

# GUIÕES DE CÁLCULO I - AGRUPAMENTO 2

## GUIÃO 3

CÁLCULO INTEGRAL

PAULA OLIVEIRA

2021/22

UNIVERSIDADE DE AVEIRO

# Conteúdo

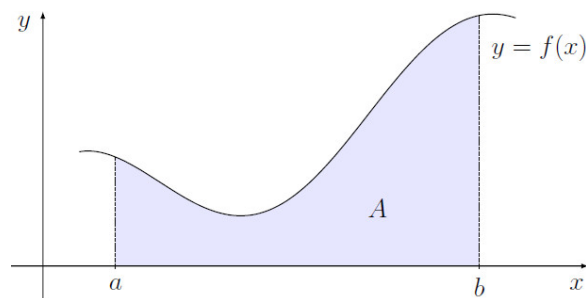
<b>6</b>	<b>Cálculo Integral</b>	<b>1</b>
6.1	Introdução ao Cálculo Integral . . . . .	1
6.2	Partição de um intervalo . . . . .	2
6.3	Integral definido . . . . .	3
6.4	Critérios de Integrabilidade . . . . .	6
6.5	Propriedades do integral definido . . . . .	7
6.6	Integral indefinido . . . . .	9
6.6.1	Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.) . . . . .	10
6.6.2	Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.) . . . . .	11
6.6.3	Substituição no integral definido . . . . .	12
6.7	Aplicação do integral de Riemann ao cálculo de áreas . . . . .	14
6.7.1	Área compreendida entre duas curvas . . . . .	15
6.8	Exercícios do capítulo . . . . .	17

# Capítulo 6

## Cálculo Integral

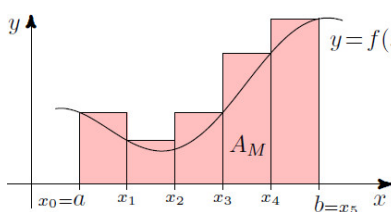
### 6.1 Introdução ao Cálculo Integral

Como calcular a área  $A$  de uma região do plano limitada pelo eixo  $Ox$  e pelo gráfico de uma função contínua não negativa definida num dado intervalo  $[a, b]$ ?

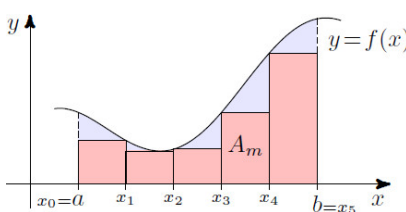


**Figura 6.1:** Área limitada pelo gráfico de uma função, pelo eixo das abcissas e duas retas verticais.

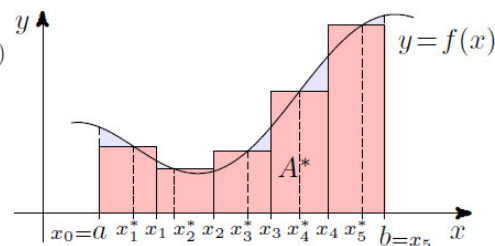
Podemos obter valores aproximados dessa área considerando retângulos como ilustrado nas figuras 6.2, 6.3 e 6.4.



**Figura 6.2:** Aproximação 1.



**Figura 6.3:** Aproximação 2.



**Figura 6.4:** Aproximação 3.

$A^*$ ,  $A_m$  e  $A_M$  são valores aproximados da área  $A$ . Podemos determinar esses valores conhecendo a função  $f$  e, sendo retângulos, as suas áreas são dadas por *comprimento*  $\times$  *largura*. Assim,

1.  $A_m = \sum_{i=1}^5 m_i(x_i - x_{i-1})$ , onde  $m_i$  é o mínimo global de  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, 5$
2.  $A_M = \sum_{i=1}^5 M_i(x_i - x_{i-1})$ , sendo  $M_i$  o máximo global de  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, 5$

$$3. A^* = \sum_{i=1}^5 f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}), \text{ com } x_i^* \in [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, 5.$$

Note-se que

$$A_m \leq A \leq A_M \quad A_m \leq A^* \leq A_M$$

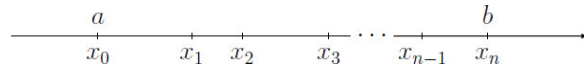
Intuitivamente, poder-se-á esperar que quanto maior for o número de subintervalos de  $[a, b]$  considerados, menor será o erro que se comete ao aproximar  $A$  por cada um dos processos indicados, contudo isso não será necessariamente assim, pois depende da escolha dos subintervalos...

## 6.2 Partição de um intervalo

**Definição 6.1.** Chama-se *partição do intervalo*  $[a, b]$ , com  $a < b$ , a um conjunto finito de pontos de  $[a, b]$

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

tal que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .



**Figura 6.5:** Partição de um intervalo.

Note-se que os pontos  $x_0, x_1, \dots, x_n$  determinam uma divisão do intervalo  $[a, b]$  em  $n$  subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , com  $i = 1, \dots, n$ , de amplitudes  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

**Definição 6.2.** Chama-se *amplitude ou diâmetro* de uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ , e denota-se por  $|\mathcal{P}|$ , à maior das amplitudes dos subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ ,  $i = 1, \dots, n$ , isto é,

$$|\mathcal{P}| = \max \{\Delta x_i : i = 1, \dots, n\}.$$

**Exemplo 6.1.** Seja  $\mathcal{P} = \{-2, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\}$  uma partição do intervalo  $[-2, 1]$ . O diâmetro da partição é

$$|\mathcal{P}| = \max \left\{ -\frac{3}{2} - (-2), -\frac{1}{2} - \left(-\frac{3}{2}\right), 0 - \left(-\frac{1}{2}\right), \frac{1}{2} - 0, 1 - \frac{1}{2} \right\} = \max \left\{ \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right\} = 1$$

**Definição 6.3.** Chama-se *conjunto compatível* com a partição  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  a todo o conjunto

$$\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$$

tal que, para cada  $i = 1, 2, \dots, n$

$$x_i^* \in [x_{i-1}, x_i].$$

**Definição 6.4.** Chama-se *partição regular* de amplitude  $\Delta = \frac{b-a}{n}$  do intervalo  $[a, b]$ , com  $a < b$ , ao conjunto de pontos

$$\mathcal{P} = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n\},$$

com  $x_i = a + i\Delta = a + i\frac{b-a}{n}$ , para  $i = 0, \dots, n$ .

Note-se que neste tipo de partições se tem:

- $x_0 = a$  e  $x_n = b$ ;
- $x_i - x_{i-1} = \frac{b-a}{n}$ ; logo todos os subintervalos têm a mesma amplitude que é precisamente o diâmetro da partição.

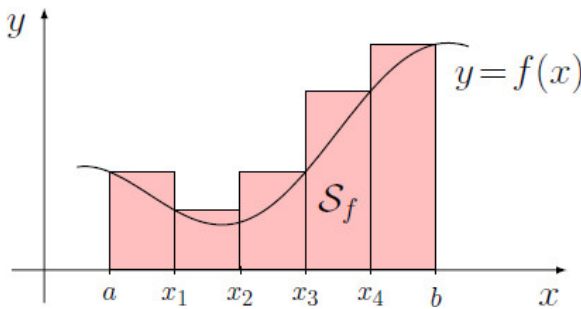
### 6.3 Integral definido

**Definição 6.5.** Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Dada uma partição  $\mathcal{P}$ , definimos a Soma Superior  $S_f(\mathcal{P})$  e a Soma Inferior  $I_f(\mathcal{P})$  para a partição  $\mathcal{P}$ , como sendo respetivamente

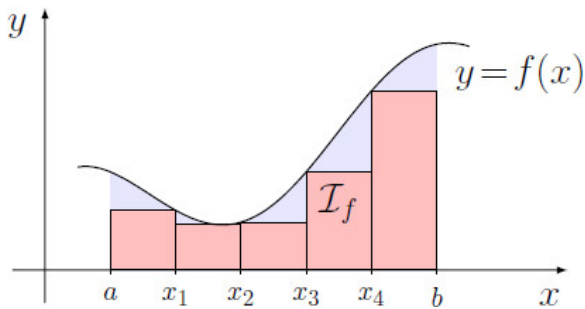
$$1. S_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \text{ sendo } M_i \text{ o supremo de } f \text{ no intervalo } [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$$

$$2. I_f(\mathcal{P}) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}), \text{ sendo } m_i \text{ o ínfimo de } f \text{ no intervalo } [x_{i-1}, x_i], i = 1, \dots, n$$

caso  $m_i$  e  $M_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , existam.



**Figura 6.6:** Soma superior.



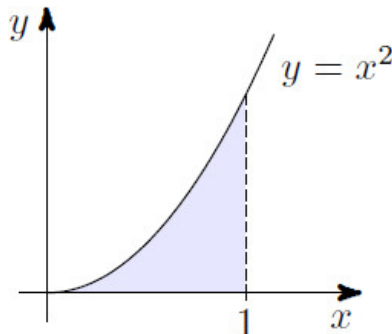
**Figura 6.7:** Soma inferior.

**Definição 6.6.** Sejam  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ ,  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  uma partição de  $[a, b]$  e  $\mathcal{C} = \{x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*\}$  um conjunto compatível com a partição  $\mathcal{P}$ . A soma de Riemann de  $f$  relativamente à partição  $\mathcal{P}$  e ao conjunto  $\mathcal{C}$ ,  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ , é o número real

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^n f(x_i^*)(x_i - x_{i-1}).$$

Se  $f$  é contínua e limitada em  $[a, b]$  então  $S_f(\mathcal{P}) = S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$  onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto dos maximizantes de  $f$  em cada subintervalo determinado pela partição  $\mathcal{P}$ . Analogamente,  $I_f(\mathcal{P}) = S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$  onde  $\mathcal{C}$  é o conjunto dos minimizantes.

**Exercício resolvido 6.1.** Seja  $f(x) = x^2$ , com  $x \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$  e  $\mathcal{C} = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3\}$ . Determine  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ .

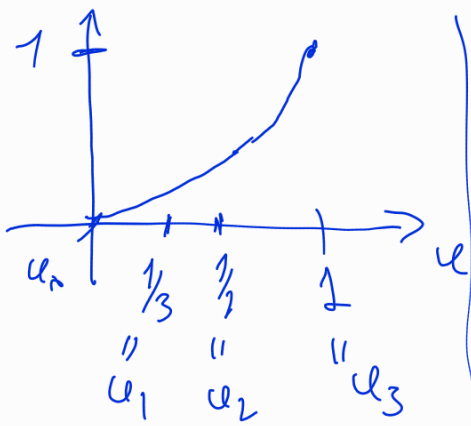


**Figura 6.8:** Área limitada pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$ .

**Resolução do exercício 6.1.**

$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = f(0) \left( \frac{1}{3} - 0 \right) + f\left(\frac{1}{3}\right) \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + f\left(\frac{1}{2}\right) \left( 1 - \frac{1}{2} \right) = 0 \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{31}{216}.$$

**Exercício resolvido 6.1.** Seja  $f(x) = x^2$ , com  $x \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$  e  $\mathcal{C} = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3\}$ . Determine  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ .



$$S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}) = \sum_{i=1}^3 f(u_i^*)(u_i - u_{i-1})$$

$$f(u_1^*)(u_1 - u_0) + f(u_2^*)(u_2 - u_1) + f(u_3^*)(u_3 - u_2) =$$

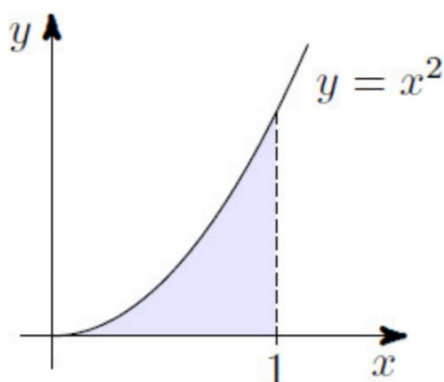
$$= f(u_0)\left(\frac{1}{3} - 0\right) + f(u_1)\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + f(u_2)\left(1 - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= f(0) \frac{1}{3} + f\left(\frac{1}{3}\right) \times \frac{1}{6} + f\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{2} =$$

$$= 0^2 \times \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{2} =$$

$$= \frac{1}{9} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{54} + \frac{1}{8} = \frac{8+54}{54 \times 8}$$

3. Se  $\mathcal{P}' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  e  $\mathcal{C}' = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3, 4\}$  determine  $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}')$ .



$$\Delta = \frac{1}{4}$$



$$S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}') = f(0) \times \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{4}\right) \times \frac{1}{4} + f\left(\frac{1}{2}\right) \times \frac{1}{4} +$$

$$+ f\left(\frac{3}{4}\right) \times \frac{1}{4}$$

$$= 0 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \frac{1}{4} + \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4}$$

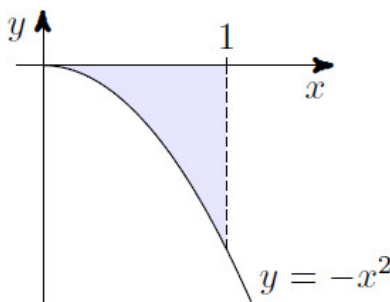
**Figura 6.8:** Área limitada pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$ .

Tem sentido dizer que  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C})$  é um valor aproximado da área da região assinalada na figura 6.8?

**Exercício 6.1** Considere a função definida na Figura 6.8.

1. Se  $\mathcal{C}_1 = \{x_i^* = x_i : i = 1, 2, 3\}$ , determine  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1)$ .
2. Se  $\mathcal{C}_2 = \{x_i^* = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}, i = 1, 2, 3\}$ , determine  $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_2)$ .
3. Se  $\mathcal{P}' = \{0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1\}$  e  $\mathcal{C}' = \{x_i^* = x_{i-1} : i = 1, 2, 3, 4\}$  determine  $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}')$ .

**Exercício 6.2** Seja  $g(x) = -x^2$ , com  $x \in [0, 1]$ ,  $\mathcal{P} = \{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$  e  $\mathcal{C} = \{x_i^* = x_i : i = 1, 2, 3\}$ . Determine  $S_g(\mathcal{P}, \mathcal{C})$ .



**Figura 6.9:** Área limitada pelo gráfico da função  $f(x) = -x^2$ .

Será que neste caso tem sentido dizer que  $S_g(\mathcal{P}, \mathcal{C})$  é um valor aproximado da área da região assinalada na figura 6.9?

**Definição 6.7.** *Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Diz-se que  $f$  é integrável em  $[a, b]$  se existir um número real  $I$  tal que*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(\mathcal{P}_n, \mathcal{C}_n) = I,$$

para toda a sucessão  $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partições de  $[a, b]$  com  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathcal{P}_n| = 0$  e para toda a sucessão  $(\mathcal{C}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{C}_n$  é compatível com  $\mathcal{P}_n$ .

Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , a este valor chamamos integral de Riemann da função  $f$  entre  $a$  e  $b$  e designa-se pelo símbolo

$$\int_a^b f(x) dx,$$

onde  $a$  é o limite inferior de integração,  $b$  é o limite superior de integração e  $x$  a variável de integração.

**Observação 6.1.** Na definição de integral de Riemann pressupõe-se que  $a < b$ . Dá-se, no entanto, significado a  $\int_a^b f(x) dx$  quando  $a > b$  ou  $a = b$ :

- Se  $a > b$ ,  $\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$  (se o integral do 2º membro existir).
- Se  $a = b$ ,  $\int_a^b f(x) dx = \int_a^a f(x) dx = 0$ .

Como consequência da definição 6.7, temos

**Proposição 6.1.** *Seja  $f$  uma função limitada num intervalo  $[a, b]$  e  $\mathcal{P}$  o conjunto de todas as partições de  $[a, b]$ . Diz-se que  $f$  é integrável em  $[a, b]$  se e só se o ínfimo das somas superiores é igual ao supremo das somas inferiores,*

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\} = I,$$

e nesse caso,

$$\int_a^b f(x) dx = I.$$

Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , para calcular  $\int_a^b f(x) dx$  pode-se considerar uma qualquer sucessão de partições de  $[a, b]$  cujo diâmetro tenda para zero.

É usual considerar a sucessão  $(\mathcal{P}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de partições regulares de  $[a, b]$  (com  $\Delta = \frac{b-a}{n}$ ), tal que, para cada  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{P}_n = \{x_0, x_1, \dots, x_n\},$$

com  $x_i = a + i \frac{b-a}{n}$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$ .

Repare-se que neste caso

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |\mathcal{P}_n| = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{b-a}{n} = 0.$$

**Exercício 6.3** Seja  $f$ , tal que  $f(x) = c$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Sabendo que  $f$  é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado de  $\mathbb{R}$ , mostre que, para cada  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

**Exercício 6.4** Sabendo que a função dada por  $f(x) = 2x + 1$ , é integrável em  $[0, 3]$ , calcule

$$\int_0^3 (2x + 1) dx.$$

**Exemplo 6.2.** Seja

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1] \cap \mathbb{Q} \\ 1, & x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Vejam que  $f$  não é integrável em  $[0, 1]$ . Consideremos uma qualquer partição  $P$  de  $[0, 1]$ .

Uma vez que o supremo de  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  é 1 e que o ínfimo de  $f$  nesse intervalo é 0, para todo  $n \in \mathbb{N}$  resulta

$$S(P) = \sum_{i=1}^n 1 \times (x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) = 1 \quad \text{e} \quad I(P) = \sum_{i=1}^n 0 \times (x_i - x_{i-1}) = 0.$$

Logo

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = 1 \neq 0 = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\},$$

onde  $\mathcal{P}$  é o conjunto de todas as partições de  $[0, 1]$ .

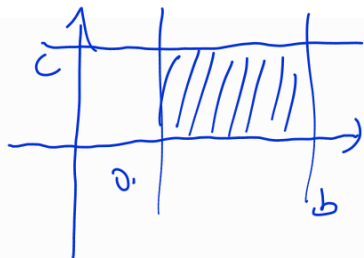
**Exemplo 6.3.** Seja  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ . Consideremos as partições regulares do intervalo  $[0, 1]$  de diâmetro  $\frac{1}{n}$ .

Notemos que, como  $f$  é uma função crescente, o supremo de  $f$  no intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  é  $f(x_i) = x_i = \frac{i}{n}$  e o ínfimo é  $f(x_{i-1}) = x_{i-1} = \frac{i-1}{n}$ . Logo



**Exercício 6.3** Seja  $f$ , tal que  $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$ . Sabendo que  $f$  é integrável em qualquer intervalo fechado e limitado de  $\mathbb{R}$ , mostre que, para cada  $a, b \in \mathbb{R}$

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$



$$S_f(P_n, b_n) = \sum_{i=1}^n f(\varphi_i^*) (\varphi_{i+1} - \varphi_i)$$

$$= \sum_{i=1}^n c \cdot \frac{(b-a)}{n} =$$

$$= \frac{c(b-a)}{n} \cdot \sum_{i=1}^n 1 =$$

$$= \frac{c(b-a)}{n} \times n = c(b-a).$$

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(P_n, b_n)$$

**Exercício 6.4** Sabendo que a função dada por  $f(x) = 2x + 1$ , é integrável em  $[0, 3]$ , calcule

$$\int_0^3 (2x + 1) dx.$$

$$\mathcal{C} : \varphi_i^* = \varphi_i$$

$$S_f(P_n, b_n) = \sum_{i=1}^n f(\varphi_i^*) (\varphi_i - \varphi_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n f(\varphi_i) \cdot \frac{3}{n} = \sum_{i=1}^n f\left(\frac{3i}{n}\right) \cdot \frac{3}{n} =$$

$$\Delta = \frac{3-0}{n}$$

$$= \frac{3}{n} \sum_{i=1}^n \left( 2\left(\frac{3i}{n}\right) + 1 \right) =$$

$$\varphi_i = 0 + i \Delta$$

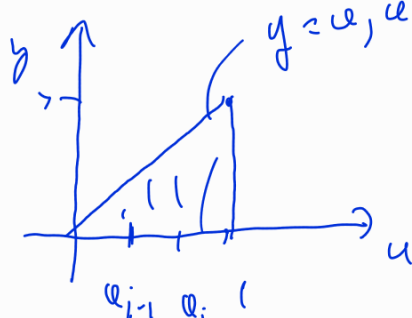
$$\varphi_i = \frac{3i}{n}$$

$$= \frac{3}{n} \left( \frac{6}{n} \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 \right) = \frac{3}{n} \left( \frac{6}{n} \times \frac{1+n}{2} \times n + n \right) =$$

$$= 9 \times \left( \frac{n+1}{n} \right) + 3$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_f(P_n, b_n) = 9 + 3 = 12$$

**Exemplo 6.3.** Seja  $f(x) = x$ ,  $x \in [0, 1]$ . Consideremos as partições regulares do intervalo  $[0, 1]$  de diâmetro  $\frac{1}{n}$ .



$$S_f(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n M_i (u_i - u_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{1+n}{2} \times n = \frac{n+1}{2n}$$

$$0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n}{n} = 1$$

$$I_f(\mathcal{P}_n) = \sum_{i=1}^n m_i (u_i - u_{i-1})$$

$$= \sum_{i=1}^n \frac{i-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{0+n-1}{2} \times n = \frac{n-1}{2n}$$

$$\inf(S_f(\mathcal{P}_n)) = \inf\left\{\frac{n+1}{2n}\right\} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} = \sup(I_f(\mathcal{P}_n))$$

$$\begin{aligned}
1. \quad S(P) &= \sum_{i=1}^n x_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n i = \frac{1}{n^2} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{1+n}{2n}; \\
2. \quad I(P) &= \sum_{i=1}^n x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n (i-1) = \frac{1}{n^2} \times \frac{0+n-1}{2} \times n = \frac{n-1}{2n};
\end{aligned}$$

e portanto,

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = \frac{1}{2} = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Logo a função é integrável em  $[0, 1]$  e  $\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$ .

## 6.4 Critérios de Integrabilidade

Nesta secção iremos apresentar alguns resultados que nos permitem determinar a integrabilidade de algumas funções.

**Teorema 6.1.** *Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Se  $f$  é contínua em  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

**Teorema 6.2.** *Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Se  $f$  é limitada em  $[a, b]$  e é descontínua apenas num número finito de pontos de  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

**Teorema 6.3.** *Seja  $f$  uma função definida num intervalo  $[a, b]$ . Se  $f$  é monótona em  $[a, b]$ , então  $f$  é integrável em  $[a, b]$ .*

**Teorema 6.4.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções definidas em  $[a, b]$ . Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e  $g$  difere de  $f$  apenas num número finito de pontos, então  $g$  é integrável em  $[a, b]$  e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

**Teorema 6.5.** *Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$ , então  $f$  é limitada em  $[a, b]$ .*

**Exemplo 6.4.** A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

é integrável em qualquer intervalo fechado que não contenha o 0, mas não é integrável em  $[a, 0]$  ( $a < 0$ ) ou  $[0, b]$  ( $b > 0$ ) já que não é limitada nesses intervalos, bem como em nenhum outro intervalo  $[a, b]$  tal que  $0 \in [a, b]$ .

O facto de  $f$  ser limitada em  $[a, b]$  não garante que  $f$  seja integrável em  $[a, b]$ . Considere-se por exemplo a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0, 1] \\ 1 & , x \in [0, 1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

que é limitada mas não é integrável (confrontar exemplo 6.2).

**Exercício 6.5** Estude quanto à integrabilidade, nos respectivos domínios, as seguintes funções:

$$\begin{aligned}
1. \quad f(x) &= \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & x \in [-1, 2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases} & 2. \quad g(x) &= \begin{cases} e^x, & x \in [1, 5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1, 5] \cap \mathbb{Z} \end{cases} & 3. \quad h(x) &= \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}
\end{aligned}$$

$$4. h(x) = \begin{cases} \ln |x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad 5. i(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[ \\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos(2x), & x \in ]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$$

**Exercício 6.6** Mostre que  $\int_0^1 (x^3 - 6x)dx = -\frac{11}{4}$  sabendo que

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^n i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

**Exercício 6.7** Seja  $g$  a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$

A função  $g$  é integrável em  $[0, 2]$ ? Em caso afirmativo calcule  $\int_0^2 g(x)dx$ .

## 6.5 Propriedades do integral definido

Neste secção iremos apresentar algumas propriedades do integral definido que serão utilizadas para calcular alguns integrais.

**Teorema 6.6.** *Sejam  $f$  e  $g$  funções integráveis em  $[a, b]$  e  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Então  $\alpha f$  e  $f + g$  são funções integráveis em  $[a, b]$  e*

- $\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
- $\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

**Teorema 6.7.** *Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Então,  $f$  é integrável em qualquer subintervalo de  $[a, b]$  e se  $c \in ]a, b[$ ,  $f$  é integrável em  $[a, c]$  e  $[c, b]$  e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

**Exemplo 6.5.** Seja  $f$  a função definida em  $[-1, 1]$  por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \in [0, 1] \\ 2 & \text{se } x \in [-1, 0[ \end{cases}$$

Então

$$\int_{-1}^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 f(x)dx + \int_0^1 f(x)dx = \int_{-1}^0 2dx + \int_0^1 xdx$$

**Teorema 6.8.** *Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Se  $f(x) \geq 0$  para todo o  $x \in [a, b]$ , então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Na hipótese de  $f$  ser integrável em  $[a, b]$ , será que se pode afirmar que:

1. se  $\int_a^b f(x)dx = 0$  então  $f(x) = 0, \forall x \in [a, b]$ ?
2. se  $\int_a^b f(x)dx \geq 0$  então  $f(x) \geq 0, \forall x \in [a, b]$ ?

**Exemplo 6.6.** Seja  $f(x) = x, x \in [-1, 1]$ . Temos que

$$\int_{-1}^1 x dx = 0$$

e a função não é a função nula em  $[-1, 1]$ .

**Exemplo 6.7.** Seja  $f(x) = x, x \in [-1, 2]$ . Temos que

$$\int_{-1}^2 x dx > 0$$

e a função não é positiva em  $[-1, 2]$ .

**Teorema 6.9.** Se  $f$  é integrável em  $[a, b]$  e se existem constantes  $m, M \in \mathbb{R}$  tais que,

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo } x \in [a, b],$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

**Exemplo 6.8.** Seja  $f(x) = \frac{1}{1 + \sqrt{x^2 + 1}}$  em  $[-5, 10]$ . Como  $0 \leq f(x) \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [-5, 10]$ , podemos afirmar que

$$0 \leq \int_{-5}^{10} f(x) dx \leq \frac{1}{2} \times 15.$$

**Teorema 6.10.** Se  $f$  e  $g$  são duas funções integráveis em  $[a, b]$  e se  $f(x) \leq g(x)$ , para todo  $x \in [a, b]$ , então

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

**Exemplo 6.9.** Sejam  $f(x) = \frac{e^x}{x+1}$  e  $g(x) = e^x$  definidas em  $[1, 3]$ .

Como  $f(x) \leq g(x), \forall x \in [1, 3]$ , temos

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x+1} dx \leq \int_1^3 e^x dx.$$

**Teorema 6.11.** Seja  $f$  uma função integrável em  $[a, b]$ . Então  $|f|$  é integrável em  $[a, b]$  e

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

**Exemplo 6.10.**

$$\left| \int_0^\pi \sin x dx \right| \leq \int_0^\pi |\sin x| dx.$$

**Teorema 6.12.** Se  $f$  e  $g$  são duas funções integráveis em  $[a, b]$ , então  $f \cdot g$  é integrável em  $[a, b]$ .

**Atenção:** No teorema anterior apenas se afirma que o produto de funções integráveis é integrável, mas **não é verdade** que  $\int_a^b f(x) \cdot g(x) dx = \int_a^b f(x) dx \cdot \int_a^b g(x) dx$ .

**Teorema 6.13. (Teorema do valor médio para integrais)** Se  $f$  é uma função contínua num intervalo  $[a, b]$ , então existe  $c \in [a, b]$  tal que,

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b - a).$$

Suponha que  $f(x) > 0$ , para todo  $x \in [a, b]$  e interprete geometricamente o teorema dado.

## 6.6 Integral indefinido

Seja  $f$  uma função integrável num intervalo  $I$  e  $a \in I$ . Para cada  $x \in I$ , tem-se que  $f$  é integrável no intervalo fechado de extremos  $a$  e  $x$  sendo, portanto, possível definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} F &: I \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

Note-se que esta função se anula em  $x = a$ . Porquê?

**Teorema 6.14.** Seja  $f$  uma função integrável num intervalo  $I$  e  $a \in I$ . A função definida em  $I$  por  $F(x) = \int_a^x f(t) dt$  é contínua em  $I$ .

*Demonstração.* Seja  $x_0 \in I$  e consideremos que  $x_0 < x$  (análogo se  $x_0 > x$ ). Então, como  $f$  é integrável em  $I$ , existe  $\int_a^{x_0} f(t) dt = F(x_0)$ . Assim,

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt = \int_{x_0}^x f(t) dt.$$

Como  $f$  é integrável em  $I$ ,  $f$  é limitada neste intervalo e consequentemente é limitada em  $[x_0, x]$ , isto é, existem  $m$  e  $M$  em  $\mathbb{R}$  tais que

$$m \leq f(t) \leq M, \forall t \in [x_0, x].$$

Então, pelo teorema 6.9,

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t) dt \leq M(x - x_0).$$

Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$ , resulta que

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (F(x) - F(x_0)) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0),$$

ou seja,  $F$  é contínua em  $x_0$  (ponto arbitrário de  $I$ ). □

**Exemplo 6.11.** Dada a função  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por,  $f(x) = \ln 2$ , seja  $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  a função definida por  $F(x) = \int_0^x \ln 2 dt$ .

Pelo exercício 6.3 podemos dizer que  $F(4) = \int_0^4 \ln 2 dt = 4 \ln 2$  e  $F(-3) = -3 \ln 2$ .

Qual o valor de  $F(0)$ ?

**Exercício 6.8** Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0, 1[ \\ 2, & x \in [1, 2[ \\ 3, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

a) Mostre que  $F(x) = \int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[ \\ 2x - 1, & x \in [1, 2[ \\ 3x - 3, & x \in [2, 3] \end{cases}$

b) Verifique que  $F$  é contínua em  $[0, 3]$ .

**Observação 6.2.** Observe que

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, 1[ \\ 2x, & x \in [1, 2[ \\ 3x, & x \in [2, 3] \end{cases}$$

não pode ser dado por  $G(x) = \int_0^x f(t)dt$ .

### 6.6.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

**Teorema 6.15.** *Seja  $f$  uma função contínua num intervalo  $I$  e  $a \in I$ . Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

*para cada  $x \in I$ , então  $F$  é uma função diferenciável e  $F'(x) = f(x)$ .*

*Demonstração.* Pelo teorema 6.14, a função  $F$  é contínua em  $I$ . O Teorema do Valor Médio para Integrais (teorema 6.13) diz-nos que, no intervalo  $]x_0, x[$  (supondo  $x > x_0$ , o caso contrário é análogo), existe  $c$  tal que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t) dt = f(c)(x - x_0)$$

e, portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f(c).$$

Pela continuidade da função  $f$ ,  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$ . Como  $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$ , resulta que  $F'(x_0) = f(x_0)$ .  $\square$

**Corolário 1.** *Se  $f$  é uma função contínua em  $I$  e  $a \in I$ , então  $f$  tem uma primitiva em  $I$  que é dada por  $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ .*

O teorema 6.15 pode ser generalizado usando como extremos funções deriváveis.

**Teorema 6.16.** *Seja  $f$  uma função contínua no intervalo  $J$  e  $H$  a função definida por*

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

*com  $g_1$  e  $g_2$  definidas em  $I \subseteq \mathbb{R}$  tais que  $g_1(I) \subseteq J$  e  $g_2(I) \subseteq J$ .*

*Se  $f$  é contínua em  $J$  e  $g_1$  e  $g_2$  são deriváveis em  $I$ , então*

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x),$$

*para todo  $x \in I$ .*