FCTUC FACULDADE DE CIÊNCIAS E TECNOLOGIA UNIVERSIDADE DE COIMBRA

Departamento de
Engenharia Eletrotécnica e de Computadores

Visão Por Computador

2016/2017

Trabalho Prático n. 6

Estimação da matriz fundamental, da matriz essencial e reconstrução 3D

Autores:

Ivo Micael Frazão Costeira
2013141479
uc2013141479@student.uc.pt

Ricardo Manuel Teixeira Pereira
2013153797
uc2013153797@student.uc.pt

16 de Abril de 2017

1 Introdução

Este trabalho aborda a estimação das matrizes fundamental e essencial, para que seja possível determinar a localização 3D dos pontos capturados de cenas visuais em imagens 2D, com recurso a duas câmaras distintas que capturam a mesma cena. Para tal, é abordada a geometria epipolar, nomeadamente os pontos e retas epipolares, e o movimento relativo entre câmaras, permitindo assim compreender o método de estimação da localização 3D dos pontos.

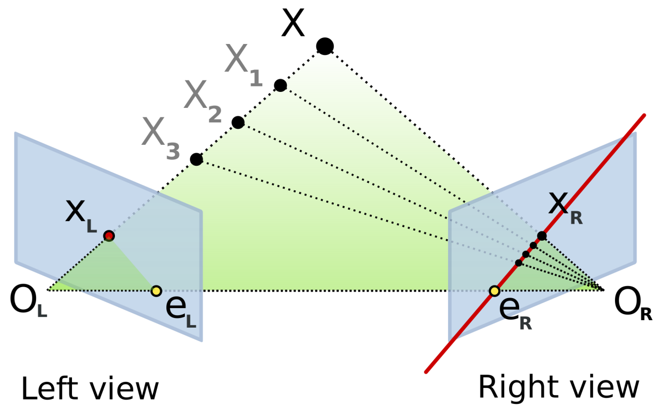


Figura 1: Geometria epipolar de um sistema genérico.

Considere-se duas câmaras colocadas em duas posições distintas. Sejam P_e e P_d as coordenadas de um ponto P (no espaço) nos referenciais respetivamente das câmaras esquerda e direita. Sejam p_e e p_d as coordenadas das imagens desse ponto nas câmaras esquerda e direita, respetivamente. Os sistemas de coordenadas associados a cada câmara estão relacionados entre si através de uma transformação de corpo rígido, a qual é definida por um vetor de translação $T = (O_d - O_e)$ ($T = (O_r - O_l)$, segundo a notação da figura 1), sendo O_d e O_e os centros de projeção das câmaras direita e esquerda, respetivamente, e por uma matriz de rotação R. Assim, dado um ponto P no espaço 3D, a relação entre as coordenadas P_e e P_d é dada por

$$P_d = R(P_e - T) \tag{1}$$

A matriz fundamental formaliza as relações geométricas entre as imagens de um par de câmaras que "observa" uma mesma parte do espaço 3D. A geometria correspondente a essa configuração é geralmente designada por geometria epipolar. O plano definido pelo ponto 3D (P) e pelos centros de projeção das câmaras esquerda (O_e) e direita (O_d) intersecta os planos-imagem das câmaras esquerda e direita em retas que são designadas por retas epipolares. Por outro lado, a reta definida pelos centros de projeção das câmaras intersecta os correspondentes planos-imagem em pontos que são designados por epipolos. Assim, o epipolo esquerdo é a imagem do centro de projeção da câmara direita e vice-versa. A geometria epipolar é assim a geometria de projeção intrínseca entre duas visualizações, por ser independente da estrutura da cena e depender apenas dos parâmetros intrínsecos e posição relativa das câmaras.

1.1 Matriz Essencial

Os vetores P_e, T e $P_e - T$ estão contidos num plano, como se pode ver pela representação na figura 1, que é o plano epipolar. Estes três vetores são definidos no sistema de coordenadas da câmara esquerda. Pelo facto de pertencerem ao mesmo plano verificam/satisfazem a seguinte equação

$$(P_e - T)^T (T \times P_e) = 0 \tag{2}$$

Por outro lado, da equação (1) resulta que

$$P_e - T = R^T P_d \tag{3}$$

que, ao substituir na equação (2), permite obter

$$(R^T P_d)^T (T \times P_e) = 0 \tag{4}$$

Por outro lado, o produto vetorial pode ser expresso algebricamente por meio de um produto de uma matriz antissimétrica (composta pelos elementos de um dos vetores) pelo outro vetor, ou seja:

$$T \times P_e = S P_e \tag{5}$$

onde S é dado por

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -T_z & T_y \\ T_z & 0 & -T_x \\ -T_y & T_x & 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

Consequentemente, a equação (4) pode ser reescrita da seguinte forma

$$P_d^T E P_e = 0 \tag{7}$$

onde $E = RS$.

Por outro lado, podemos substituir nesta equação P_d por p_d e P_e por p_e pois $p_e = \frac{f_e}{Z_e} P_e$ e $p_d = \frac{f_d}{Z_d} P_d$ em que $p_e = \begin{bmatrix} x_e & y_e & f_e \end{bmatrix}^T$ e $p_d = \begin{bmatrix} x_d & y_d & f_d \end{bmatrix}^T$ onde f_e e f_d são respetivamente as distâncias focais da câmara esquerda e direita. Assim, pode escrever-se

$$p_d^T E p_e = 0 \tag{8}$$

A matriz E é designada por matriz essencial e tem característica 2. De notar que nesta equação as coordenadas dos pontos nas imagens não são expressas em pixeis mas sim numa unidade métrica qualquer (mm, por exemplo). Se interpretarmos as coordenadas dos pontos nas imagens projetivamente, então, u_d, dado por

$$u_d = E p_e \tag{9}$$

representa as coordenadas de uma reta na imagem direita. Esta reta é a reta epipolar correspondente ao ponto p_e da imagem esquerda. Esta reta epipolar contém o ponto p_d (na imagem direita). A reta epipolar passa também pelo epipolo na imagem direita.

1.2 Matriz Fundamental

Sejam K_e e K_d as matrizes dos parâmetros intrínsecos das câmaras esquerda e direita, respetivamente. As coordenadas dos pontos p_e e p_d em pixeis são então dadas por:

$$\hat{p}_e = K_e p_e \tag{10a}$$
$$\hat{p}_d = K_d p_d \tag{10b}$$

de onde se tira que,

$$p_e = K_e^{-1}\hat{p}_e \tag{11a}$$
$$p_d = K_d^{-1}\hat{p}_d \tag{11b}$$

que, substituindo na equação (8),

$$\hat{p}_d^T F \hat{p}_e = 0 \tag{12}$$

onde

$$F = K_d^{-1} E K_e^{-1} \Leftrightarrow E = K_d F K_e \tag{13}$$

A matriz F é designada por matriz fundamental. Tal como no caso da matriz essencial,

$$\hat{u_d} = F\hat{p}_e \tag{14}$$

representa a reta epipolar na imagem direita correspondente ao ponto $\hat{p}_e$. Note-se que, neste caso, as coordenadas dos pontos nas imagens são em pixeis. A matriz fundamental, tal como a essencial, tem característica 2.

1.2.1 Estimação da Matriz Fundamental: Algoritmo dos 8 pontos

Considere-se um conjunto de pontos correspondentes nas imagens esquerda e direita. Cada par de pontos correspondentes satisfaz a equação (12). A matriz F é uma matriz 3×3, logo temos 9 incógnitas. No entanto, a equação (12) é uma equação homogénea o que faz com que possa ser multiplicada por uma constante qualquer diferente de zero. Consequentemente a matriz F é definida a menos de um fator de escala. Esse grau de liberdade reduz-nos o número de incógnitas a 8. Assim se tivermos 8 ou mais pares de pontos correspondentes nas imagens esquerda e direita podemos estimar a matriz F (cada par de pontos permite definir uma equação que tem como incógnitas os elementos da matriz F). No entanto é importante assegurar que os pontos usados não constituem uma configuração degenerada, por exemplo, pertencendo todos a um plano. Para estimar a matriz F no sentido dos mínimos quadrados, impondo a restrição de que a norma do vetor das incógnitas (os elementos da matriz F) é unitária, pode usar-se a a decomposição em valores singulares.

Seja A a matriz do sistema de equações obtido a partir da equação (12)

$$\begin{gathered}\hat{p}_d^T F \hat{p}_e = 0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix}\hat{x}_d & \hat{y}_d & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1 & f_2 & f_3\\ f_4 & f_5 & f_6\\ f_7 & f_8 & f_9\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\hat{x}_d\\ \hat{y}_d\\ 1\end{bmatrix} = 0 \Leftrightarrow \\ \begin{bmatrix}\hat{x}_d\hat{x}_e & \hat{x}_d\hat{y}_e & \hat{x}_d & \hat{y}_d\hat{x}_e & \hat{y}_d\hat{y}_e & \hat{y}_d & \hat{x}_e & \hat{y}_e & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ f_3\\ f_4\\ f_5\\ f_6\\ f_7\\ f_8\\ f_9\end{bmatrix} = 0\end{gathered} \tag{15}$$

A decomposição em valores singulares da matriz A dá

$$A = UDV^T \tag{16}$$

As matrizes U e V resultantes da decomposição são matrizes ortogonais e a matriz D contém na sua diagonal os valores singulares de A. A solução do sistema de equações é dada pela coluna da matriz V correspondente ao único valor singular nulo da matriz A. Na prática, devido ao ruído, a matriz A tem característica 9 ou seja, nenhum valor singular é nulo, pelo que a solução é então a coluna da matriz V correspondente ao menor valor singular da matriz A. A matriz F que resulta deste processo de estimação deveria ter característica 2. No entanto devido ao ruído e às imprecisões no processo de estimação só raramente a matriz F tem característica 2, sendo necessário impor essa condição. Para isso faz-se a decomposição em valores singulares da matriz F e substitui-se então a matriz D por uma nova matriz D' que é igual à matriz D com exceção do menor valor singular que se faz igual a 0, recalculando-se então a matriz F, agora com característica 2.

Um elemento muito importante para uma boa estimação da matriz F é a normalização dos dados. A normalização tem como objetivo tornar o problema mais bem condicionado do ponto de vista numérico, pois sem normalização os elementos da matriz A terão grandes variações. Interessa diminuir o intervalo de variações possíveis nos elementos da matriz A, que dependem das coordenadas do pixeis. Para isso faz-se uma translação e um mudança do fator de escala de cada uma das imagens de modo a que a origem do sistema de coordenadas se situe no centro de massa dos pixeis usados na estimação da matriz F e também de modo a que a distância média quadrática dos pixeis à origem seja de 1. Consideremos os pontos $\hat{p}_i$ de uma imagem com coordenadas $\hat{p}_i = \begin{bmatrix} x_i & y_i & 1 \end{bmatrix}^T$, em que $i = 1, ..., n$. O centro de massa tem então coordenadas $\bar{x} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i x_i$ e $\bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_i y_i$. Seja

$$\bar{d} = \frac{\sum_i \sqrt{(x_i - \bar{x})^2 + (y_i - \bar{y})^2}}{n\sqrt{2}} \tag{17}$$

Com os valores de $\bar{x}$, $\bar{y}$ e de $\bar{d}$ para cada uma das imagens constroem-se duas matrizes, T_e e T_d, que permitem obter as coordenadas normalizadas nas duas imagens por meio de

$$\hat{p}'_e = T_e \hat{p}_e \tag{18a}$$
$$\hat{p}'_d = T_d \hat{p}_d \tag{18b}$$

A estimação da matriz F faz-se então com estas coordenadas. A matriz resultante deste processo de estimação é a matriz $\hat{F}$ que é dada por

$$\hat{F} = T_d^{-T} F T_e^{-1} \tag{19}$$

Estimada a matriz $\hat{F}$ obtém-se a matriz F através de

$$F = T_d^T \hat{F} T_e \tag{20}$$

Algoritmo Considerem-se n pontos correspondentes (nas imagens esquerda e direita) com $n \geq 8$. Marque os pontos correspondentes à mão ou então determine-os automaticamente primeiro e estabeleça as correspondências à mão. Atenção: os pontos não devem ser todos coplanares.

1. Normalizar as coordenadas dos pontos correspondentes, nas duas imagens usando $\hat{p}'_e = T_e \hat{p}_e$ e $\hat{p}'_d = T_d \hat{p}_d$

2. Construir o sistema de equações homogéneo definido pela equação (12). Seja A a matriz $n \times 9$ do sistema e $A = UDV^T$ a sua decomposição em valores singulares.

3. Os elementos da matriz $\hat{F}$ (a menos de um fator de escala) são dados pelos elementos da coluna da matriz V correspondentes ao menor valor singular de A.

4. Para impor a restrição da característica da matriz $\hat{F}$ decompõe-se a matriz $\hat{F}$ em valores singulares, $\hat{F} = \hat{U}\hat{D}\hat{V}^T$.

5. Coloca-se o menor valor singular na matriz $\hat{D}$ a zero e faz-se a matriz D' igual a essa matriz.

6. Calcula-se novamente a matriz fundamental usando $F' = UD'V^T$

7. "Desnormalização": a matriz fundamental F é então obtida através de $F = T_d^T F' T_e$.

1.3 Estimação dos Epipolos

O epipolo na imagem esquerda $\hat{e}_e$ pertence a todas as retas epipolares. Assim, qualquer que seja $\hat{p}_d$ obtém-se

$$\hat{p}_d^T F \hat{e}_e = 0 \tag{21}$$

o que significa que

$$F\hat{e}_e = 0 \tag{22}$$

Como a matriz F tem característica 2 (sendo uma matriz 3×3) , conclui-se que o epipolo esquerdo $\hat{e}_e$ corresponde ao espaço nulo direito da matriz F. Por outro lado o epipolo direito $\hat{e}_d$ corresponde ao espaço nulo direito da matriz F^T . Consequentemente para se determinar os dois epipolos estimam-se os espaços nulos direitos das matrizes F e F^T.

Algoritmo para estimar a localização dos epipolos Dada a matriz fundamental F,

1. Decompõe-se a matriz F em valores singulares, $F = UDV^T$

2. O epipolo $\hat{e}_e$ é dado pela coluna da matriz V correspondente ao valor singular nulo da matriz F.

3. O epipolo $\hat{e}_d$ é dado pela coluna da matriz U correspondente ao valor singular nulo da matriz F.

1.4 Reconstrução 3D

A matriz essencial, E, definida como $E = RS$, contém informações sobre a pose entre as duas câmaras utilizadas para a captação das imagens, nomeadamente a posição relativa (matriz antissimétrica S, correspondente à translação T) e a orientação (matriz de rotação R) entre estas. O processo de recuperação dessas informações a partir da matriz essencial é um processo necessário para a reconstrução 3D dos pontos capturados.

Seja W a matriz de rotação no eixo Z por $\frac{\pi}{2}$,

$$W = R_Z\left(\frac{\pi}{2}\right) = \begin{bmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} & 0 \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{23}$$

e U, Σ e V as matrizes ortogonais resultantes da decomposição em valores singulares da matriz E.

Dada uma matriz essencial, E, não nula, existem duas poses possíveis correspondentes

$$(S_1, R_1) = (UW\Sigma U^T, UW^TV^T) \tag{24a}$$
$$(S_2, R_2) = (UW^T\Sigma U^T, UWV^T) \tag{24b}$$

sendo que devemos escolher a que permite obter os pontos reconstruidos visíveis a ambas as câmaras, ou seja, os pontos terem profundidade (coordenada z) positiva.

O sinal da matriz essencial E é arbitrário, mesmo após normalização, logo as projeções podem operar sobre $+E$ ou sobre $-E$. Como podemos recuperar duas poses possíveis de uma matriz E, podemos recuperar até quatro soluções possíveis de $\pm E$, que são

$$(S_1, R_1) = (UW\Sigma U^T, UWV^T) \tag{25a}$$
$$(S_2, R_2) = (UW\Sigma U^T, UW^TV^T) \tag{25b}$$
$$(S_3, R_3) = (UW^T\Sigma U^T, UWV^T) \tag{25c}$$
$$(S_4, R_4) = (UW^T\Sigma U^T, UW^TV^T) \tag{25d}$$

$$E = U\Sigma V = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \Rightarrow u_3E = 0 \tag{26}$$

Pelo método de decomposição em valores singulares da matriz essencial, podemos ainda considerar que a translação entre as câmaras pode ser dada pela terceira coluna da matriz U, u_3, pois esta corresponde ao valor singular nulo da matriz E, como se verificar pela equação em (26), logo temos que

$$(t_1, R_1) = (u_3, UWV^T) \tag{27a}$$
$$(t_2, R_2) = (-u_3, UW^TV^T) \tag{27b}$$
$$(t_3, R_3) = (u_3, UWV^T) \tag{27c}$$
$$(t_4, R_4) = (-u_3, UW^TV^T) \tag{27d}$$

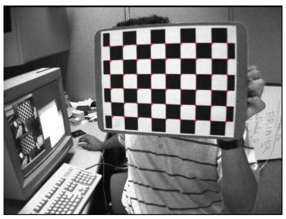
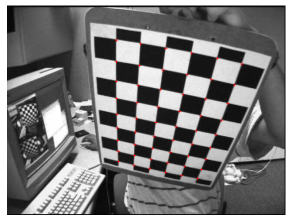
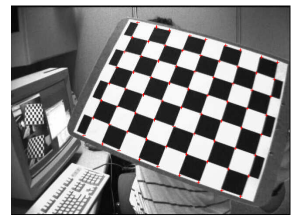
Descoberta a pose relativa das câmaras, podemos determinar a posição 3D dos pontos correspondentes através de vários métodos, sendo que o aplicado neste trabalho é o de triangulação fornecido pelo MATLAB, pelo que não o iremos explicar teoricamente aqui.

2 Implementação

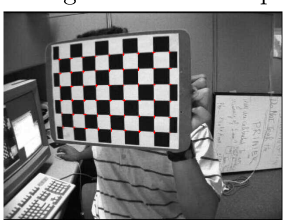
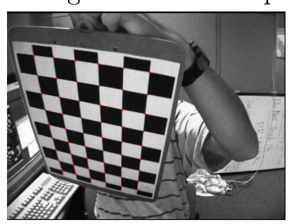
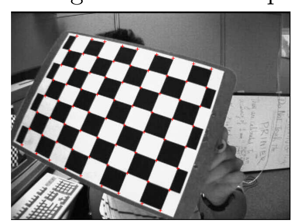
Ao experimentar nos computadores dos dois elementos do grupo, reparámos que o problema do determinante das matrizes U e V da decomposição em valores singulares da matriz essencial na parte 2 deste trabalho não dar sempre $+1$ não ocorria de igual forma, ou seja, nas duas máquinas, exatamente o mesmo código origina valores diferentes. Como a função `plotCamera()` recebe a matriz de rotação R e espera que esta tenha determinante 1, quando os determinantes de U e V são simétricos entre si, o determinante de R é -1, provocando um erro na execução do código. Então, criámos dois ficheiros de MATLAB, um com esses *plots* que corre numa das máquinas do grupo e outro sem esses *plots* para permitir correr nas máquinas em que esse problema se levante.

2.1 Parte 1

Para podermos estimar a matriz fundamental através do algoritmo dos 8 pontos, começámos por ler as seis imagens fornecidas para este trabalho e detetar o padrão de xadrez presente nestas através da função `detectCheckerboardPoints()` do MATLAB, obtendo os pontos representados nas figuras 2. A partir desses pontos, realizámos manualmente as correspondências, gerando um único vetor com todos os pontos correspondidos dos três pares de imagens que tínhamos.

(a) 1ª imagem - câmara esquerda. (b) 2ª imagem - câmara esquerda. (c) 3ª imagem - câmara esquerda.

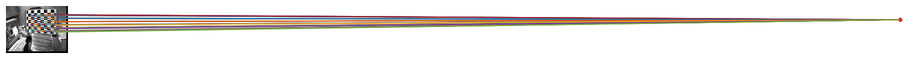
(d) 1ª imagem - câmara direita. (e) 2ª imagem - câmara direita. (f) 3ª imagem - câmara direita.

Figura 2: Pontos de xadrez detetados pela função `detectCheckerboardPoints()` às imagens fornecidas para o trabalho, em que cada imagem foi obtida através de duas câmaras diferentes, distinguidas por esquerda e direita.

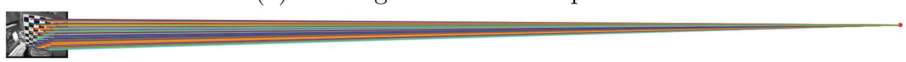
A partir dos vetores de pontos correspondentes, pretendemos calcular a matriz fundamental, F. Como apenas necessitamos de oito pontos através deste algoritmo, iremos estimar a matriz fundamental no sentido dos mínimos quadrados, pelo que criámos a matriz A com os pontos dos três conjuntos de imagens, assegurando assim que não obtínhamos uma configuração degenerada. Fazendo a decomposição em valores singulares da matriz A, sabemos que a solução pretendida é dada pela coluna da matriz V correspondente ao menor valor singular da matriz A, que, dada a ordenação decrescente dos valores singulares do MATLAB, sabemos ser a nona coluna. A matriz F corresponde à ordenação dos valores dessa coluna numa matriz, devendo ter característica 2, que, na prática, é quase impossível de obter, pelo que é necessário impor essa condição. Para tal, realizámos a decomposição em valores singulares da matriz F, forçando o menor valor singular presente da matriz D resultante a ter o valor 0, reconstruindo novamente a matriz F. Decidimos ainda normalizar esta matriz para podermos comparar melhor com a matriz F resultante da função `estimateFundamentalMatrix()` numa etapa futura deste trabalho. A matriz que obtivemos é a indicada em (28).

$$F = \begin{bmatrix} -0.0000 & -0.0000 & 0.0019 \\ -0.0000 & 0.0000 & 0.0307 \\ 0.0005 & -0.0281 & -0.9991 \end{bmatrix} \tag{28}$$

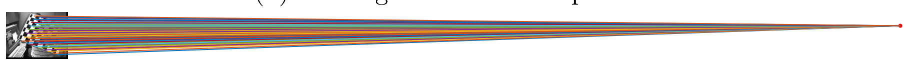
Com a estimação da matriz fundamental concluída, pudemos, então, estimar a localização dos epipolos de cada imagem, sabendo que o epipolo esquerdo é dado pela coluna da matriz V da decomposição em valores singulares da matriz fundamental correspondente ao valor singular nulo desta e que o epipolo direito é dado pela coluna da matriz U correspondente ao valor singular nulo da mesma. Na prática, bastou considerar as últimas colunas das matrizes V e U. Com o ponto epipolar estimado, pudemos ainda representar as retas epipolares em cada imagem, tal como se pode visualizar na figura 3.



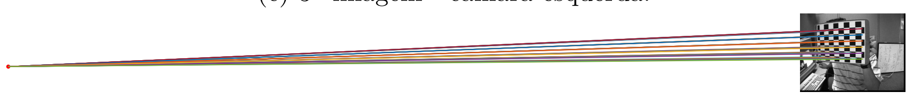
(a) 1ª imagem - câmara esquerda.



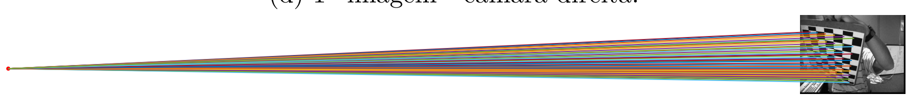
(b) 2ª imagem - câmara esquerda.



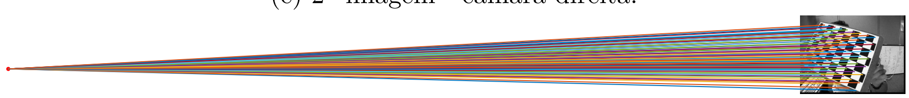
(c) 3ª imagem - câmara esquerda.



(d) 1ª imagem - câmara direita.



(e) 2ª imagem - câmara direita.



(f) 3ª imagem - câmara direita.

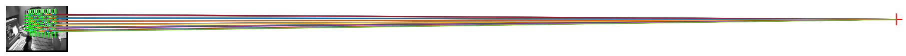
Figura 3: Epipolos e retas epipolares calculadas através do algoritmo dos 8 pontos implementado manualmente.

De seguida, estimámos a matriz fundamental através da função `estimateFundamentalMatrix()` do MATLAB, obtendo a matriz representada em (29). Comparando este com a obtida pela nossa implementação, verificamos que os valores apresentados são idênticos numericamente, sendo apenas simétricos. Esta simetria numérica provocou alguns problemas na parte 2 do trabalho, nomeadamente no uso da matriz de rotação recuperada, R, pelo que utilizámos a matriz F estimada pelo MATLAB daí em diante. Contudo, ao realizar uma pesquisa pela bibliografia recomendada, reparámos que na nota 5.10 do livro [1] é referido que o método por decomposição em valores singulares assume que as matrizes U e V resultantes têm determinante positivo e que nem sempre é o caso, tal como nos aconteceu, em que o determinante de U da matriz F[1]é -1 e de V é 1. Como o sinal da matriz é aleatório, a utilização da matriz estimada pelo MATLAB não oferece qualquer problema.

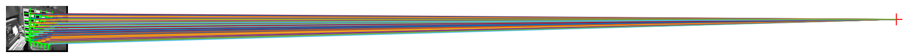
Para permitir comparar visualmente as duas soluções, representámos os epipolos[2] e as retas epipolares[3] correspondentes seguindo os exemplos disponibilizados pela *MathWorks*, tal como se pode visualizar na figura 4. Comparando os dois resultados, podemos verificar que estes são idênticos, o que já seria expectável pela comparação numérica das duas matrizes obtidas.

[1]Tendo em conta que F e E estão relacionadas entre si pelas matrizes dos parâmetros intrínsecos das câmaras que capturaram as imagens, assumimos que a explicação para a matriz essencial se aplique à matriz fundamental, que foi onde reparámos no problema inicialmente.

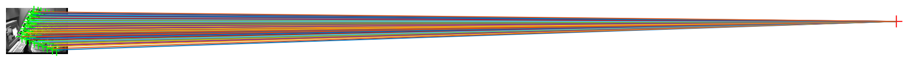
$$F = \begin{bmatrix} 0.0000 & 0.0000 & -0.0019 \\ 0.0000 & -0.0000 & -0.0307 \\ -0.0005 & 0.0281 & 0.9991 \end{bmatrix} \tag{29}$$



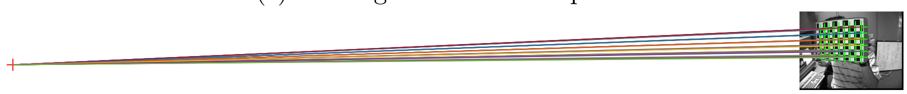
(a) 1ª imagem - câmara esquerda.



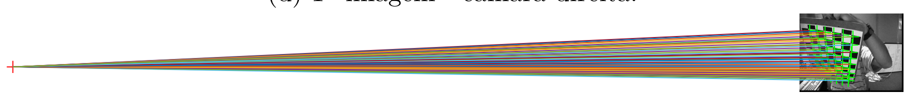
(b) 2ª imagem - câmara esquerda.



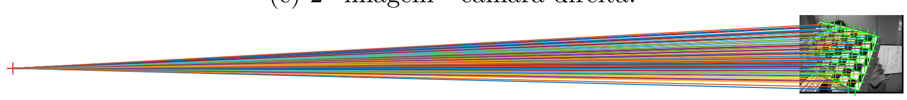
(c) 3ª imagem - câmara esquerda.



(d) 1ª imagem - câmara direita.



(e) 2ª imagem - câmara direita.



(f) 3ª imagem - câmara direita.

Figura 4: Epipolos e retas epipolares calculadas após estimação da matriz fundamental através da função do MATLAB indicada.

2.2 Parte 2

Para a reconstrução 3D dos pontos, decidimos aplicar a função `triangulate()` do MATLAB, segundo o exemplo fornecido pela *MathWorks*[4]. Para tal, necessitámos de calcular os parâmetros estéreo das câmaras. Através das matrizes dos parâmetros intrínsecos das duas câmaras utilizadas, pudemos determinar a matriz essencial, E, aplicando a equação (13). Para garantir que E tinha um valor singular a 0 e os outros iguais (sendo o valor indiferente, pois serão calculados a menos de um fator de escala), forçámos a matriz D da decomposição em valores singulares de E a ter os dois primeiros valores singulares unitários e o último a zero, reconstruindo, de seguida, a matriz E. Através desta matriz, pudemos calcular as matrizes de rotação e translação entre as duas câmaras para as quatro soluções possíveis, aplicando o método dado na aula teórica e pelo método descrito no capítulo 5 do livro [1], que diferem no cálculo da matriz translação. Comparando os dois métodos, verificamos que obtemos exatamente os mesmos valores de translação, após termos obrigado os valores próprios iguais a serem 1 (antes os valores diferiam por um fator de escala idêntico aos valores próprios de E anteriores).

Para a construção da estrutura dos parâmetros estéreo da câmara, necessitámos de criar as estruturas dos parâmetros de cada câmara, através da função `cameraParameters()`, que provocou alguns problemas na reconstrução, pois o MATLAB espera que as matrizes dos parâmetros intrínsecos sejam triangulares inferiores e as fornecidas são triangulares superiores[5]. Após obtermos as estruturas dos parâmetros de cada câmara e as matrizes de rotação e translação, construímos os parâmetros estéreo das câmaras, permitindo assim utilizar o método de triangulação do MATLAB. Para a escolha da solução entre as quatro possíveis, pretendíamos que a solução tivesse os pontos à frente de ambas as câmaras. Para tal, aplicámos as quatro soluções e por desenho das poses das câmaras, através da função `plotCamera()`, verificámos que apenas a solução com

$$P_d = \left[UWV^T \middle| -\bar{u}_3\right] \tag{30}$$

permitia os resultados pretendidos, tal como se pode verificar através da figura 5.

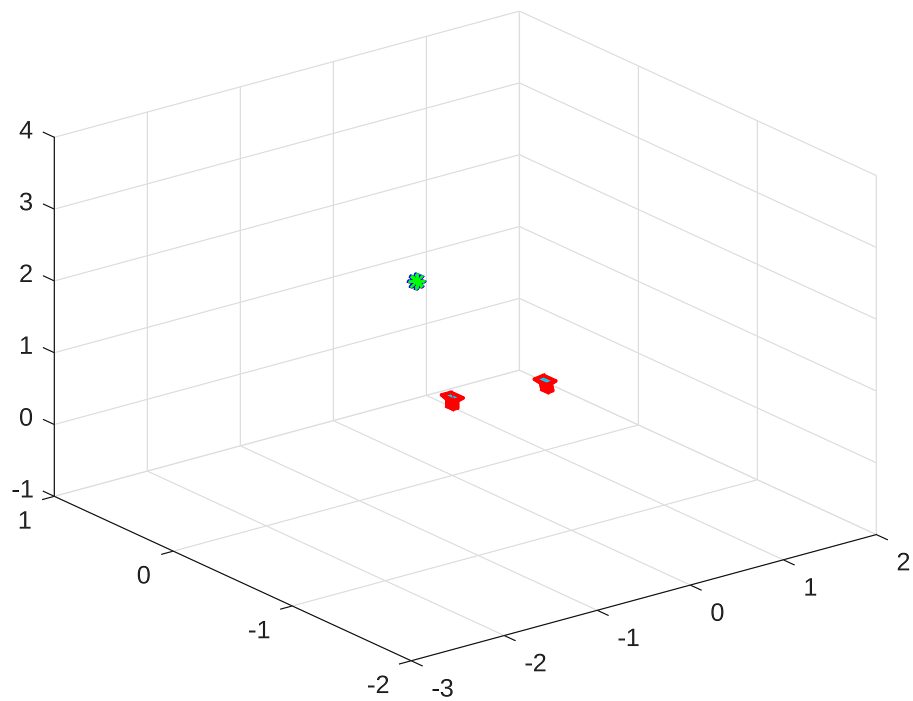


Figura 5: Reconstrução 3D dos pontos do xadrez através da função `triangulate()`, incluindo o desenho da pose da câmara.

Como a imagem 5 não permitia visualizar corretamente a reconstrução dos pontos, removemos o desenho das câmaras e obtivemos a figura 6. Os pontos apresentam-se bem reconstruidos, apesar de não serem coplanares, como suposto. A não coplanaridade dos pontos deve-se ao facto de não se ter removida a distorção provocada pelas câmaras nas imagens, que poderia ter sido removida através da função `undistortImage()`[6], contudo o tempo disponível para este e os restantes trabalhos a realizar pelo grupo não permitiu implementar esta funcionalidade corretamente, pelo que decidimos manter a versão sem a remoção dessa distorção.

Referências

[1] Y. Ma et al. *An Invitation to 3-D Vision - From Images to Geometric Models*. Inglês. Ed. por Springer Science+Business Media LLC. 2004. Cap. 5. Reconstruction from Two Calibrated Views, pp. 109–170.

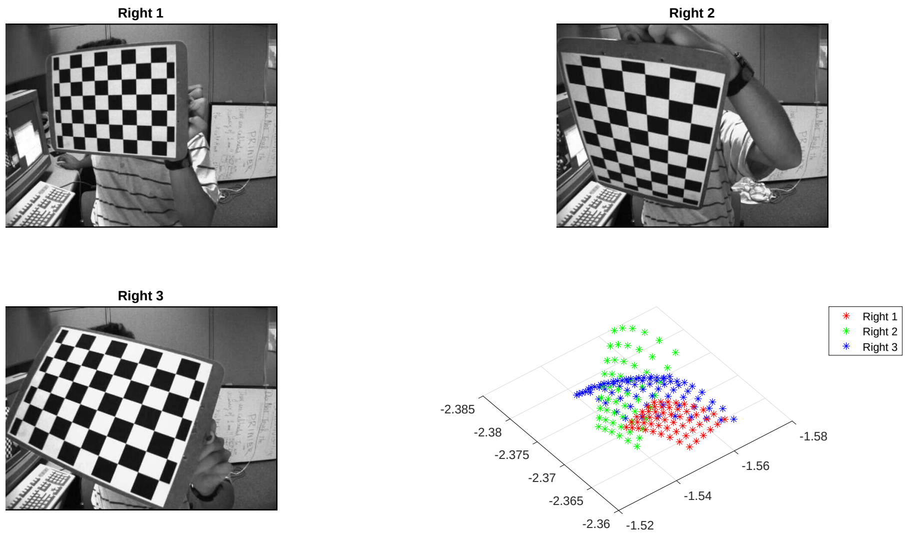


Figura 6: Reconstrução 3D dos pontos do xadrez através da função `triangulate()` e imagens utilizadas para comparação.

[2] MathWorks. *Determine whether image contains epipole*. Inglês. URL: https://www.mathworks.com/help/vision/ref/isepipoleinimage.html (acedido em 14/04/2017).

[3] MathWorks. *Compute epipolar lines for stereo images*. Inglês. URL: https://www.mathworks.com/help/vision/ref/epipolarline.html (acedido em 14/04/2017).

[4] MathWorks. *3-D locations of undistorted matching points in stereo images*. Inglês. URL: https://www.mathworks.com/help/vision/ref/triangulate.html?s_tid=srchtitle (acedido em 14/04/2017).

[5] MathWorks. *Object for storing camera parameters*. Inglês. URL: https://www.mathworks.com/help/vision/ref/cameraparameters-class.html?s_tid=srchtitle (acedido em 14/04/2017).

[6] MathWorks. *Correct image for lens distortion*. Inglês. URL: https://www.mathworks.com/help/vision/ref/undistortimage.html (acedido em 14/04/2017).