Ficha 1
Resolução

Eduardo Freitas Fernandes

2025

1 Especificações

1. Descreva o que faz cada uma das seguintes funções:

a) determina o máximo entre `x` e `y`

b) determina um divisor comum de `x` e `y`

c) determina um múltiplo comum de `x` e `y`

d) determina o índice do menor elemento do array `a[]`

e) determina um minorante do array `a[]`

f) determina o menor elemento do array `a[]`

g) determina a posição de `x` no array, caso não exista, retorna -1

2. Escreva as pré e pós-condições para as seguintes funções.

```
int prod (int x, int y) {
    // pre: True
    ...
    // pos: r == x*y
}
```

```
int mdc (int x, int y) {
    // pre: True
    ...
    // pos: (x % r == 0 && y % r == 0) &&
    //      (forall_{x % p == 0 && y % p == 0} p <= r)
}
```

```
int sum (int v[], int N) {
    // pre: N > 0
    ...
    // pos: r == sum_{0 <= i < N} a[i]
}
```

```
int maxPOrd (int v[], int N) {
    // pre: N > 0
    ...
    // pos: (0 < r <= N) && (forall_{0 < i < r} v[i-1] <= v[i]) &&
    //      (forall_{forall_{0 < i < p} v[i - 1] <= v[i]} p <= r)
}
```

```c
int isSorted (int v[], int N) {
    // pre: N > 0
    ...
    // pos: (forall_{0 < i < N} v[i-1] <= v[i] && r > 0) ||
    //       (r == 0 && exists_{0 < i < N} v[i-1] > v[i])
}
```

2 Correção

1. Para cada um dos seguintes triplos de Hoare, apresente um contra-exemplo que mostre a sua **não** validade.

a) `x = 0, y = -5`

b) `x = 3, y = 2`

c) `x = 0, y = 0`

d) `x = 0, y = 0`

e) `x = 1, y = -10`

2. Modifique a pré-condição de cada um dos triplos de Hoare da alínea anterior de forma a obter um triplo válido.

```c
{y >= 0}
r = x+y;
{r >= x}
```

```c
{x == y}
x = x+y; y = x-y; x = x-y;
{x == y}
```

```c
{x != y}
x = x+y; y = x-y; x = x-y;
{x != y}
```

```c
{x != y}
if (x > y) r = x-y; else r = y-x;
{r > 0}
```

```c
{y > 0}
while (x > 0) { y = y+1; x = x-1;}
{y > x}
```

3. Para cada uma das 4 primeiras alíneas do exercício anterior, mostre que a alteração que propôs é de facto um triplo válido.

(a)

$$\frac{\dfrac{\{y \geq 0\} \Rightarrow x + y \geq x}{\{y \geq 0\} \Rightarrow \{r \geq x[r \backslash x + y]\}}}{\{y \geq 0\} r = x + y \{r \geq 0\}}$$

(b)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{x == y\} \Rightarrow \{y == x\}}{\{x == y\} \Rightarrow \{y == x - y[x \backslash x + y]\}}}{\{x == y\} x = x + y \{y == x - y\}}}{\{x == y\} x = x + y \{R\}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{R\} \Rightarrow \{y == x - y\}}{\{R\} \Rightarrow \{x - y == y[y \backslash x - y]\}}}{\{R\} y = x - y \{x - y == y\}}}{\{R\} y = x - y \{K\}} \quad \dfrac{\dfrac{\{K\} \Rightarrow \{x - y == y\}}{\{K\} \Rightarrow \{x == y[x \backslash x - y]\}}}{\{K\} x = x - y \{x == y\}}}{\{R\} y = x - y; x = x - y \{x == y\}}}{\{x == y\} x = x + y; y = x - y; x = x - y \{x == y\}}$$

(c) Semelhante à alínea (b)

(d)

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\{x > y\} \Rightarrow \{x - y > 0\}}{\{x > y\} \Rightarrow \{r > 0[r \backslash x - y]\}}}{\{x > y\} r = x - y \{r > 0\}}}{\{x \neq y \wedge x > y\} r = x - y \{r > 0\}} \quad \dfrac{\dfrac{\dfrac{\{x < y\} \Rightarrow \{y - x > 0\}}{\{x < y\} \Rightarrow \{r > 0[r \backslash y - x]\}}}{\{x < y\} r = y - x \{r > 0\}}}{\{x \neq y \wedge x \leq y\} r = y - x \{r > 0\}}}{\{x \neq y\} \textbf{ if } (x > y)\ r = x - y \textbf{ else } x = y - x \{r > 0\}}$$

3 Invariantes

1. Considere as seguintes implementações de uma função que calcula o produto de dois números.
Para cada um dos predicados, indique se são verdadeiros no início (Init) e preservados pelos ciclos destas duas funções.

Predicado	**mult1**		**mult2**	
	Init	**Pres**	**Init**	**Pres**
$r == a \times b$	F	F	F	F
$a \geq 0$	V	V	V	V
$b \geq 0$	F	F	F	F
$r \geq 0$	V	F	V	F
$a == x$	V	F	V	F
$a \neq 0$	F	F	F	F
$b == y$	V	V	V	F
$a \times b == x \times y$	V	F	V	F
$a \times b + r == x \times y$	V	V	V	V

Apresente invariantes dos ciclos destas duas funções que lhe permitam provar a sua correção (parcial).

`mult1`: $a \geq 0 \quad \wedge \quad b == y \quad \wedge \quad a \times b + r == x \times y$
`mult2`: $a \geq 0 \quad \wedge \quad a \times b + r == x \times y$

2. Para cada uma das funções seguintes, indique um **invariante** de ciclo que lhe permita provar a **correção parcial**. Em cada um dos casos, mesmo informalmente, apresente argumentos que lhe permitam demonstrar as propriedades `(inicialização, preservação e utilidade)` dos invariantes definidos.

Indique também um **variante** de ciclo que lhe permita provar a **correção total**.

a) I: $0 \leq r \leq N \quad \wedge \quad i \leq N \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i}\ v[r] \leq v[k]$
   V: $N - i$

b) I: $i \leq N \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i}\ r \leq v[k] \quad \wedge \quad \exists_{0 \leq m < i}\ r == v[m]$
   V: $N - i$

c) I: $0 \leq i \leq N \quad \wedge \quad r == \sum_{K=0}^{i} v[k]$
   V: $N - i$

d) I: $a \times b + r == x^2$
   V: a

e) I: $i \leq x \quad \wedge \quad r == i^2$
   V: $x - i$

f) I: $r \leq N \quad \wedge \quad \forall_{0 < k < r}\ v[k-1] \leq v[k]$
   V: $N - r$

g) I: $i \leq N \ \wedge\ ((p == -1 \ \wedge\ \forall_{0 \leq k < i}\ a[k] \neq x) \ \vee\ (0 \leq p < i \ \wedge\ x == a[p]))$
   V: $N - i$

h) I: $i \leq N \ \wedge\ ((p == -1 \ \wedge\ \forall_{0 \leq k < i}\ a[k] < x) \ \vee\ (0 \leq p < i \ \wedge\ x == a[p]))$
   V: $N - i$

i) I: $i \leq N \quad \wedge \quad 0 \leq s \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i}\ x \neq a[k] \quad \wedge \quad \forall_{s < j < N}\ x \neq a[j]$
   V: $s - i + 1$

j) I: $i \leq n + 1 \quad \wedge \quad (r == 0 \quad \vee \quad r == \frac{i \times (i-1)}{2})$
   V: $m + 1 - i$

k) I: $i \leq 0 \quad \wedge \quad r == \frac{n \times (n+1) - i \times (i+1)}{2}$
   V: i

l) I: $\exists_k\ x == k \times y + r \quad \wedge \quad r \geq 0$
   V: $r - y + 1$

m) I: $i \leq N \quad \wedge \quad r == \sum_{K=0}^{i-1}\ x^k \times coef[k]$
   V: $N - i$

n) I: $i \geq 0 \quad \wedge \quad r == \sum_{K=0}^{N-i-1}\ x^k \times coef[i+k]$
   V: i