Máquina de Turing

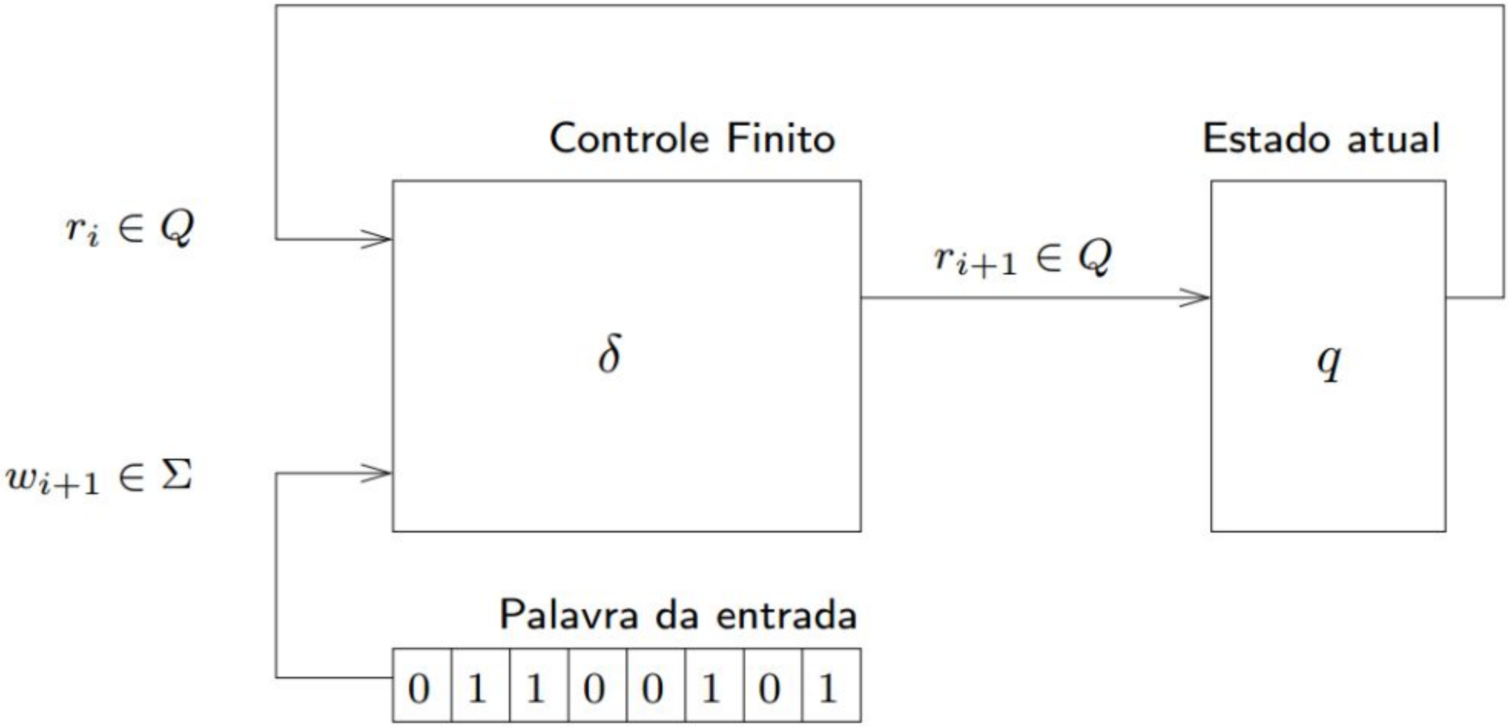
Teoria da Computação

Prof. Matheus Avila Moreira de Paula
matheusavila@cefetmg.br

Engenharia da Computação
Centro Federal de Educação Tecnológica Leopoldina

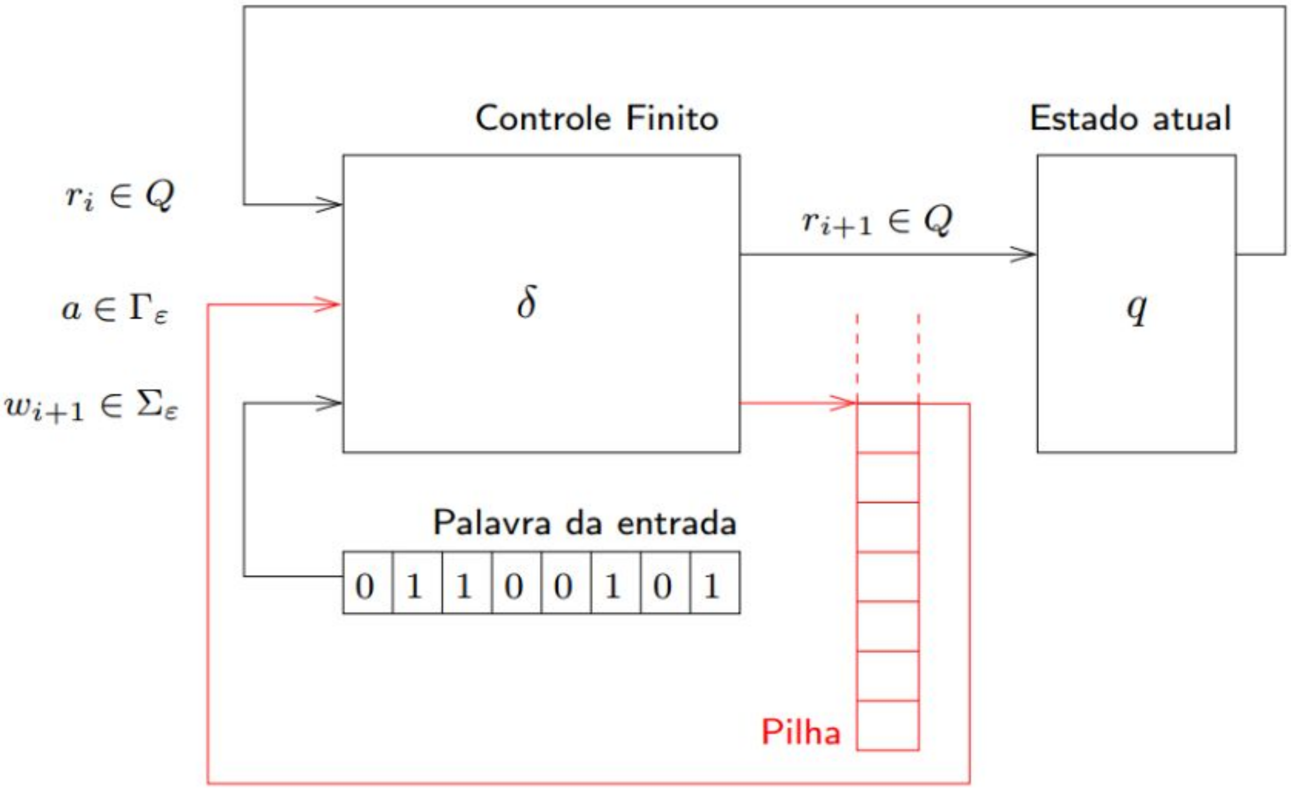
- Noção formal de algoritmo
- Noção informal:
  - Hilbert (1900): "um processo com o qual ela possa ser determinada com um número finito de operações"
- Modelos formais (1936):
  - Church: Lambda Cálculo
  - Turing: Máquinas de Turing

Esquema de um AFD/AFN



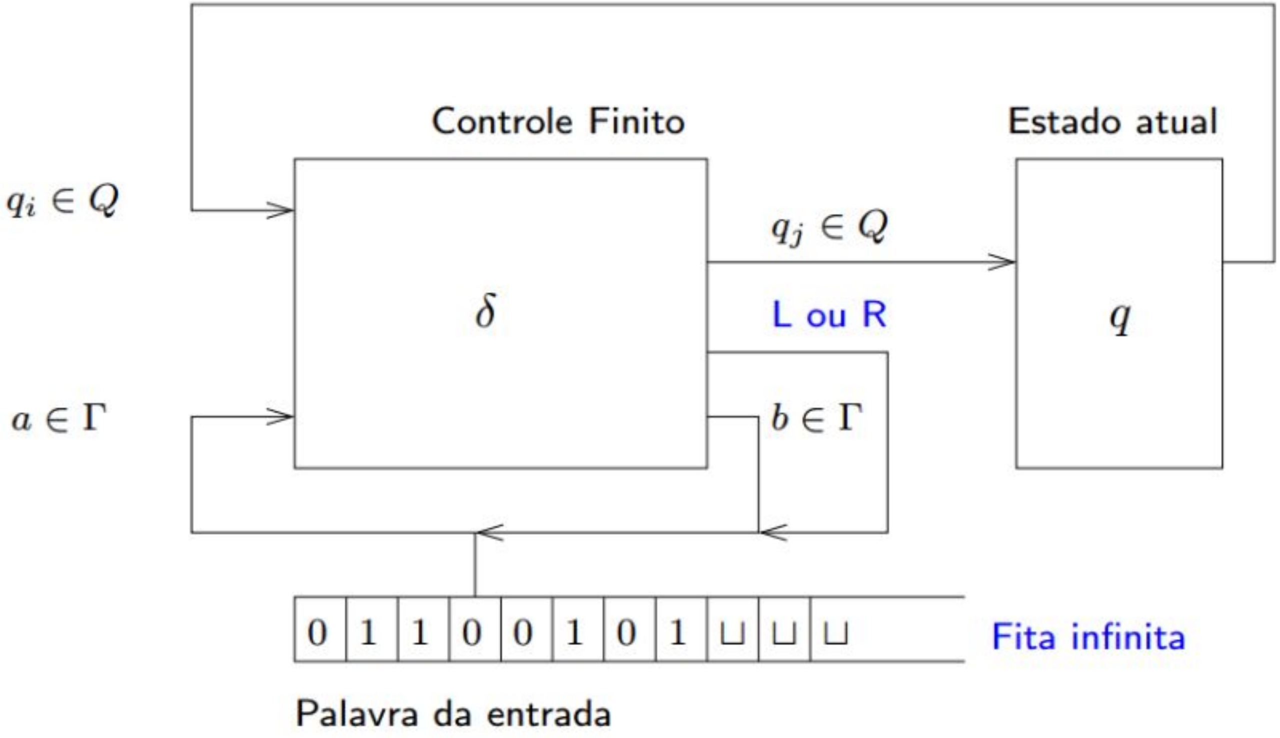
A memória é finita! Só o controle finito (estados)

Esquema de um AP



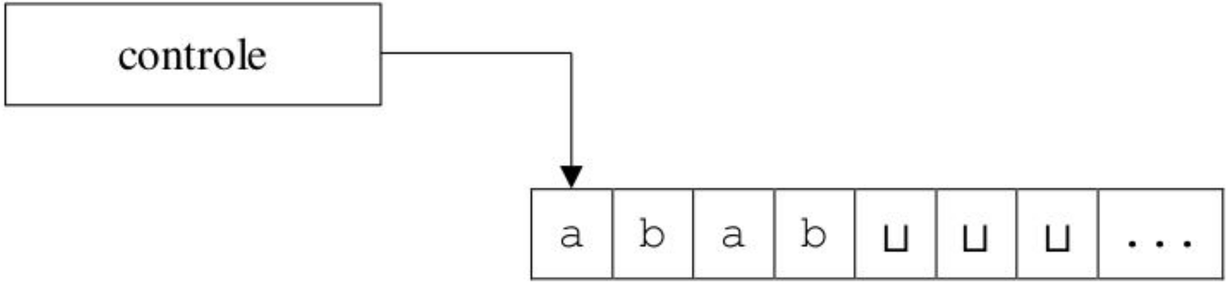
A memória é infinita! Mas é uma pilha!

Esquema de uma MT



A memória é infinita!

- Memória irrestrita e ilimitada
  - Pode ler e escrever sobre a fita
  - Cabeça de leitura/gravação pode se deslocar para direita e para esquerda
  - Fita infinita
- Estados de aceitação e rejeição tem efeito imediato



Funcionamento

- Palavra de entrada w é posicionada no início da fita à esquerda
- Restante da fita é preenchida com infinitos símbolos em branco, representado por $\sqcup$
- Máquina começa em um estado inicial
- Cabeça de leitura/escrita sobre o primeiro símbolo da fita
- A cada passo de processamento a máquina:
  - Lê o símbolo apontado
  - Escreve um símbolo no lugar
  - Desloca a cabeça para a esquerda ou para a direita
  - Muda de estado
- Máquina (padrão) é determinística!

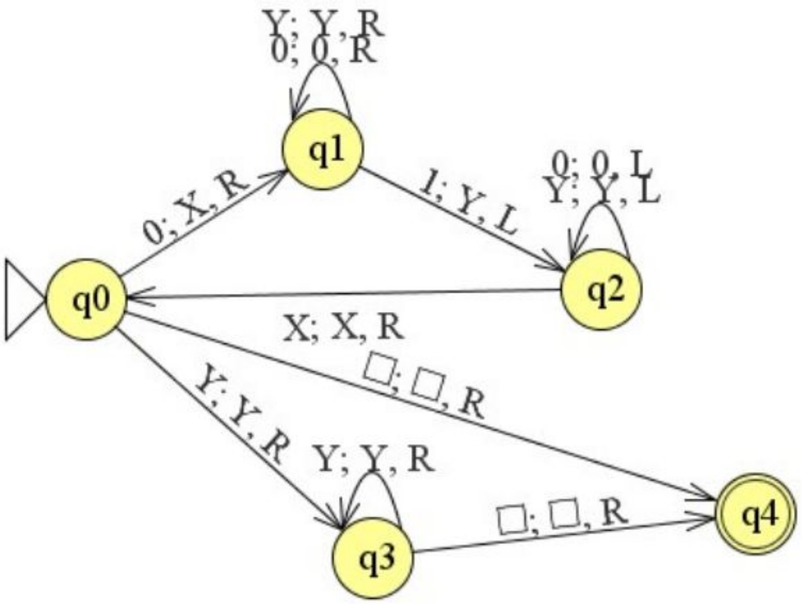
Definição formal

Uma máquina de Turing é uma 7-upla, $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, q_{aceita}, q_{rejeita})$, onde Q, Σ, Γ são conjuntos finitos e:

- Q é o conjunto de estados
- Σ é o alfabeto de entrada, sem o símbolo branco $\sqcup$
- Γ é o alfabeto da fita, onde $\sqcup \in \Gamma$ e $\Sigma \subseteq \Gamma$
- $\delta : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$ é a função de transição
- q_0 é o estado inicial
- q_{aceita} é o estado de aceitação
- $q_{rejeita}$ é o estado de rejeição, onde $q_{aceita} \neq q_{rejeita}$

Representação gráfica (Exemplo)

- Considere a máquina a seguir sobre o alfabeto de entrada $\Sigma = \{0, 1\}$ e o alfabeto da fita $\Gamma = \{0, 1, X, Y, \sqcup\}$



- Como seria o processamento da máquina sobre a palavra de entrada 000111?

Configuração de uma máquina

- Estado instantâneo da máquina:
  - Conteúdo da fita
  - Estado atual
  - Posição da cabeça de leitura/escrita

Configuração

Uma configuração uqv, onde q é um estado, u e v são palavras sobre Γ, representa a situação onde o conteúdo da fita é uv, o estado atual é q e a cabeça está sobre o primeiro símbolo de v.

Computação

Sejam a, b e c símbolos de Γ, u e v palavras sobre Γ^*, q_i e q_j são estados da máquina:

- uaq_ibv origina $uacq_jv$ se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$
- uaq_ibv origina uq_jacv se $\delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$

Computação

- Configuração inicial: $q_0 w$
- Configuração de aceitação
- Configuração de rejeição
- Casos especiais:
  - Início da fita
  - Final da entrada
- Máquina pode nunca parar!

Computação (Exemplo)

- Qual a sequência de configurações da máquina do exemplo anterior sobre a entrada 000111?

- Qual a sequência de configurações da máquina do exemplo anterior sobre a entrada 000111?
- Sequência obtida
  $q_0000111 \vdash Xq_100111 \vdash X0q_10111 \vdash X00q_1111 \vdash X0q_20Y11 \vdash Xq_200Y11 \vdash q_2X00Y11 \vdash Xq_000Y11 \vdash XXq_10Y11 \vdash XX0q_1Y11 \vdash XX0Yq_111 \vdash XX0q_2YY1 \vdash XXq_20YY1 \vdash Xq_2X0YY1 \vdash XXq_00YY1 \vdash XXXq_1YY1 \vdash XXXYq_1Y1 \vdash XXXYYq_11 \vdash XXXYq_2YY \vdash XXXq_2YYY \vdash XXq_2XYYY \vdash XXXq_0YYY \vdash XXXYq_3YY \vdash XXXYYq_3Y \vdash XXXYYYq_3\sqcup \vdash XXXYYY\sqcup q_4\sqcup$
- Usamos o símbolo $\vdash$ para indicar uma sucessão de configurações

Máquina aceita uma entrada

Uma máquina de Turing M aceita a entrada w se uma sequência de configurações $C_1, C_2, ..., C_k$ existe, onde:

- C_1 é a configuração inicial de M sobre w
- cada C_i origina C_{i+1}
- C_k é uma configuração de aceitação

Linguagem de uma máquina

A coleção de cadeias que M aceita é a linguagem de M, denotada por $L(M)$.

Linguagem da máquina do exemplo: $L = \{0^n 1^n \mid n \geq 0\}$

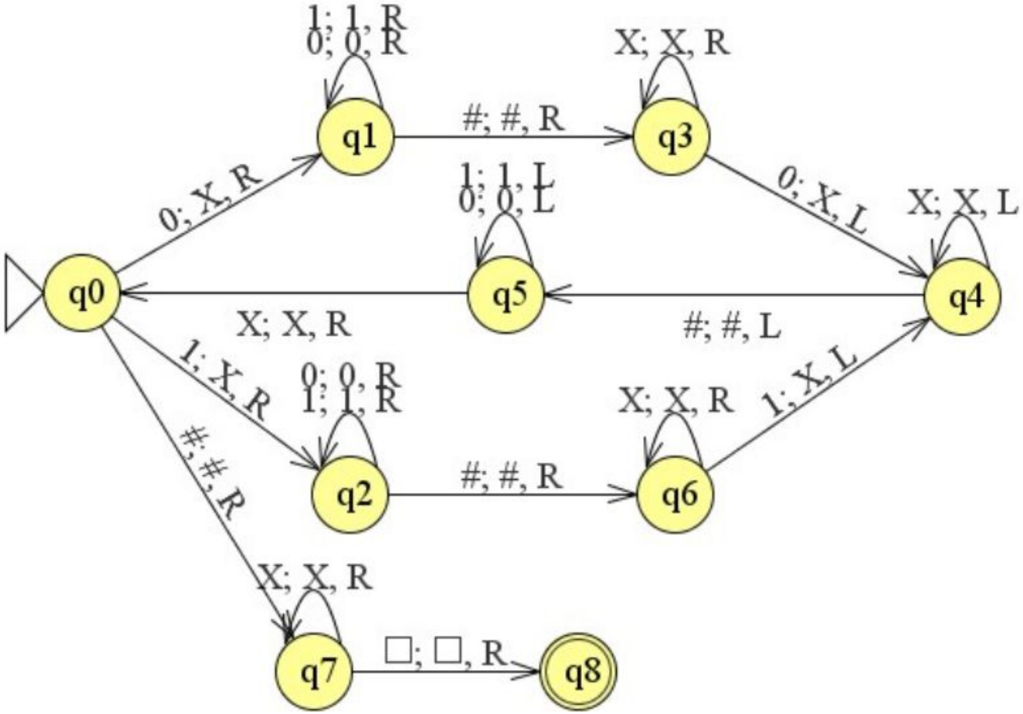
Projetando máquinas de Turing

- Dada uma liguagem como obter uma máquina de Turing que aceite as palavras dessa linguagem?
- Propor "algoritmo" usando os recursos da máquina de Turing
- Exemplo:
  - Projetar uma máquina que aceite as palavras da linguagem L sobre o alfabeto $\Sigma = \{0, 1, \#\}$:
    - $L = \{w\#w \mid w \in \{0, 1\}^*\}$

Projetando máquina de Turing (Exemplo)

- A seguinte estratégia pode ser usada para aceitar palavras da linguagem:
  - Verifique posições correspondentes do lado esquerdo e do lado direito de # para ver se contém o mesmo símbolo, marcando esses símbolos a medida que são encontrados. Caso algum símbolo não corresponda ou o # não for encontrado, rejeite.
  - Quando todos os símbolos a esquerda estiverem marcados, verifique se os da direita também foram marcados. Em caso positivo, aceite. Caso reste algum símbolo à direita, rejeite.

A máquina abaixo implementa a estratégia proposta e aceita as palavras da linguagem



Exercícios

Construa Máquinas de Turing padrão que aceitem as seguintes linguagens:

1. $\{w \mid w \in \{a, b, c\}^* \text{ e } w \text{ começa com } ab\}$
2. $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$
3. $\{a^n b^m \mid n, m \geq 0 \text{ e } n = 2m\}$