Aula 7: Propriedades das Linguagens Regulares

Prof. Lucio A. Rocha

Engenharia de Computação
Universidade Tecnológica Federal do Paraná, UTFPR
Campus Apucarana, Brasil

1º semestre / 2023

Sumário

Seção 1

Lema do Bombeamento

Lema do Bombeamento

- Todas as linguagens com um número finito de palavras (linguagens finitas) são Regulares.
- Para mostrar que uma linguagem é regular é suficiente representá-la com um dos formalismos a seguir:
  - Autômato Finito ou
  - Expressão Regular ou
  - Gramática Regular
- Mas há linguagens que não são regulares, ou seja, não possuem autômato finito, expressão regular ou gramática regular que as representa.

Lema do Bombeamento

- Exemplo:
  - $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$ não é Linguagem Regular.
  - $L_2 = \{(ab)^n (ba)^n \mid n \geq 0\}$ é Linguagem Regular.

Lema do Bombeamento

- Para verificar se uma linguagem <u>não é</u> regular utiliza-se o método do **Lema do Bombeamento**.
- Ideia da verificação:
    - Sempre é possível encontrar uma substring não-vazia v próxima ao início da palavra w que pode ser **bombeada**, isto é, repetida $n \geq 0$ vezes, mantendo na linguagem L a palavra resultante.

Lema do Bombeamento

- Se o autômato reconhece uma entrada *w* de comprimento $\geq$ a um número p de estados de *L*, então obrigatoriamente o autômato assume algum estado q mais de uma vez e, portanto, existe um ciclo na função programa que passa por q.

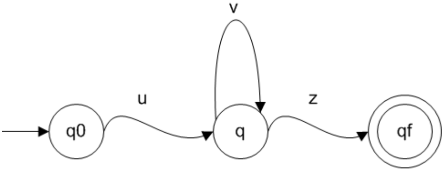
- 

Figura: Lema do Bombeamento.

- Ex.: w=aba, para p=3
- Ex.: w=a**bbbbbbbbbbb**a, para p=3

Lema do Bombeamento

- Logo, w pode ser dividida em 3 subpalavras:

$$w = uvz,$$
$$|uv| \leq p,$$
$$|v| \geq 1$$

Lema do Bombeamento

- Claramente, tal ciclo pode ser executado ("bombeado") zero ou mais vezes.
- Portanto, para qualquer $i \geq 0$, $w = uv^iz$ é $ACEITA(M)$, ou seja, w é palavra da linguagem.

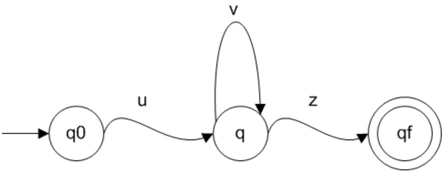


Figura: Lema do Bombeamento.

Lema do Bombeamento

Lema do Bombeamento

- Def.: Se L é uma linguagem regular, então:
  - existe uma constante p tal que,
  - para toda palavra w onde $|w| \geq p$
  - w pode ser dividida como $w = uvz$ onde:
    - $|uv| \leq p$
      $|v| \geq 1$
    - sendo que, para todo $i \geq 0$, $uv^i z$ é palavra de L.

Lema do Bombeamento

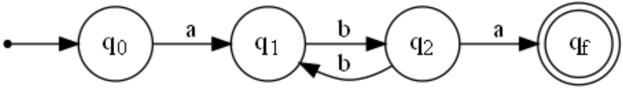
- Ex.: Para provar que $a^n b^n$ não é regular utiliza-se o Lema do Bombeamento.
- Passos de resolução: Prova por Contradição.
  - O Lema diz que é válido para todas w, onde $|w| \geq p$.
  - Então escolha uma cadeia válida de L com pelo menos uma repetição de símbolos: $w = aabb$, ou seja $|w| \geq p$
  - Fazer a análise dos casos do Lema, para o menor caso possível de v, $|v| = 1$.
  - Neste caso: $u = a, v = a, z = bb$
  - Porém, se v for bombeada, $a^n b^n$ deixa de ser palavra da linguagem.

Lema do Bombeamento

- Ex.: Verificar se a linguagem é regular.
- $L_1 = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$
- Prova: Suponha que L_1 seja regular.
  - Então existe um AFD M com p estados que aceita L. Seja $w = a^p b^p$.
  - $u = a^{p-1}, v = a, z = b^p$
  - $|uv| \leq p$
  - $|v| \geq 1$
  - Mas uv só contém a's. Dado uv^2z (ou acima),
    o número de a's será maior que o número de b's.
    Então, L_1 não é linguagem regular.

Lema do Bombeamento

- Ex.: Verificar se a linguagem é regular.
- Dado o AFD da figura (Nota: se existe AFD, L já é linguagem regular):



- $p = 4$
- Prova: Suponha $w = abbba$
  - $u = ab, v = b, z = ba$
  - $|uv| \leq p$
  - $|v| \geq 1$
  - Se v for bombeada, $\forall i \geq 0, w = uv^i z \in L$
  - Então, $L = \{ab^n a \mid n > 0\}$ pode ser linguagem regular.

Lema do Bombeamento

- Note que $w = aba$ não pode ser escolhida, pois $|w| \geq p$.
- Ou seja, a palavra escolhida deve ter, no mínimo, uma repetição.