

Cálculo de Programas

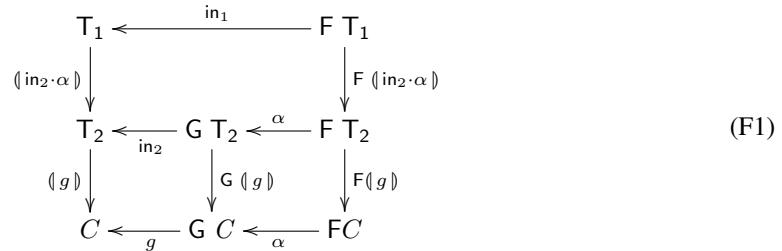
Algebra of Programming

UNIVERSIDADE DO MINHO
 Lic. Ciências da Computação (3º ano)
 Lic. em Engenharia Informática (3º ano)

2025/26 - Ficha (*Exercise sheet*) nr. 11

1. O diagrama que se segue

The following diagram



compõe dois catamorfismos envolvendo os tipos T_1 (F -recursivo) e T_2 (G -recursivo):

involves the types T_1 (F -recursive) and T_2 (G -recursive) and two catamorphisms:

$$\begin{aligned}
 \langle\langle g \rangle\rangle : T_2 &\rightarrow C \\
 \langle\langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle\rangle : T_1 &\rightarrow T_2
 \end{aligned}$$

Considere-se o caso:

Consider the special case that follows:

$$\begin{aligned}
 T_1 = T_2 &= \text{LTree } A \\
 F f &= id + f \times f \\
 \alpha &= id + \text{swap} \\
 \text{in}_2 &= [\text{Leaf}, \text{Fork}]
 \end{aligned}$$

Desenvolver

Unfold

$$\text{mirror} = \langle\langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle\rangle \tag{F2}$$

até se obter uma definição completamente *pointwise*. *until reaching a fully pointwise definition.*

2. A lei

Law

$$\langle\langle g \rangle\rangle \cdot \langle\langle \text{in}_2 \cdot \alpha \rangle\rangle = \langle\langle g \cdot \alpha \rangle\rangle \iff G f \cdot \alpha = \alpha \cdot F f \tag{F3}$$

verifica-se — cf. diagrama (F1) — onde a condição

$$\mathsf{G} f \cdot \alpha = \alpha \cdot \mathsf{F} f \quad (\text{F4})$$

mas não é que a propriedade gráts de α : $F X \rightarrow G X$. Apresente justificações para a seguinte demonstração de (F3):

holds — see diagram (F1) — where condition

is nothing more than the free property of α : $F\ X \rightarrow G\ X$. Provide justifications for the following proof of (F3):

3. Na sequência da questão 1 acima, suponha que se tem $(g) = \text{mirror}$ em (F1). Mostre por (F3) que

As follow up of question 1 above, suppose that one has $\langle g \rangle = \text{mirror}$ in (F1). Show by (F3) that

$$mirror \cdot mirror = id \quad (F5)$$

se verifica.

holds.

4. Recordando a definição $T f = (\text{in} \cdot B(f, id))$, mostre que a lei de absorção-cata,

Recalling definition $\mathsf{T}\ f = (\mathsf{in} \cdot \mathsf{B}\ (f, \mathsf{id}))$, show that the law of absorption-cata,

$$\langle\langle g\rangle\rangle \cdot T f = \langle\langle g \cdot B(f, id)\rangle\rangle$$

é um caso particular de (F3).

is a special case of (F3).

5. Todo o ciclo-*while* que termina pode ser definido por

Every terminating while-loop can be defined by

$$\text{while } p \ f \ g = \text{tailr } ((g + f) \cdot (\neg \cdot p)?) \quad (\text{F6})$$

recorrendo ao combinador de “*tail recursion*”

using the “tail recursion” combinator

$$\text{tailr } f = \llbracket \text{join}, f \rrbracket \quad (\text{F7})$$

que é um hilomorfismo de base B $(X, Y) = X + Y$, para $\text{join} = [id, id]$.

which is a hylomorphism of basis B $(X, Y) = X + Y$, for join $= [id, id]$.

Derive a definição *pointwise* de **while** $p \ f \ g$, sabendo que qualquer $h = \llbracket f, g \rrbracket$ que termina é tal que $h = f \cdot F h \cdot g$.

Derive the pointwise definition of while $p \ f \ g$, knowing that any terminating $h = \llbracket f, g \rrbracket$ is such that $h = f \cdot F \ h \cdot g$.

6. Considere a seguinte lei de fusão de `tailr`, válida sempre que $(\text{tailr } g) \cdot f$ termina:

$$(\text{tailr } g) \cdot f = \text{tailr } h \Leftarrow (id + f) \cdot h = g \cdot f \quad (\text{F8})$$

Complete a seguinte demonstração dessa lei.

Complete the following proof of (F8).

7. Um mónade é um functor T equipado com duas funções μ e u ,

A monad is a functor T equipped with two functions μ and u

$$A \xrightarrow{u} \mathsf{T}\, A \xleftarrow{\mu} \mathsf{T}\, (\mathsf{T}\, A)$$

que satisfazem determinadas propriedades (ver formulário). Partindo da definição

satisfying a few properties (see formula sheet). Starting from the definition of monadic composition,

$$f \bullet g = \mu \cdot \mathsf{T} f \cdot g \quad (\text{F9})$$

de *composição monádica*, demonstre a seguinte propriedade sua:

prove the following property:

$$f \bullet [g, h] = [f \bullet g, f \bullet h] \quad (\text{F10})$$