

Ficha 1

Resolução

Eduardo Freitas Fernandes

2025

1 Especificações

1. Descreva o que faz cada uma das seguintes funções:

- a) determina o máximo entre x e y
- b) determina um divisor comum de x e y
- c) determina um múltiplo comum de x e y
- d) determina o índice do menor elemento do array $a[]$
- e) determina um minorante do array $a[]$
- f) determina o menor elemento do array $a[]$
- g) determina a posição de x no array, caso não exista, retorna -1

2. Escreva as pré e pós-condições para as seguintes funções.

```
1 int prod (int x, int y) {  
2     // pre: True  
3     ...  
4     // pos: r == x*y  
5 }
```

```
1 int mdc (int x, int y) {  
2     // pre: True  
3     ...  
4     // pos: (x % r == 0 && y % r == 0) &&  
5     //      (forall_{x % p == 0 && y % p == 0} p <= r)  
6 }
```

```
1 int sum (int v[], int N) {  
2     // pre: N > 0  
3     ...  
4     // pos: r == sum_{0 <= i < N} a[i]  
5 }
```

```
1 int maxPOrd (int v[], int N) {  
2     // pre: N > 0  
3     ...  
4     // pos: (0 < r <= N) && (forall_{0 < i < r} v[i-1] <= v[i]) &&  
5     //      (forall_{forall_{0 < i < p} v[i - 1] <= v[i]} p <= r)  
6 }
```

```

1 int isSorted (int v[], int N) {
2     // pre: N > 0
3     ...
4     // pos: (forall_{0 < i < N} v[i-1] <= v[i] && r > 0) ||
5           (r == 0 && exists_{0 < i < N} v[i-1] > v[i])
6 }

```

2 Correção

1. Para cada um dos seguintes triplos de Hoare, apresente um contra-exemplo que mostre a sua **não** validade.

- a) $x = 0, y = -5$
- b) $x = 3, y = 2$
- c) $x = 0, y = 0$
- d) $x = 0, y = 0$
- e) $x = 1, y = -10$

2. Modifique a pré-condição de cada um dos triplos de Hoare da alínea anterior de forma a obter um triplo válido.

```

1 {y >= 0}
2 r = x+y;
3 {r >= x}

```

```

1 {x == y}
2 x = x+y; y = x-y; x = x-y;
3 {x == y}

```

```

1 {x != y}
2 x = x+y; y = x-y; x = x-y;
3 {x != y}

```

```

1 {x != y}
2 if (x > y) r = x-y; else r = y-x;
3 {r > 0}

```

```

1 {y > 0}
2 while (x > 0) { y = y+1; x = x-1; }
3 {y > x}

```

3. Para cada uma das 4 primeiras alíneas do exercício anterior, mostre que a alteração que propôs é de facto um triplo válido.

(a)

$$\frac{\{y \geq 0\} \Rightarrow x + y \geq x}{\frac{\{y \geq 0\} \Rightarrow \{r \geq x[r \setminus x + y]\}}{\{y \geq 0\} r = x + y \{r \geq 0\}}}$$

(b)

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\{x == y\} \Rightarrow \{y == x\}}{\{x == y\} \Rightarrow \{y == x - y[x \setminus x + y]\}} \quad \frac{\frac{\{R\} \Rightarrow \{y == x - y\}}{\{R\} \Rightarrow \{x - y == y[y \setminus x - y]\}} \quad \frac{\{K\} \Rightarrow \{x - y == y\}}{\{K\} \Rightarrow \{x == y[x \setminus x - y]\}}}{\frac{\{x == y\}x = x + y\{y == x - y\}}{\{x == y\}x = x + y\{R\}} \quad \frac{\frac{\{R\}y = x - y\{x - y == y\}}{\{R\}y = x - y\{K\}} \quad \frac{\{K\}x = x - y\{x == y\}}{\{K\}x = x - y\{x == y\}}}}{\frac{\{x == y\}x = x + y; y = x - y; x = x - y\{x == y\}}{\{x == y\}x = x + y; y = x - y; x = x - y\{x == y\}}}
\end{array}$$

(c) Semelhante à alínea (b)

(d)

$$\begin{array}{c}
\frac{\frac{\{x > y\} \Rightarrow \{x - y > 0\}}{\{x > y\} \Rightarrow \{r > 0[r \setminus x - y]\}} \quad \frac{\frac{\{x < y\} \Rightarrow \{y - x > 0\}}{\{x < y\} \Rightarrow \{r > 0[r \setminus y - x]\}}}{\frac{\{x > y\}r = x - y\{r > 0\}}{\{x < y\}r = y - x\{r > 0\}}} \\
\frac{\{x \neq y \wedge x > y\}r = x - y\{r > 0\} \quad \{x \neq y \wedge x \leq y\}r = y - x\{r > 0\}}{\{x \neq y\} \text{ if } (x > y) \text{ } r = x - y \text{ else } x = y - x\{r > 0\}}
\end{array}$$

3 Invariantes

1. Considere as seguintes implementações de uma função que calcula o produto de dois números.

Para cada um dos predicados, indique se são verdadeiros no início (Init) e preservados pelos ciclos destas duas funções.

| Predicado | mult1 | | mult2 | |
|--------------------------------|-------|------|-------|------|
| | Init | Pres | Init | Pres |
| $r == a \times b$ | F | F | F | F |
| $a \geq 0$ | V | V | V | V |
| $b \geq 0$ | F | F | F | F |
| $r \geq 0$ | V | F | V | F |
| $a == x$ | V | F | V | F |
| $a \neq 0$ | F | F | F | F |
| $b == y$ | V | V | V | F |
| $a \times b == x \times y$ | V | F | V | F |
| $a \times b + r == x \times y$ | V | V | V | V |

Apresente invariantes dos ciclos destas duas funções que lhe permitam provar a sua correção (parcial).

mult1: $a \geq 0 \quad \wedge \quad b == y \quad \wedge \quad a \times b + r == x \times y$
mult2: $a \geq 0 \quad \wedge \quad a \times b + r == x \times y$

2. Para cada uma das funções seguintes, indique um **invariante** de ciclo que lhe permita provar a **correção parcial**. Em cada um dos casos, mesmo informalmente, apresente argumentos que lhe permitam demonstrar as propriedades (**inicialização, preservação e utilidade**) dos invariantes definidos.

Indique também um **variante** de ciclo que lhe permita provar a **correção total**.

a) I: $0 \leq r \leq N \quad \wedge \quad i \leq N \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i} v[r] \leq v[k]$
V: $N - i$

b) I: $i \leq N \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i} r \leq v[k] \quad \wedge \quad \exists_{0 \leq m < i} r == v[m]$
V: $N - i$

c) I: $0 \leq i \leq N \quad \wedge \quad r == \sum_{K=0}^i v[k]$
V: $N - i$

d) I: $a \times b + r == x^2$
V: a

e) I: $i \leq x \quad \wedge \quad r == i^2$
V: $x - i$

f) I: $r \leq N \quad \wedge \quad \forall_{0 < k < r} v[k-1] \leq v[k]$
V: $N - r$

g) I: $i \leq N \quad \wedge \quad ((p == -1 \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i} a[k] \neq x) \quad \vee \quad (0 \leq p < i \quad \wedge \quad x == a[p]))$
V: $N - i$

h) I: $i \leq N \quad \wedge \quad ((p == -1 \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i} a[k] < x) \quad \vee \quad (0 \leq p < i \quad \wedge \quad x == a[p]))$
V: $N - i$

i) I: $i \leq N \quad \wedge \quad 0 \leq s \quad \wedge \quad \forall_{0 \leq k < i} x \neq a[k] \quad \wedge \quad \forall_{s < j < N} x \neq a[j]$
V: $s - i + 1$

j) I: $i \leq n + 1 \quad \wedge \quad (r == 0 \quad \vee \quad r == \frac{i \times (i-1)}{2})$
V: $m + 1 - i$

k) I: $i \leq 0 \quad \wedge \quad r == \frac{n \times (n+1) - i \times (i+1)}{2}$
V: i

l) I: $\exists_k x == k \times y + r \quad \wedge \quad r \geq 0$
V: $r - y + 1$

m) I: $i \leq N \quad \wedge \quad r == \sum_{K=0}^{i-1} x^k \times coef[k]$
V: $N - i$

n) $i \geq 0 \quad \wedge \quad r == \sum_{K=0}^{N-i-1} x^k \times coef[i+k]$
V: i