

Elementos de Probabilidades e Teoria de Números

Teste - Teoria de Números

duração: 2 horas

Nome:

Número:

Grupo I

Relativamente às questões deste grupo, indique para cada alínea se a afirmação é verdadeira (V) ou falsa (F), marcando x no quadrado respetivo.

- |   | V                        | F                        |
|---|--------------------------|--------------------------|
| 1. O resto da divisão de 85 por -6 é 7 porque $85 = (-6) \times (-13) + 7$ .  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 2. Para quaisquer $a, b, c \in \mathbb{Z}$ , se $a b$ e $a \nmid (5b + 4c)$ , então $a \nmid c$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 3. Se $a$ é um inteiro tal que $\text{m.d.c.}(a, 80) = 10$ e $\text{m.m.c.}(a, 80) = 2^4 \times 3^2 \times 5^2$ , então $a > 500$ .                     | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 4. Para quaisquer $a, b \in \mathbb{Z}$ tais que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$ , $\text{m.d.c.}(a, b) \mid \text{m.d.c.}(3a, 8b)$ .                          | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 5. Qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$ tal que $1 < n < 280$ , se $n$ não admite um divisor $d$ tal que $1 < d \leq 14$ , então $n$ é um número primo. | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 6. Sejam $a, b, p \in \mathbb{Z}$ . Se $p$ é um número primo e $p \mid a^3b^2$ , então $p \mid a$ ou $p \mid b$ .                                       | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 7. O inteiro 3333 é combinação linear de 5 e 30.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 8. O conjunto $\{-2, 1, 3, 6, 10, 5\}$ é um sistema completo de resíduos módulo 6.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 9. $-85 \equiv 5 \pmod{15}$ .   | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 10. A congruência linear $6x \equiv 5 \pmod{33}$ tem 3 soluções módulo 33.  | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

Grupo II

Para cada uma das questões deste grupo, indique a sua resposta no espaço disponibilizado a seguir à questão, justificando sucintamente.

1. Considere as divisões seguintes

$$255 \mid 123 \\ 9 \quad 2$$

$$123 \mid 9 \\ 6 \quad 13$$

$$9 \mid 6 \\ 3 \quad 1$$

$$6 \mid 3 \\ 0 \quad 2$$

Indique o m.d.c.(255, 123) e exprima-o como combinação linear de 255 e 123.

Resposta:

2. Sabendo que  $(28, 58)$  é uma solução da equação diofantina  $255x - 123y = 6$ , justifique que a congruência linear  $255x \equiv 6 \pmod{123}$  é solúvel e indique duas das suas soluções não congruentes módulo 123.

Resposta:

3. Determine o resto de  $3^{124} + 1$  na divisão por 7.

Resposta:

4. Determine o dígito  $x$  tal que  $\overline{2734x}$  seja um inteiro divisível por 3 e tenha resto 1 na divisão por 4.

Resposta:

**Grupo III**

**Resolva cada uma das questões deste grupo na folha de exame. Justifique as suas respostas.**

1. Num refeitório, com capacidade para 902 pessoas, há 55 mesas circulares e 77 mesas retangulares. As mesas circulares têm todas a mesma capacidade, o mesmo se passando com as mesas retangulares. Além disso, a capacidade de qualquer um dos tipos de mesas é superior ou igual a 2.
  - (a) Escreva uma equação diofantina cuja resolução permita obter a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas retangulares.
  - (b) Determine a capacidade das mesas circulares e a capacidade das mesas retangulares.
2. Resolva a congruência linear  $6x \equiv 501 \pmod{21}$  e indique a maior solução não positiva.
3. Considere o sistema de congruências lineares  $(S)$  a seguir indicado

$$(S) \begin{cases} x \equiv 3 \pmod{7} \\ x \equiv 4 \pmod{5} \\ x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

Recorrendo ao Teorema Chinês dos Restos, justifique que o sistema  $(S)$  é solúvel e resolva-o. Indique a menor solução de  $(S)$  maior do que 200.

Cotações: Grupo I: 7, 5. Grupo II: 6, 0. Grupo III: 2, 5 + 1, 75 + 2, 25.