Условное математическое ожидание (продолжение). Семинар 8. 23 октября 2018 г.

Подготовил: Горбунов Э.

Источники: [Ширяев, Гл. 1 §8, Гл. 2 §7], [НатанТВ, Гл. 5], [Боровков, Гл. 4 §2], [Гнеденко, Гл. 5 §23]

Ключевые слова: условное математическое ожидание относительно σ-алгебры, условная вероятность относительно σ-алгебры

Первые 10-15 минут семинара — разбор прошедшей контрольной работы.

Условное математическое ожидание относительно σ-алгебры

Рассмотрим вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ и некоторую σ-алгебру $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{F}$ ($\mathcal{D}$ — σ-подалгебра $\mathcal{F}$). Пусть ξ — некоторая случайная величина. Мы определяли математического ожидание случайной величины ξ (интеграл Лебега по вероятностной мере) в два этапа: сначала это было сделано для неотрицательных случайных величин, а затем и в общем случае мат. ожидание было определено формулой:

$$\mathbb{E}\xi = \mathbb{E}\xi^+ - \mathbb{E}\xi^- \quad \text{при условии, что } \min\{\mathbb{E}\xi^-, \mathbb{E}\xi^+\} < \infty.$$

Подобная же конструкция используется для определения условного мат. ожидания относительно σ-алгебры.

Определение 1. 1. **Условным математическим ожиданием неотрицательной случайной величины ξ относительно σ-алгебры** $\mathcal{D}$ называется *расширенная случайная величина* $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$ (т.е. принимающая значения из $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$), такая, что

a) $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$ является $\mathcal{D}$-измеримой;

b) для любого события $A \in \mathcal{D}$ выполняется:

$$\int\limits_A \xi d\mathbb{P} = \int\limits_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] d\mathbb{P}.$$

2. **Условным математическим ожиданием произвольной случайной величины ξ относительно σ-алгебры** $\mathcal{D}$ называется *расширенная случайная величина*

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega) - \mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega)$$

при условии, что с вероятностью 1 выполнено неравенство:

$$\min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} < \infty,$$

причём на множестве нулевой вероятностной меры $\{\omega \in \Omega \mid \min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} = \infty\}$ значение условного математического ожидание определяется произвольным образом. Если же $\mathbb{P}\{\omega \in \Omega \mid \min\{\mathbb{E}[\xi^-|\mathcal{D}](\omega), \mathbb{E}[\xi^+|\mathcal{D}](\omega)\} = \infty\} > 0$, то условное математическое ожидания ξ относительно σ-алгебры $\mathcal{D}$ неопределено.

Замечание 1. Существование условного математического ожидания для неотрицательных случайных величин гарантирует теорема Радона-Никодима. Для этого рассмотрим неотрицательную случайную величину ξ и функцию множеств

$$Q(A) = \int\limits_A \xi d\mathbb{P}, \quad A \in \mathcal{D}.$$

Легко показать, что $Q(\cdot)$ является мерой на $(\Omega, \mathcal{D})$, которая *абсолютно непрерывна* относительно меры $\mathbb{P}$ (по определению, это означает, что из $\mathbb{P}\{A\} = 0, A \in \mathcal{D}$ следует $Q(A) = 0$). Тогда по теореме Радона-Никодима существует такая неотрицательная $\mathcal{D}$-измеримая расширенная случайная величина $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}](\omega)$, что

$$Q(A) = \int\limits_A \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]d\mathbb{P}.$$

Она определена с точностью до множества $\mathbb{P}$-меры нуль.

Замечание 2. Отметим, что свойство (b) из определения будет выполнено, если положить $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \xi$. Но так сделать в общем случае нельзя, т. к. ξ *не обязана быть* $\mathcal{D}$*-измеримой.*

Замечание 3. В случае тривиальной σ-алгебры $\mathcal{D} = \{\varnothing, \Omega\}$ получаем, что $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}\xi$.

Определение 2. Условной вероятностью события $B \in \mathcal{F}$ **относительно** σ**-алгебры** $\mathcal{D}$ называется *обобщённая случайная величина*

$$\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{I}_B|\mathcal{D}](\omega).$$

Из введённых определений следует, что для каждого фиксированного $B \in \mathcal{F}$ выполнено:

a) $\mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}(\omega)$ является $\mathcal{D}$-измеримой;

b) для любого $A \in \mathcal{D}$

$$\mathbb{P}\{A \cap B\} = \int\limits_A \mathbb{P}\{B|\mathcal{D}\}d\mathbb{P}.$$

Определение 3. Условным математическим ожиданием случайной величины ξ **относительно случайной величины** η называется *обобщённая случайная величина*

$$\mathbb{E}[\xi|\eta](\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_\eta](\omega),$$

где $\mathcal{D}_\eta$ — σ-алгебра, порождённая случайной величиной η (при условии, что $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_\eta](\omega)$ определено).

Определение 4. Условной вероятностью случайной величины ξ **относительно случайной величины** η называется *обобщённая случайная величина*

$$\mathbb{P}\{\xi|\eta\}(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}\{\xi|\mathcal{D}_\eta\}(\omega),$$

где $\mathcal{D}_\eta$ — σ-алгебра, порождённая случайной величиной η (при условии, что $\mathbb{P}\{\xi|\mathcal{D}_\eta\}(\omega)$ определена).

Следующая теорема показывает, что введённое определение условного математического ожидания согласуется с определением, данным на прошлом семинаре.

Теорема 1. Пусть $D = \{B_1, \ldots, B_n\}$ — некоторое разбиение вероятностного пространства $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Пусть $\mathcal{D} = \sigma(D)$ и ξ — некоторая случайная величина, для которой $\mathbb{E}\xi$ определено. Тогда с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}[\xi|D].$$

Перечислим теперь важные свойства условного математического ожидания относительно σ-алгебры.

1. Если c — константа и $\xi = c$ с вероятностью 1, то с вероятностью 1 $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = c$.
2. Если $\xi \leqslant \eta$ с вероятностью 1, то $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] \leqslant \mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}]$ с вероятностью 1.
3. $|\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]| \leqslant \mathbb{E}[|\xi||\mathcal{D}]$ с вероятностью 1.
4. Если a, b — постоянные и $a\mathbb{E}\xi + b\mathbb{E}\eta$ определено, то с вероятностью 1 выполнено равенство

$$\mathbb{E}[a\xi + b\eta|\mathcal{D}] = a\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] + b\mathbb{E}[\eta|\mathcal{D}].$$

5. Если $\mathcal{D}_* = \{\varnothing, \Omega\}$ — тривиальная σ-алгебра, то $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_*] = \mathbb{E}\xi$.
6. $\mathbb{E}[\xi|\mathcal{F}] = \xi$ с вероятностью 1.
7. Если $\mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_1].$$
8. Если $\mathcal{D}_1 \supseteq \mathcal{D}_2$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2]|\mathcal{D}_1\right] = \mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}_2].$$
9. С вероятностью 1 выполнено равенство $\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}]\right] = \mathbb{E}\xi$.
10. Если для случайной величины ξ определено математическое ожидание $\mathbb{E}\xi$ и она не зависит от σ-алгебры $\mathcal{D}$ (то есть не зависит от $\mathbb{I}_A$ для всех $A \in \mathcal{D}$), то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}] = \mathbb{E}\xi.$$
11. Если η — $\mathcal{D}$-измеримая случайная величина, $\mathbb{E}|\eta| < \infty$ и $\mathbb{E}|\xi\eta| < \infty$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}[\xi\eta|\mathcal{D}] = \eta\mathbb{E}[\xi|\mathcal{D}].$$
Данное свойство доказазывается сначала для простых функций η, а потом для произвольных $\mathcal{D}$-измеримых функций путём предельного перехода.

Определение 5. Пусть ξ и η — случайные величины и $\mathbb{E}\xi$ определено. **Условным математическим ожиданием случайной величины** ξ **при условии, что** $\eta = y$ называется борелевская функция $\mathbb{E}[\xi|\eta = y] \overset{\text{def}}{=} m(y)$ такая, что
$$\int\limits_{\{\omega \inf \Omega | \eta(\omega) \in B\}} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_B m(y) d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Существование такой функции показывается аналогичными рассуждениями с использованием теоремы Радона-Никодима, что и при доказательстве существования условного математического ожидания относительно σ-алгебры.

Применяя теорему о замене переменных под знаком интеграла Лебега, получим, что
$$\int\limits_{\{\omega \in \Omega | \eta(\omega) \in B\}} \xi(\omega) d\mathbb{P}(\omega) = \int\limits_B m(y) d\mathbb{P}_\eta(y) = \int\limits_{\{\omega \in \Omega | \eta(\omega) \in B\}} m(\eta(\omega)) d\mathbb{P}(\omega), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Случайная величина $m(\eta)$ является $\mathcal{D}_\eta$-измеримой, а множествами $\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in B\} B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ исчерпываются все множества из $\mathcal{D}_\eta$. Следовательно, $m(\eta) = \mathbb{E}[\xi|\eta]$ с вероятностью 1. Отсюда следует, что можно восстановить $\mathbb{E}[\xi|\eta]$, зная $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$, и, наоборот, по $\mathbb{E}[\xi|\eta]$ можно найти $\mathbb{E}[\xi|\eta = y]$.

Можно показать, что для любой $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$-измеримой функции $\varphi(x, y)$ и независимых случайных величин ξ и η таких, что $\mathbb{E}|\varphi(\xi, \eta)| < \infty$, то с вероятностью 1
$$\mathbb{E}[\varphi(\xi, \eta)|\eta = y] = \mathbb{E}[\varphi(\xi, y)].$$

Данный факт оказывается очень полезным при решении задач, но мы его оставим без доказательства.

Определение 6. Условной вероятностью события $A \in \mathcal{F}$ **при условии, что** $\eta = y$ будем называть *расширенную случайную величину*
$$\mathbb{P}\{A|\eta = y\} \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{I}_A|\eta = y].$$

Заметим, что из данного определения следует определение условной вероятности $\mathbb{P}\{A|\eta = y\}$, данное на пятом семинаре:
$$\mathbb{P}\left\{A \cap \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B\}\right\} = \int\limits_B \mathbb{P}\{A|\eta = y\} d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Пример 1. Пусть (ξ, η) — пара случайных величин, имеющих совместное абсолютно непрерывное распределение с плотностью $f_{\xi,\eta}(x, y)$. Пусть $f_\xi(x)$ и $f_\eta(y)$ — плотности распределения ξ и η соответственно. Теперь мы готовы обосновать факт с пятого семинара, что плотность условного распределения $\xi|\eta$ равна

$$f_{\xi|\eta}(x|y) = \frac{f_{\xi,\eta}(x, y)}{f_\eta(y)},$$

причём $f_{\xi|\eta}(x|y)$ положим равной нулю, если $f_\eta(y) = 0$. Нам нужно показать, что

$$\mathbb{P}\{\xi \in C|\eta = y\} = \int\limits_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx, \quad \forall C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Для этого достаточно показать, что

$$\mathbb{P}\left\{\{\omega \in \Omega \mid \xi(\omega) \in C\} \cap \{\omega \in \Omega \mid \eta(\omega) \in B\}\right\} = \int\limits_B \mathbb{P}\{A|\eta = y\}d\mathbb{P}_\eta(y), \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Используя *теорему Фубини*, получим

$$\begin{aligned}
\int\limits_B \left[\int\limits_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx\right] d\mathbb{P}_\eta(y) \quad &= \int\limits_B \left[\int\limits_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx\right] d\mathbb{P}_\eta(y) \\
&= \int\limits_B \left[\int\limits_C f_{\xi|\eta}(x|y)dx\right] f_\eta(y)dy \\
&= \int\limits_{C\times B} f_{\xi|\eta}(x|y)f_\eta(y)dxdy \\
&= \int\limits_{C\times B} f_{\xi,\eta}(x, y)dxdy \\
&= \mathbb{P}\{\xi \in C, \eta \in B\},
\end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Аналогичным образом, можно показать, что

$$\mathbb{E}[\xi|\eta = y] = \int\limits_{\mathbb{R}} x f_{\xi|\eta}(x|y)dx.$$