---{ Sequências Numéricas }---

Progressões Aritméticas (P.A.)

Prof. Eduardo Ono

Sumário

---

1. Objetivos

- Conceituar uma progressão aritmética;
- Deduzir as fórmulas para o termo geral de uma P.A. e para a soma dos termos de uma P.A.;
- Aplicar as fórmulas do termo geral e da soma na resolução de problemas.

2. Conceitos e Definições

2.1. Definição. (Progressão Aritmética)

Uma **Progressão Aritmética** (P.A.) é uma sequência dada pela seguinte fórmula de recorrência:

$$\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + r, \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant 2 \end{cases}$$

em que a e r são números reais dados.

3. Fórmula do Termo Geral de uma P.A.

$$\begin{aligned} a_1 &= a_1 \\ a_2 &= a_1 + r \\ a_3 &= a_2 + r \\ a_4 &= a_3 + r \\ \ldots &= \ldots \\ a_{n-1} &= a_{n-2} + r \\ a_n &= a_{n-1} + r \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1} + a_n &= a_1 + (a_1 + r) + (a_2 + r) + (a_3 + r) + \cdots + (\\ (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \cdots + a_{n-1}) + a_n &= a_1 + (a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-2} + a_{n-1}) + (r \end{aligned}$$

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot r$$

4. Soma dos Termos de uma P.A.

4.1. Exemplo inicial

$$s = 1 + 2 + 3 + \ldots + 99 + 100$$

$$s = 100 + 99 + 98 + \ldots + 2 + 1$$

Somando ambos os lados da igualdade, temos:

$$\begin{aligned} 2\,s &= (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) + \ldots + (99 + 2) + (100 + 1) \\ 2\,s &= \underbrace{101 + 101 + 101 + \ldots + 101 + 101}_{100 \text{ termos}} \\ 2\,s &= 101 \cdot 100 \end{aligned}$$

Portanto,

$$s = \frac{101 \cdot 100}{2} = \frac{10100}{2} = 5050\,.$$

4.2. Fórmula para a soma dos termos de uma P.A.

Generalizando o raciocínio previamente utilizado, temos que a soma s dos n primeiros termos de uma P.A. é dada por:

$$\begin{aligned} s &= a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \\ &= a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + \cdots + [a_1 + (n-1)r] \\ &= n\,a_1 + r + 2r + 3r + \cdots + (n-1)r \\ &= n\,a_1 + r[1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)] \end{aligned}$$

$$\boxed{s = n\,a_1 + \left[\frac{(n-1)n}{2}\right] \cdot r}$$

$$\begin{aligned} s &= n \cdot \left[a_1 + \frac{(n-1)\,r}{2}\right] \\ &= n \cdot \left[\frac{2a_1 + (n-1)\,r}{2}\right] \\ &= n\left\{\frac{a_1 + [a_1 + (n-1)\,r]}{2}\right\} \end{aligned}$$

$$\boxed{s = \frac{n\,(a_1 + a_n)}{2}}$$