Aula 5: Autômato Finito Não-Determinístico

Prof. Lucio A. Rocha

Engenharia de Computação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR
Câmpus Apucarana, Brasil

1º semestre / 2023

Sumário

Seção 1

Autômato Finito Não-Determinístico

Autômato Finito Não-Determinístico

- Autômato Finito Não-Determinístico (AFN):
  - Transição depende do estado atual e do símbolo de entrada.
  - A partir do estado atual, ao receber uma entrada, pode transitar para um conjunto de estados alternativos.

Autômato Finito Não-Determinístico

- AFN é descrito por uma quíntupla:

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

  - Σ: alfabeto (finito) de entrada.
  - Q: conjunto finito de estados.
  - δ: conjunto de transições (função parcial, função de transição ou programa)

$$\delta : Qx\Sigma \rightarrow 2^Q$$

  - q_0: estado inicial ($q_0 \in Q$)
  - F: conjunto de estados finais. (F $\subseteq$Q)

Autômato Finito Não-Determinístico

- Função de transição:

$$\delta(p, a) = \{q_1, q_2, ..., q_n\}$$

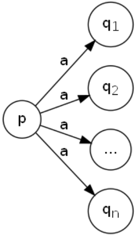
- 

Figura: $\delta : Qx\Sigma \rightarrow 2^Q$

  - p: estado anterior.
  - a: símbolo lido.
  - q: novo estado.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Computação de um AFN:
  - Aplicação sucessiva da função de transição para cada símbolo de entrada
  - *Sentença válida*:
    - A função de transição alcançou estado final
  - *Sentença não-reconhecida*:
    - A função de transição terminou a leitura em estado que não é final
    - A função de transição não possui transição para um estado com o símbolo da sentença.
  - Não há sentença inválida: apenas não é reconhecida pela linguagem.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Função programa estendida: Seja o seguinte AFN:

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

  - $\delta^* : 2^Q x \Sigma^* \rightarrow 2^Q$

- Lê-se: dado um conjunto de estados e uma palavra de entrada, o autômato transitará para outro conjunto de estados.

  - $\delta^*(q, \varepsilon) = q$

$$\delta^*(q, aw) = \delta^*(\cup_{q \in P} \delta(q, a), w)$$

Autômato Finito Não-Determinístico

- Função programa estendida:
  - $\delta^*(q, \varepsilon) = q$

$$\delta^*(q, aw) = \delta^*(\cup_{q \in P} \delta(q, a), w)$$

- Transição estendida (a um conjunto de estados):

$$\delta^*(\{q_1, q_2, ..., q_n\}, a) =$$
$$= \delta(q_1, a) \cup \delta(q_2, a) \cup ... \cup \delta(q_n, a)$$

Autômato Finito Não-Determinístico

- Parada do processamento:
  - ACEITA a entrada
    - Após processar o último símbolo da fita, existe pelo menos um estado final que pertence ao conjunto de estados alternativos alcançados.
  - REJEITA a entrada
    - Após processar o último símbolo da fita, todos os estados alternativos alcançados são não-finais.
    - Não há transição para o símbolo da sentença.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Parada do processamento:
  - ACEITA a entrada
    - ACEITA(M) $= \{w \mid \delta^*(\{q_0\}, w) \cap F \neq \emptyset\}$
  - REJEITA a entrada
    - REJEITA(M) $= \{w \mid \delta^*(\{q_0\}, w) \cap F = \emptyset\}$ ou
    - $\delta^*(\{q_0\}, w)$ é indefinida.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Exemplo:

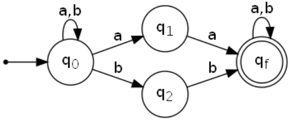


Figura: AFN.

- $\delta^*(\{q_0\}, abaa) = \delta^*(\cup_{q\in\{q_0\}}\delta(q, a), baa) = \delta^*(\delta(q_0, a), baa) = \delta^*(\{q_0, q_1\}, baa) = \delta^*(\delta(q_0, b)\cup\delta(q_1, b), aa) = \delta^*(\{q_0, q_2\}\cup \emptyset, aa) = \delta^*(\delta(q_0, a)\cup\delta(q_2, a), a) = \delta^*(\{q_0, q_1\}\cup \emptyset, a) = \delta^*(\delta(q_0, a)\cup\delta(q_1, a), \varepsilon) = \delta^*(\{q_0, q_1\}\cup \{q_f\}, \varepsilon) = \delta^*(\{q_0, q_1, q_f\}, \varepsilon) = \{q_0, q_1, q_f\} \cap F = \{q_f\} \neq \emptyset$
- $q_f \in F$. Então, a palavra é aceita.

Autômato Finito Não-Determinístico

- O não-determinismo aparentemente aumenta o poder computacional do autômato finito.
  - Na verdade, não aumenta o seu poder computacional.
- Teorema: Equivalência entre AFD e AFN
  - Classe dos AFD é equivalente à classe dos AFN.
  - Uma linguagem L aceita por um AFN é uma *Linguagem regular*.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Determinismo x Não-determinismo
  - Em alguns casos é mais simples desenvolver o AFN do que um AFD.
  - Solução com AFD: grande número de estados.
  - Solução com AFN: menor número de estados.
- Passos para construir um AFD:
  - Construir um AFN
  - Aplicar o algoritmo do Teorema da equivalência.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Exemplo: $AFN \rightarrow AFD$
  - $M_{AFN} = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$
    - $M_{AFD} = (\{a, b\}, Q_D, \delta_D, < q_0 >, F_D)$
- $Q_D = \{< q_0 >, < q_1 >, < q_2 >, < q_f >, < q_0 q_1 >, < q_0 q_2 >, < q_0 q_f >$ $, ..., < q_0 q_1 q_2 q_f >\}$
  $F_D = \{< q_f >, < q_f q_0 >, < q_f q_1 >, < q_f q_2 >, ..., < q_f q_0 q_1 q_2 >\}$
- $< q_0, q_1, q_2, ... q_n >$ Lê-se: todas as combinações desses estados, sem repetições.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Exemplo: $AFN \rightarrow AFD$
- AFN:

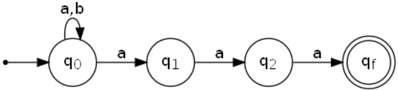


Figura: AFN.

- AFD:

δ_D	a	b
$< q_0 >$	$< q_0 q_1 >$	$< q_0 >$
$< q_0 q_1 >$	$< q_0 q_1 q_2 >$	$< q_0 >$
$< q_0 q_1 q_2 >$	$< q_0 q_1 q_2 q_f >$	$< q_0 >$
$< q_0 q_1 q_2 q_f >$	$< q_0 q_1 q_2 q_f >$	$< q_0 >$

Autômato Finito Não-Determinístico

- AFD:

δ_D	a	b
$P_0 =< q_0 >$	$P_1 =< q_0 q_1 >$	$P_0 =< q_0 >$
$P_1 =< q_0 q_1 >$	$P_2 =< q_0 q_1 q_2 >$	$P_0 =< q_0 >$
$P_2 =< q_0 q_1 q_2 >$	$P_f =< q_0 q_1 q_2 q_f >$	$P_0 =< q_0 >$
$P_f =< q_0 q_1 q_2 q_f >$	$P_f =< q_0 q_1 q_2 q_f >$	$P_0 =< q_0 >$

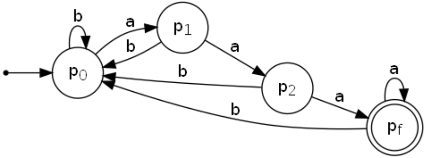
- 

Figura: AFD.

Autômato Finito Não-Determinístico

- Exercício: AFN para **aa** ou **bb** como subpalavra.
- $L = \{w \mid w$ possui **aa** ou **bb** como subpalavra $\}$
- AFN:

$$M_{AFN} = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$$

- Construa o AFD equivalente.

Seção 2

AFNε

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Movimentos vazios
  - Generalizam os movimentos não-determinísticos.
- Movimento vazio
  - Transição sem leitura de nenhum símbolo da fita.
  - É um não-determinismo interno.
    - Transição encapsulada.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Vantagens
  - Facilita a construção de alguns AFN.
- Poder computacional:
  - Não aumenta o poder computacional de reconhecimento de linguagens (i.e., linguagens não são reconhecidas mais rápido).
  - Qualquer AFN com movimentos vazios (AFNε) pode ser simulado por um AFD.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- AFNε é descrito por uma quíntupla:

$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$

  - Σ: alfabeto (finito) de entrada.
  - Q: conjunto finito de estados.
  - δ: conjunto de transições (função parcial, função de transição ou programa)

$$\delta : Qx(\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \rightarrow 2^Q$$

  - Movimento vazio (ou transição vazia):

$$\delta(p, \varepsilon) \rightarrow \{q_1, q_2, ..., q_n\}$$

  - q_0: estado inicial ($q_0 \in Q$)
  - F: conjunto de estados finais. (F $\subseteq$Q)

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Exemplo: AFNε de palavras de símbolos **a** antes de **b**.

$$M_1 = (\{a,b\}, \{q_0, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$$

δ	a	b	ε
q_0	$\{q_0, q_f\}$	$\emptyset$	$\{q_f\}$
q_f	$\emptyset$	$\{q_f\}$	$\emptyset$

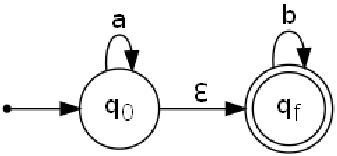
- 

Figura: *AFNε*.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- A computação de transições vazias é feita de 2 (duas) formas:
  - Um estado.
  - Um conjunto finito de estados.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Def.: (Um Estado) Computação Vazia

$$\delta\varepsilon : Q \rightarrow 2^Q$$

Tal que:

  - $\delta\varepsilon(q) = \{q\}$, se $\delta(q, \varepsilon)$ é indefinida (i.e., permanece no estado q).
  - $\delta\varepsilon(q) = \{q\} \cup \delta(q, \varepsilon) \cup (\cup_{p \in \delta(q,\varepsilon)} \delta\varepsilon(p))$.

- Def.: (Conjunto de Estados) Computação Vazia:

$$\delta\varepsilon^* : 2^Q \rightarrow 2^Q$$

Tal que:

$$\delta\varepsilon(P) = \cup_{q \in P} \delta\varepsilon(q))$$

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Exemplo: Dado o AFNε:

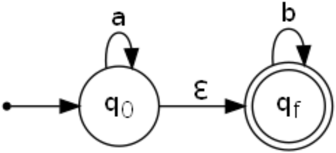


Figura: *AFNε*.

- A Computação Vazia sobre o AFNε é:

$$\delta\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_f\}$$
$$\delta\varepsilon(q_f) = \{q_f\}$$
$$\delta\varepsilon(\{q_0, q_f\}) = \{q_0, q_f\}$$

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Computação de um AFNε para uma palavra w:
  - Sucessiva aplicação da função de transição δ.
  - Para cada símbolo (da esquerda para a direita)
  - Cada passo de aplicação intercalado com computações vazias até encontrar uma condição de parada.
  - Determinar todos os estados alcançáveis a partir da transição vazia.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Função Programa Estendida. Dado o AFNε:
$$M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$$
- $\delta^* : 2^Q x \Sigma^* \rightarrow 2^Q$. Lê-se: dado um conjunto de estados e uma palavra de entrada, o autômato transitará para outro conjunto de estados.
- $\delta\varepsilon^*(P, \varepsilon) = \delta\varepsilon(P)$
$\delta\varepsilon^*(P, wa) = \delta\varepsilon(R)$
$R = \{r \mid r \in \delta(s, a)$, e $s \in \delta^*(P, w)\}$
Consome o último símbolo e sobra o restante para ser lido.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Exemplo: AFNε com computação vazia.

$$L_1 = \{w \mid w \text{ possui sufixo } \mathbf{a}, \text{ ou } \mathbf{bb}, \text{ ou } \mathbf{ccc} \ \}$$

$$M_1 = (\{a, b, c\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_f\}, \delta, q_0, \{q_f\})$$

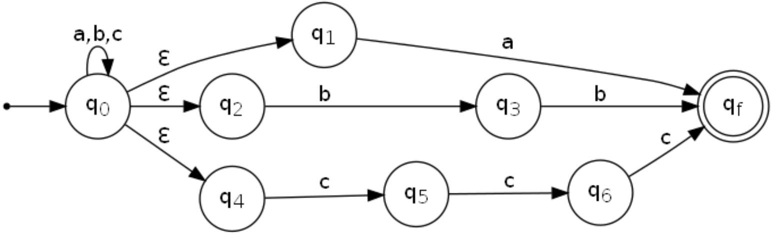


Figura: AFNε

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

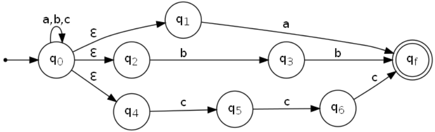


Figura: AFNε

- $\delta^*(\{q_0\}, abb) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b), e\ s \in \delta^*(\{q_0\}, ab)\})$ (1)
- $\delta^*(\{q_0\}, ab) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b), e\ s \in \delta^*(\{q_0\}, a)\})$ (2)
- $\delta^*(\{q_0\}, a) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a), e\ s \in \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\})$ (3)
- $\delta^*(\{q_0\}, \varepsilon) = \delta\varepsilon(\{q_0\}) = \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
- Indução reversa:
- $\delta^*(\{q_0\}, a) = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_f\}$ (3)
- $\delta^*(\{q_0\}, ab) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ (2)
- $\delta^*(\{q_0\}, abb) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$ (1)

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

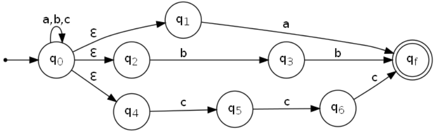
- 

Figura: AFNε

- $\delta^*(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0, q_1, q_2, q_4\}$

$\delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)$	ε
q_0	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$

- $\delta^*(\{q_0\}, a) = \{q_0, q_1, q_2, q_4, q_f\}$ (3)

$\delta^*(\{q_0\}, a)$	a
q_0	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
q_1	$\{q_f\}$
q_2	—
q_4	—

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

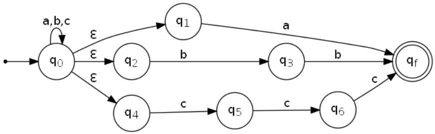


Figura: AFNε

- $\delta^*(\{q_0\}, ab) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$ (2)

$\delta^*(\{q_0\}, ab)$	b
q_0	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
q_1	—
q_2	$\{q_3\}$
q_4	—
q_f	—

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

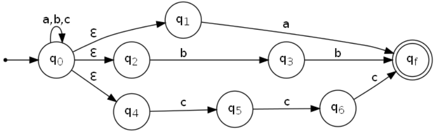
- 

Figura: AFNε

- $\delta^*(\{q_0\}, abb) = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_f\}$ (1)

$\delta^*(\{q_0\}, abb)$	b
q_0	$\{q_0, q_1, q_2, q_4\}$
q_1	$-$
q_2	$\{q_3\}$
q_3	$\{q_f\}$
q_4	$-$

- $q_f \in \delta^*(\{q_0\}, abb)$. Então, a palavra é aceita.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- A classe dos AFN é equivalente à classe dos AFNε
  - Linguagem aceita por AFNε é linguagem regular.
- Prova (por indução):
  - Mostrar que: a partir de um autômato $M_{AFN\varepsilon}$ qualquer
  - Construir um autômato M_{AFN} que realiza as mesmas computações.
  - M_{AFN} simula $M_{AFN\varepsilon}$
- O M_{AFN} é construído com função de transição δ sem movimentos vazios.
- Conjunto de estados destino de cada transição não-vazia:
  - Ampliado com os demais estados possíveis de serem alcançados exclusivamente por transições vazias.

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Seja $M = (\Sigma, Q, \delta, q_0, F)$ um AFNε qualquer.
- O autômato M_{AFN} equivalente é:

$$M_{AFN} = (\Sigma, Q, \delta_{AFN}, q_0, F_{AFN})$$

- $\delta_{AFN} : Qx\Sigma \rightarrow 2^Q$ é tal que:

$$\delta_{AFN}(q, a) = \delta^*(\{q\}, a)$$

  . Lê-se: a partir de um estado e um símbolo de entrada, o autômato transita para um conjunto de estados.
- F_{AFN}: é o conjunto de estados que alcançam estados finais através de computações vazias, i.e.,

$$\delta\varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset$$

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Exemplo: Dado o seguinte AFNε, construa o AFN equivalente.

$$M_{AFN\varepsilon} = (\{a, b\}, \{q_0, q_1, q_2\}, \delta, q_0, \{q_2\})$$

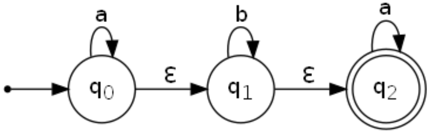


Figura: *AFN*ε

δ	a	b
q_0	$\{q_0, q_1, q2\}$	-
q_1	$-$	$\{q_1, q2\}$
q_2	$\{q_2\}$	-

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

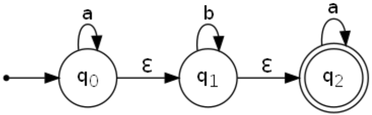


Figura: *AFNε*

- Passo 1:

$$\delta_N(q, a) = \delta^*(\{q\}, a)$$

- $\delta^*(\{q_0\}, \varepsilon) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta^*(\{q_1\}, \varepsilon) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta^*(\{q_2\}, \varepsilon) = \{q_2\}$

$$F_N = \delta\varepsilon(q) \cap F \neq \emptyset$$

- $\delta\varepsilon(q_0) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta\varepsilon(q_1) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta\varepsilon(q_2) = \{q_2\}$

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Passo 2:
- $\delta_N(\{q_0\}, a) = \delta^*(\{q_0\}, a) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a), e\ s \in \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\}) = \{q_0, q_1, q_2\}$
- $\delta_N(\{q_0\}, b) = \delta^*(\{q_0\}, b) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b), e\ s \in \delta^*(\{q_0\}, \varepsilon)\}) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta_N(\{q_1\}, a) = \delta^*(\{q_1\}, a) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a), e\ s \in \delta^*(\{q_1\}, \varepsilon)\}) = \{q_2\}$
- $\delta_N(\{q_1\}, b) = \delta^*(\{q_1\}, b) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b), e\ s \in \delta^*(\{q_1\}, \varepsilon)\}) = \{q_1, q_2\}$
- $\delta_N(\{q_2\}, a) = \delta^*(\{q_2\}, a) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, a), e\ s \in \delta^*(\{q_2\}, \varepsilon)\}) = \{q_2\}$
- $\delta_N(\{q_2\}, b) = \delta^*(\{q_2\}, b) = \delta\varepsilon(\{r \mid r \in \delta(s, b), e\ s \in \delta^*(\{q_2\}, \varepsilon)\}) = \emptyset$

Autômato Finito Com Movimentos Vazios

- Passo 3:

δ_N	a	b
q_0	$\{q_0, q_1, q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_1	$\{q_2\}$	$\{q_1, q_2\}$
q_2	$\{q_2\}$	$\emptyset$

- Passo 4:

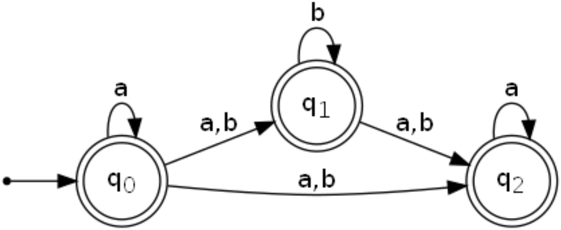


Figura: M_N