OBTENÇÃO DA DEFLEXÃO E DAS FORMAS MODAIS DE UMA VIGA BI-ENGASTADA COM SEÇÃO VARIÁVEL NO MATLAB POR MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

OBTAINING THE DEFLECTION AND THE MODAL FORMS OF A CLAMPED-CLAMPED BEAM WITH VARIABLE SECTION IN MATLAB THROUGH FINITE ELEMENT METHOD

André Chiullo dos Santos[1], Eduardo Masaji Endo[1],
Lucas de Araújo Souza[1], Jeferson Rafael Bueno[2]

[1]Discente - Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Campus Campo Mourão.
[2]Docente - Departamento Acadêmico da Construção Civil, DACOC, UTFPR.

Resumo

O uso de software para análise estrutural é imprescindível para bons resultados devido a inviabilidade prática do cálculo analítico quando comparado a uma resolução computacional. Por conseguinte, é notável a precisão de um resultado utilizando algum algorítimo para definir os valores referentes a tensões, forças internas, ou deflexões. Entretanto nem todos os softwares resolvem problemas excêntricos, e à vista disso, torna-se complicado a solução de uma viga bi-engastada com seção variável e consequentemente é necessário utilizar algum método numérico como o Método dos Elementos Finitos, cuja a solução se torna viável através de uma modelagem matematica no Matlab e a devida validação pelo software SCIA Engineer.

Palavras-chave: *viga, seção variável, engastada, método dos elementos finitos.*

Abstract

The use of software for structural analysis is essential for good results due to the pratical inviability of analytical calculation when compared to a computational resolution. Therefore, the accuracy of a result using some algorithm to define the values for tensions, internal forces, or deflections is remarkable. However, not all software solves eccentric problems, and in view of this, it becomes complicated to solve a clamped-clamped beam with variable section and consequently it is necessary to use some numerical method such as the Finite Element Method, whose solution becomes feasible through a mathematical modeling in Matlab and due validation by SCIA Engineer software.

Keywords: *beam, variable section, fixed support, finite element method.*

I. Introdução

A análise estática e dinâmica de cada elemento estrutural que compõe a estrutura é de interesse para o conhecimento dos esforços solicitantes e comportamentos mecânicos dos mesmos, contudo, é fato que o processo analítico muitas vezes não é de fácil obtenção ou inexequível quando traduzido de um caso real.

Algo recorrente nos elementos é a variação da seção ao longo do eixo longitudinal, alterando assim, propriedades geométricas como o momento de inércia e área da seção transversal.

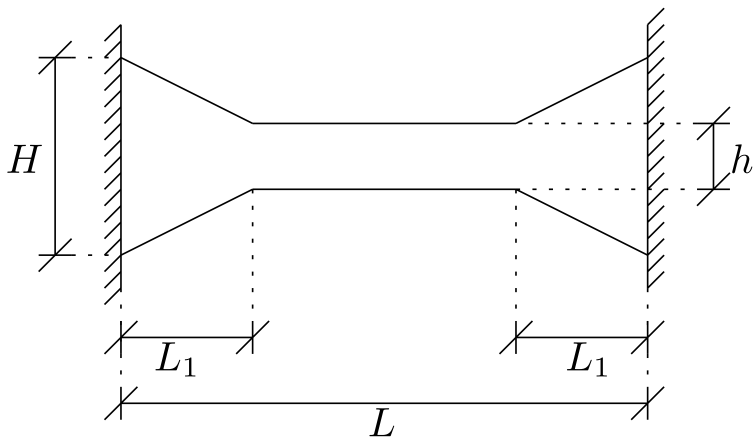
Portanto, é possível realizar as análises necessárias de forma mais prática através do uso do Método dos Elementos Finitos (MEF), onde o processo é automatizado uma vez que há um algoritmo ou software já validado para a situação especificada.

Desta forma, o presente artigo fundamenta-se na confecção e validação de um algoritmo em Método dos Elementos Finitos para seções variáveis linearmente e biengastadas.

II. Objetivo

Dada a dificuldade para encontrar as deflexões de elementos com seções variáveis, é possível desenvolver um algorítimo baseado no Método dos Elementos Finitos para solucionar o problema em questão. Portanto, o artigo visa em encontrar os deslocamentos verticais da viga apresentada na Figura 1.

Figura 1: *Viga bi-engastada com seção variável.*



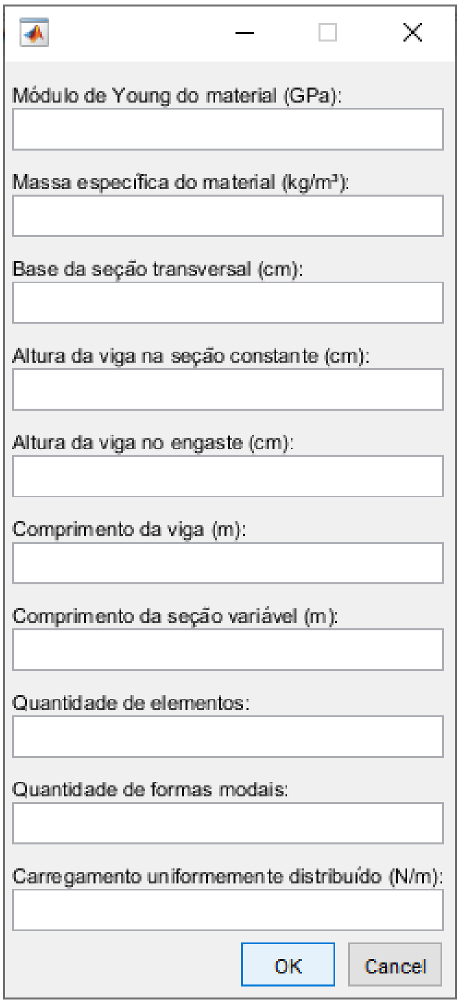
Onde L_1 é o comprimento da seção variável, L o comprimento total da viga, h a altura da seção constante, e H a altura máxima da seção variável. Em vista disso, torna-se trivial a solução utilizando MEF e implantando o código no Matlab para em sequência comparar os resultados com o software comercial SCIA Engineer.

III. Algorítmo

O código desenvolvido para a solução da viga apresentada na Figura 1 inicia-se com a definição das variáveis referentes as propriedades do material. Dessa forma, foi criado um menu interativo para atribuir valores ao módulo de elasticidade do material e a massa específica.

No mesmo menu, ainda é possível determinar as dimensões da viga a ser analisada, como a base da seção transversal, as alturas da seção constante e variável, os comprimentos de ambas as seções, e também definir a quantidade de elementos, de formas modais e o carregamento uniformemente distribuído a ser apicado na viga, como mostra a Figura 2.

Figura 2: *Menu para atribuição dos dados da viga em análise.*



Ao inserir os dados, o código verifica se o comprimento da seção variável não é superior a metade do comprimento total da viga. Em seguida é determinado o tamanho dos elementos, o número de nós e os graus de liberdades da viga. Caso algum valor esteja fora dos parâmetros para o cálculo, para evitar erros o próprio código ajusta os valores baseados nos limites máximos ou mínimos a serem utilizados.

Para calcular a área e inércia da seção variável, foi necessário estabelecer uma função $f(x)$ com finalidade de analisar a altura da seção para cada valor de x, entendendo que x representa a coordenada em relação ao engaste à esquerda da viga. Tal $f(x)$ foi definida a partir do conceito de função afim. Em seguida o código realiza laços de repetição que caminham elemento por elemento, da esquerda para a direita, gerando matrizes que representam os valores da altura, área, inércia e carregamento em cada elemento, para assim, obter as matrizes de massa e rigidez e o vetor de carregamento. Dessa forma cria-se matrizes globais que representam o comportamento da viga.

Para a obtenção das massas e inércias de cada elemento finito, foi utilizada a formulação de matriz de massa e inércia elementar (PETYT, 2010), como mostrada nas Equações 1 e 3.

$$[m]_e \quad = \quad \rho \cdot A \cdot a \int_{-1}^{+1} \{N(\xi)\}\{N(\xi)\}^T d\xi \tag{1}$$

$$[k]_e \quad = \quad \frac{EI}{a^3} \int_{-1}^{+1} \{N'(\xi)\}\{N'(\xi)\}^T d\xi \tag{2}$$

onde ρ é a massa específica, A é a área e a é o tamanho do elemento em coordenadas ξ. O vetor $N(\xi)$ é dado por:

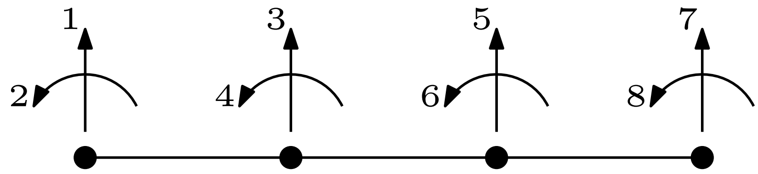
$$\begin{aligned}
N_1(\xi) &= \tfrac{1}{4}(2 - 3\xi + \xi^3) \\
N_2(\xi) &= \tfrac{a}{4}(1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \\
N_3(\xi) &= \tfrac{1}{4}(2 + 3\xi - 3\xi^3) \\
N_4(\xi) &= \tfrac{a}{4}(-1 + \xi + \xi^2 + \xi^3)
\end{aligned}$$

O vetor de carregamento, por sua vez é dado por

$$\{f\}_e = a \int_{-1}^{+1} p_y \cdot \{N'(\xi)\}^T d\xi \tag{3}$$

Em seguida é determinado um vetor que indica as condições de contorno do sistema, onde no presente elemento, tem-se os deslocamentos e os giros bloqueados nos engastes. A Figura 3 mostra como é determinado no vetor, os números dos graus de liberdade, sendo necessário o bloqueio dos 2 primeiros e dos 2 últimos graus de liberdade (translação vertical e rotação) para representar o engaste.

Figura 3: *Graus de liberdade do elemento.*



É possível dessa forma determinar um vetor deslocamento e ainda determinar os autovetores e autovalores das matrizes de rigidez e de massa e encontrar a frequência e as formas modais do elemento. Por conseguinte, os gráficos são plotados para visualização dos resultados.

IV. Validação

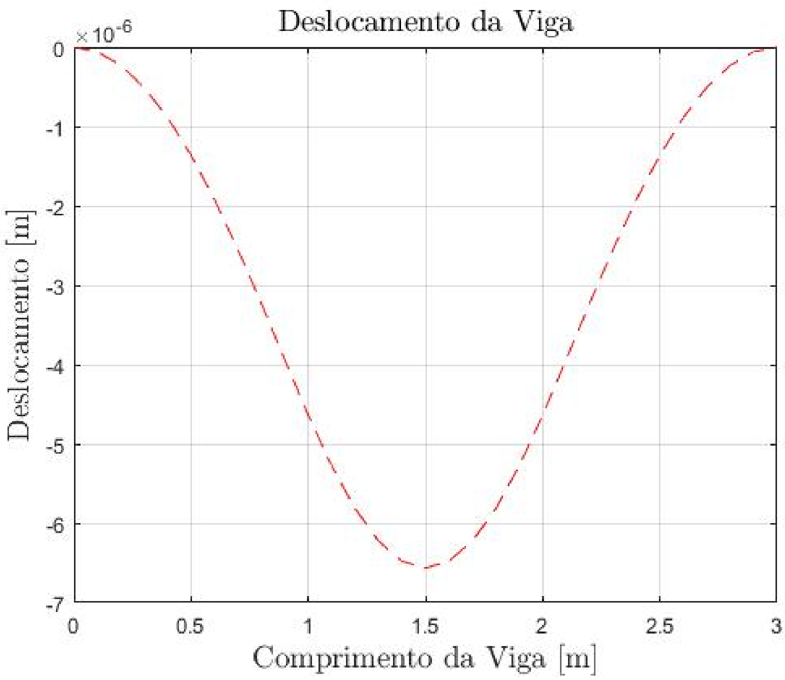
Para fins de comparação, foi analisado uma viga de aço bi-engastada de seção retangular com as dimensões e propriedades apresentadas a seguir.

- Base da seção transversal: 30 cm
- Altura da viga no engaste: 60 cm
- Altura da viga na seção constante: 30 cm
- Comprimento da seção variável: 1 m
- Comprimento total: 3 m
- Módulo de elasticidade: 200 GPa
- Massa específica: 7850 kg/m^3
- Número de elementos: 30
- Número de formas modais: 2
- Carregamento uniformemente distribuído: 5000 N/m

I. Matlab

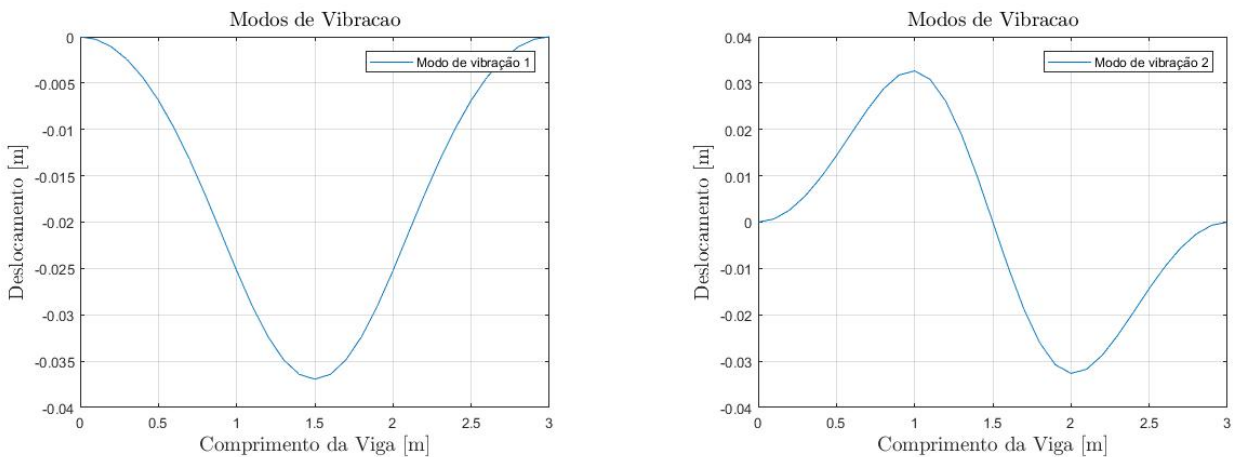
Executando o código no Matlab e inserindo os dados apresentados na Seção IV encontra-se um deslocamento vertical máximo no meio do vão de 0,006565658546935 mm, como mostra a Figura 4.

Figura 4: *Resposta estática do deslocamento vertical da viga pelo Matlab.*



Além do deslocamento, é possível verificar as formas modais do elemento. Para este caso, foi analisado 2 formas modais, como mostra a Figura 5.

Figura 5: *Formas modais da viga.*



(a) Primeira forma modal.

(b) Segunda forma modal

Para a forma modal 1, foi verificado um deslocamento máximo no meio do vão de 0,03695, e para a forma modal 2, um deslocamento máximo à ¼ do comprimento da viga saindo do engaste de 0,03264.

Também foi analisado a frequência natural para as primeiras 10 formas modais, obtendo os valores apresentado na Tabela 1.

Forma Modal	Frequência (Hz)
1	299,2
2	686,9
3	1280
4	2067
5	3025
6	4195
7	5566
8	7112
9	8865
10	10820

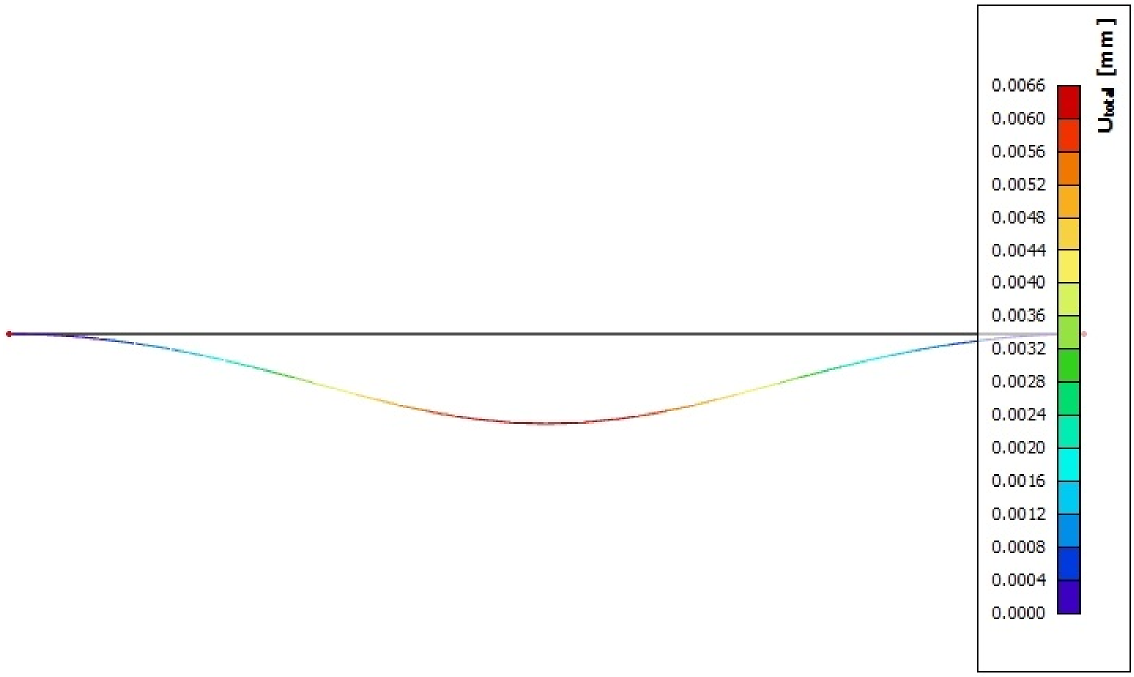
Tabela 1: *Frequências naturais obtidas pelo Matlab.*

II. SCIA Engineer

No software SCIA Engineer, foi modelado uma viga com as mesmas propriedades, dimensões, e com o mesmo carregamento da viga analisada no Matlab. O tamanho dos elementos foi definido como 0,1 m para que o software analisasse 30 elementos assim como o Matlab.

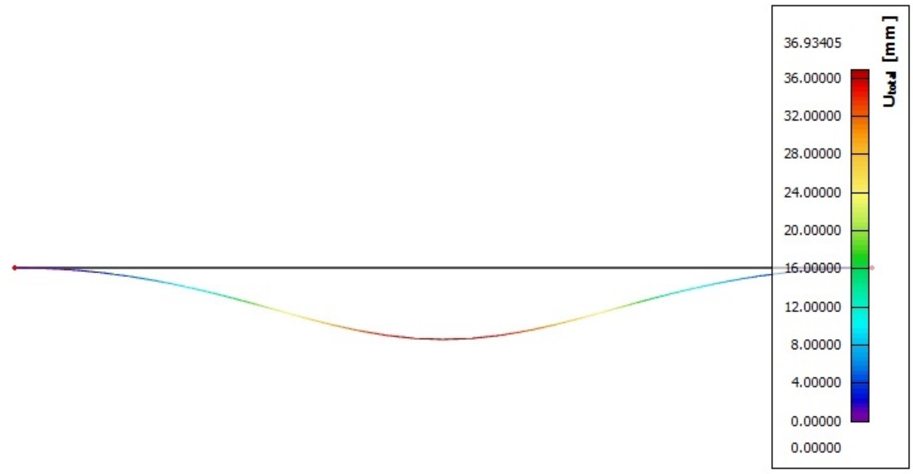
A flecha, no meio do vão, dada pelo software foi de 0,006566999900315 mm, como mostra a Figura 6.

Figura 6: *Resposta estática do deslocamento vertical da viga pelo SCIA Engineer.*

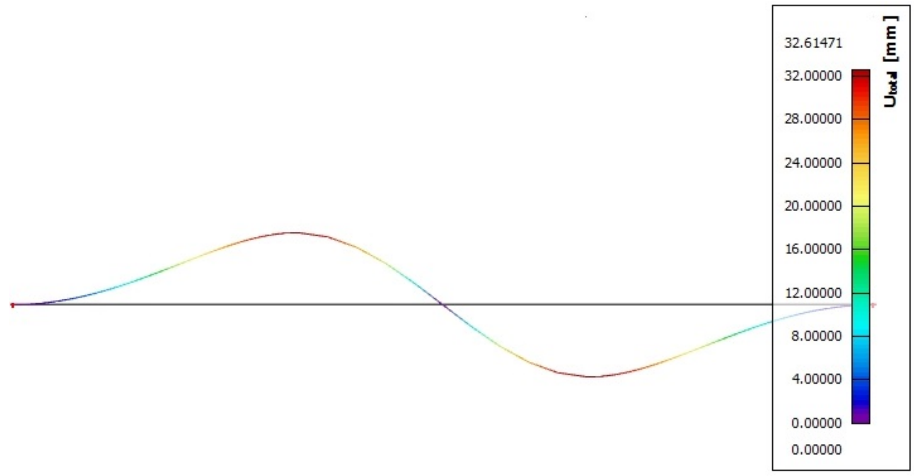


Foi determinado que o software calculasse 2 formas modais para fins de comparação com o matlab, como mostra a Figura 7.

Figura 7: *Formas modais da viga pelo SCIA Engineer.*



(a) Primeira forma modal.



(b) Segunda forma modal.

Pelo SCIA Engineer verificou-se um deslocamento máximo na forma modal 1 no meio do vão de 0,03693405, e para a forma modal 2, um deslocamento máximo à ¼ do comprimento da viga saindo do engaste de 0,03261471.

Para as 10 primeiras formas modais, foi obtido os valores de frequências naturais apresentados na Tabela 2.

Forma Modal	Frequência (Hz)
1	299,05
2	686,34
3	1279,22
4	2065,40
5	3019,84
6	4187,95
7	5552,88
8	7087,46
9	8825,72
10	10757,18

Tabela 2: *Frequências naturais obtidas pelo SCIA Engineer.*

III. Análise dos resultados

O erro relativo é calculado com a seguinte equação:

$$E(\%) = \frac{|v_1 - v_2|}{v_1} \cdot 100 \tag{4}$$

Onde a diferença entre v_1 e v_2 é em módulo, e o valor do erro relativo é dado em porcentagem.

Para análise do resultado de deflexão máxima da viga, foi calculado o erro relativo do algoritmo desenvolvido no Matlab em relação ao resultado obtido pelo programa computacional SCIA Engineer através da Equação (4).

$$E(\%) = \frac{0,006566999900315 - 0,006565658546935}{0,006566999900315} \cdot 100 = 0,020426\%$$

Portanto o valor de erro relativo encontrado para a deflexão máxima foi de $0,020426\%$, valor este que demonstra a precisão do algoritmo criado no matlab em relação a um software comercial conceituado como o SCIA Engineer.

Para as formas modais, utilizando a Equação (4), foi obtido o erro relativo apresentados na Tabela 3.

Forma Modal	Deslocamento no Matlab	Deslocamento no SCIA Engineer	Erro relativo (%)
1	0,03695	0,03693405	0,0432
2	0,03264	0,03261471	0,0775

Tabela 3: *Erro relativo das formas modais.*

Para as frequências naturais, utilizando a Equação (4), encontrou-se os valores apresentados na Tabela 4.

Forma Modal	Frequência (Hz) no Matlab	Frequência (Hz) no SCIA Engineer	Erro relativo (%)
1	299,2	299,05	0,0502
2	686,9	686,34	0,0816
3	1280	1279,22	0,0609
4	2067	2065,40	0,0775
5	3025	3019,84	0,1709
6	4195	4187,95	0,1683
7	5566	5552,88	0,2363
8	7112	7087,46	0,3462
9	8865	8825,72	0,4451
10	10820	10757,18	0,5839

Tabela 4: *Erro relativo das frequências naturais.*

A proximidade de resultados já era esperada, visto que ambos algoritmos trabalham com o métodos dos elementos finitos em sua base, naturalmente o software SCIA Enginner é mais complexo e faz outras considerações para proporcionar resultados mais condizentes com a realidade, porém como esta análise tem um caráter simplificado, os resultados se equipararam, demostrando que o algoritmo desenvolvido no Matlab tem um desempenho satisfatório para análise de vigas bi apoiadas com seção variável em suas extremidades.

V. Considerações Finais

É fato que ao criar um algorítmo para análise de problemas reais, é necessário realizar a validação da precisão dos resultados. O processo utilizado para tal feito no presente artigo tomou como base de comparação os resultados do SCIA Engineer, onde este já é de recorrente uso no ambiente profissional e demonstra resultados próximos aos da realidade, além de que o mesmo utiliza a mesma abordagem numérica do artigo.

O algoritmo criado demonstrou resultados satisfatóriamente semelhantes aos do software de comparação, tanto para a análise estática quanto dinâmica, mostrando que as considerações tomadas na confecção do código são suficientes para o estudo de vigas bi-engastadas de seção variável em casos práticos.

Referências

PETYT, Maurice. **Introduction to finite element vibration analysis.** Cambridge university press, 2010.