

GUIÃO 1

FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

LINGUAGEM DA MATEMÁTICA

REVISÕES SOBRE FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

FUNÇÕES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

TEOREMAS SOBRE FUNÇÕES CONTÍNUAS E DERIVÁVEIS

PAULA OLIVEIRA

2021/22

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA - UNIVERSIDADE DE AVEIRO

Conteúdo

1 A linguagem da Matemática	1
1.1 Definições e Teoremas	1
1.2 Conceitos de Supremo e Ínfimo	5
1.2.1 Axioma do Supremo	6
1.3 Distância no Conjunto dos Números Reais	6
1.3.1 Aproximação de Números Reais	7
1.3.2 Vizinhança	7
1.4 A reta “acabada”	8
1.5 Topologia da reta \mathbb{R}	8
1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado	9
1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado	10
1.6 Soluções dos exercícios do capítulo	12
2 Funções reais de variável real: recordar	13
2.1 Conceito de função	13
2.2 Função composta	14
2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas	15
2.4 Funções monótonas	16
2.5 A função inversa	16
2.6 Funções pares e ímpares	17
2.7 Função limitada	18
2.8 As funções exponencial e logarítmica	19
2.9 Limites de funções reais de variável real	19
2.9.1 Definição sequencial de limite	20
2.9.2 Limite usando vizinhanças	21
2.9.3 Limites infinitos e limites “no infinito”	22
2.9.4 Limites laterais	23
2.9.5 Propriedades dos limites	23
2.9.6 Teoremas sobre Limites	25
2.10 Funções contínuas	26
2.10.1 Propriedades das funções contínuas	27

2.10.2	Assíntotas	28
2.11	Funções deriváveis	29
2.11.1	Derivada de uma função num ponto	30
2.11.2	Reta tangente	31
2.11.3	Noção de diferencial	31
2.11.4	Derivadas laterais	33
2.11.5	Continuidade e derivabilidade	33
2.11.6	Função derivada	33
2.11.7	Limites laterais da função derivada	34
2.11.8	Regras de derivação	34
2.11.9	Derivadas de ordem superior	35
2.11.10	Derivada da função composta	35
2.11.11	Derivada da função inversa	36
2.12	Soluções dos exercícios do capítulo	36
3	As funções trigonométricas	39
3.1	Funções trigonométricas diretas	39
3.1.1	As funções secante, cossecante e cotangente	40
3.2	Funções trigonométricas inversas	42
3.2.1	Função arco seno	42
3.2.2	Função arco cosseno	43
3.2.3	Função arco tangente	45
3.2.4	Função arco cotangente	46
3.3	Exercícios	47
3.4	Soluções dos exercícios do capítulo	48
4	Teoremas sobre funções contínuas e funções deriváveis	50
4.1	Teoremas sobre funções contínuas	50
4.1.1	Teorema de Bolzano	50
4.1.2	Teorema de Weierstrass	51
4.2	Teoremas sobre funções deriváveis	54
4.2.1	O Teorema de Rolle	54
4.2.2	O Teorema de Lagrange	55
4.2.3	Máximos e mínimos locais	58
4.2.4	Convexidade, concavidade e pontos de inflexão	59
4.3	Teorema e regra de Cauchy	62
4.4	Soluções dos exercícios do capítulo	68

Capítulo 1

A linguagem da Matemática

Neste capítulo vamos fazer uma introdução à linguagem usada em Cálculo e recordar algumas propriedades da Lógica.

O intuito é ajudar o estudante a entender um texto matemático, a saber distinguir definições de teoremas e conseguir elaborar demonstrações simples.

A implicação material pode ser definida usando outros conetivos lógicos. Pela sua definição, a implicação material $P \Rightarrow Q$ só é falsa quando P é Verdadeira e Q é Falsa, ou seja, quando $\sim P$ é Falsa e Q é Falsa. Esta é exatamente a propriedade da disjunção de $\sim P$ e Q , logo

$$P \Rightarrow Q \text{ é equivalente a } \sim P \vee Q.$$

Usando as leis de De Morgan pode-se verificar que

$$\sim(P \Rightarrow Q) \text{ é equivalente a } P \wedge \sim Q.$$

“Se m e n são pares então mn é par” é um teorema, contudo, a sua recíproca, “Se mn é par então m e n são pares”, não é um teorema.

(prova direta, indireta e redução ao absurdo, condição necessária, suficiente)

1.5 Topologia da reta \mathbb{R}

Interior - $a \in A$ diz-se *ponto interior* do conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a , contida em A , $\mathcal{V}(a) \subseteq A$, isto é, $a \in A$ é ponto interior a A se e só se

$$\exists \delta > 0 : \underbrace{]a - \delta, a + \delta[}_{\mathcal{V}_\delta(a)} \subseteq A.$$

O *interior* de A é o conjunto de todos os pontos interiores de A e denota-se por $\text{Int}(A)$.

Exterior - $a \in \mathbb{R} \setminus A$ diz-se *ponto exterior* a $A \subseteq \mathbb{R}$ se existe uma vizinhança $\mathcal{V}(a)$ de a contida no complementar de A , $\mathcal{V}(a) \subseteq \mathbb{R} \setminus A$, isto é,

$$\exists \delta > 0 :]a - \delta, a + \delta[\subseteq \mathbb{R} \setminus A.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto exterior de A se e só se é ponto interior de $\mathbb{R} \setminus A$. (Porquê?)

O *exterior* de A é o conjunto de todos os pontos exteriores de A e denota-se por $\text{Ext}(A)$.

Exemplo 1.12. Seja $A = [-1, 0[\cup]0, 1[\cup [\pi, 5[$.

Fronteira - Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se *ponto fronteira* de $A \subseteq \mathbb{R}$ se toda a vizinhança de a intersetá A e intersetá o complementar de A ($\mathbb{R} \setminus A$), isto é,

$$\forall \delta > 0,]a - \delta, a + \delta] \cap A \neq \emptyset \wedge]a - \delta, a + \delta] \cap \mathbb{R} \setminus A \neq \emptyset.$$

$a \in \mathbb{R}$ é ponto fronteira de A se e só se é ponto fronteira de $\mathbb{R} \setminus A$. (Porquê?)

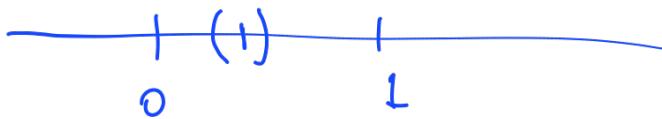
A *fronteira* de A é o conjunto de todos os pontos fronteira de A e denota-se por $\text{Frt}(A)$.

Fecho (ou aderência) - O conjunto formado pelos pontos fronteira e pelos pontos interiores de $A \subseteq \mathbb{R}$ designa-se por *fecho ou aderência de A* e denota-se por \overline{A} , $\overline{A} = \text{Int}(A) \cup \text{Frt}(A)$. Os pontos de \overline{A} designam-se por pontos aderentes ou pontos de aderência.

Exercício 1.7 Seja $A =]-\infty, 1] \cup \{3\} \cup]10, 35]$. Determine:

- O interior de A ;
- O complementar de A ;
- O exterior de A ;
- A fronteira de A ;
- O fecho de A .

Fronteira de $\underbrace{[0,1] \cap \mathbb{Q}}_A ?$



$$\text{Fn}(A) = [0, 1]$$

1.5.1 Conjunto aberto, conjunto fechado

Aberto - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *aberto* em \mathbb{R} se $A = \text{Int}(A)$.

Fechado - Um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$ diz-se *fechado* em \mathbb{R} se o seu complementar é aberto, isto é, se $\mathbb{R} \setminus A = \text{Ext}(A)$.

Exemplo 1.14. Seja $A = [2, 8] \cup \{0, 1, 9\}$.

$$\text{int}(A) =]2, 8[\neq A \quad \text{mas é certo.}$$

1.5.2 Ponto de acumulação e ponto isolado

Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ diz-se **ponto de acumulação** de A se toda a vizinhança de a , $\mathcal{V}(a)$, interseca $A \setminus \{a\}$:

$$\forall \mathcal{V}(a), \underline{\mathcal{V}(a) \cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset}$$

Usando as vizinhanças centradas no ponto, podemos escrever a definição de ponto de acumulação na forma:

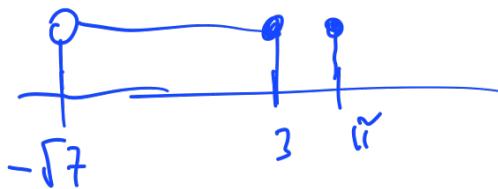
$$a \in \mathbb{R} \text{ é } \underline{\text{ponto de acumulação}} \text{ de } A \text{ se e só se } \forall \delta > 0,]a - \delta, a + \delta[\cap A \setminus \{a\} \neq \emptyset.$$

Ao conjunto dos pontos de acumulação de A chama-se **derivado de A** e denota-se por A' .

Um ponto $a \in A$ diz-se **ponto isolado de A** se existe uma vizinhança de a , $\mathcal{V}(a)$, que interseca A apenas no ponto a :

$$\exists \mathcal{V}(a) : \mathcal{V}(a) \cap A = \{a\}.$$

Exemplo 1.15. Seja $A =]-\sqrt{7}, 3] \cup \{\pi\}$.



$$A = \left\{ \frac{1}{m} : m \in \mathbb{N} \right\} \quad A' ?$$

Capítulo 2

Funções reais de variável real: recordar

2.1 Conceito de função

Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **função** $f : A \rightarrow B$ é uma correspondência que a cada elemento $x \in A$ associa um único elemento $f(x) \in B$. Isto escreve-se

$$\begin{array}{rccc} f : & A & \rightarrow & B \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array} \quad \text{e, em notação lógica,} \quad \forall x \in A, \exists^1 y \in B : y = f(x)$$

O quantificador \exists^1 significa “existe um e um só” ou “existe um único”.

Chama-se **domínio** de f ao conjunto A , **conjunto de chegada** ao conjunto B e **contradomínio** (ou *conjunto das imagens*) de f ao conjunto dado por

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$$

O domínio de f denota-se por D_f e o seu contradomínio por $CD_f = f(D_f)$.

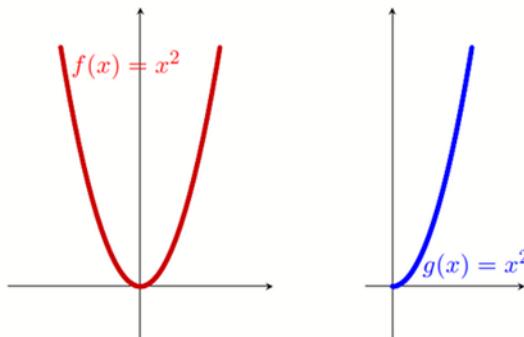


Figura 2.1: Gráfico das funções $f(x) = x^2$ com domínio $D_f = \mathbb{R}$ e $g(x) = x^2$ com domínio $D_g = \mathbb{R}_0^+$.

2.2 Função composta

Dadas duas funções $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : D_g \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, se o contradomínio de f for um subconjunto do domínio de g ($CD_f \subseteq D_g$) pode definir-se a **função composta** $g \circ f$:

$$\begin{array}{rcl} g \circ f : & D_f & \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto g(f(x)) \end{array}$$

Exemplo 2.4. Considere-se a função definida pela expressão analítica

$$f(x) = \sqrt{\frac{4-x}{x^2-2x}}.$$

2.3 Funções injetivas e funções sobrejetivas

Definição 2.1. Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **injetiva** se

$$\forall x, x' \in D_f, x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x').$$

Pode provar-se a injetividade de uma função usando o facto de que a função f é injetiva se e só se

$$\forall x, x' \in D_f, f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'.$$

Definição 2.2. Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **sobrejetiva** se

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in D_f : f(x) = y.$$

Pode mostrar-se que uma função real f é sobrejetiva mostrando que o seu contradomínio é $CD_f = \mathbb{R}$.

Uma função $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se **bijetiva** se é injetiva e sobrejetiva, ou seja,

$$\forall y \in \mathbb{R}, \exists^1 x \in D_f : y = f(x).$$

Exercício 2.3 Considere a família de funções $f_a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por $f_a(x) = a^x$ com $a \in \mathbb{R}^+$. Existe alguma função desta família que não seja injetiva?

2.5 A função inversa

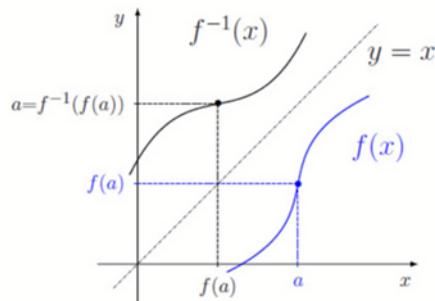
Seja $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ uma função **injetiva**. Então, a **cada** $y \in CD_f$ está associado um **único** $x \in D_f$ tal que $y = f(x)$. Por isso, conclui-se que existe uma função $g : CD_f \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) \Rightarrow g(y) = x$.

Denota-se por f^{-1} a função (dita **inversa** de f) que satisfaz esta propriedade. Se existe, a inversa é **única**.

Uma função diz-se **invertível** se admite inversa.

f é invertível (com inversa g) se e só se existe $g : CD_f \rightarrow \mathbb{R} : \forall x \in D_f, (g \circ f)(x) = x$.

Observação 2.1. O gráfico de f^{-1} é obtido do gráfico de f por simetria em relação à reta $y = x$.



Exercício 2.7 Determine as inversas (com domínios!) de $f(x) = \frac{1}{1+x}$, de $g(x) = \sqrt{x}$ e de $f \circ g$.

$$\left| \begin{array}{l} D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \\ CD_f = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ y = \frac{1}{1+x} \\ 1+x = \frac{1}{y} \\ x = \frac{1}{y} - 1 \\ f^{-1}(y) = \frac{1}{y} - 1 \\ D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{0\} \\ CD_{f^{-1}} = D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1\} \end{array} \right.$$