Trigonometria no Círculo Trigonométrico: O Seno, o Cosseno e a Tangente

Prof. Eduardo Ono

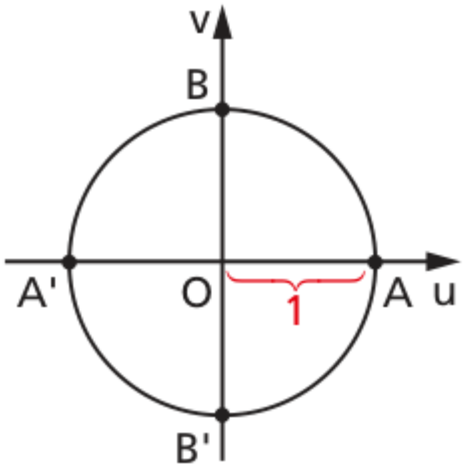
Sumário

---

1. Conceitos e Definições

1.1. Definição. (Círculo Trigonométrico)

Consideremos sobre um plano um sistema cartesiano ortogonal com origem no ponto O. Um **Círculo Trigonométrico** é definido pela circunferência λ de raio unitário e centro na origem O. O comprimento dessa circnferência é 2π, pois $r = 1$.



Fonte: Iezzi

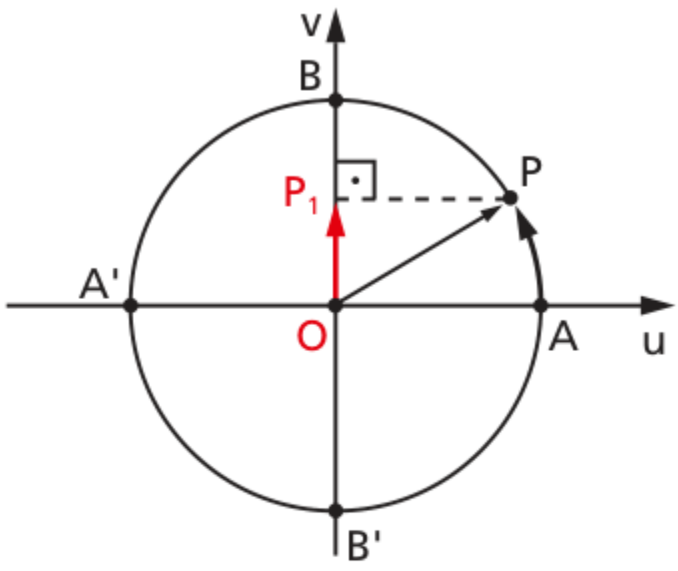
A cada número real x, com $0 \leqslant x < 2\pi$, podemos associar a um único ponto P de λ do seguinte modo:

1. Se $x = 0$, então P coincide com A;
2. Se $x > 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento x, no sentido anti-horário, e marcamos P como ponto final do percurso;
3. Se $x < 0$, então realizamos a partir de A um percurso de comprimento $|x|$, no sentido horário. O ponto final do percurso é P.

2. Seno

2.1. Definição

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico.



Fonte: Iezzi

Denominamos **seno** de x (e indicamos sen x) a ordenada OP_1 do ponto P, onde OP_1 é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo das ordenadas.

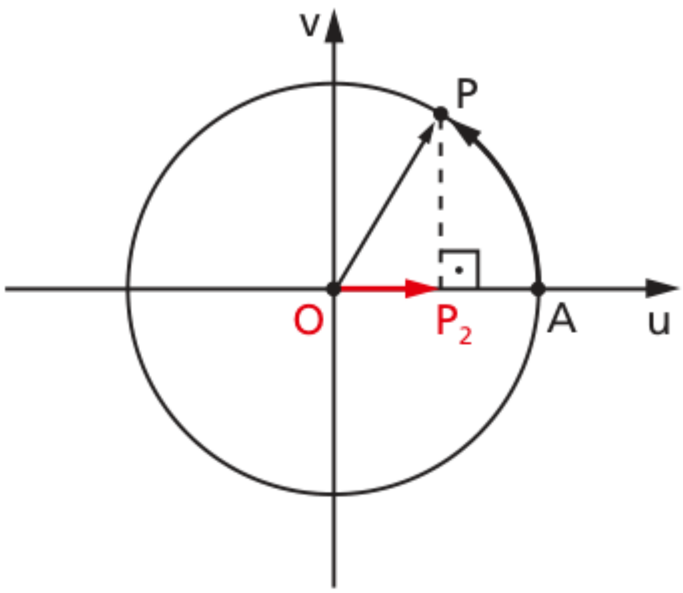
2.2. Propriedades

1. Se x é do primeiro ou do segundo quadrante, então $\text{sen } x$ é positivo.
2. Se x é do terceiro ou do quarto quadrante, então $\text{sen } x$ é negativo.
3. Se x percorre o primeiro ou o quarto quadrante, então $\text{sen } x$ é crescente.
4. Se x percorre o segundo ou o terceiro quadrante, então $\text{sen } x$ é decrescente.

3. Cosseno

3.1. Definição

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico.



Fonte: Iezzi

Denominamos **cosseno** de x (e indicamos $\cos x$) a abscissa OP_2 do ponto P, onde OP_2 é a projeção ortogonal do ponto P sobre o eixo das abscissas.

3.2. Propriedades

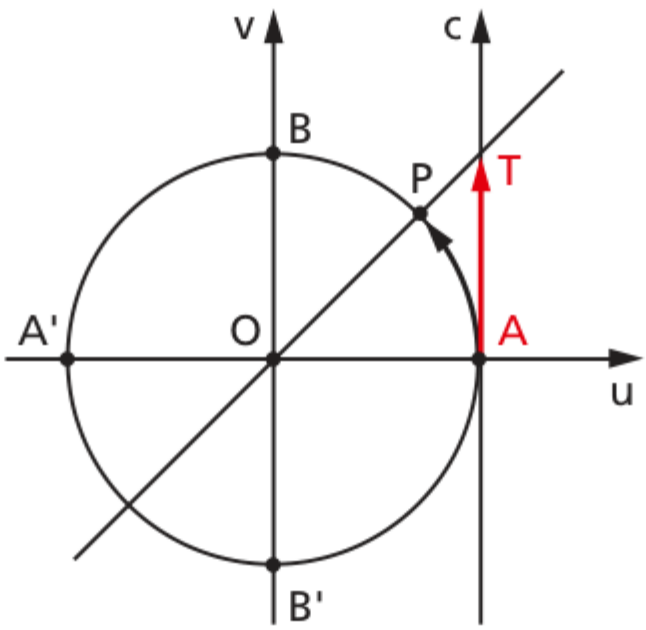
1. Se x é do primeiro ou do quarto quadrante, então $\cos x$ é positivo.
2. Se x é do segundo ou do terceiro quadrante, então $\cos x$ é negativo.
3. Se x percorre o primeiro ou o segundo quadrante, então $\cos x$ é decrescente.
4. Se x percorre o terceiro ou o quarto quadrante, então $\cos x$ é crescente.

4. Tangente

4.1. Definição

Dado um número real $x \in [0, 2\pi]$, $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$, seja P sua imagem no ciclo trigonométrico. Consideremos a reta $\overleftrightarrow{OP}$ e seja T sua interseção com o eixo das tangentes.

Denominamos tangente de x (e indicamos $\operatorname{tg} x$) a medida algébrica do segmento $\overline{AT}$, copnforme a figura a seguir:



Fonte: Iezzi

Notemos que, para $x = \frac{\pi}{2}$, P está em B e, para $x = \frac{3\pi}{2}$, P está em B', então a reta $\overleftrightarrow{OP}$ fica paralela ao eixo das tangentes. Como neste caso não existe o ponto T, a $\operatorname{tg} x$ não está definida.

4.2. Propriedades

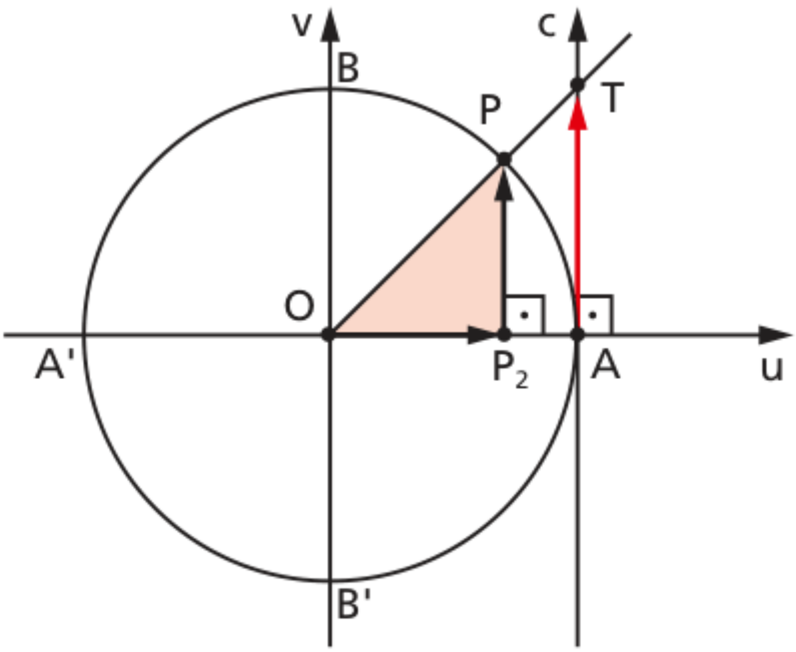
1. Se x é do primeiro ou do terceiro quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é positiva.
2. Se x é do segundo ou do quarto quadrante, então $\operatorname{tg} x$ é negativa.
3. Se x percorre qualquer um dos quatro quadrantes, então $\operatorname{tg} x$ é crescente.

4.3. Teorema. ($\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$)

Para todo x real, $x \in [0, 2\pi]$, e $x \notin \left\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right\}$, vale a relação:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

Demonstração.



Fonte: Iezzi

a) Se $x \notin \{0, \pi, 2\pi\}$, a imagem de x é distinta de A, A', B e B'. Então, temos:

$$\triangle OAT \sim \triangle OP_2P$$
$$\frac{|AT|}{|OA|} = \frac{P_2P}{OP_2}$$

$$\boxed{\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$

b) Se $x \in \{0, \pi, 2\pi\}$, temos:

$$\boxed{\operatorname{tg} x = 0 = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}}$$