

Exame de Recurso de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática/ Mestrado Integrado em Engenharia Informática

17 de janeiro de 2025

Duração: 2h

Nome: _____ Nº _____ Folha de continuação

1. Nesta questão, responda a cada uma das alíneas apresentando apenas o resultado final no retângulo correspondente, sem justificação.

Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- (a) Indique a coluna 2 da matriz produto AD .

- (b) Caso exista, indique uma matriz B tal que $(1, 3, 3, 2)$ e $(-1, -1, 1, 3)$ são soluções do sistema $AX = B$.

- (c) Sabendo que C é invertível, indique o valor da entrada da matriz X solução da equação $CX = AD$ na posição $(3, 2)$ (i.e. $[X]_{32}$).

- (d) Diga se existe e, em caso afirmativo, indique uma base de \mathbb{R}^3 constituída por vetores cujas coordenadas formam colunas da matriz A .

- (e) Considere as seguintes bases de \mathbb{R}^3 : $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e B_3 a base canónica. Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(f, B, B_3) = C$. Indique $f(-1, 1, -1)$.

Atenção que relativamente a cada uma das questões seguintes têm de ser atendidos os seguintes aspetos:

- i) devem ser apresentados os cálculos essenciais e uma justificação cuidadosa da resposta, nos espaços imediatamente a seguir;
- ii) a resolução de sistemas de equações lineares só pode ser feita pelo método de Gauss, de Gauss-Jordan ou pela regra de Cramer;
- iii) o cálculo do valor de determinantes deve ser feito por aplicação do teorema de Laplace e/ou por aplicação de transformações elementares.

2. (a) Calcule o conjunto das soluções do sistema
$$\begin{cases} x & & +z & & = & 0 \\ & 2y & +z & +w & = & 0 \\ 2x & +2y & +2z & +w & = & 0 \\ 3x & +2y & +3z & +w & = & 0 \end{cases}$$

(b) Sejam $S_1 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x + 2y + 2z + w = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = 0, 2y + z + w = 0, 3x + 2y + 3z + w = 0\}$.

- i. Verifique se $((1, 0, -1, 0), (0, 1, -1, 0), (-1, 0, 0, 2))$ é uma base de S_1 .
- ii. Verifique se $(0, -1, 0, 2) \in S_1 \cap S_2$.
- iii. Verifique se existe um sistema de 2 equações lineares em 4 incógnitas cujo conjunto das soluções é S_2 . Em caso afirmativo, indique um tal sistema.

3. Seja $A_t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 1 & t & 0 \\ t & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(a) Calcule a expressão de $\det A_t$ em função do parâmetro t .

(b) Determine um valor próprio de A_0 .

(c) Considere a transformação linear $\phi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(\phi; B_4, B_4) = A_2$, onde B_4 designa a base canónica de \mathbb{R}^4 . Seja $S = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0, x + 2z - w = 0\}$.

i. Calcule um vetor $v \in \mathbb{R}^4$ tal que $\phi(v) = (3, 3, 3, 3)$. ii. Calcule $\text{Nuc } \phi$. iii. Verifique se $(-2, -2, 1, 1) \in \phi(S)$.