---{ Sequências Numéricas }---

Progressões Geométricas (P.G.)

Prof. Eduardo Ono

Sumário

---

1. Objetivos

- Conceituar a progressão geométrica;
- Deduzir as fórmulas para o termo geral de uma P.G. e para a soma dos termos de uma P.G;
- Aplicar os conceitos e fórmulas na resolução de problemas.

2. Conceitos e Definições

2.1. Definição. (Progressão Geométrica)

Sejam dados $a, q \in \mathbb{R}$. Uma **progressão geométrica (P.G.)** é uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} \cdot q\,, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}\,,\, n \geq 2 \end{cases}$$

Assim sendo, uma P.G. é uma sequência em que cada termo, a partir do segundo, é o produto do anterior por uma constante q dada.

2.2. Teorema. (Termo geral de uma P.G.)

Sejam $a_n, q \in \mathbb{R}$, onde $q \neq 0$ é a razão de uma P.G. e o índice $n \in \mathbb{N}$. Então, a_n (o *n*-ésimo termo da P.G.) é dado por:

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

Demonstração:

Pela definição, temos:

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 \cdot q \\ a_3 &= a_2 \cdot q \\ \ldots &= \ldots \\ a_n &= a_{n-1} \cdot q \end{aligned}$$

Multiplicando-se todos os termos à esquerda e também os à direita da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n &= a_1 \cdot (a_1 q) \cdot (a_2 q) \cdot (a_3 q) \cdot \ldots \cdot (a_{n-1} \cdot q) \\ a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_n &= a_1 \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots \cdot a_{n-1} \cdot q^{n-1} \\ \cancel{a_1} \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot a_n &= a_1 \cdot \cancel{a_1} \cdot \cancel{a_2} \cdot \cancel{a_3} \cdot \ldots \cdot \cancel{a_{n-1}} \cdot q^{n-1} \\ \therefore \quad a_n &= a_1 \cdot q^{n-1} \end{aligned}$$

2.3. Exemplos

Exemplo:

Determine o décimo termo da sequência $(1, 2, 4, 8, 16, 32, \ldots)$.

A sequência dada é uma P.G. onde $a_1 = 1$ e $q = 2$. Então:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \implies a_{10} = 1 \cdot 2^9 \implies a_{10} = 512$$

3. Soma dos Termos de uma P.G.

Seja $S_n = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1}$ a soma dos n primeiros termos de uma P.G.

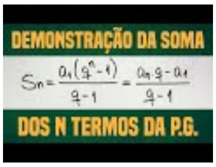
Então, S_n é dada por:

$$\boxed{S_n = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

Demonstração:

$$\begin{aligned}
S_n &= a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{n-1} + a_n \\
S_n &= a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-2} + a_1q^{n-1} \\
q \cdot S_n &= a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots + a_1q^{n-1} + a_1q^n \\
q \cdot S_n &= S_n - a_1 + a_1q^n \\
q \cdot S_n - S_n &= a_1q^n - a_1 \\
S_n(q-1) &= a_1(q^n - 1) \\
\therefore \quad S_n &= \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}
\end{aligned}$$

3.1. Vídeos de Apoio

Thumb	Descrição
	[Estude Matemática] **Demonstração da soma dos n termos de uma P.G. (soma finita da progressão geométrica)** (13:39, YouTube, 10/Nov/2021)

4. Soma dos termos de uma P.G. infinita de razão $|q| < 1$

Seja $S = a_1 + a_1q + a_1q^2 + a_1q^3 + \ldots$ a soma de infinitos termos de uma P.G. onde $|q| < 1$. Então S_n é dada por:

$$\boxed{S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Exemplo.

Determine a soma da série $1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots$.

$$S = 1 + 0,1 + 0,01 + 0,001 + \ldots$$
$$S = 1 + \frac{1}{10} + \frac{1}{100} + \frac{1}{1000} + \ldots$$

Temos que $a_1 = 1$ e $q = \frac{1}{10}$. Portanto:

$$S = \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{9}$$