→ Algebra Linear - Exercícios Equações Lineares

1-
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + \quad + 2x_3 = -1 \end{cases}$$

a) $(-1, 1, 0)$ é solução do sistema

2-

a) $\begin{cases} x - y + z = 2 \\ y - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 1 - 2z + z = 2 \\ y = 1 + 2z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 + z \\ y = 1 + 2z \end{cases}$

b) $\begin{cases} z = 2 \\ x - 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z = 2 \\ x = 5 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ x + y + z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ 1 - 2y + y + z = 0 \\ x + z = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - 2y \\ z = y - 1 \quad 0 \\ 1 - 2y + y - 1 = -1 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$

3-

a) $\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = -1 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + 3L_1$$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] L_2 \Leftrightarrow L_3 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3$$

3 -

a)

$$\left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & -3 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{3} L_4} \left[\begin{array}{cccc|c} -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x_1 - 1 + 1 = 1 \\ x_2 - 3 + 2 = 3 \\ x_3 = +1 \\ x_4 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = 4 \\ x_3 = 1 \\ x_4 = -1 \end{cases}$$

C.S $= \{-1, 4, 1, -1\}$ => o sistema é possível determinado

b)

$$\begin{cases} -x_1 - x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_4 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases}$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] L_1 \Leftrightarrow L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 = 1 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

· Sistema possível indeterminado

$$\begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_2 = -x_3 + 2x_4 + 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = -\alpha \\ x_2 = -\beta + 2\alpha + 1 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha \end{cases}$$

C.S. = $\{-\alpha; -\beta - 2\alpha + 1; \beta; \alpha\}$

$$\begin{cases} 2x_1 & & +2x_3 & +2x_4 & = 0 \\ x_1 & -x_2 & & & = 3 \\ -2x_1 & +x_2 & +x_3 & & = -1 \\ -x_1 & & -3x_3 & -2x_4 & = -2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_1 \leftrightarrow L_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_3 \leftrightarrow L_2$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 3 \\ -x_2 + x_3 & = 5 \\ +4x_3 + 2x_4 & = 4 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + x_2 \\ x_2 = x_3 - 5 \\ x_3 = 1 - \frac{x_4}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 3 + \alpha \\ x_2 = \beta - 5 \\ x_3 = 1 - \frac{\rho}{2} \\ x_4 = \rho \end{cases}$$

$\alpha \nearrow$ $\beta \nearrow$

$$C.S = \left\{ 3+\alpha ; \beta - 5 ; 1 - \frac{\rho}{2} ; \rho \right\}$$

e)

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 = 3 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - 3x_3 - 2x_4 = -2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_1 \Leftrightarrow L_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 + L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + 2L_1 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_2 \Leftrightarrow L_3$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 & -2 & -2 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 + L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

· Sistema Impossível!

$\boxed{0 = 1 \text{ F}}$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_3 + 2x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

4-

a) $$\begin{cases} x_1 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ -x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 + L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 + L_5 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right] L_5 \leftarrow L_5 - L_1$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 - 3L_5$$

a) cont

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] L_5 \leftarrow L_5 - L_4$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 18 \\ 12 \\ 7 \end{bmatrix} \quad e \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

- Como o sistema da direita é o sistema homogéneo associado ao sistema da esquerda, basta determinar a matriz em escada reduzida associada ao sistema da esquerda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 18 \\ 1 & 0 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_4]{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 12 \\ 2 & 1 & -1 & 7 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & 0 & 18 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1}}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -9 & -17 \\ 0 & 2 & -5 & -8 \\ 0 & 2 & -16 & -30 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2]{L_3 \leftarrow L_3 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 13 & 26 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_3 \leftarrow L_3 \times \frac{1}{13} \\ L_4 \leftarrow L_4 \times \frac{1}{2}}}$$

$$\to \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - L_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 12 \\ 0 & 1 & -9 & -17 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - 4L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 + 9L_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

- Os dois sistemas são possíveis determinados de solução respetiva $(4,1,2)$, $(0,0,0)$

b) $\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \; L_2 \leftarrow L_2 - 2\ldots$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - \frac{1}{3} L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{array}\right] \; \begin{array}{l} L_1 \leftarrow L_1 + \frac{1}{3} L_2 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{3} L_2 \end{array}$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{3} & -\frac{7}{3} \end{array}\right]$

c) $\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \; L_1 \leftrightarrow L_2 \; \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & -4 & 2 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 3 & -6 & 1 \end{array}\right] \; L_3 \leftarrow L_3 - \frac{3}{2} L_2 \; \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right] \; \begin{array}{l} L_1 \leftarrow \frac{1}{2} L_1 \\ L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2 \end{array}$

$-\frac{3}{2} \cdot 4$

$= +\frac{12}{2} - 6$

$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$

a) $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ \\ L_3 \leftarrow L_3 - 3L_1 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 0 \end{array}\right] L_3 \leftarrow L_3 - L_2$

$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_2 - 2x_3 = 0 \\ 0 = 0 \ V \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 - x_4 \\ x_2 = -x_3 \\ 0 = 0 \ V \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \beta - \alpha \\ x_2 = -\beta \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \alpha \end{cases}$

b) $\underset{3\times 4}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}} \overset{P}{\underset{4\times 1}{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

- Sendo P a matriz coluna correspondente a este elemento, tem-se $AP = B$

c) É possível porque P é solução. Como a matriz A tem 3 linhas $r(A) \leq 3$ (de facto, a condensação da matriz A na alínea (a) permite dizer que $r(A) = 2$). Como há 4 incógnitas e $r(A) < 4$, o sistema é indeterminado.

d) Matricialmente, um elemento qualquer destes conjuntos escreve-se $P + Z$ onde Z satisfaz $AZ = 0$. Tem-se $A(P+Z) = AP + AZ = B + 0 = B$. Logo $P + Z$ é solução de $AX = B$

e) Sim, porque se Y for uma solução de $AX = B$ tem-se $AY = B$ - A
obtemos que $A(Y-P) = 0$. Isto significa que $Y-P$ é uma solução
homogéneo. Assim existe $Z \in C_0$ tal que $Y - P = Z$, ou seja, $Y = P + Z$
Mostramos deste modo que Y pertence ao conjunto C da alínea anterior.

Teorema: Seja $AX = B$ um sistema de m equações lineares com n incógnitas. Se $(p_1, \dots, p_n)$ for uma solução particular do sistema $AX = B$ então o conjunto soluções de $AX = B$ é dado por

$$C = \{(p_1, \dots, p_n) + (z_1, \dots, z_n) \mid (z_1, \dots, z_n) \in C_0\}$$

onde C_0 é o conjunto de soluções do sistema $AX = 0$

9-

a)
$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - L_4 \\ L_4 \leftarrow \frac{1}{2} L_4 \end{matrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} L_3 \leftarrow L_3 - L_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow L_4 + L_3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_4 \leftarrow \frac{1}{9} L_4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A característica de A é $r(A) = 4$, pois há 4 pivôs na matriz em escada obtida por condensação de A.

b) Como $r(A) = 4$ é igual ao número de incógnitas, o sistema $AX = 0$ é determinado e a única solução é $(0,0,0,0)$

c)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_{4\times4} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}_{4\times1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = B$$

d) Como o sistema é possível (pelo (c)) e ~~para~~ $r(A)$ é igual ao número de ~~inco~~ incógnitas, o sistema é possível determinado sendo $(-1, 3/2, -1/2, -1/2)$ a única solução. Em alternativa, usando o teorema mencionado acima bem como as alíneas (b) e (c) concluímos que o conjunto de soluções de $AX = B$ reduz-se a $\{(-1, 3/2, -1/2, -1/2)\}$

10 -

$$\begin{cases} 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}$$

• Transformando a matriz dos coeficientes numa matriz em escada, podemos ver que a sua característica é 2. Logo o sistema é equivalente a um sistema homogéneo com 2 equações, por ex, ao seguinte sistema:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_3} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 - L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad r(A) = ?$$

12-

a) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + Kx_2 + 6x_3 = 6 \\ -x_1 + 3x_2 + (K-3)x_3 = 0 \end{cases}$

• K toma uma infinidade de valores e
ñ é possível estudá-los todos

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & K & 6 & 6 \\ -1 & 3 & (K-3) & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & K+4 & 0 & 4 \\ 0 & -1 & K & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - \alpha x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 - x_2 + (\alpha+1)x_3 = \beta - 2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -\alpha & 1 & -1 \\ -1 & -1 & (\alpha+1) & \beta-2 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1-\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha & \beta-1 \end{array}\right]$$

1º caso: Se $\alpha \neq 1$ e $\alpha \neq 0$ $r(A) = r(A|B) = 3$ = nº de incognitas

Sistema possivel e determinado

2º caso se $\alpha = 1$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \beta-1 \end{array}\right] L_2 \leftrightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \beta-1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$r(A) = r(A|B) = 2 < 3$ nº de incognitas

sistema possivel e determinado

3º caso se $\alpha = 0$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \beta-1 \end{array}\right]$$

Se $\beta \neq 1$ $r(A|B) = 3 \neq r(A) = 2$

Sistema Impossivel

Se $\beta = 1$ $r(A|B) = r(A) < 3$ nº de incognitas

Sistema possivel

indeterminados

10-

a) $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2]{L_1 \leftarrow \frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - L_1} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

• não tem inversa

c) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftrightarrow L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow -L_3]{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 + L_2} \left[\underbrace{\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}}_{I_3} \middle| \underbrace{\begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{array}}_{C^{-1}}\right]$

d) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \leftarrow L_3 - L_1]{L_2 \leftarrow L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftarrow \frac{1}{3}L_2]{L_1 \leftarrow L_1 + L_3}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2 \leftrightarrow L_3]{L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$

e) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] L_1 \leftrightarrow L_3 \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} L_2 \leftarrow L_2 - 3L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array}$

$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -4 & 5 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right]$