать выпадения орла, а единицами — выпадение решки); в качестве σ-алгебры возьмём 2^Ω. Для любого $n > 1$ имеется ровно два таких элементарных события ω_n^1 и ω_n^2, которые соответствуют двум реализациям последовательности длины, у которых в каждой позиции цифры отличны между собой. Их вероятности равны

$$\mathbb{P}\{\omega_n^1\} = \mathbb{P}\{\omega_n^2\} = \frac{1}{2^n}.$$

Итак, мы задали некоторую функцию $\mathbb{P}$ на элементарных исходах **дискретного пространства элементарных исходов** (дискретное пространство — не более чем счётное пространство) $\Omega = \{\omega_n^1, \omega_n^2, n \geqslant 2\}$. Заметим, что $\mathbb{P}\{\omega\} \geqslant 0$ для всех $\omega \in \Omega$ и $\sum\limits_{\omega\in\Omega} \mathbb{P}\{\omega\} = \sum\limits_{n=2}^{\infty} 2 \cdot \frac{1}{2^n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1$. Нетрудно показать, что числовая функция, заданная на элементарных исходах дискретного пространства Ω и удовлетворяющая двум указанным свойствам, порождает вероятностную меру на 2^Ω, а именно, для любого события $A \in 2^\Omega$ его вероятность задаётся формулой

$$\mathbb{P}\{C\} = \sum_{\omega\in C} \mathbb{P}\{\omega\}.$$

Вероятностное пространство построено.

Рассмотрим событие A_i — опыт завершился на i-м шаге, $i \geqslant 2$. Тогда $A_i = \{\omega_i^1, \omega_i^2\}$ при $i > 1$. Отсюда $\mathbb{P}\{A_i\} = \frac{2}{2^i} = \frac{1}{2^{i-1}}$ при $i > 1$.

1. $\mathbb{P}\{A\} = \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=2}^{5} \mathbb{P}\{A_i\}\right\} = \sum\limits_{i=2}^{5} \mathbb{P}\{A_i\} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$.
2. $\mathbb{P}\{B\} = \left\{\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{2i}\}\right\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}\{A_{2i}\} = \sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^{2i-1}} = 2\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{4^i} = \frac{2}{3}$.
3. $\mathbb{P}\{C\} = 1 - \mathbb{P}\{B\} = \frac{1}{3}$.
4. $\mathbb{P}\{D\} = 1 - \mathbb{P}\{\text{опыт закончится}\} = 1 - \mathbb{P}\left\{\bigcup\limits_{i=2}^{\infty} A_i\right\} = 1 - \sum\limits_{i=2}^{\infty} \frac{1}{2^{i-1}} = 0$.

$\square$