Exercício 1(a) da folha 6

20 de janeiro de 2022 16:18

1. Determine uma equação reduzida e classifique as cónicas definidas pelas equações:

   (a) $x^2 + y^2 - 2xy + 2x + 4y + 5 = 0$;

Equação matricial da cónica:

$$X^T A X + B X + 5 = 0 \quad \text{onde } A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad (*)$$

1) Diagonalização ortogonal de A:

1.1) Valores próprios de A: $|A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow (1-\lambda-1)(1-\lambda+1) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = 0 \ \vee \ \lambda = 2$

1.2) Subespaços próprios de A:

$U_2 = \{ X \in \mathbb{R}^2 : (A - 2I) X = 0 \}$

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$L_2 := L_2 - L_1$

$L_1 := -L_1$

$(A - 2I) X = 0 \Leftrightarrow x + y = 0$

$\Leftrightarrow y = -x$

$$U_2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

$U_0 = \{ X \in \mathbb{R}^2 : AX = 0 \}$ $\qquad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$L_2 := L_2 + L_1$

$AX = 0 \Leftrightarrow x - y = 0 \Leftrightarrow x = y$

$$U_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} : x \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

1.3) Construção duma matriz P ortogonal diagonalizante:

$X_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\|X_1\| = \sqrt{2}$ $\qquad Y_1 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ vetor próprio associado a $\lambda = 2$, $\|Y_1\| = 1$

$X_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\|X_2\| = \sqrt{2}$ $\qquad Y_2 = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ vetor próprio associado a $\lambda = 0$, $\|Y_2\| = 1$

$$P = \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \text{ é ortogonal e } P^T A P = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2) Mudança de variável $X = P\hat{X}$:

com $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$, a equação (*) toma a seguinte forma

$$2\hat{x}^2 + \begin{bmatrix} 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\hat{x}^2 + \begin{bmatrix} -\sqrt{2} & 3\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\hat{x}^2 - \sqrt{2}\,\hat{x} + 3\sqrt{2}\,\hat{y} + 5 = 0 \qquad (**)$$

3) Preparação da outra mudança de variável:

$$(**) \Leftrightarrow 2\left(\hat{x}^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\hat{x} + \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - \left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2\right) + 3\sqrt{2}\,\hat{y} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \frac{2}{16} + 3\sqrt{2}\,\hat{y} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\left(\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}\right)^2 + 3\sqrt{2}\,\hat{y} + \frac{20}{4} - \frac{1}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 2\Big(\underbrace{\hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4}}_{\tilde{x}}\Big)^2 + 3\sqrt{2}\Big(\underbrace{\hat{y} + \frac{19}{12\sqrt{2}}}_{\tilde{y}}\Big) = 0$$

4) Mudança de variável $\begin{cases} \tilde{x} = \hat{x} - \frac{\sqrt{2}}{4} \\ \tilde{y} = \hat{y} + \frac{19}{12\sqrt{2}} \end{cases}$

$$2\tilde{x}^2 + 3\sqrt{2}\,\tilde{y} = 0 \Leftrightarrow \tilde{y} = -\frac{2}{3\sqrt{2}}\tilde{x}^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \tilde{y} = -\frac{\sqrt{2}}{3}\tilde{x}^2$$ Equação reduzida de uma parábola.