LÓGICA
1.º teste
2018/2019

Grupo I

1. $\varphi \to \psi \Leftrightarrow \neg\varphi \vee \psi$

Se ψ é tautologia, $v(\psi)=1$, para toda a valoração v.
Logo,
$$v(\neg\varphi \vee \psi)=1, \quad \text{para toda a valoração } v.$$
Assim,
$$v(\varphi \to \psi)=1, \quad \text{para toda a valoração } v,$$
pelo que $\varphi \to \psi$ é uma tautologia.

V

2. F

$\varphi = (p_1 \wedge p_2) \vee p_3$ é uma FND.
$\psi = \neg p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3)$ é uma FND

$\varphi \wedge \psi = ((p_1 \wedge p_2) \vee p_3) \wedge (\neg p_1 \vee (p_2 \wedge \neg p_3))$ não é uma FNC.

3. F

A sequência ocorre em $((\neg p_2) \wedge p_3)$, por exemplo.

4. F

Seja $\varphi = p_{2019} \to p_{2019}$. Temos que $var(\varphi) = \{p_{2019}\}$
e que φ é uma tautologia. Logo, $\{p_2, p_0 \vee \neg p_2\} \models \varphi$.

5. F

Sejam $\Gamma = \{p_1, p_0, \neg p_0\}$ e $\Delta = \{p_1, p_2, \neg p_2\}$.

Γ e Δ são ambos inconsistentes, mas $\Gamma \cap \Delta = \{p_1\}$ é consistente.

6. V

Seja v uma valoração. Temos que v satisfaz $p_0 \wedge \neg p_1$ se e só se $v(p_0 \wedge \neg p_1) = 1$, ou seja, se e só se $v(p_0) = 1$ e $v(p_1) = 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, seja v_n a valoração definida por

$$v_n(p) = \begin{cases} 1 & \text{se } p \in \{p_0, p_n\} \\ 0 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_0, p_n\} \end{cases}.$$

Temos que $v_n(p_0) = 1$ e $v_n(p_1) = 0$. Para $i \in \mathbb{N}$, com $i \geq 2$, $v_n(p_i) = 1$ se e só se $i = n$. Logo, $v_i \neq v_j$ para $i \neq j$.

Construímos, assim, uma família infinita de valorações que satisfazem $p_0 \wedge \neg p_1$.

Grupo II.

1. $\varphi = p_1$
$\psi = p_2 \wedge p_3$

$$\text{subf}(\varphi) = \{p_1\}$$

$$\varphi[\psi/p_1] = p_2 \wedge p_3$$

$$\text{subf}(\varphi[\psi/p_1]) = \{p_2, p_3, p_2 \wedge p_3\}$$

2.

Obs: Dada uma valoração v, $v(\varphi) = 1$ se e só se $v(p_1) = v(p_2) = 0$.

Por exemplo, v_1 tal que $v_1(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \{p_1, p_2\} \\ 1 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_1, p_2\} \end{cases}$

e v_2 tal que $v_2(p) = \begin{cases} 0 & \text{se } p \in \{p_1, p_2, p_3\} \\ 1 & \text{se } p \in \mathcal{V}^{CP} \setminus \{p_1, p_2, p_3\} \end{cases}$

3.

$$(p_1 \to (\perp \vee p_3)) \wedge \neg(p_2 \wedge \neg p_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (p_1 \to p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \Leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_3) \wedge (\neg p_2 \vee p_3) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (\neg p_1 \wedge \neg p_2) \vee p_3$$, que é uma FND (logicamente equivalente à fórmula dada)

4. $T = \{\neg p_4 \to p_3,\ p_1 \vee \neg p_4,\ \perp \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_3)\}$

$\neg p_4 \to p_3 \Leftrightarrow p_4 \vee p_3$

$\perp \leftrightarrow (\neg p_1 \vee p_3) \Leftrightarrow p_1 \wedge \neg p_3$

Seja v uma valoração.

$$v \models T \Leftrightarrow \begin{cases} v(p_1 \wedge \neg p_3) = 1 \\ v(p_4 \vee p_3) = 1 \\ v(p_1 \vee \neg p_4) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v(p_1) = 1 \\ v(p_3) = 0 \\ v(p_4) = 1 \end{cases}$$

Considere-se (é a única possibilidade) $i = 3$. Temos que

$T \cup \{p_3\}$ é inconsistente.

Grupo III

1. $\mathcal{P}(\varphi)$: $p_0 \notin \varphi[\neg p_1/p_0]$ (i.e., p_0 não ocorre em $\varphi[\neg p_1/p_0]$)

(i) $\varphi = \perp$ $\quad \varphi[\neg p_1/p_0] = \perp[\neg p_1/p_0] = \perp$

p_0 não ocorre em $\perp$. Logo, $\mathcal{P}(\perp)$.

(ii) $\varphi = p_i$, com $i \in \mathbb{N}_0$

$i = 0$: $\quad \varphi[\neg p_1/p_0] = p_0[\neg p_1/p_0] = \underbrace{\neg p_1}_{p_0 \text{ não ocorre em } \neg p_1}$.

Portanto, $\mathcal{P}(p_0)$

$i \neq p_0$, $\quad \varphi[\neg p_1/p_0] = p_i[\neg p_1/p_0] \underset{i\neq p_0}{=} \underbrace{p_i}_{p_0 \text{ não ocorre em } p_i}$

Logo, $\mathcal{P}(p_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$.

(iii)

Seja $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$ tal que p_0 não ocorre em $\varphi[\neg p_1/p_0]$ (H.I.)

Temos que $\quad (\neg\varphi)[\neg p_1/p_0] = \neg \underbrace{\varphi[\neg p_1/p_0]}_{\substack{p_0 \text{ não ocorre} \\ \text{por H.I}}}$

Logo, p_0 não ocorre em $\neg\varphi[\neg p_1/p_0]$ e temos $\mathcal{P}(\neg\varphi)$.

(iv) Sejam $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$ tais que p_0 não ocorre em $\varphi[\neg p_1/p_0]$ nem em $\psi[\neg p_1/p_0]$ (H.I). Temos que, para todo $\square \in \{\wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow\}$,

$$(\varphi \square \psi)[\neg p_1/p_0] = \varphi[\neg p_1/p_0] \square \psi[\neg p_1/p_0].$$

Por HI., p_0 não ocorre em $\varphi[\neg p_1/p_0]$ e não ocorre em $\psi[\neg p_1/p_0]$. Logo, é óbvio que não ocorre em $\varphi[\neg p_1/p_0] \square \psi[\neg p_1/p_0]$.

Assim, $\mathcal{P}(\varphi \square \psi)$.

Pelo Princípio de Indução Estrutural, por (i) - (iv), $\mathcal{P}(\varphi)$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$.

2. Seja $f: \mathcal{F}^{CP} \rightarrow \mathcal{F}^{CP}_{\{\perp, \rightarrow, \wedge\}}$ a função definida por recursão estrutural do seguinte modo:

(i) $f(\perp) = \perp$;

(ii) $f(p_i) = p_i$, para todo $i \in \mathbb{N}_0$;

(iii) $f(\neg\varphi) = f(\varphi) \to \bot$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}^{CP}$;

(iv) $f(\varphi \wedge \psi) = f(\varphi) \wedge f(\psi)$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

(v) $f(\varphi \to \psi) = f(\varphi) \to f(\psi)$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

(vi) $f(\varphi \vee \psi) = \big((f(\varphi) \to \bot) \wedge (f(\psi) \to \bot)\big) \to \bot$, para qq $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$;

(vii) $f(\varphi \leftrightarrow \psi) = (f(\varphi) \to f(\psi)) \wedge (f(\psi) \to f(\varphi))$, para quaisquer $\varphi, \psi \in \mathcal{F}^{CP}$.

OBS:

$$\begin{aligned} \varphi \vee \psi &\Leftrightarrow \neg(\neg\varphi \wedge \neg\psi) \\ &\Leftrightarrow (\neg\varphi \wedge \neg\psi) \to \bot \\ &\Leftrightarrow \big((\varphi \to \bot) \wedge (\psi \to \bot)\big) \to \bot \end{aligned}$$

3.

(a) $$\begin{aligned} f(\neg p_1 \to (p_5 \vee \bot)) &= f(\neg p_1) \times f(p_5 \vee \bot) \\ &= f(p_1)^2 \times f(p_5) \times \underbrace{f(\bot)}_{=0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

(b) Se f fosse uma valoração, como o valor que f atribui a p_1 e a p_5 é 1, o valor que f atribuiria a $f(\neg p_1 \to (p_5 \vee \bot))$ seria 1, que não é o que se passa.

(ou, em alternativa, .. temos $f(\neg p_0) = f(p_0)^2 = 1^2 = 1$

e $f(p_0) = 1$,

o que não acontece para as valorações)

4.

p_1	p_2	p_3	$\neg p_1$	$\neg p_2$	$\neg p_3$	$p_1 \wedge \neg p_2$	$(p_1 \wedge \neg p_2) \to \neg p_3$	$\neg p_1 \to p_3$	$\neg p_1 \vee p_2$	$p_3 \to (\neg p_1 \vee p_2)$
1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	1	0	1	0	1	1

a) Na 6ª linha da tabela, podemos verificar que existem valorações v tais que $v(p_1 \wedge \neg p_2) \to \neg p_3 = 1$ e $v(\neg p_1 \to p_3) = 0$.

Portanto, $v \models \Gamma$ mas $v(\varphi) = 0$. Portanto, $\Gamma \not\models \varphi$.

b) Pela tabela de verdade, verificamos que, sempre que $(p_1 \wedge \neg p_2) \to \neg p_3$ toma o valor lógico 1, também $p_3 \to (\neg p_1 \vee p_2)$ toma o valor lógico 1. Portanto, $\Gamma \models \varphi$.

5. $\{\neg\}$ não é um conjunto completo de conetivos pois, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_{\{\neg\}}$, $\varphi \not\Leftrightarrow \perp$.

Temos que $\mathcal{F}_{\{\neg\}}$ é definido, indutivamente, por

a) $p \in \mathcal{F}_{\{\neg\}}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$;
b) se $\varphi \in \mathcal{F}_{\{\neg\}}$, então $(\neg\varphi) \in \mathcal{F}_{\{\neg\}}$.

Seja v a valoração tal que $v(p) = 0$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$ e v' a valoração tal que $v'(p) = 1$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.
Vejamos que $\{v(\varphi), v'(\varphi)\} = \{0, 1\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_{\neg}$ (o que nos permitirá concluir que $\varphi \not\Leftrightarrow \perp$)

Como $v(p) = 0$ e $v'(p) = 1$, $\{v(p), v'(p)\} = \{0,1\}$, para todo $p \in \mathcal{V}^{CP}$.

Admitamos que $\varphi \in \mathcal{F}_\neg$ é tal que $\{v(\varphi), v'(\varphi)\} = \{0,1\}$ (H.I.). Então, $v(\neg\varphi) = 1 - v(\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v(\varphi) = 0 \\ 0 & \text{se } v(\varphi) = 1 \end{cases}$ e $v'(\neg\varphi) = \begin{cases} 1 & \text{se } v'(\varphi) = 0 \\ 0 & \text{se } v'(\varphi) = 1 \end{cases}$. Dado que $v(\varphi) \neq v'(\varphi)$, podemos afirmar que $\{v(\neg\varphi), v'(\neg\varphi)\} = \{0,1\}$.

Pelo Teorema de Indução Estrutural, podemos concluir que $\{v(\varphi), v'(\varphi)\} = \{0,1\}$, para todo $\varphi \in \mathcal{F}_\neg$. Portanto, nenhuma fórmula de $\mathcal{F}_\neg$ é logicamente equivalente a $\perp$. Assim, $\{\neg\}$ não é um conjunto completo de conetivos.