INSTITUTO SUPERIOR DE CONTABILIDADE E ADMINISTRAÇÃO DE LISBOA

LICENCIATURA EM GESTÃO

MATEMÁTICA II

APOIO ÀS AULAS DE SUCESSÕES

2015/2016

Manuel Martins Carla Martinho Ana Jorge

SUCESSÕES

Definições

Define-se **sucessão de números reais** a toda a aplicação de IN em $\mathbb{R}$.

Aos elementos do contradomínio chamam-se termos da sucessão.

Uma sucessão pode ser descrita pelos seus termos (descrição impossível pela infinidade de termos) ou por um **termo genérico** u_n a que se dá o nome de **termo geral da sucessão**.

Exemplo:

$$u_n = \frac{1}{n} \to u_1 = 1, u_2 = \frac{1}{2}, \ldots, u_n = \frac{1}{n}, u_{n+1} = \frac{1}{n+1}, \ldots$$

2

SUCESSÕES

Sucessões Limitadas

Uma sucessão diz-se **limitada** quando:

$$\forall n \in \mathbb{R}, \exists\, M \in \mathbb{R}:\ |u_n| < M$$

M designa-se como majorante dos termos da sucessão;

Se M é um termo da sucessão, designa-se máximo dos termos da sucessão.

Exemplo:

A sucessão $(-1)^n \times \frac{n+2}{n}$ é limitada pois

$$\left|(-1)^n \times \frac{n+2}{n}\right| = 1 + \frac{2}{n} \leq 3, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

3

SUCESSÕES

Monotonia

- Uma sucessão diz-se **monótona crescente** se

$$u_{n+1} - u_n \geq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

- Uma sucessão diz-se **monótona decrescente** se

$$u_{n+1} - u_n \leq 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

- Uma sucessão diz-se **estritamente crescente** se

$$u_{n+1} - u_n > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

- Uma sucessão diz-se **estritamente decrescente** se

$$u_{n+1} - u_n < 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

4

FUNÇÕES DE MAIS DE UMA VARIÁVEL REAL

Monotonia

Exemplo 1: Verifique que é monótona a sucessão

$$u_n = \frac{2n+1}{n}$$

$$u_n = \frac{2n+1}{n} \qquad u_{n+1} = \frac{2(n+1)+1}{(n+1)} = \frac{2n+3}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2n+3}{n+1} - \frac{2n+1}{n} = \frac{(2n+3)n - (2n+1)(n+1)}{(n+1)n} =$$

$$= \frac{2n^2+3n-2n^2-2n-n-1}{(n+1)n} = \frac{-1}{(n+1)n} < 0 \Rightarrow u_{n+1} < u_n$$

Logo sucessão é estritamente decrescente

5

SUCESSÕES

Monotonia

Exemplo 2- A sucessão

$$u_n = \frac{(-1)^n}{n^2}$$

Não é monótona porque:

$$u_1 = \frac{-1}{1} = -1; \qquad u_2 = \frac{1}{4}; \qquad u_3 = \frac{-1}{9}$$

$$u_1 < u_2 \quad mas \quad u_2 > u_3$$

6

Limites

SUCESSÕES

Diz-se que **a** é **limite da** sucessão quando n tende para infinito, se

$$a = \lim_{n\to+\infty} u_n \quad se \quad \forall \delta > 0, \exists p \in IN : n \geq p \Rightarrow |u_n - a| < \delta$$

Exemplo: Mostre por definição que

$$\lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_n \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \Rightarrow \forall \delta > 0, \exists p \in IN : n \geq p \Rightarrow \left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \delta$$

$$\left|\frac{n}{2n+1} - \frac{1}{2}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\frac{2n-(2n+1)}{2(2n+1)}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{4n+2} < \delta \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4n+2 > \frac{1}{\delta} \Leftrightarrow 4n > \frac{1}{\delta} - 2 \Leftrightarrow n > \frac{1-2\delta}{4\delta}$$

ou seja, para todo o d existe uma ordem, maior ou igual a $\frac{1-2\delta}{4\delta}$ a partir do qual se verifica a condição, ou seja, todos os termos da sucessão estão próximo de ½.

7

Limites

SUCESSÕES

A sucessão designa-se como um **infinitésimo** ou **quantidade evanescente** quando o limite da sucessão é 0

$$0 = \lim_n u_n \quad se \quad \forall \delta > 0, \exists p \in IN : n \geq p \Rightarrow |u_n| < \delta$$

Exemplo: Mostre que

$$\lim_n \frac{1}{n} = 0$$

$$\forall \delta > 0, \exists p \in IN : n \geq p \Rightarrow \left|\frac{1}{n}\right| < \delta$$

$$\left|\frac{1}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \frac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \frac{1}{\delta}$$

ou seja, para todo o δ existe uma ordem a partir do qual todos os termos da sucessão estão próximo de 0.

8

SUCESSÕES

Limites

A sucessão designa-se como um **infinitamente grande** quando o limite da sucessão é ∞, ou seja,

$$\infty = \underset{n}{Lim}\, u_n \quad se \quad \forall \delta > 0, \exists p \in IN : n \geq p \Rightarrow |u_n| > \frac{1}{\delta}$$

6 9

SUCESSÕES

Limites

Alguns limites conhecidos (**ditos limites notáveis**):

$$\underset{U_n \to +\infty}{Lim}\left(1+\frac{k}{U_n}\right)^{U_n} = e^k \qquad \underset{U_n \to 0}{Lim}\left(\frac{e^{U_n}-1}{U_n}\right) = 1 \qquad \underset{U_n \to 0}{Lim}\left(\frac{ln(U_n+1)}{U_n}\right) = 1$$

Exemplo: Calcule $\underset{n}{Lim}\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{2n}$

$$\underset{n}{Lim}\left(\frac{n+1}{n-3}\right)^{2n} = \underset{n}{Lim}\left(\frac{n-3+4}{n-3}\right)^{2n} = \underset{n}{Lim}\left(\left(\frac{n-3}{n-3}+\frac{4}{n-3}\right)^{n}\right)^{2} =$$

$$= \underset{n}{Lim}\left(\left(1+\frac{4}{n-3}\right)^{n-3+3}\right)^{2} = \underset{n}{Lim}\left(\left(1+\frac{4}{n-3}\right)^{n-3}\left(1+\frac{4}{n-3}\right)^{3}\right)^{2} =$$

$$= \left(e^4\left(1+\frac{4}{\infty}\right)^3\right)^2 = \left(e^4\right)^2 = e^8$$

6 10

Limites

SUCESSÕES

Teorema da unicidade do limite

O limite de uma sucessão, quando existe, é único.

Demostração:

Fazendo a demonstração por redução ao absurdo, admita-se que sucessão u_n tem dois limites diferentes a e b

Seja |a – b| > δ e seja e = δ/2 . Por definição, existe uma ordem p a partir da qual:

$$(|u_n - a| < \varepsilon) \wedge (|u_n - b| < \varepsilon)$$

Então,

$$\delta = |a-b| = |a-u_n+u_n-b| \leq |a-u_n| + |u_n-b| < \varepsilon+\varepsilon < \frac{\delta}{2}+\frac{\delta}{2} = \delta$$

logo $\delta < \delta$, absurdo, permitindo concluir que a premissa inicial não é válida, ou seja, a sucessão não pode ter dois limites diferentes.

Seja U_n uma sucessão de termos de IR. Diz-se que uma sucessão v_m é uma **subsucessão** de elementos de u_n quando todos os elementos de v_m são também elementos de u_n. Uma sucessão pode ter diferentes subsucessões com limites diferentes

11

Limites

SUCESSÕES

Uma sucessão diz-se **convergente se tem limite finito** (nestas condições, todos os limites das diversas subsucessões são iguais).

Uma sucessão **diz-se divergente se não tem limite ou tem limite infinito.**

Teorema: Toda a sucessão monótona e limitada é convergente

Teorema: Toda a sucessão convergente é limitada.

12

SUCESSÕES

Álgebra de Limites

Sejam u_n e v_n sucessões **convergentes**, então:

1) $\lim\limits_n (u_n + v_n) = \lim\limits_n (u_n) + \lim\limits_n (v_n)$

2) $\lim\limits_n (u_n \times v_n) = \lim\limits_n (u_n) \times \lim\limits_n (v_n)$

3) $\lim\limits_n \left(\frac{u_n}{v_n}\right) = \frac{\lim\limits_n (u_n)}{\lim\limits_n (v_n)}$, se $v_n \neq 0$ e $\lim v_n \neq 0$

4) $\lim\limits_n \left(u_n^{v_n}\right) = \left(\lim\limits_n (u_n)\right)^{\lim\limits_n (v_n)}$,

se $u_n > 0$ e $\lim u_n$ e $\lim v_n$ não são ambos nulos

13

SUCESSÕES

Cálculo de Limites

Exemplo: Calcule $\lim\limits_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

$$\lim_n \sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \lim_n \sqrt{n+1} - \lim_n \sqrt{n} = \infty - \infty, \text{ indeterminação}$$

$$\lim_n \left[\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right] = \lim_n \frac{\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} =$$

$$= \lim_n \frac{(n+1) - n}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \lim_n \frac{1}{\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{n}\right)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

14

SUCESSÕES

Teorema das sucessões enquadradas

Seja u_n, v_n e w_n sucessões tais que:

i. $\lim v_n = \lim w_n = a$

ii. Existe uma ordem p a partir da qual, $v_n \leq u_n \leq w_n$

Então, u_n diz-se sucessão enquadrada e $\lim u_n = a$.

Exemplo: Calcule $\underset{n}{Lim}\dfrac{3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n^3}$

Para enquadrar a expressão é necessário contar o número de parcelas no numerador. Como as parcelas andam de 2 em dois, a contagem faz-se do seguinte modo:

$$3+5+7+\ldots+(2n-1)=\frac{(2n-1)-3}{2}+1=\frac{2n-4}{2}+1=n-2+1=n-1$$

15

SUCESSÕES

Teorema das sucessões enquadradas

Exemplo (continuação):

agora é possível enquadrar entre o menor e o maior valor vezes o número de parcelas, calculando depois o limite de cada uma

$$\frac{(n-1)\times 3}{n^3}\leq\frac{3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n^3}\leq\frac{(n-1)\times(2n-1)}{n^3}$$

$$\underset{n}{Lim}\frac{(n-1)\times 3}{n^3}=\underset{n}{Lim}\frac{3n-3}{n^3}=\underset{n}{Lim}\frac{\frac{3n}{n^3}-\frac{3}{n^3}}{\frac{n^3}{n^3}}=\underset{n}{Lim}\frac{\frac{3}{n^2}-\frac{3}{n^3}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

$$\underset{n}{Lim}\frac{(n-1)(2n-1)}{n^3}=\underset{n}{Lim}\frac{2n^2-3n+1}{n^3}=\underset{n}{Lim}\frac{\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}{1}=\frac{0}{1}=0$$

Pelo Teorema das Sucessões enquadradas o limite é igual a

$$\underset{n}{Lim}\frac{3+5+7+\ldots+(2n-1)}{n^3}=0$$

16

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

SUCESSÕES

Teorema 1 Se $u_{n+1} - u_n \to a$ então $\frac{u_n}{n} \to a$.

Exemplo 1 : Calcule $\lim_n \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n}$

$$u_n = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n} \to u_{n+1} = 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}$$

$$u_{n+1} - u_n = \left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n}+\tfrac{1}{n+1}\right) - \left(1+\tfrac{1}{2}+\ldots+\tfrac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{n+1}$$

$$\lim_n \left(u_{n+1} - u_n\right) = \lim_n \tfrac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow \lim_n \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{n} = 0$$

17

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

SUCESSÕES

Exemplo 2 – Calcule $\lim_n \frac{n}{ln\left[(3n+2)!\right]}$

$$u_n = \ln\left[(3n+2)!\right] \Rightarrow u_n = \ln\left[(3(n+1)+2)!\right] = \ln\left[(3n+5)!\right]$$

$$\lim_n \left[u_{n+1} - u_n\right] = \lim_n \left[\ln(3n+5)! - \ln(3n+2)!\right] = \lim_n \ln\left(\frac{(3n+5)!}{(3n+2)!}\right) =$$

$$= \lim_n \ln\left(\frac{(3n+5)!}{(3n+2)!}\right) = \lim_n \ln\left(\frac{(3n+5)(3n+4)(3n+3)(3n+2)!}{(3n+2)!}\right) =$$

$$= \lim_n \ln\left((3n+5)(3n+4)(3n+3)\right) = +\infty$$

Como $\lim_n \frac{ln\left[(3n+2)!\right]}{n} = +\infty$, então

$$\lim_n \frac{n}{ln\left[(3n+2)!\right]} = \lim_n \frac{1}{ln\left[(3n+2)!\right]/n} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

18

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

SUCESSÕES

Teorema 2:

Se $u_n \to a$ então $\frac{u_1+u_2+,,,+u_n}{n} \to a.$

Exemplo : Calcule $\underset{n}{Lim}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}{n}$

$$u_1 = 1, u_2 = \tfrac{1}{2}, ..., u_n = \tfrac{1}{n} \text{ então}$$

$$\underset{n}{Lim}(u_n) = \underset{n}{Lim}\frac{1}{n} = 0, \text{ logo}$$

$$\underset{n}{Lim}\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}}{n} = 0$$

19

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

SUCESSÕES

Teorema 3:

Se $\forall\, n \in \mathbb{N}, u_n > 0\ e\ \frac{u_{n+1}}{u_n} \to a\ então\ \sqrt[n]{u_n} \to a$

Exemplo : Calcule $\underset{n}{Lim}\sqrt[n]{\frac{n^3}{3^n}}$

$$u_n = \frac{n^3}{3^n} \Rightarrow u_{n+1} = \frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}$$

$$\underset{n}{Lim}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \underset{n}{Lim}\frac{\frac{(n+1)^3}{3^{n+1}}}{\frac{n^3}{3^n}} = \underset{n}{Lim}\frac{3^n(n+1)^3}{3^{n+1}n^3} = \underset{n}{Lim}\frac{3^n}{3\times 3^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^3 = \frac{1}{3}$$

20

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

SUCESSÕES

Teorema 4:

Se $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$ e $u_n \to a$ então $\sqrt[n]{u_1 \times u_2 \times \cdots \times u_n} \to a$

Exemplo : Calcule $\underset{n}{Lim}\sqrt[n]{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\ldots\times\frac{n}{n+1}}$

$$u_1 = \tfrac{1}{2}, u_2 = \tfrac{2}{3}, \ldots, u_n = \tfrac{n}{n+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underset{n}{Lim}(u_n) = \underset{n}{Lim}\frac{n}{n+1} = \underset{n}{Lim}\left[1 - \frac{1}{n+1}\right] = 1 \Rightarrow \underset{n}{Lim}\sqrt[n]{\tfrac{1}{2}\times\tfrac{2}{3}\times\ldots\times\tfrac{n}{n+1}} = 1$$

21

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

SUCESSÕES

Teorema 5:

Se $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \to \infty$ e é crescente e $\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} \to a$ então $\frac{u_n}{v_n} \to a$

Exemplo : Calcule $\underset{n}{Lim}\frac{n^2}{2^n}$

$2^n \to \infty$ e é crescente

$$u_n = n^2 \Rightarrow u_{n+1} = (n+1)^2; v_n = 2^n \Rightarrow v_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\underset{n}{Lim}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \underset{n}{Lim}\frac{(n+1)^2 - n^2}{2^{n+1}-2^n} = \underset{n}{Lim}\frac{n^2+2n+1-n^2}{2^n(2-1)} = \underset{n}{Lim}\frac{2n+1}{2^n}$$

Aplicando novamente o teorema

$$u_n = 2n+1 \Rightarrow u_{n+1} = 2n+3; v_n = 2^n \Rightarrow v_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\underset{n}{Lim}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n} = \underset{n}{Lim}\frac{2n+3-(2n+1)}{2^{n+1}-2^n} = \underset{n}{Lim}\frac{2}{2^n(2-1)} = \underset{n}{Lim}\frac{2}{2^n} = 0$$

Então o limite $\underset{n}{Lim}\frac{2n+1}{2^n} = 0$ e $\underset{n}{Lim}\frac{n^2}{2^n} = 0$

22

SUCESSÕES

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

Critério Geral de Convergência de Sucessões

Teorema de Bolzano Cauchy:

É condição necessária e suficiente para que uma sucessão seja convergente, ou seja, u_n tenha limite finito, que

$$\forall \delta > 0, \exists p \in IN, \forall k \in IN : n > p \Rightarrow |u_{n+k} - u_n| < \delta$$

Demonstração: Condição necessária (⇒)

Se un tem limite finito, seja L esse limite; por definição,

$$\forall \delta > 0, \exists p \in IN : n > p \Rightarrow |u_n - L| < \frac{\delta}{2}$$

Então

$$|u_{n+k} - u_n| = |u_{n+k} - L + L - u_n| \leq |u_{n+k} - L| + |L - u_n| < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta$$

23

SUCESSÕES

Teoremas de Apoio ao Cálculo de Limites

Demonstração: Condição suficiente (⇐)

Por hipótese, $\exists p \in IN : n > p \Rightarrow |u_{n+k} - u_n| < \varepsilon < \frac{\delta}{2}$

Ou seja, $l_n = u_{n+k} - \varepsilon \leq u_n \leq u_{n+k} + \varepsilon = L_n$

Desta forma, $l_n \leq u_n \leq L_n ; l_{n+1} \leq u_{n+1} \leq L_{n+1} ; l_{n+2} \leq u_{n+2} \leq L_{n+2} ; \ldots$

A sucessão l_n, l_{n+1}, l_{n+2}, … é monótona e limitada, ou seja, é convergente;

A sucessão L_n, L_{n+1}, L_{n+2}, … também é monótona e limitada, ou seja, é convergente;

Como $|L_n + l_n| = |u_{n+k} + \varepsilon - (u_{n+k} - \varepsilon)| = \varepsilon + \varepsilon < \delta$

Então L_n e l_n têm o mesmo limite L e, pelo teorema das sucessões enquadradas, este é também o limite da sucessão u_n

c.q.d

24