nº. ordem

2º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

13 de dezembro de 2024 Duração: **2h**

Nome : ______________________________ Nº. __________ Folha de continuação ______

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Sem justificar, responda às questões seguintes.

(a) Identifique a(s) condição(ões) suficiente(s) a satisfazer pelos os escalares α e β de modo a que quaisquer três vetores da forma $(\alpha, 1, 0), (2, \beta, -1)$ e $(\beta, 0, -\beta)$ sejam três vetores linearmente independentes.

$\beta \neq 0$ e $\alpha\beta \neq 1$

(b) Considere $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = x - 2y - z = 0\}$.

Indique uma base de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

$\big((1, 3, -5)\big)$

(c) Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e B_3 a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sendo $\det(\mathcal{M}(\varphi; B_3, B_3)) = 2$, indique $\dim \operatorname{Im} \varphi$.

3

(d) sabendo que os vetores $(1, 1, 3)$, $(-1, 2, -2)$, e $(1, 4, 4)$ são linearmente dependentes, indique um valor próprio da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

. 0

(e) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e B_3 a base canónica.

Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(h, B, B_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Indique $h(1, 0, -1)$.

. $(2, 1, 2)$

2. Usando a informação de que: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{método de condensação de Gauss-Jordan}]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

responda às seguintes questões, sem efetuar mais cálculos e dando uma justificação sucinta.

(a) Verifique se os vetores cujas coordenadas formam as colunas da matriz A geram $\mathbb{R}^4$.

Não geram $\mathbb{R}^4$, porque $dim\langle(1, 0, 0, 1), (-1, 0, 1, 1), (0, 0, 1, 2), (1, 0, 1, 3), (0, 2, -1, 0)\rangle = r(A) = 3$ que é diferente de $dim\, \mathbb{R}^4$, pois $dim\, \mathbb{R}^4 = 4$.

(b) Verifique se

$$\langle(1,-1,0,1,0),(0,0,0,0,2),(0,1,1,1,-1),(1,1,2,3,0)\rangle = \langle(1,-1,0,1,0),(0,1,1,1,-1),(0,0,0,0,2)\rangle.$$

Os subespaços têm a mesma dimensão, pois $dim\,\langle(1,-1,0,1,0),(0,0,0,0,2),(0,1,1,1,-1),(1,1,2,3,0)\rangle =$

$= r(A) = 3$ e $dim\,\langle(1,-1,0,1,0),(0,1,1,1,-1),(0,0,0,0,2)\rangle = r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3.$

Como $\{(1,-1,0,1,0),(0,1,1,1,-1),(0,0,0,0,2)\} \subset \{(1,-1,0,1,0),(0,0,0,0,2),(0,1,1,1,-1),(1,1,2,3,0)\}$,

então a igualdade do enunciado é válida.

(c) Diga se existe uma aplicação linear $f:\mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(f;B_5,B_4) = A$ e $\mathrm{Nuc}\, f = \{(0,0,0,0,0)\}$, sendo B_5 e B_4 as bases canónicas dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^4$, respetivamente.

A matriz A é do tipo 4×5 pelo que define uma aplicação linear f de $\mathbb{R}^5$ em $\mathbb{R}^4$ tal que $\mathrm{Nuc}\, f$ é o conjunto das

soluções do sistema $M(f;B_5,B_4)X = 0$, ou seja, é o conjunto das soluções de $AX = 0$. Como $r(A) = 3$, então

$AX = 0$ é possível e indeterminado, pelo que a solução nula não é única. Assim, $\mathrm{Nuc}\, f \neq \{(0,0,0,0,0)\}$.

Em conclusão, não existe uma aplicação linear nas condições do enunciado.

(d) Sendo $g:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear tal que $M(g,B_4,B_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$, verifique se $(-1,0,1,1) \in \mathrm{Im}\, g$.

$(-1,0,1,1) \in \mathrm{Im}\, g$ se e só se o sistema $M(g,B_4,B_4)X = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ é possível.

Recorrendo à condensação de Gauss-Jordan apresentada no enunciado, conclui-se que:

$r\left[\begin{array}{c|c} & -1 \\ M(g,B_4,B_4) & 0 \\ & 1 \\ & 1 \end{array}\right] = r(A) = 3$ e $r(M(g,B_4,B_4)) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3$

Logo o sistema é possível, pelo que $(-1,0,1,1) \in \mathrm{Im}\, g$.

(e) Verifique se 2 é um valor próprio da matriz $M = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Utilizando por base de cálculo a condensação de Gauss-Jordan apresentada no enunciado, tem-se que:

$$r(M-2I_4) = r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 < \text{n}^{\circ} \text{ de colunas} = 4.$$

Então $\det(M-2I_4) = 0$. Logo 2 é um valor próprio de M.

COTAÇÃO: cada alínea destas duas questões vale 1 valor .

3. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais $\mathcal{S} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 3y = z + w = 0\}$ e, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\quad \mathcal{T}_\alpha =< (3,\alpha,0,0),(0,0,\alpha,-1),(3,\alpha,2,-2),(3,1,0,\alpha-1) >$.

(a) Determine os valores reais de α tais que $\mathcal{T}_\alpha \neq \mathbb{R}^4$. (b) Considerando $\alpha = 1$, verifique se $\mathcal{T}_1 = \mathcal{S}$.

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efetuados.

(a) Seja $M_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 \\ \alpha & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \end{bmatrix}$. Dado que $\mathcal{T}_\alpha \leq \mathbb{R}^4$, $dim\,\mathcal{T}_\alpha = r(M_\alpha)$ e $dim\,\mathbb{R}^4 = 4$, tem-se que $\mathcal{T}_\alpha \neq \mathbb{R}^4$ se e só se $r(M_\alpha) < 4$.

$$r\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 & 3 \\ \alpha & 0 & \alpha & 1 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & \alpha-1 \\ 0 & 0 & 2-2\alpha & \alpha(\alpha-1) \\ 0 & 0 & 0 & 1-\alpha \end{bmatrix}$$

Se $\alpha = 1$, então $r(M_\alpha) = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2$. Caso contrário, teríamos que $1 - \alpha \neq 0$ e $2 - 2\alpha \neq 0$, o que implica que $r(M_\alpha) = 4$.

Em conclusão, a resposta final é $\alpha = 1$.

(b) Da alínea (a) sabemos que $dim\,\mathcal{T}_1 = r(M_1) = 2$ e, que como no cálculo de $r(M_1)$ os elementos pivô aparecem nas duas primeiras colunas, verifica-se que:

$$\mathcal{T}_1 = \langle (3,1,0,0),(0,0,1,-1),(3,1,2,-2),(3,1,0,0)\rangle = \langle (3,1,0,0),(0,0,1,-1)\rangle.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - 3y = z + w = 0\} \\ &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 3y,\ w = -z\} \\ &= \{(3y,y,z,-z) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(3,1,0,0) + z(0,0,1,-1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (3,1,0,0),(0,0,1,-1)\rangle. \end{aligned}$$

Logo, neste caso é imediato concluir que $\mathcal{T}_1 = S$.

Alternativa:

- $dim\,\mathcal{T}_1 = r(M_1) = 2$.
- Os vetores que geram $\mathcal{T}_1$, satisfazem as condições $x - 3y = z + w = 0$ pelo que $\mathcal{T}_1 \subseteq S$.
- Calculando, verifica-se que $dim\,S = 2$.

Em resumo, $\mathcal{T}_1 \leq S$ e $dim\,\mathcal{T}_1 = dim\,S$, logo $\mathcal{T}_1 = S$.

4. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{S} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+w = x-z = 0\}$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

   (a) Calcule uma base de $\mathcal{S}$ e verifique se $(-1,3,2,2) \in \varphi(\mathcal{S})$.

   (b) Calcule $\mathcal{M}(\varphi; B, B_4)$, sendo $B = \big((0,-1,-1,0),(1,0,1,0),(0,1,0,-1),(1,0,0,2)\big)$ uma base de $\mathbb{R}^4$.

   Apresente uma justificação para a resposta dada a cada uma das duas alíneas.

(a)
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y+z+w = x-z = 0\} \\ &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid y = -z-w,\ x = z\} \\ &= \{(z,-z-w,z,w) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{z(1,-1,1,0) + w(0,0,-1,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,-1,1,0),\ (0,0,-1,1) \rangle \end{aligned}$$

Logo $\{(1,-1,1,0),\ (0,0,-1,1)\}$ é um conjunto gerador de S. Vamos verificar se os dois vetores são linearmente independentes. Como $r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 2$ então os vetores são dois vetores linearmente independentes. Consequentemente, uma base de S é $\big((1,-1,1,0),\ (0,0,-1,1)\big)$.

Assim,

$$\varphi(S) = \varphi(\langle (1,-1,1,0),\ (0,0,-1,1) \rangle) = \langle \varphi(1,-1,1,0),\ \varphi(0,0,-1,1) \rangle = \langle (0,2,1,1),\ (2,0,-1,-1) \rangle.$$

A última igualdade justifica-se pois:

$$\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Pretende-se agora saber se $(-1,3,2,2) \in \langle (0,2,1,1),\ (2,0,-1,-1) \rangle$, ou seja, se $(-1,3,2,2)$ é combinação linear de $(0,2,1,1)$ e $(2,0,-1,-1)$.

$$(-1,3,2,2) = a(0,2,1,1) + b(2,0,-1,-1) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Efetuando a condensação de Gauss-Jordan tem-se que: $\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$

Podemos então concluir que o sistema $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ é possível pelo que $(-1,3,2,2) \in \varphi(\mathcal{S})$.

(b) Para calcular $\mathcal{M}(\varphi; B, B_4)$ precisamos de calcular as imagens por φ dos vetores da base B, ou seja, multiplicar a matriz $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4)$ por cada uma das matrizes coluna cujas entradas são as coordenadas dos vetores de B. Fazendo o processo para os diversos vetores, simultaneamente, temos que:

$$\mathcal{M}(\varphi; B, B_4) = \mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ -1 & 2 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

COTAÇÃO: cada alínea destas duas últimas questões vale 2.5 valores.

nº. ordem

2º Teste de ÁLGEBRA LINEAR para a Engenharia

Licenciatura em Engenharia Informática

13 de dezembro de 2024 Duração: **2h**

Nome : ______________________ Nº. __________ Folha de continuação ______

1. Considere o espaço vetorial real $\mathbb{R}^3$. Sem justificar, responda às questões seguintes.

   (a) Identifique a(s) condição(ões) suficiente(s) a satisfazer pelos os escalares α e β de modo a que quaisquer três vetores da forma $(\alpha, 1, 0), (2, \beta, -1)$ e $(\beta, 0, -\beta)$ sejam três vetores linearmente independentes.

   $\beta \neq 0$ e $\alpha\beta \neq 1$

   (b) Considere $\mathcal{S}_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y + z = 0\}$ e $S_2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 3x - y = x - 2y - z = 0\}$.

   Indique uma base de $\mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2$.

   $\big((1, 3, -5)\big)$

   (c) Sejam $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear e B_3 a base canónica de $\mathbb{R}^3$. Sendo $\det(\mathcal{M}(\varphi; B_3, B_3)) = 2$,

   indique $\dim \operatorname{Im} \varphi$.

   3

   (d) sabendo que os vetores $(1, 1, 3)$, $(-1, 2, -2)$, e $(1, 4, 4)$ são linearmente dependentes, indique um valor próprio da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & -2 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$.

   0

   (e) Considere as seguintes bases de $\mathbb{R}^3$: $B = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ e B_3 a base canónica.

   Seja $h : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por $M(h, B, B_3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$. Indique $h(1, 0, -1)$.

   . $(2, 1, 2)$

2. Usando a informação de que: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{método de condensação de Gauss-Jordan}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   responda às seguintes questões, sem efetuar mais cálculos e dando uma justificação sucinta.

   (a) Verifique se as primeira, terceira e quinta colunas da matriz A são linearmente independentes.

   De acordo com os resultados apesentados no enunciado, verifica-se que: $r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$

   Como a caraterística desta matriz de tipo 4×3 é igual a 3, as três colunas são linearmente independentes.

(b) Verifique se

$$\langle(1,-1,0,1,0),(0,0,0,0,2),(0,1,1,1,-1),(1,1,2,3,0)\rangle = \langle(1,-1,0,1,0),(0,1,1,1,-1),(0,0,0,0,2)\rangle.$$

Os subespaços têm a mesma dimensão, pois $dim\,\langle(1,-1,0,1,0),(0,0,0,0,2),(0,1,1,1,-1),(1,1,2,3,0)\rangle =$

$= r(A) = 3$ e $dim\,\langle(1,-1,0,1,0),(0,1,1,1,-1),(0,0,0,0,2)\rangle = r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 3.$

Como $\{(1,-1,0,1,0),(0,1,1,1,-1),(0,0,0,0,2)\} \subset \{(1,-1,0,1,0),(0,0,0,0,2),(0,1,1,1,-1),(1,1,2,3,0)\}$,

então a igualdade do enunciado é válida.

(c) Diga se existe uma aplicação linear $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$ tal que $\mathcal{M}(f; B_5, B_4) = A$ e $\operatorname{Im} f = \mathbb{R}^4$, sendo B_5 e B_4 as bases canónicas dos espaços vetoriais $\mathbb{R}^5$ e $\mathbb{R}^4$, respetivamente.

A matriz A é do tipo 4×5 pelo que define uma aplicação linear f de $\mathbb{R}^5$ em $\mathbb{R}^4$ tal que $\operatorname{Im} f$ é o espaço

gerado pelas colunas de $M(f; B_5, B_4)$, ou seja, de A. Então $dim\operatorname{Im} f = r(M(f; B_5, B_4)) = r(A) = 3$.

Como $dim\,\mathbb{R}^4 = 4$, $\operatorname{Im} f \neq \mathbb{R}^4$. Logo, não existe uma aplicação linear nas condições do enunciado.

(d) Sendo $g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação linear tal que $M(g, B_4, B_4) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$, verifique se $(0,2,0,-1) \in \operatorname{Nuc} g$.

$(0,2,0,-1) \in \operatorname{Nuc} g)$ se e só se $g(0,2,0,-1) = (0,0,0,0)$, isto é, se e só se $M(g; B_4, B_4)\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Calculando o resultado da primeira linha do produto indicado acima obtém-se $(-1) \times 2 + 1 \times (-1) = -3 \neq 0$.

Então $g(0,2,0,-1) \neq (0,0,0,0)$, pelo que $(0,2,0,-1) \notin \operatorname{Nuc} g$.

(e) Verifique se -1 é um valor próprio da matriz $M = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

Utilizando por base de cálculo a condensação de Gauss-Jordan apresentada no enunciado, tem-se que:

$$r(M-(-1)I_4) = r\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3 < \text{n.º de colunas} = 4.$$

Então $\det(M + I_4) = 0$. Logo -1 é um valor próprio de M.

COTAÇÃO: cada alínea destas duas questões vale 1 valor .

3. No espaço vetorial real $\mathbb{R}^4$, considere os subespaços vetoriais $\mathcal{S} = \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = 3y, z = -w\}$ e, para cada $\alpha \in \mathbb{R}$, $\mathcal{T}_\alpha = \langle (3, 1, 0, \alpha), (0, \alpha, 0, -\alpha), (0, 0, -\alpha - 1, 1), (0, \alpha, 2, -2 - \alpha) \rangle$.

(a) Considerando $\alpha = 0$, verifique se $\mathcal{T}_0 = \mathcal{S}$.

(b) Determine os valores reais de α tais que $\mathcal{T}_\alpha = \mathbb{R}^4$.

Justifique as suas respostas e apresente os cálculos efetuados.

(a)

$$\mathcal{T}_0 = \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 0), (0, 0, -1, 1), (0, 0, 2, -2) \rangle = \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle,$$

porque $(0, 0, 2, -2) = -2(0, 0, -1, 1)$.

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x = 3y, z = -w\} \\ &= \{(3y, y, -w, w) \mid y, w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(3, 1, 0, 0) + z(0, 0, -1, 1) \mid y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (3, 1, 0, 0), (0, 0, -1, 1) \rangle. \end{aligned}$$

Logo, neste caso é imediato concluir que $\mathcal{T}_0 = S$.

Alternativa:

- verificar que $dim\, \mathcal{T}_0 = 2$;
- verificar que os vetores que geram $\mathcal{T}_0$, satisfazem as condições $x = 3y$ e $z = -w$ pelo que $\mathcal{T}_0 \leq S$;
- calculando, verificar-se que $dim\, S = 2$.

Em resumo, $\mathcal{T}_0 \leq S$ e $dim\, \mathcal{T}_0 = dim\, S$, logo $\mathcal{T}_0 = S$.

(b)

Seja $M_\alpha = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & -\alpha & 1 & -2 - \alpha \end{bmatrix}$. Dado que $\mathcal{T}_\alpha \leq \mathbb{R}^4$, $dim\, \mathcal{T}_\alpha = r(M_\alpha)$ e $dim\, \mathbb{R}^4 = 4$, tem-se que $\mathcal{T}_\alpha = \mathbb{R}^4$ se e só se $r(M_\alpha) = 4$. De (a), sabemos que $dim\, T_0 = 2$. Como $r(M_0) = dim\, T_0$, então $r(M_0) = 2$. Consequentemente, estamos interessados apenas nos casos em que $\alpha \neq 0$.

$$r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & -\alpha & 1 & -2 - \alpha \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha - 1 & 2 \\ 0 & -\alpha & 1 & -2 - \alpha \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & -\alpha - 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = r \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2\alpha \end{bmatrix}.$$

Se $\alpha \neq 0$, então $r(M_\alpha) = 4$. Em conclusão, a resposta final é $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4. Considere o subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$: $\mathcal{S} = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - w = 0\}$. Seja $\varphi : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ a aplicação linear definida por $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, onde B_4 é a base canónica de $\mathbb{R}^4$.

(a) Calcule $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B)$, sendo $B = \big((0,-1,-1,0),(1,0,1,0),(0,1,0,-1),(1,0,0,2)\big)$ uma base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Calcule uma base de $\varphi(\mathcal{S})$.

Apresente uma justificação para a resposta dada a cada uma das duas alíneas.

(a) Para calcular $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B)$ precisamos de calcular as coordenadas na base B das imagens por φ dos vetores da base B_4, ou seja, de resolver os seguintes quatro sistemas:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$$
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Como a matriz dos coeficientes é comum aos quatro sistemas, podemos resolver os quatro simultaneamente, e optamos por aplicar o método de Gauss-Jordan, atendendo a que a matriz é invertível pois tem por colunas as coordenadas dos vetores de uma base de $\mathbb{R}^4$. Em resumo,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\text{condensação de Gauss-Jordan}]{} \left[\begin{array}{c|cccc} & 1/3 & -1 & -11/3 & -3 \\ I_4 & 1/3 & 0 & -2/3 & -1 \\ & 4/3 & -1 & -5/3 & -2 \\ & 2/3 & 0 & 2/3 & 0 \end{array}\right]$$

Assim, $\mathcal{M}(\varphi; B_4, B) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -3 & -11 & -9 \\ 1 & 0 & -2 & -3 \\ 4 & -3 & -5 & -6 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

(b)
$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y - w = 0\} \\ &= \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid x = y + w\} \\ &= \{(y+w,y,z,w) \mid y,z,w \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1,1,0,0) + z(0,0,1,0) + w(1,0,0,1) \mid y,z \in \mathbb{R}\} \\ &= \langle (1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,1) \rangle \end{aligned}$$

Assim,
$$\begin{aligned} \varphi(S) &= \varphi(\langle (1,1,0,0),(0,0,1,0),(1,0,0,1) \rangle) = \langle \varphi(1,1,0,0),\ \varphi(0,0,1,0), \varphi(1,0,0,1) \rangle \\ &= \langle (1,1,1,1),(0,2,3,3),(0,2,2,2) \rangle. \end{aligned}$$

A última igualdade justifica-se pois:

$$\mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{M}(\varphi; B_4, B_4) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Falta verificar se $(1,1,1,1)$, $(0,2,3,3)$ e $(0,2,2,2)$ são linearmente independentes, isto é, se $r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 3$.

$$r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 3.$$

Uma base de $\varphi(S)$ é $\big((1,1,1,1),(0,2,3,3),(0,2,2,2)\big)$.

COTAÇÃO: cada alínea destas duas últimas questões vale 2.5 valores.