—{Módulo 9}—

Geometria Plana

—

Prof. Eduardo Ono

April 12, 2024

Capítulo 1

Triângulos Retângulos

Sumário

[ ]:
```python
import matplotlib.pyplot as plt

plt.rcParams['figure.figsize'] = [4, 3]

def plotFig(fig, ax, x_coords, y_coords, labels):
    x_min = min(x_coords)
    x_max = max(x_coords)
    y_min = min(y_coords)
    y_max = max(y_coords)
    x_mean = (x_min + x_max) / 2
    y_mean = (y_min + y_max) / 2
    x_labels = []
    y_labels = []

    for i, label in enumerate(labels):
        x_delta = 0
        y_delta = 0
        if x_coords[i] < x_mean:
            x_delta -= 0.5
        elif x_coords[i] > x_mean:
            x_delta += 0.2
        if y_coords[i] < y_mean:
            y_delta -= 0.1
            if (x_coords[i] > x_min) and (x_coords[i] < x_max):
                y_delta -= 0.2
        elif y_coords[i] > y_mean:
            y_delta += 0.2
            x_delta = -0.15
        x_labels.append(x_coords[i] + x_delta)
        y_labels.append(y_coords[i] + y_delta)

    print(y_labels)
    plt.plot(x_coords, y_coords)
    plt.margins(x=0.2, y=0.2)
    ax.set_aspect('equal')
    for i, label in enumerate(labels):
        ax.annotate(label, (x_labels[i], y_labels[i]))
    plt.axis('off')
```

— Capítulo 1 —

Triângulos Retângulos

---

1 1. Introdução

---

2 2. Relações Métricas

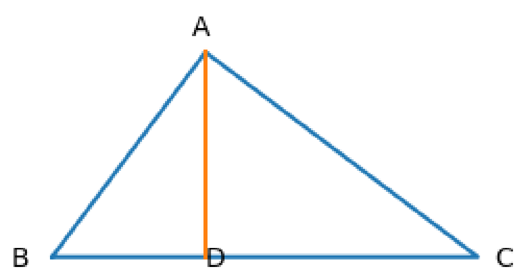
2.1 2.1. Elementos

Sejam ΔABC um triângulo retângulo em A e $\overline{AD}$ um segmento perpendicular a $\overline{BC}$, com $D \in \overline{BC}$, conforme a figura a seguir:

[ ]:
```
# Triângulo retângulo ABC = 5, 3, 4
x_coords = [0, 1.8, 5, 0]
y_coords = [0, 2.4, 0, 0]
labels = ['B', 'A', 'C', '']
fig, ax = plt.subplots()
plotFig(fig, ax, x_coords, y_coords, labels)

# Altura h
h_x = [1.8, 1.8]
h_y = [2.4, 0]
h_labels = ['', 'D']
plotFig(fig, ax, h_x, h_y, h_labels)
plt.show()
```

```
[-0.1, 2.6, -0.1, -0.1]
[2.6, -0.1]
```



Vamos caracterizar os seguintes elementos:

$\overline{BC} = a:$ hipotenusa;

$\overline{AC} = b:$ cateto;

$\overline{AB} = c:$ cateto;

$\overline{CD} = mc:$ projeção do cateto b sobre a hipotenusa;

$\overline{BD} = mc:$ projeção do cateto c sobre a hipotenusa;

$\overline{AD} = hc:$ altura relativa à hipotenusa.

Para simplificar a notação, podemos dizer que a, dependendo do contexto, é a hipotenusa do triângulo Δ ou que a é a medida (comprimento) da hipotenusa. Como caracterizamos que $a = \overline{BC}$, o correto seria escrevermos $\text{med}(a)$ para a medida de a, ou seja, $\text{med}(a) = \text{med}(\overline{BC})$.

2.2 2.2. Teorema de Pitágoras

Seja ΔABC um triângulo retângulo em A, onde a é a hipotenusa e b e c os catetos desse triângulo. Então, temos que a hipotenusa ao quadrado é igual à soma dos quadrados dos catetos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Demonstração:

No triângulo ΔABC considerado anteriormente, temos que a altura $h = \overline{AD}$ divide o triângulo ΔABC nos triângulos ΔADB e $ ADC ,$, ambos retângulos em D. Em particular, o ângulo $\hat{A}$ é dividido nos ângulos α e β, de modo que $\alpha = B\hat{A}D$ e $\beta = C\hat{A}D$. Nos triângulos ΔBAC e ΔBDA, o ângulo $\hat{B}$ é comum a ambos os triângulos e os ângulos $\hat{A}$ e $B\hat{D}A$ são retos. Portanto, pelo critério AA, esses dois triângulo são semelhantes.

Assim sendo, temos que:

$$\frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} \implies \frac{c}{m} = \frac{a}{c} \implies \boxed{c^2 = a \cdot m}$$

Analogamente, temos que os triângulos ΔBAC e ADC são semelhantes.

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{\overline{CD}}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{\overline{AC}}} \implies \frac{b}{n} = \frac{a}{b} \implies \boxed{b^2 = a \cdot n}$$

Somando essas duas igualdades, temos que:

$$b^2 + c^2 = a \cdot m + a \cdot n$$
$$b^2 + c^2 = a(m + n)$$
$$b^2 + c^2 = a \cdot a$$
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

3 3. Fim