

Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática

2024-2025

Aleatório

- Em termos qualitativos, “qualquer coisa” que não seja previsível com certeza absoluta
- Acontecimento (evento) cujo resultado não possa ser determinado com certeza absoluta
 - Caso contrário é determinístico

Probabilidade

“Medida do grau de certeza associado a um resultado proveniente de um fenómeno de acaso”

- Palavra usada pela primeira vez por Bernoulli (1654-1705)

Então qual o interesse ?

- Qual o interesse em estudar algo que não se pode prever ?
- Na maioria das aplicações **existe algum tipo de regularidade** que se manifesta se o número de observações / experiências for elevado

Problema Exemplo 1

- Qual a probabilidade de acertar numa **password** de 4 dígitos escolhendo completamente ao acaso?

E de 20 dígitos ?

Experiência aleatória ...

- **Experiência aleatória**
 - Procedimento que deve produzir um resultado
 - Mesmo que seja repetido nas mesmas condições não garante que o resultado seja idêntico
 - Resultado imprevisível
- Exemplo:
 - Escolher aleatoriamente uma letra do alfabeto

Experiência aleatória ...

- A uma **experiência aleatória** são associados:
 - **Espaço de amostragem** (conj. de resultados possíveis)
 - Conjunto de **acontecimentos (ou eventos)**
 - Lei de probabilidade

Espaço de amostragem

- Conjunto (S) de todos os resultados possíveis de uma experiência aleatória
 - Em geral representado por S (do inglês “Sample Space”)
- Resultados têm de ser mutuamente exclusivos e não divisíveis
- Discreto se for contável
 - i.e. se contiver um número finito de elementos ou se contiver um número infinito em que se pode estabelecer uma correspondência biunívoca com o conjunto dos inteiros
- Contínuo se não for contável
- Elementos de S são designados por resultados elementares

Acontecimentos / eventos

- Os resultados elementares das experiências não constituem necessariamente os únicos itens de interesse nas experiências
 - Exemplo:
 - No caso da contagem de mensagens de email podemos estar interessados no facto de o número total exceder um determinado limiar ($n^o > L$)
- **Acontecimento (evento)** A é um subconjunto de S
 - S é obviamente um subconjunto de si próprio e constitui o evento certo
 - O conjunto vazio, ϕ , também é subconjunto e representa o evento impossível

Lei de probabilidade

- **Atribui probabilidade aos vários eventos**
- **Probabilidade:** número associado a um evento
 - que indica a “verosimilhança” de esse evento ocorrer quando se efetua a experiência
 - **valor entre 0 e 1**
 - 1 para acontecimento certo
 - 0 para acontecimento impossível

Cálculo de probabilidades

Como é que se obtêm as probabilidades associadas a eventos ?

- Através de **medição**
- Através da construção de **modelos** probabilísticos
- Probabilidades **teóricas**
- Probabilidades **empíricas**
- Probabilidades subjetivas
 - Exemplo:
 - Uma casa de apostas estimou em $1/5$ a probabilidade de Portugal ser campeão Europeu em 2016
 - E fomos Campeões 😊
 - Não nos interessam nesta UC

Diferentes abordagens

- Teoria **clássica** (de Laplace)
 - Probabilidades teóricas
- **Frequencista**
 - Probabilidades empíricas
- Teoria **matemática**

Teoria clássica

Simon de Laplace (1749-1827)

- “*Pour étudier un phénomène, il faut réduire tous les événements du même type à un certain nombre de cas également possibles, et alors la probabilité d’un événement donné est une fraction, dont le numérateur représente le nombre de cas favorables à l’événement et dont le dénominateur représente par contre le nombre des cas possibles*”
 - pg 17 livro “O Acaso”
- Primeiro reduzir o fenómeno a um conjunto de resultados elementares, **“casos”, igualmente prováveis**

$$P(\text{acontecimento}) = \frac{\text{número de casos favoráveis}}{\text{número de casos possíveis}}$$

Exemplo



- **Lançamento de 1 DADO**
 - Honesto
 - \Rightarrow qualquer face igualmente provável
- Probabilidade de obter certa face, ex: a 5 ?
- 6 resultados ou eventos elementares
 - Representáveis pelo conjunto $\{1,2,3,4,5,6\}$
- Ao evento “saída da face 5” apenas corresponde um caso favorável
 - $\rightarrow P(\text{“face 5”})=1/6$

Variante do problema

- E se 2 faces tivessem o 5 marcado ?
- Espaço de amostragem ?
 - $S=\{1,2,3,4,5\}$? \Rightarrow casos possíveis =5 ?
 - $S=\{1,2,3,4,5,5\}$
- $P(\text{"sair 5"})=2/6$

Regras básicas (**OU**)

- $P(\text{"sair face maior que 4"}) ?$
 $= P(\text{"sair face 5 ou face 6"}) = P(\{5,6\}) = 2/6$
 $= P(\{5\}) + P(\{6\})$
- $P(\text{"face par"}) = P(\{2\}) + P(\{4\}) + P(\{6\}) = 1/2$
- $P(\text{"qualquer face"}) = 6 \times 1/6 = 1$

... $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Sempre ???

Regras básicas

- $P(\text{"face menor ou igual a 4"})$
 $= 1 - P(\text{"face maior que 4"})$
 $= 1 - 2/6 = 4/6$

Regra do complemento

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

Regras básicas (E)

- $P(\text{"face par E face menor ou igual a 4"}) =$
 $= P(\text{"face par"}) \times P(\text{"face menor ou igual a 4"})$
 $= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

De facto existem 2 possibilidades em 6 , {2,4}

... $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

Sempre?

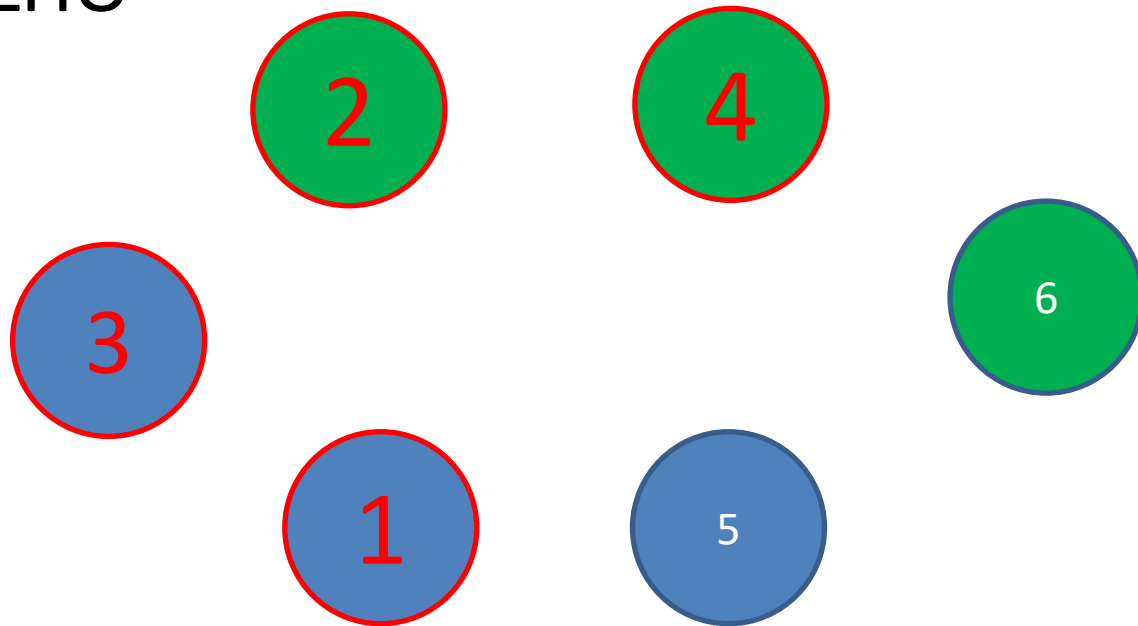
(só se os acontecimentos forem independentes)

Aplicação das regras (OU novamente)

- $P(\text{"face par OU face menor ou igual a 4"}) = ?$
- Se fizermos $P(\text{"face par"}) + P(\text{"face menos ou igual a 4"})$ dá $7/6 > 1$!!
- Qual o erro ?

Acontecimentos

- A=“face par” e fundo VERDE
- B=“face menor ou igual a 4” limite e texto a VERMELHO



...

Temos 3 com fundo verde $\Rightarrow P(A) = \frac{1}{2}$

Temos 4 com vermelho $\Rightarrow P(B) = \frac{2}{3}$

... mas temos 2 casos com fundo verde e limite e texto vermelho

– No mínimo perigoso 😊

- Estávamos a contar 2 vezes a intersecção

- $$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{2}{6} = \frac{3}{6} + \frac{4}{6} - \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Testando as regras ...



- Considere uma **família com 2 filhos** e que a probabilidade de nascer um rapaz é igual à de nascer uma rapariga.
- Designando o nascimento de um filho por M e uma filha por F, qual a probabilidade de MF ?
- Qual a **probabilidade de pelo menos 1 rapaz numa família com 2 filhos** ?



Resolução

- Pelo menos 1 rapaz \Rightarrow MF ou FM ou MM
- MF é a intersecção (“e”) de M no primeiro e F no segundo $= \frac{1}{2} * \frac{1}{2}$
- Similar para MM e FM
- $P(MF) + P(MM) + P(FM) = \frac{3}{4}$
 - Devido à união (“ou”)

Não esquecer

- Estas regras e definição clássica ASSUMEM dados honestos, moedas honestas, igual probabilidade de nascer rapaz e rapariga, **equiprobabilidade para os eventos elementares**
- Uma questão que surge naturalmente é se na prática tais valores são ou não razoáveis ?

Abordagem Frequencista

Noção **Frequencista**

- Noção introduzida por De Moivre (1718)
- Repete-se a experiência um certo número de vezes (N)
- Seja k o número de vezes que ocorre o acontecimento que nos interessa (ex: “sair face 5 num dado”)
- Determina-se $f=k/N$
 - ou seja a **frequência relativa** de ocorrência
- Usa-se esta frequência como uma medida **empírica** de probabilidade

Frequência relativa

- Definição:
 - Se uma experiência for repetida N vezes nas mesmas condições a **frequência relativa** do evento A é

$$f(A) = \frac{\# \text{ ocorrências do evento } A}{N}$$

- Se a frequência relativa convergir quando N aumenta, então o **limite da frequência relativa** é a **probabilidade** de A

$$p(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\# \text{ ocorrências de } A}{N}$$

Frequência relativa (cont.)

- $0 \leq f(A) \leq 1$
- Numa experiência com K resultados possíveis em N experiências:
 - $S = \{A_1, A_2, A_3, \dots, A_K\}$
 - O resultado A_i ocorre N_i vezes
 - Cada um dos resultados possíveis terá uma frequência relativa de $f(A_i) = N_i/N$
 - $\sum_{i=1}^K f(A_i) = \frac{(N_1 + N_2 + \dots + N_K)}{N} = 1$

Exemplo em **Matlab**

- Probabilidade de **sair 2 caras em 3 lançamentos**
- Como se simula a experiência de lançar uma moeda ?
- Como se simula a experiência de 3 lançamentos?
- Como se repete “muitas” vezes ?
- Como contar as ocorrências do evento ?

Simular lançamentos ...

% simular 1 lançamento (de uma moeda)

lan= rand() <0.5 % assumiremos que 1 = “cara”

% simular os 3 lançamentos

lan_3= rand (3, 1) < 0.5 % ou l3 = rand(1,3) > 0.5

% repetir N vezes

N= 1e6 % mas comecem com valor pequeno

lancamentos= rand(3,N); % importante o “;”

ocorrências ... freq. relativa

% contar num ocorrências de “2 caras”

% contar num caras (1s) em cada experiência

% (que se encontra numa coluna da matriz lancamentos)

numCarasNaExperiencia= sum (lancamentos);

% contar vezes em que esse número de caras é 2

numOcorrencias = sum (numCarasNaExperiencia ==2)

% calcular freq relativa

fr = numOcorrencias / N

% usar como estimativa da probabilidade

pA= fr

Variação com N

% variação da frequência relativa em função de N

$N = 1e5$

`lancamentos = rand(3,N) < 0.5;`

`sucessos = sum(lancamentos) == 2; % 1 = sucesso`

`fabsol = cumsum(sucessos);`

`frel = fabsol ./ (1:N);`

`plot(1:N, frel);`

Simple mas não perfeita

- Conceptualmente é extremamente simples e pode ser aplicada praticamente a todas as experiências
- Tem, no entanto, algumas desvantagens:
 - Em muitos casos requer considerável dispêndio de tempo
 - As experiências devem poder ser repetidas em condições idênticas
 - Quando o espaço amostral é infinito surgem questões de fiabilidade uma vez que só podemos efetuar um número finito de repetições da experiência
 - A própria obtenção dos valores coloca algumas questões:
 - Quantos ensaios se tem de efetuar para termos medidas fiáveis ?
 - Como se lida com medições sujeitas a erro ?

Teoria Axiomática de Probabilidade

Definição axiomática de probabilidade

- Em 1933, Kolmogorov estabeleceu a
DEFINIÇÃO DE PROBABILIDADE POR
AXIOMATIZAÇÃO
 - na sua obra Foundations of the Theory of Probability.
- com base nas propriedades das frequências relativas e das operações sobre conjuntos

O que é uma axiomática?

Em determinado ponto da evolução de uma teoria de pensamento matemático, torna-se imperioso ordenar, sistematizar e relacionar todos os conhecimentos entretanto nela reconhecidos, isto é, proceder à sua **AXIOMATIZAÇÃO**

Axiomática de probabilidades

- Axioma 1- probabilidades são não-negativas
 $P(A) \geq 0$
- Axioma 2 – normalização (S tem probabilidade 1)
 $P(S) = 1$
- Axioma 3a – Se A e B forem mutuamente exclusivos
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Axioma 3b – Se A_1, A_2, \dots for uma sequência infinita de acontecimentos mutuamente exclusivos ($\bigvee_{i \neq j} A_i \cap A_j = \emptyset$)

$$P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_k)$$

Teoremas

- Como sabem, às afirmações que se obtêm dedutivamente a partir dos axiomas, ou de outras já deles obtidas por dedução, chamamos TEOREMAS.

Teoremas / Corolários :

Prob. do acontecimento complementar

- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

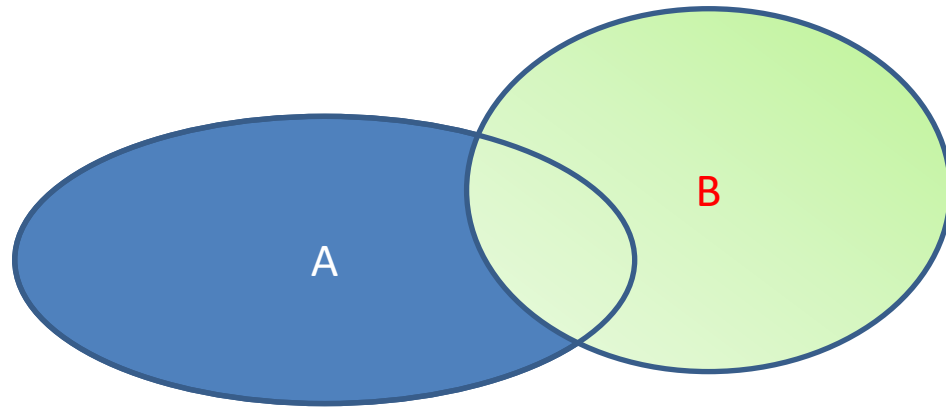
Demonstração

- Como $A \cap \bar{A} = \emptyset$
- E $A \cup \bar{A} = S$
- Pelo axiomas 2 e 3:
- $P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}) = P(S) \dots$
- $P(A) + P(\bar{A}) = 1$
- $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

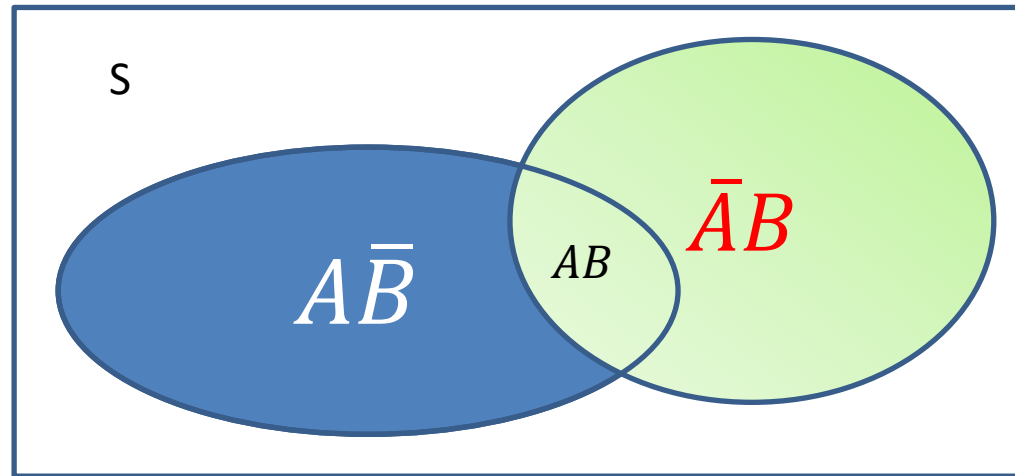
Teorema/Corolário: Probabilidade da união

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

Com $AB \equiv A \cap B$



Demonstração



$$A \cup B = A\bar{B} \cup AB \cup \bar{A}B, \text{ disjuntos}$$

Logo (axioma):

$$P(A \cup B) = P(A\bar{B}) + P(AB) + P(\bar{A}B)$$

Adicionando e subtraindo $P(AB)$

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= (P(A\bar{B}) + P(AB)) + P((\bar{A}B) + P(AB)) - P(AB) \\ &= P(A) + P(B) - P(AB) \end{aligned}$$

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
 - Escolha de um número real no intervalo $[a,b]$
- Seja o acontecimento A “número pertencer a $[c,d]$ ”



- $P(A) = (d-c) / (b-a)$
- A probabilidade de qualquer ponto $x \in [a, b]$ é igual a 0
 - Ter, por exemplo, $]c, d[$ dará igual

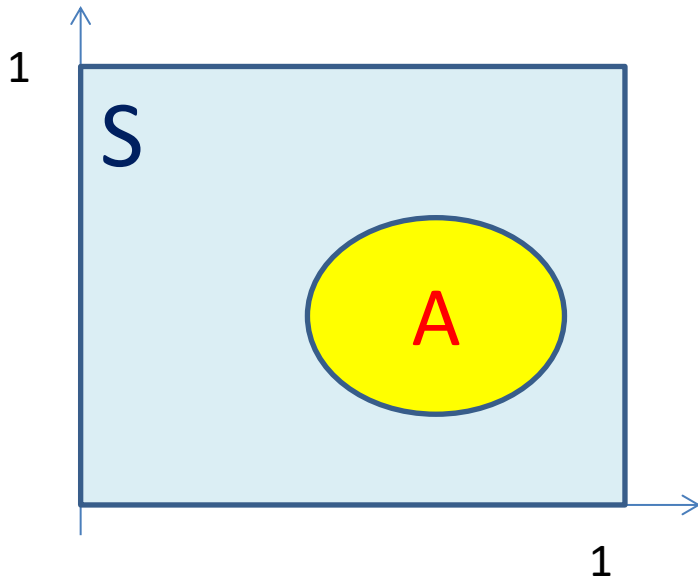
Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- Exemplo:
 - Escolha de um número real no intervalo $[0,60]$ relativo ao atraso de chegada a uma aula de 60m
- Seja o acontecimento A “chegar dentro da tolerância, i.e. $[0,15[$
- $P(A) = (15-0) / (60-0) = 0.25$
 - Assumindo que podem chegar em qualquer altura da aula 😞
 - O que não é válido

Probabilidade em espaços de amostragem não contáveis

- No caso de um par de números reais x, y entre 0 e 1

$$S = \{x, y: x \in [0,1] \cap y \in [0,1]\}$$



$$P(A) = \frac{\text{Área}(A)}{\text{Área}(S)}$$

A axiomática é compatível com
as teorias anteriores ?

Sim, como era de esperar.

Exemplo: Axioma 3

- Satisfaz o axioma 3:

“Se A e B são incompatíveis então a probabilidade da reunião de A com B é igual à soma das probabilidades de A e de B”

- Se A e B são disjuntos

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B$$

E então:

$$p(A \cup B) = \frac{\#(A \cup B)}{\#E} = \frac{\#A + \#B}{\#E} = \frac{\#A}{\#E} + \frac{\#B}{\#E} = p(A) + p(B)$$

Independência

- 2 acontecimentos são independentes sse $P(AB) = P(A)P(B)$
 - Simétrico relativamente a A e B
 - Aplica-se mesmo que $P(A)=0$
 - Implica $P(A|B)=P(A)$ [mas não é a definição]
 - Ocorrência de B não fornece informação sobre ocorrência de A
- Generalização...
os acontecimentos $A_1, A_2, A_3 \dots A_n$ são independentes sse
$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

Independência vs independência 2 a 2

- Experiência:
2 lançamentos de moeda
- Acontecimentos
 - A: primeira é caras
 - B: segunda é caras
 - C: mesmo resultado em ambas

HH	HT
TH	TT

- $P(C) ? \quad P(A) ? \quad P(B) ?$
 $2/4=1/2$
- $P(C \cap A) =$
 $1/4 = 1/2 \times 1/2$
C e A indep.
- $P(C \cap B) =$
 $1/4 = 1/2 \times 1/2$
C e B indep.
- $P(A \cap B) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \dots A \text{ e } B \text{ ind.}$
- $P(C \cap B \cap A) =$
 $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$

Independência 2 a 2 não implica independência

Independência e acontecimentos mutuamente exclusivos

- Em geral dois acontecimentos que sejam mutuamente exclusivos e tenham probabilidade não nula não podem ser independentes

$$0 = P(A \cap B) = P(A) P(B)$$

implicaria que um deles tenha probabilidade nula

- Em geral considera-se que acontecimentos em experiências distintas são independentes (experiências independentes)

Sequências de experiências independentes

- Se uma experiência aleatória for composta por n experiências independentes e se A_k for um acontecimento que diga respeito à experiência k , é razoável admitir que os n acontecimentos são independentes

- Então:

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2)P(A_3) \dots P(A_n)$$

Experiências de Bernoulli

- Uma **experiência de Bernoulli** consiste em realizar uma experiência e registrar se um dado acontecimento se verifica (sucesso) ou não (falha)

k sucessos em n experiências

- n lançamentos de moeda de 1 Euro

$$P(\text{Reverso}) = P(F) = p \quad ; \quad P(\text{Verso}) = P(V) = 1-p$$



$$P(FVVFVF) = P(F) \times P(V) \times \dots = p (1-p) (1-p) p p p$$

$$P(FVVFVF) = p^{\# \text{ Faces}} (1-p)^{\# \text{ Versos}} \\ = p^4 (1-p)^2$$

Qual a **probabilidade de k sucessos em n ensaios independentes ?**

- Seja **p** a probabilidade de sucesso e **$(1-p)$** a de falha
- A probabilidade de k sucessos e $(n-k)$ falhas é:
$$p^k (1 - p)^{n-k}$$
- k sucessos em n experiências podem ocorrer de C_k^n maneiras
- Então a probabilidade pedida é:
$$**P_n(k) = C_k^n p^k (1 - p)^{n-k}**$$

Lei Binomial

Probabilidades Condicionais

Probabilidade condicional

- Muitas vezes interessa-nos saber a probabilidade de um evento assumindo que sabemos que ocorreu outro evento
- Exemplos:
 - Probabilidade de amanhã estar sol **dado que hoje esteve sol**
 - Probabilidade de ter uma doença **sabendo que tenho um sintoma**

Exemplo - Manchas e Sarampo

- $P(\text{“doente ter Manchas dado que tem Sarampo”}) = ?$

Manchas \ Sarampo	M	\bar{M}	
S	x casos		s casos
\bar{S}			
			N casos

- $P(S \text{ e } M) = ?$

- $P(S \text{ e } M) = \frac{x}{N} = \frac{x}{s} \times \frac{s}{N}$

$$= P(M | S) \times P(S)$$

Também pode ser : $P(S | M) \times P(M)$

- $P(M | S) = P(S \text{ e } M) / P(S)$

Probabilidade condicional

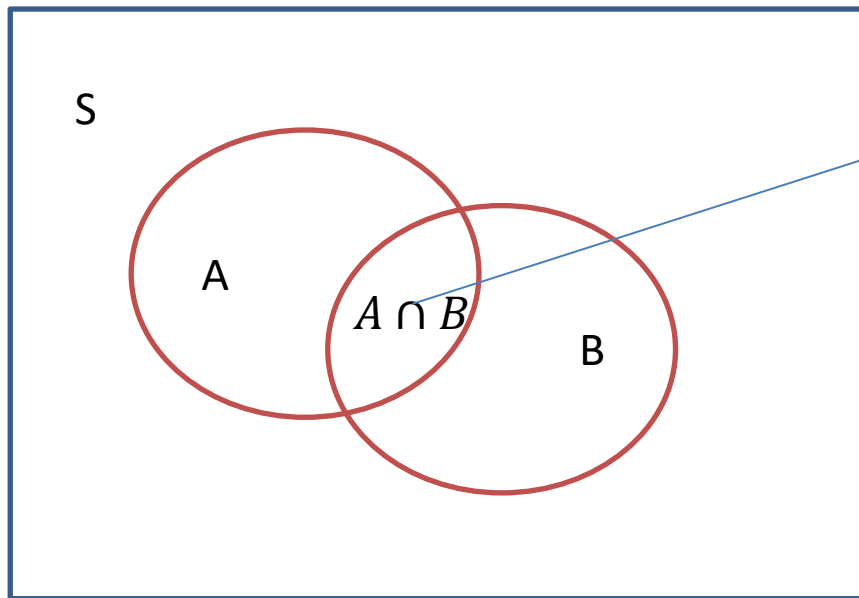
- Por vezes dois acontecimentos estão relacionados
 - A ocorrência de um depende ou faz depender a ocorrência do outro
- A Probabilidade de ocorrência de um evento A com a informação de que o evento B ocorreu é a designada **PROBABILIDADE CONDICIONAL** de A dado B
 - Definida por:

$$P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \text{ se } P(B) \neq 0$$

Indefinida se $P(B)=0$

Interpretação da probabilidade condicional

- $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)}$ se $P(B) \neq 0$



Zona onde A se realiza,
Sabendo que B ocorreu

Exemplo de aplicação

- 2 números de 1 a 4, N1 e N2
- Evento B = “ $\min(N1, N2)=2$ ”
- Evento M = “ $\max(N1, N2)$ ”
- $P(M=1 | B) =$
 $P(\text{“max()=1”} \ \& \ \text{“min()=2”}) / P(\text{“min()=2”}) =$
 \dots
 $=0$
- $P(M=2 | B) = \dots$
 $= 1/5$

N2→	1	2	3	4
1				
2		B / 2	B / 3	B / 4
3		B / 3		
4		B / 4		

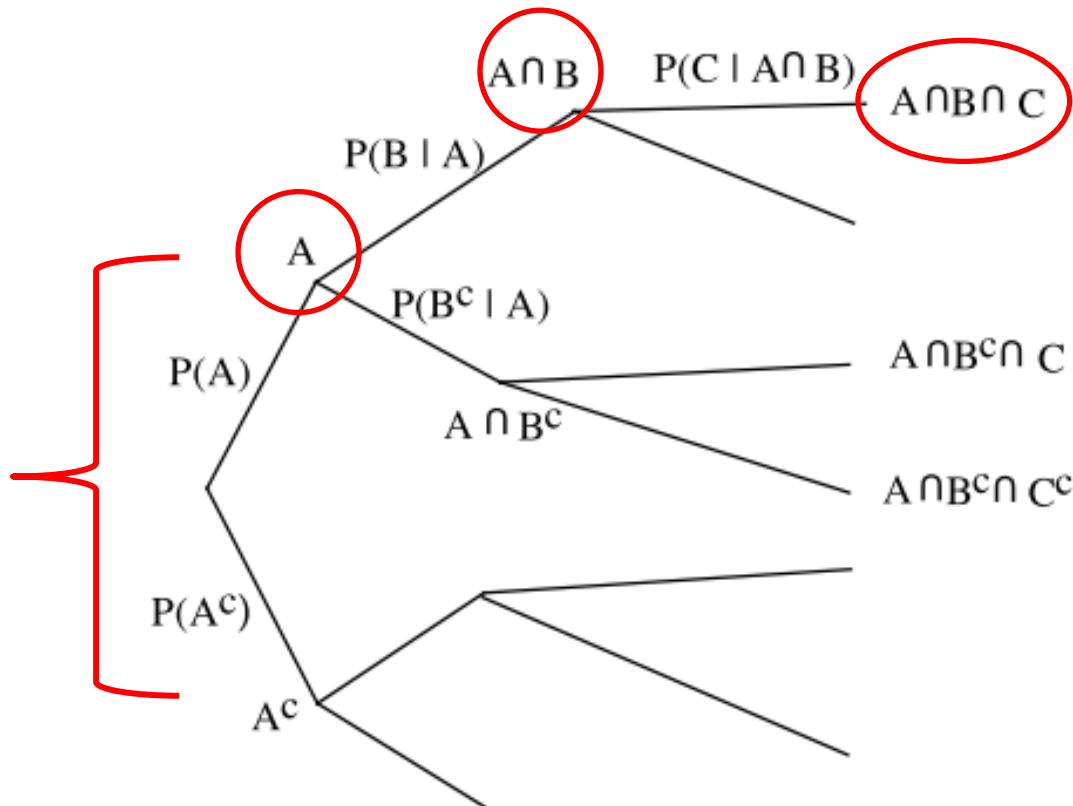
Regra da cadeia: $P(AB)$, $P(ABC)$...

- $P(AB) = P(A|B) \times P(B)$
- Aplicando sucessivamente temos (regra da cadeia)

$$\begin{aligned} &P(A_1 A_2 A_3 \dots A_n) \\ &= P(A_1 | A_2 \dots A_n) \times P(A_2 A_3 \dots A_n) \\ &= P(A_1 | A_2 \dots A_n) \\ &\quad \times P(A_2 | A_3 \dots A_n) \dots P(A_{n-1} | A_n) \end{aligned}$$

Regra da cadeia / multiplicação

- $P(ABC) = P(A)P(B|A)P(C|AB)$



Problema com 2 urnas...

- Consideremos 2 urnas, designadas por X e Y, contendo bolas brancas e pretas:
 - X contém 4 brancas e 5 pretas e
 - Y contém 3 brancas e 6 pretas.
- Escolhe-se uma urna ao acaso e extrai-se uma bola. Qual a probabilidade de sair bola branca?

- **P(“bola branca”)**

= P(“branca da urna X **OU** branca da urna Y”)

= P(“branca E urna X”)+P(“branca E urna Y”)

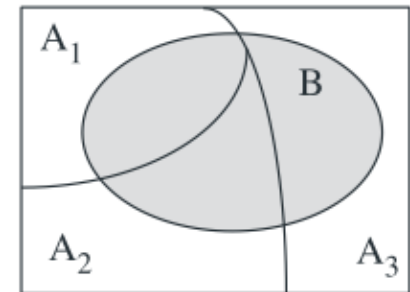
= P(“branca” | “urna X”) x P(“urna X”) + P(“branca” | “urna Y”) x P(“urna Y”)

= $(4/9) \times (1/2) + (3/9) \times (1/2) \approx 0,39$

Lei da Probabilidade total

- Dividir para conquistar
- Partição do espaço de amostragem A_1, A_2, A_3
- Ter $P(B|A_i)$, para todos os i

- $$P(B) = P(B|A_1)P(A_1) + P(B|A_2)P(A_2) + P(B|A_3)P(A_3)$$



Em geral: $P(B) = \sum_j P(B|A_j)P(A_j)$

Visão frequencista e probabilidade condicional

- Do ponto de vista frequencista, considerando os eventos A e B e N experiências, podemos escrever:
- $$P(A|B) \approx \frac{k_{A \text{ e } B}/N}{k_B/N} = \frac{k_{A \text{ e } B}}{k_B}$$
- Onde $k_{A \text{ e } B}$ é o número de ocorrência de “A e B”
 - Que também se pode denominar por frequência absoluta e representar por f_{AB}

Simulação

- Como fazer para ter $P(A|B)$?
- Realizar N experiências
- Contar o número de ocorrências de AB
Será f^{AB} (frequência absoluta)
- Contar número de ocorrências de B
 f^B
- $P \cong \frac{f^{AB}/N}{f^B/N} = \frac{f^{AB}}{f^B}$

Condicionamento inverso

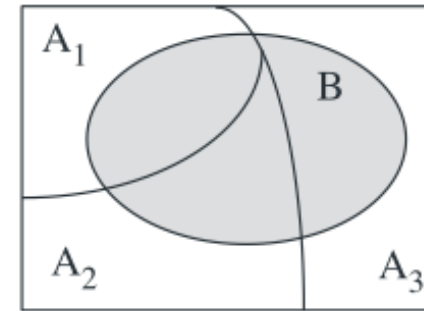
- Continuando com as urnas ...
- **Sabemos que saiu bola branca...
e pretendemos saber de que urna foi obtida**
- **Problema Inverso** (condicionamento inverso)

$P(\text{"urna X"} \mid \text{"bola branca"})$

Resolvido pela primeira vez pelo Reverendo Thomas Bayes (1702-1761)

Regra de Bayes

- Probabilidades *a priori* $P(A_i)$
- Sabemos $P(B|A_i) \quad \forall i$
- Pretendemos calcular $P(A_i|B)$
 - i.e. $P(A_i)$ dado que B ocorreu



- $$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{P(B)}$$
$$= \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_j P(B|A_j)P(A_j)}$$



Aplicando ao problema das urnas

- $P(\text{"urna X"} \mid \text{"bola branca"})$

$$\begin{aligned} &= \frac{P(\text{"bola branca"} \mid \text{"urna X"}) \times P(\text{"urna X"})}{P(\text{"bola branca"})} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{4}{7} \end{aligned}$$

- $P(\text{"urna Y"} \mid \text{"bola branca"}) =$
$$\begin{aligned} &\dots = \frac{\left(\frac{3}{9}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)}{7/18} = \frac{3}{7} \\ &= 1 - P(\text{"urna X"} \mid \text{"bola branca"}) \end{aligned}$$

Causa e efeito

- No evento “urna X se bola branca” podemos considerar que a saída de bola branca é o EFEITO da causa “urna X”
- A Regra de Bayes, em consequência, pode ser escrita da seguinte forma:

$$P(\text{"causa"}|\text{"efeito"}) = \frac{P(\text{"efeito"}|\text{"causa"}) \times P(\text{"causa"})}{P(\text{"efeito"})}$$

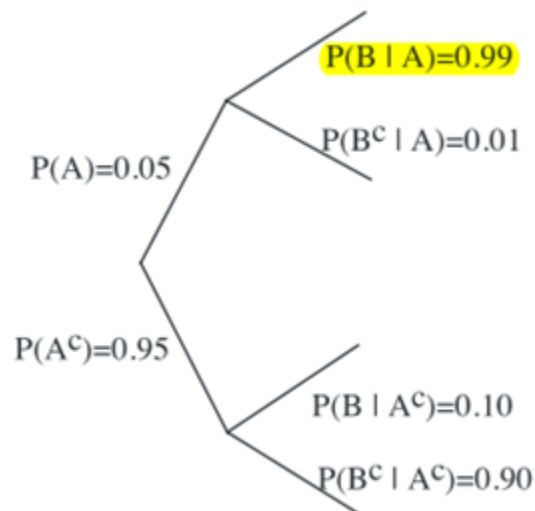
Exemplo de aplicação Regra de Bayes - radar

Evento A: avião voando na zona do radar,
 $P(A) = 0.05$

- $P(A \cap B) =$
 $= P(B|A) P(A)$
 $= 0,99 \times 0,05$

Evento B: Aparece algo no ecrã do radar,
 $P(B|A) = 0.99$

$P(A | B) = ?$



- $P(B) =$
 $= P(B|A) \times P(A) + P(B|\bar{A}) \times P(\bar{A})$
- $P(A | B) =$
 $= \frac{P(B|A) \times P(A)}{P(B)}$
 $= \frac{0,99 \times 0,05}{0,1445} = 0.3426$
(valor baixo)

Outro exemplo – sistema de comunicação/transmissão

- 0 ou 1 na entrada, transmissão sujeita a erros, entradas equiprováveis.
- No receptor uma decisão é tomada (0 ou 1):
 - Se ε for a probabilidade de erro, qual a entrada mais provável se na saída obtemos 1 ?
- Seja A_k o acontecimento “entrada é k”, $k=0,1$
 A_0 e A_1 constituem uma partição de S
- Seja B_1 o acontecimento “saída = 1”

...

- $P(B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0) + P(B_1|A_1) \times P(A_1)$

$$= \varepsilon \frac{1}{2} + (1 - \varepsilon) \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

- Probabilidade de entrada ter sido zero dado que saída igual a 1 ?

$$P(A_0|B_1) = P(B_1|A_0) \times P(A_0) / P(B_1)$$

$$= \frac{\varepsilon}{2} / \frac{1}{2} = \varepsilon$$

- De forma similar $P(A_1|B_1) = \dots = 1 - \varepsilon$
- Se $\varepsilon < 1/2$ a entrada mais provável é 1 (se saída for 1)
 - Que é o que se pretende em geral.

Principais assuntos

- Probabilidade
- Teorias de Probabilidade (Clássica, Frequencista, Axiomática)
- Probabilidade Condicional
 - 3 Ferramentas muito importantes
 - Regra da multiplicação
 - Teorema da Probabilidade total
 - Regra Bayes
- Independência
- Aplicação da teoria Frequencista a probabilidades condicionais

Não esquecer

- Independência de 2 eventos
- Independência de um conjunto de eventos
- Probabilidade condicional

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Regra da multiplicação:

$$P(A \cap B) = P(B) \times P(A|B) = P(A) \times P(B|A)$$

- Probabilidade total:

$$P(B) = \sum_j P(B|A_j)P(A_j)$$

Regra de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i) P(B|A_i)}{P(B)}$$

Para aprender mais ...

- Capítulos iniciais do livro “[Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática](#)”, F. Vaz e A. Teixeira, Ed. Sílabo, set 2021.