

Algoritmos e Complexidade

MIEI, LCC 2º ano

12 de Janeiro de 2019 – Duração: 90 min

1. Considere o problema de, dado um array v com N elementos determinar o k -ésimo maior elemento (com $k < N$), isto é, o elemento que estaria na posição $N-k$ caso o array estivesse ordenado por ordem crescente.

Uma forma de resolver este problema consiste em percorrer o array guardando numa estrutura auxiliar apenas os k maiores elementos lidos até ao momento. No final o elemento pretendido é o menor dos elementos armazenados.

Defina uma função `int kmaior (int v[], int N, int k)` que implementa o algoritmo descrito, usando como estrutura auxiliar uma *min-heap* (com k elementos). Admita que existem disponíveis as funções `void bubbleDown (int h[], int N)` (que faz o *bubble down* do elemento $h[0]$ na heap h com N elementos) e `void bubbleUp (int h[], int N)` (que faz o *bubble up* do elemento $h[N-1]$ na heap h).

Identifique o pior caso da solução apresentada e diga, justificando, qual a complexidade dessa solução nesse caso.

2. Apresente a evolução de uma tabela de hash de inteiros (com tamanho `HSize=17`, função de hash `hash(x) = x%HSize` e tratamento de colisões por linear probing), inicialmente vazia e onde foram inseridos (por esta ordem) os elementos:

30, 18, 43, 25, 60, 35, 40, 20 e 41

Use a simulação feita para calcular o número médio de consultas ao array que foram feitos por cada inserção, neste caso.

3. Considere uma estrutura de dados sobre a qual é executada uma sequência de operações. É sabido que o tempo de execução da n -ésima operação da sequência é dado por $T_{op}(n) = n^2$ quando n é uma potência de 2 (i.e., $n = 2^k$ para algum $k \in \mathbb{N}$), e $T_{op}(n) = 1$ para todos os outros valores de n .

Efectue a análise amortizada do tempo de execução de uma operação arbitrária desta sequência, utilizando para isso **duas técnicas** à sua escolha.

4. Dado um grafo G um caminho $\langle v_0, v_1, \dots, v_n \rangle$ diz-se um caminho simples sse não contiver elementos repetidos. Defina uma função `int simplePath (Graph g, int v[], int k)` que testa se a sequência $\langle v[0], v[1], \dots, v[k-1] \rangle$ é um caminho simples. A função deve verificar que se trata realmente de um caminho e que não tem vértices repetidos.

Indique, justificando, a complexidade da solução apresentada.

```
#define N ...
typedef struct edge {
    int dest, cost;
    struct edge *next;
} * Graph [N];
```

5. Considere o grafo pesado e não orientado representado na matriz de adjacência à direita ((-1) é usado para marcar que **não há** aresta).

Relembre o algoritmo de Dijkstra para calcular o caminho mais curto entre um par de vértices.

```
int dijkstraSP (GMat g, int o, int d,
               int pesos[], int pais[]);
```

Apresente a evolução do algoritmo de Dijkstra para calcular o caminho mais curto entre os vértices 2 e 3, i.e., a invocação `dijkstraSP (g1, 2, 3, pesos, pais)`;

Nomeadamente, apresente a evolução dos arrays `pais` e `pesos`.

```
#define N 6
typedef int GMat [N][N];

GMat g1 =
// 0  1  2  3  4  5
{{-1, 6, 7,-1, 3,-1}, // 0
 { 6,-1,-1, 5, 4, 2}, // 1
 { 7,-1,-1,-1, 8,-1}, // 2
 {-1, 5,-1,-1,-1, 2}, // 3
 { 3, 4, 8,-1,-1, 3}, // 4
 {-1, 2,-1, 2, 3,-1}} // 5
```