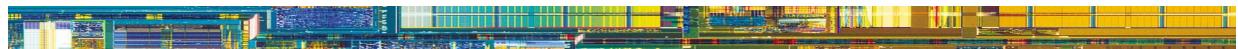
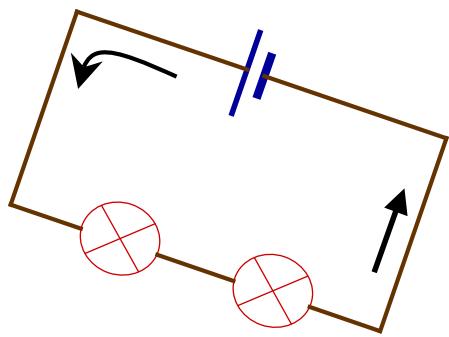


# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 1: Fundamentos (parte 1)*



**Ernesto Martins**  
evm@ua.pt  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## Sumário

- Corrente, tensão eléctricas;
- Condutores e isoladores e resistência eléctrica;
- Esquemas eléctricos;
- Circuitos em série e em paralelo;
- Elementos de circuitos;
- Polaridades e sentidos de referência;
- Potência.

## Corrente, tensão e resistência

### Corrente eléctrica, $I$

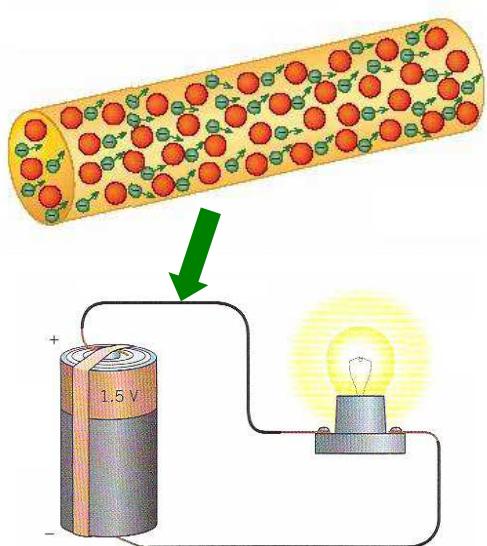
- É o movimento orientado de cargas eléctricas (electrões num metal, iões positivos ou negativos numa solução condutora);

- Define-se como a quantidade de carga eléctrica transferida por unidade de tempo;

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \quad \text{ou} \quad I = \frac{dq(t)}{dt}$$

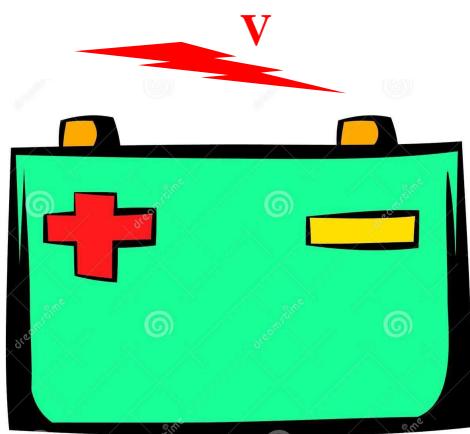
- Sendo a carga,  $Q$ , medida em **Coulomb**, a unidade da corrente eléctrica é **C/s**, que se chama **Ampére**.

$$1 \text{ Coulomb/seg} = 1 \text{ Ampére}$$



## Diferença de potencial ou Tensão, $V$

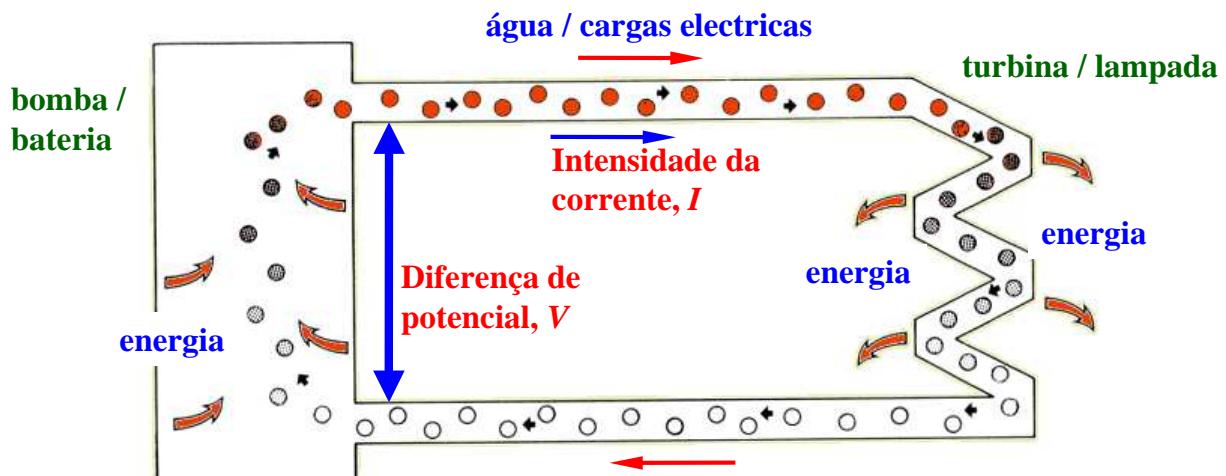
- Podemos imaginar que a **Tensão** é a ‘força’ que impele as cargas eléctricos a movimentarem-se (tal como a pressão é o que impele a água a fluir numa canalização);
- Numa bateria, um conjunto de reacções químicas dão origem a uma **diferença de potencial** entre os dois pólos;
- A **Tensão** está relacionada com a **energia**; É uma medida do **trabalho** (energia), **W**, necessário para deslocar uma **carga de 1 Coulomb** de um terminal para o outro.



$$V = \frac{W}{Q} \quad \text{ou} \quad V = \frac{dw}{dq} \quad 1 \text{ Joule}/1 \text{ Coulomb} = 1 \text{ Volt}$$

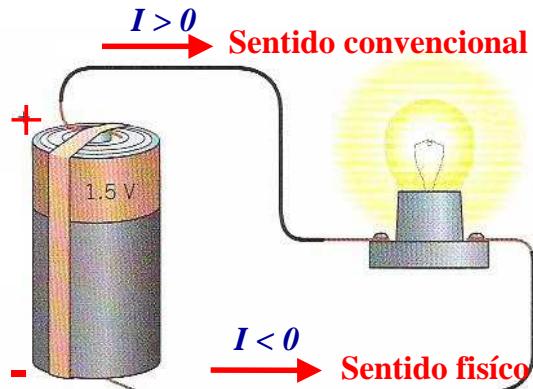
## Círculo eléctrico - analogia hidráulica

- **Bomba hidráulica** – **energia mecânica** bombeia a **água** para cima, criando a diferença de pressão necessária para manter o fluxo;
- **Bateria** - **energia química** armazenada bombeia **as cargas** através da bateria, criando a diferença de potencial



## Corrente eléctrica - sentido físico e sentido convencional

- Nos condutores metálicos os electrões flúem do terminal negativo para o terminal positivo da bateria – este é o **sentido físico** da corrente eléctrica;
- Mas como  $I = \text{carga/unidade de tempo}$ , se a carga é negativa, então  $I$  tem sinal negativo;
- Assim, para trabalharmos com correntes positivas, considera-se que a corrente flui do terminal positivo para o negativo – o **sentido convencional** da corrente eléctrica.



## Condutores e isoladores eléctricos

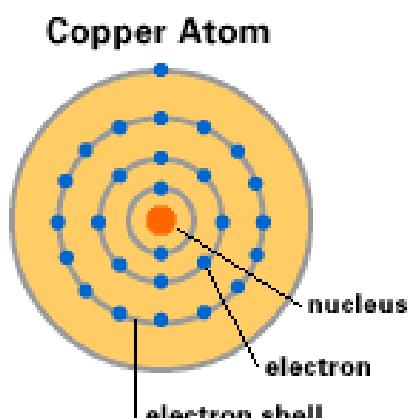
- O número de electrões de valência dos átomos dos materiais determina as suas propriedades condutoras ou isoladoras:

- > 4 electrões de valência  $\Rightarrow$  isolador;
- < 4 electrões de valência  $\Rightarrow$  condutor
- 4 electrões de valência  $\Rightarrow$  semicondutor

- Bons condutores: ouro, prata, cobre, alumínio, etc.

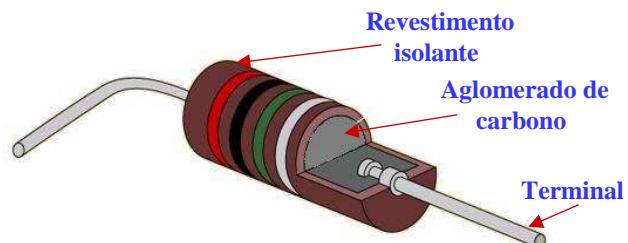
- Isoladores: borracha, plástico, papel, mica, etc.

- A **resistência eléctrica** é uma medida da oposição que o material oferece à passagem da corrente eléctrica; Medida em *Ohm* ( $\Omega$ ).

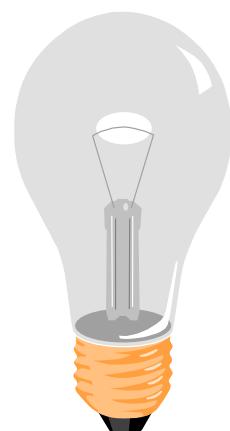


## Resistência eléctrica

- Aos componentes projectados para terem um valor específico de resistência, chamamos **Resistências**;



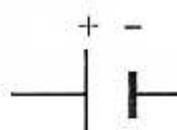
- O filamento de uma lâmpada de incandescência é uma resistência (de tungsténio) que transforma a energia eléctrica em luz e calor.



- Ao inverso da resistência chamamos **Conductância**. Medida em *Siemen (S)*.

## Esquemas eléctricos - símbolos

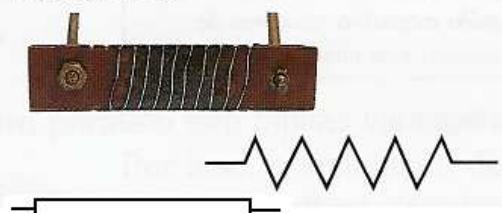
Pilha



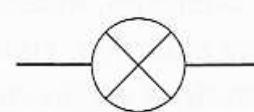
Fio de ligação



Resistência



Lâmpada



Interruptor aberto

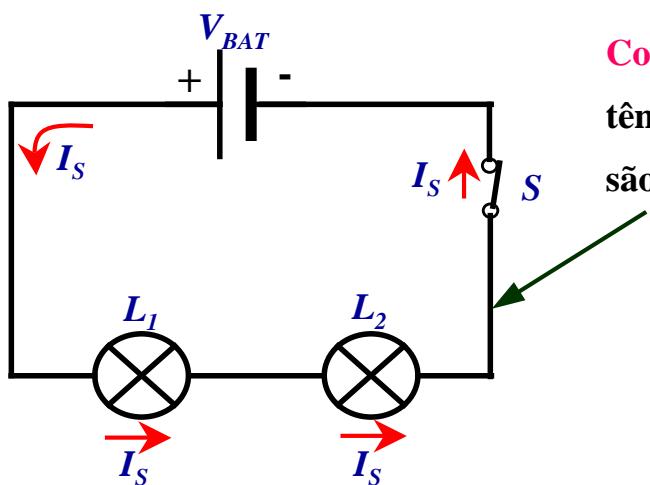


## Circuitos série e paralelo

### Circuitos eléctricos – série e paralelo

- **Circuito série:**

- Um único caminho de corrente;
- A corrente é igual nas duas lâmpadas.

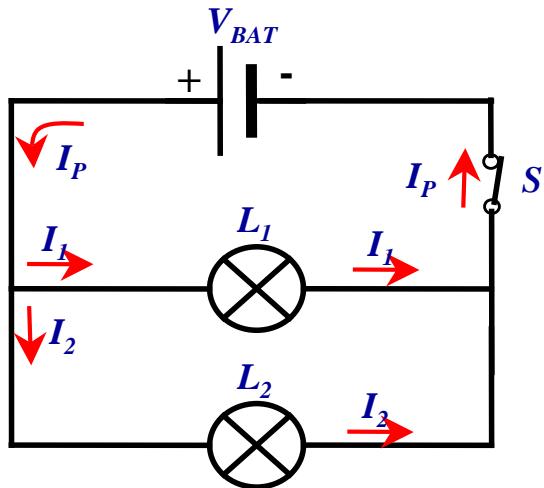


**Condutores são ideais:**  
têm resistência electrica nula;  
são superfícies equipotenciais.

## Circuitos eléctricos – série e paralelo

### ● Circuito paralelo:

- Múltiplos caminhos de corrente;
- A tensão é a mesma nas duas lâmpadas:  $V_{BAT}$ .



## Elementos de circuito

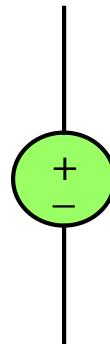
## Elementos de circuito

- É importante distinguir entre:
  - Os **dispositivos físicos** de um circuito;
  - Os **modelos matemáticos** usados para analisar o comportamento desses dispositivos;



### Dispositivo físico:

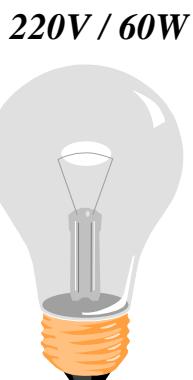
- Corrente fornecida é limitada;
- Tensão diminui com o tempo.



$V = 1.5V$   
Modelo matemático:

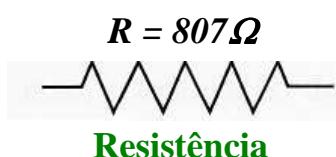
- Fornece corrente sem limite;
- Tensão constante.

## Elementos de circuito



### Dispositivo físico:

- Resistência varia com a temperatura;
- Resistência varia com a frequência.



### Modelo matemático:

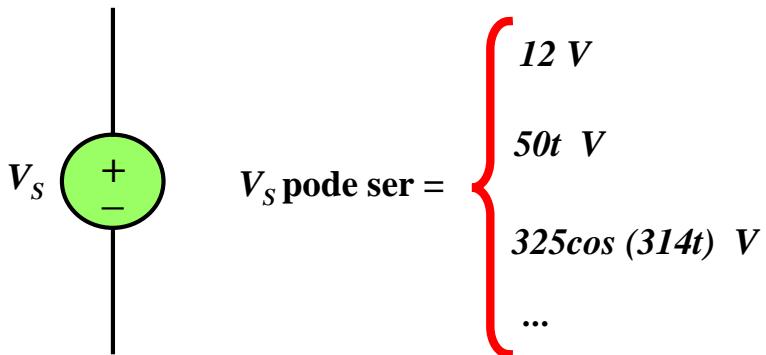
- Valor constante;
- Resistência pura.

- Aos modelos matemáticos chamamos **elementos de circuito**.

## Elementos de circuito básicos

### Fonte independente de tensão

- Tensão aos seus terminais é independente da corrente que a atravessa;
- É uma fonte ideal: pode fornecer uma corrente (e portanto energia) ilimitada.

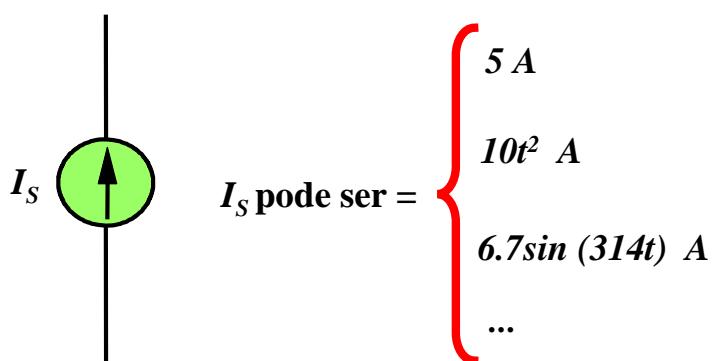


- Se  $V_s = \text{constante}$ , então temos uma fonte DC.

## Elementos de circuito básicos

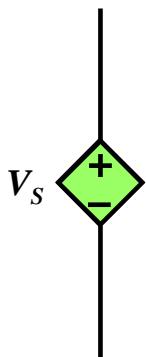
### Fonte independente de corrente

- Corrente que a atravessa é independente da tensão aos seus terminais;
- É uma fonte ideal: pode apresentar uma tensão aos terminais (e portanto pode fornecer uma quantidade de energia) ilimitada.



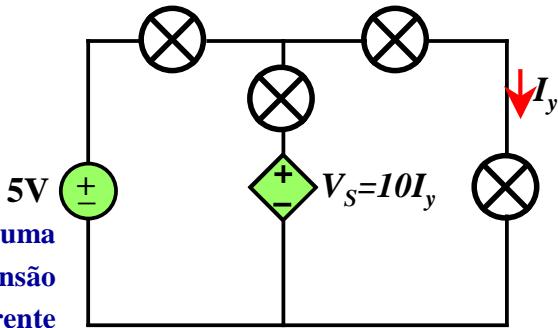
- Se  $I_s = \text{constante}$ , então temos uma fonte DC.

## Elementos de circuito básicos

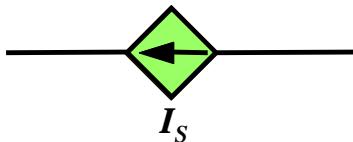


- **Fonte dependente (ou controlada) de tensão:** O valor da tensão da fonte depende de uma outra grandeza no circuito (e.g. tensão ou corrente);

**Exemplo de circuito com uma fonte dependente de tensão controlada por corrente**



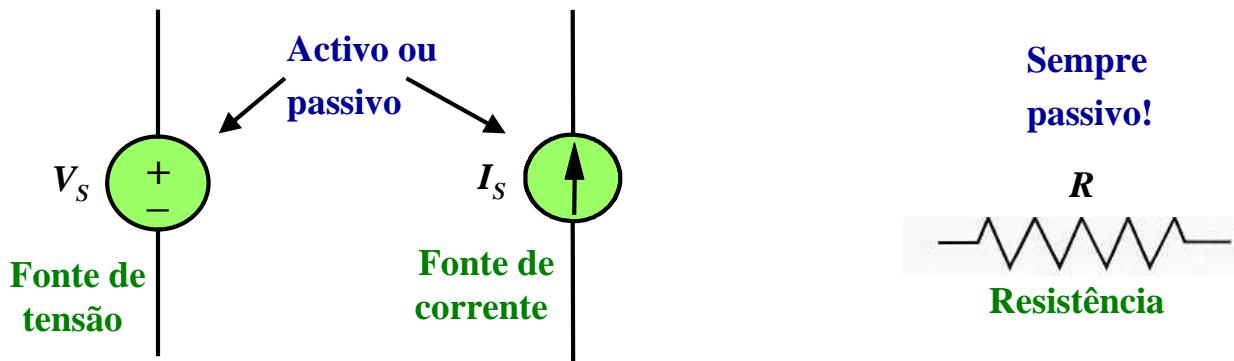
- **Fonte dependente (ou controlada) de corrente:** O valor da corrente da fonte depende de uma outra grandeza no circuito (e.g. tensão ou corrente).



## Elementos de circuito activos e passivos

Um elemento de circuito pode também classificar-se como activo ou passivo

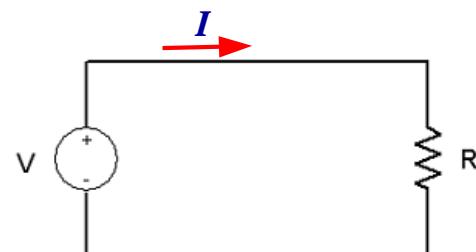
- **Activo:** se pode fornecer energia ao circuito (e.g. fonte);
- **Passivo:** se não pode fornecer energia ao circuito (e.g. resistência).



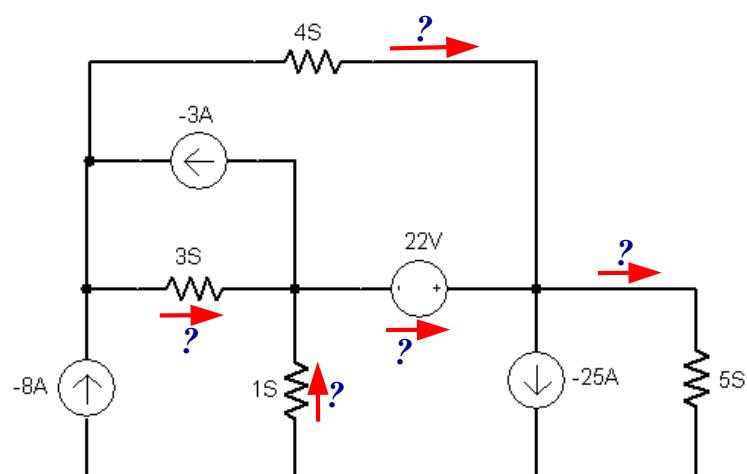
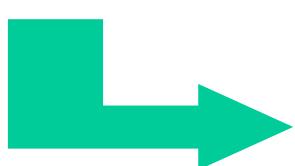
## Polaridades / sentidos de referência

### Sentido das correntes num circuito

- Como veremos, para analisar um circuito é importante **assumir previamente** um sentido para a(s) corrente(s);



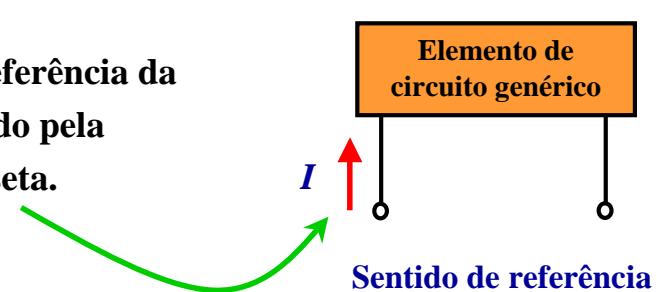
- ... mas o sentido das correntes em todos os ramos de um circuito nem sempre é evidente à priori



## Sentido de referência e sentido real da corrente

- Quando não sabemos o sentido das correntes, assumimos **sentidos de referência**;
- Temos então:
  - **Sentido de Referência:** é um sentido convencionado (**arbitrário**) da corrente para efeitos de análise do circuito;
  - **Sentido Real:** indica o sentido real da corrente (em geral, é desconhecido à partida).

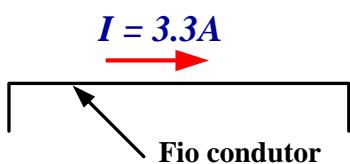
● O sentido de referência da corrente é indicado pela colocação duma seta.



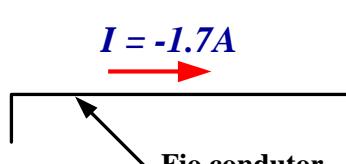
## Sentido de referência e sentido real da corrente

- A análise é feita tendo por base os sentidos de referência arbitrados;
- O **sentido real** da corrente fica determinado assim que sabemos o **valor da corrente**.

➤ O sentido real é **igual** ao de referência se a corrente é **positiva**.



➤ O sentido real é **ao contrário** do de referência se a corrente é **negativa**.

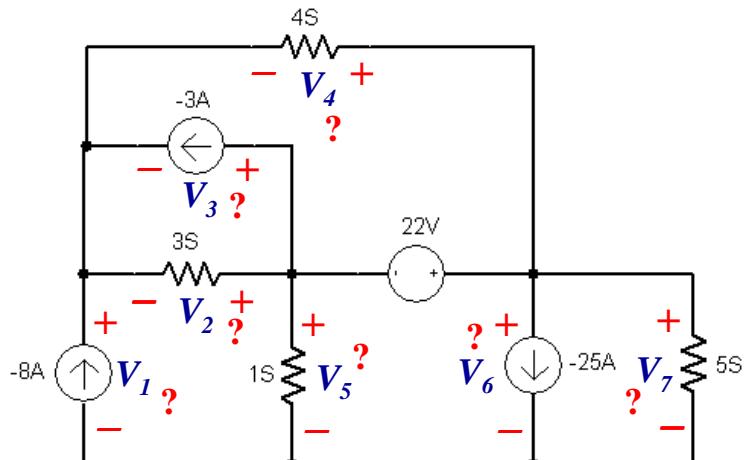
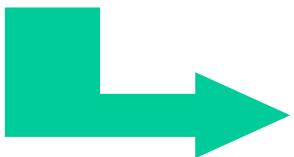


## Polaridade das tensões

- Para analisar um circuito é também essencial assumir previamente uma polaridade (+ e -) para as tensões aos terminais dos vários elementos;



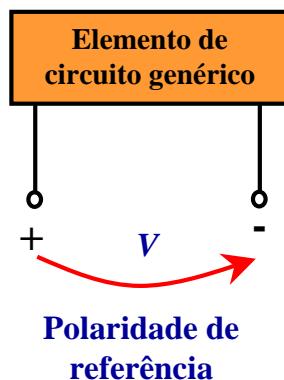
- ... mas as polaridades em todos os elementos de um circuito nem sempre são evidente à priori



## Polaridade de referência e polaridade real

- Quando não sabemos a polaridade das tensões, assumimos **polaridades de referência**;
- Temos então:
  - Polaridade de Referência:** é uma polaridade convencionada (**arbitrária**) para efeitos de análise do circuito;
  - Polaridade Real:** indica o sentido real da polaridade (em geral, é desconhecido à partida).

- A polaridade de referência é indicada pela colocação dos sinais (+) e (-), ou através duma **seta** entre os terminais, que aponta no sentido do potencial mais baixo.

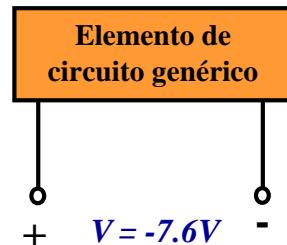
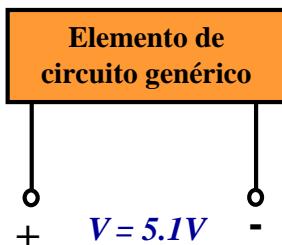


## Polaridade de referência e polaridade real

- A análise é feita tendo por base as polaridades de referência arbitrárias;
- As **polaridades reais** das tensões ficam determinadas assim que sabemos os seus **valores**.

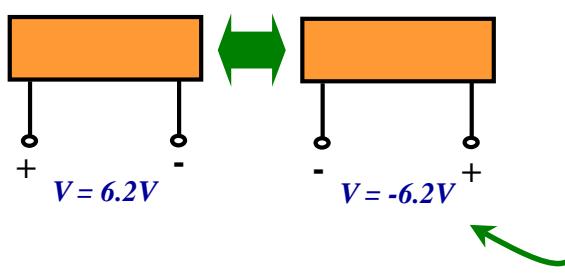
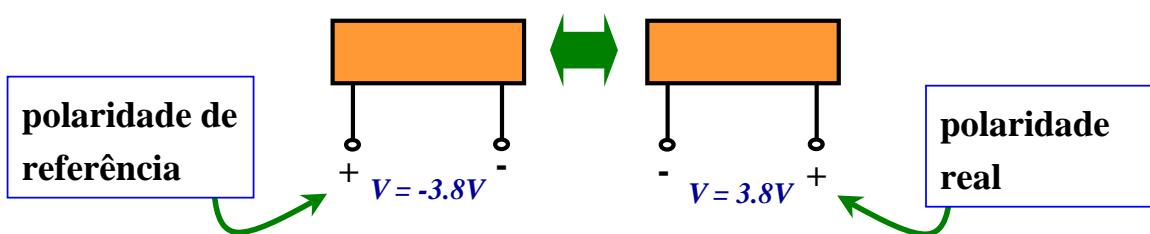
➤ A polaridade real é igual à de referência se a tensão é positiva;

➤ A polaridade real é ao contrário da de referência se a tensão é negativa;



## Polaridades equivalentes

- Situações equivalentes:



Nada nos impede de usar a polaridade de referência mesmo que esta seja ao contrário da polaridade real – temos é de usar o valor algébrico correcto da tensão!

## Potência em circuitos eléctricos

### Potência

- A potência (em Watt) define-se como o trabalho (energia), **W**, por unidade de tempo;

$$P = \frac{dW}{dt} \quad 1 \text{ Watt} = 1 \text{ Joule/seg}$$

- A potência é, então, a taxa à qual a energia é fornecida (por um elemento de circuito activo) ou dissipada (por um elemento passivo).



Uma lampada de  
10W  
absorve (dissipa, consome, ...) 10J  
por cada segundo em que está ligada

## Potência

- Podemos exprimir a potência como:

$$P = \frac{dw}{dt} = \frac{dw}{dq} \times \frac{dq}{dt} = V \cdot I \quad 1\text{Watt} = 1\text{J/C} \times 1\text{C/s}$$

- Ou seja, para um dado elemento de circuito, a potência é proporcional:

- À Energia necessária para transferir 1 Coulomb através do elemento, ou seja, à tensão (V);
- Ao número de Coulombs transferidos durante 1 Segundo através do elemento, ou seja, a corrente (I).

## Potência

- Num circuito eléctrico há elementos que fornecem potência e outros que absorvem potência;
- A Lei da Conservação da Energia garante que o total da potência fornecida iguala a totalidade da potência absorvida:

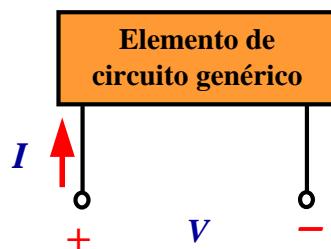
$$\sum_i P_i^{fornecida} = \sum_j P_j^{absorvida}$$

## Potência: absorvida ou fornecida?

- Na análise de um circuito, por vezes precisamos de saber se um dado elemento **fornecce** ou **absorve** potência;
- Uma maneira de determinar isso, passa pela adopção da **Convenção de Sinal de Elemento Passivo (CSEP)**:

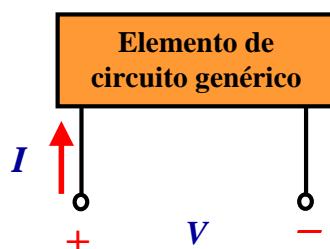
C  
S  
E  
P

**A polaridade de referência da tensão e o sentido de referência da corrente são escolhidos de forma a que a corrente entre pelo terminal positivo.**



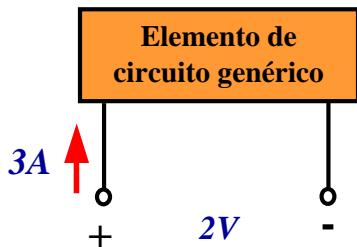
## Potência: absorvida ou fornecida?

- Adoptada a **CSEP**, assim que determinarmos os valores da tensão, **V**, e da corrente, **I**, é fácil saber se o elemento **fornecce** ou **absorve** potência:
  - se  $P = V \times I > 0 \Rightarrow$  a potência é **absorvida**, sendo dada por  $P_{\text{absorvida}} = V \times I$ ;
  - se  $P = V \times I < 0 \Rightarrow$  a potência é **fornecida**, sendo dada por  $P_{\text{fornecida}} = |V \times I|$



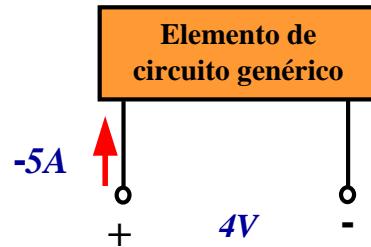
## Potência: absorvida/fornecida, exemplos

- Polaridades e sentidos das correntes já são dados de acordo com a CSEP



$$P = 2 \times 3 = 6W$$

**P é absorvida**

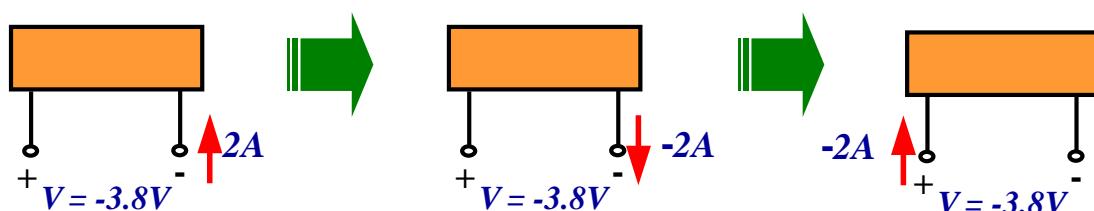


$$P = 4 \times (-5) = -20W$$

**P é fornecida**

## Potência: absorvida/fornecida, exemplos

- A polaridade da tensão e o sentido da corrente podem ter de ser alterados de forma a satisfazer a CSEP:



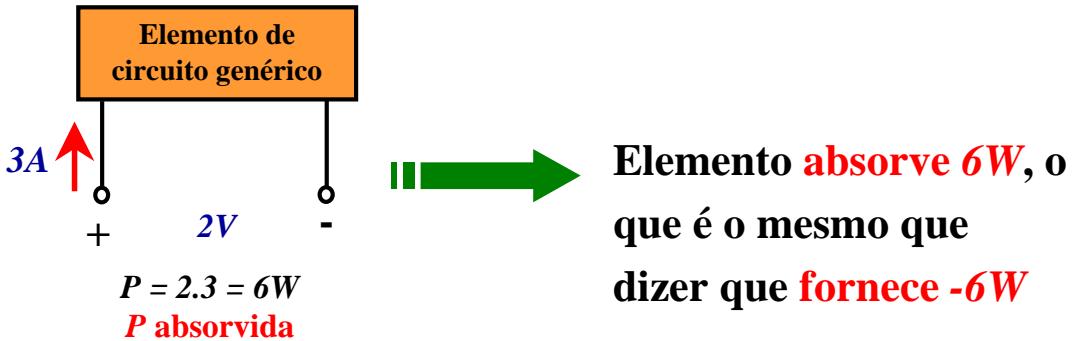
$$P = (-3.8) \times (-2) = 7.6W$$

**P é absorvida**

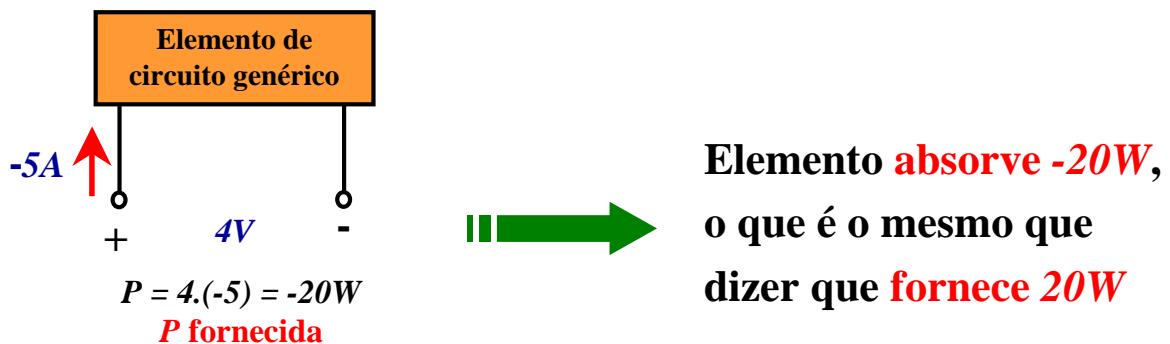
## Potência: absorvida/fornecida

- Para qualquer elemento de circuito:

$$P_{\text{absorvida}} = -P_{\text{fornecida}}$$



## Potência: absorvida/fornecida

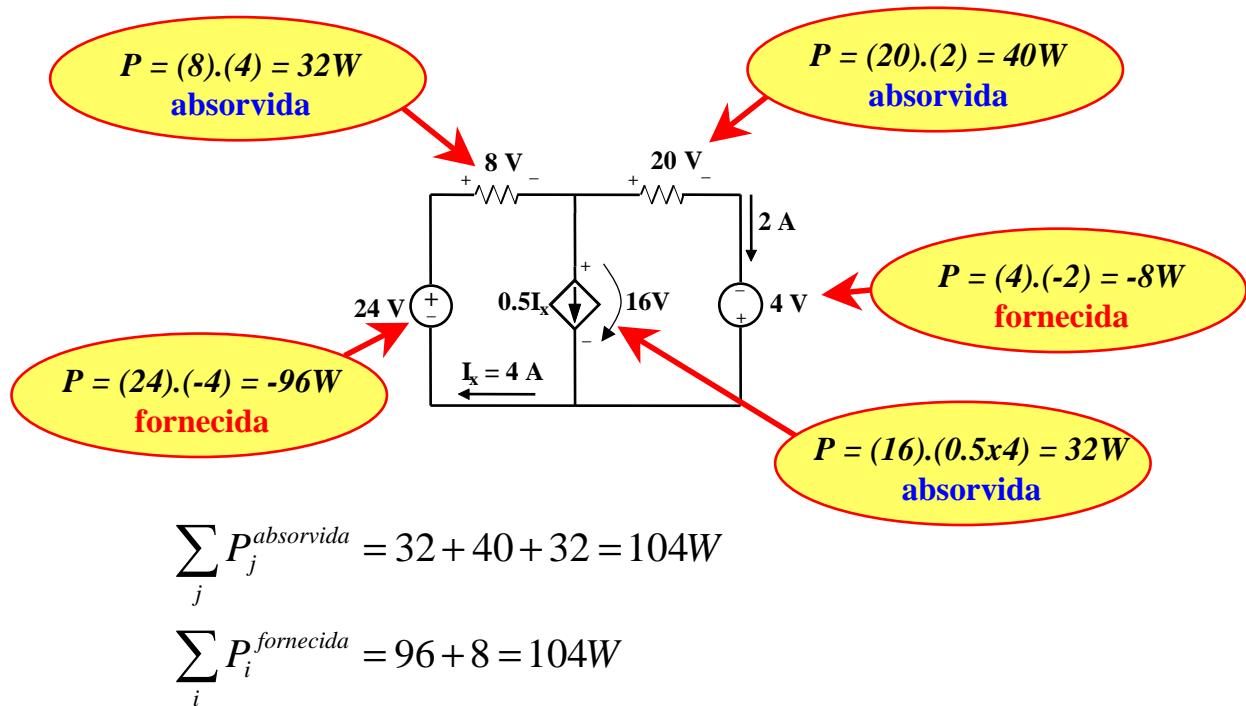


- Mas, na realidade, absorve ou fornece?

**Resposta:** a resposta é ditada pelo valor da potência, absorvida ou fornecida, que for positivo.

## Potência: Exemplo de cálculo

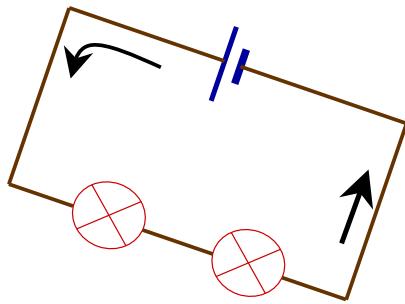
Calcular a potência absorvida/fornecida por cada elemento de circuito.



# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 1: Fundamentos (parte 2)*



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## **Sumário**

- **Lei de Ohm;**
- **Resistividade;**
- **Potência dissipada numa resistência;**
- **Lei das correntes e lei das tensões de Kirchhoff;**
- **Análise de circuitos simples (um só *loop* / um par de nós);**
- **Combinação de fontes e de resistências;**
- **Divisores de tensão e de corrente.**

## Lei de Ohm



George Simon Ohm, físico alemão  
(16-03-1789, 06-07-1854)

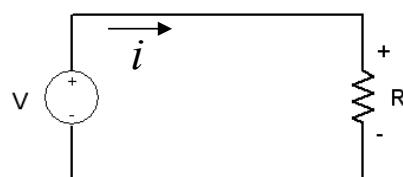
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

1.2-3

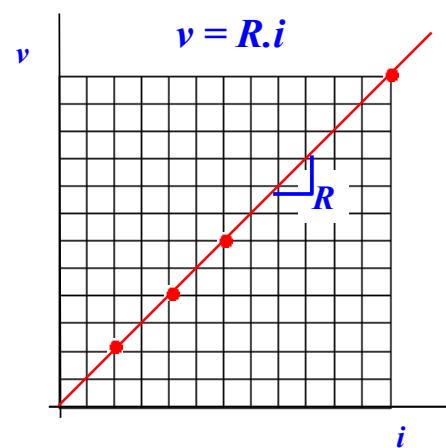
## Lei de Ohm

- Lei fundamental da electricidade enunciada pela primeira vez, em 1827, pelo físico alemão Georg Simon Ohm:

**“Para todo o condutor linear, existe uma razão constante entre a tensão  $v$  aos seus terminais e a corrente  $i$  que o atravessa”**



- A constante de proporcionalidade é a Resistência,  $R$ .
- A resistência é uma medida da oposição que o condutor eléctrico oferece à passagem da corrente; Medida em Ohm ( $\Omega$ );

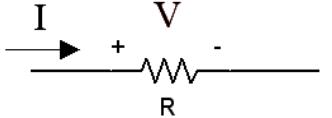


E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

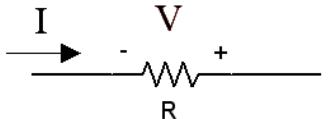
1.2-4

## Lei de Ohm e os sinais da tensão e corrente

- A expressão dada da Lei de Ohm é válida para uma resistência desde que se respeite a **CSEP**:



$\Rightarrow v = R.i$

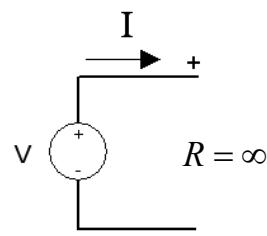


$\Rightarrow v = -R.i$

## Círculo aberto e curto-circuito

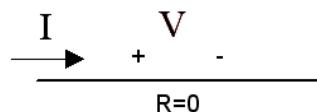
- Num **círculo aberto**,

$$R = \infty \Rightarrow i = v/R = 0$$



- Num **curto-circuito**,

$$R = 0 \Rightarrow v = R.i = 0$$

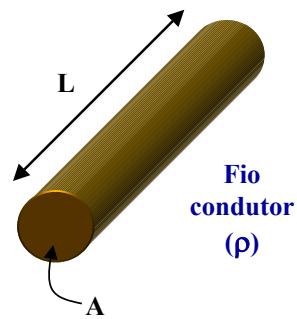


**Nota:** Nos circuitos que iremos estudar, os fios de ligação entre elementos são considerados ideais: apresentam  $R = 0\Omega$

## Resistência e resistividade de materiais

- Os condutores reais apresentam uma resistência eléctrica que pode ser determinada por:

$$R = \rho \frac{L}{A}$$



**ρ** - Resistividade do material, em  $\Omega m$ ;

**L** - comprimento, em  $m$ ;

**A** - Área da secção, em  $m^2$ .

Material	$\rho (\Omega m)$
prata (Ag)	$1.6 \times 10^{-8}$
cobre (Cu)	$1.7 \times 10^{-8}$
ouro (Au)	$2.2 \times 10^{-8}$
alumínio (Al)	$2.7 \times 10^{-8}$
tungsténio (W)	$5.5 \times 10^{-8}$

## Potência dissipada numa resistência

- A resistência é o elemento passivo mais simples;
- A potência dissipada ou absorvida por uma resistência é sempre positiva;

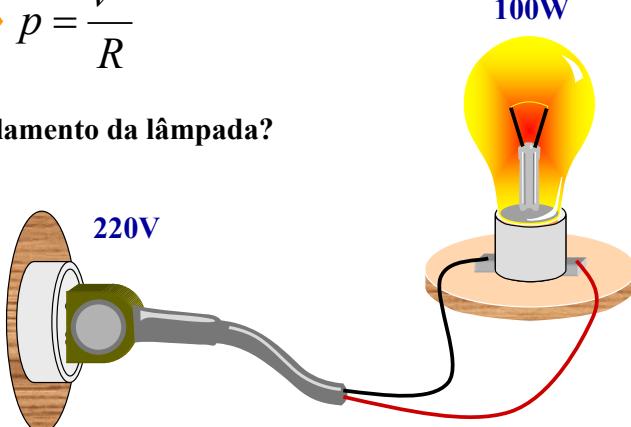
$$p = v.i = (R.i).i \quad \Rightarrow \quad p = R.i^2$$

$$p = v.i = v\left(\frac{v}{R}\right) \quad \Rightarrow \quad p = \frac{v^2}{R}$$

- Qual é o valor da resistência do filamento da lâmpada?

$$p = \frac{v^2}{R} \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{v^2}{p}$$

$$R = \frac{220^2}{100} = 484\Omega$$



## Leis de Kirchhoff

### lei das correntes



Gustav Robert Kirchhoff, físico alemão  
(12-03-1824, 17-10-1887)

### Pressupostos e definições

**Na análise que se segue consideramos:**

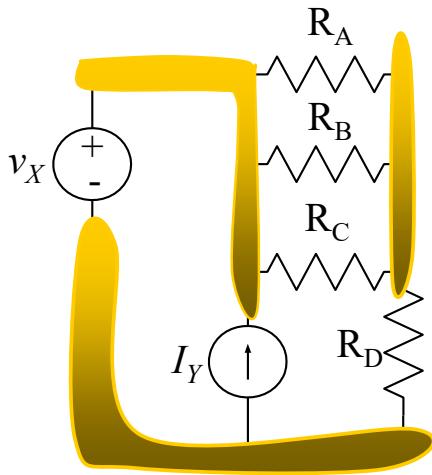
- **Nó** – Ponto de ligação de dois ou mais elementos;
- **Ramo** – Caminho no circuito que liga dois nós.
- **Caminho fechado ou *loop*** – Qualquer caminho através do circuito que começa e termina no mesmo nó;
- **Malha** – *Loop* que não contém outros *loops* dentro dele.

## Nós

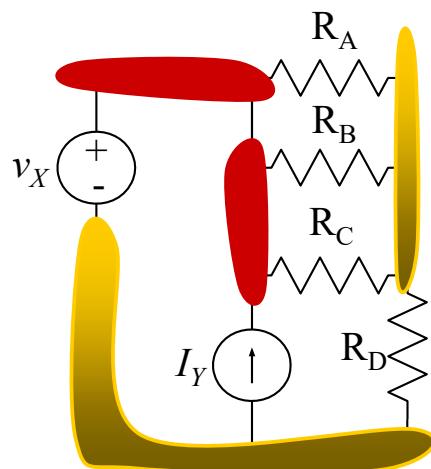
- Para analisar um circuito é importante identificar os nós desse circuito.

Quantos nós?

Resposta: 3



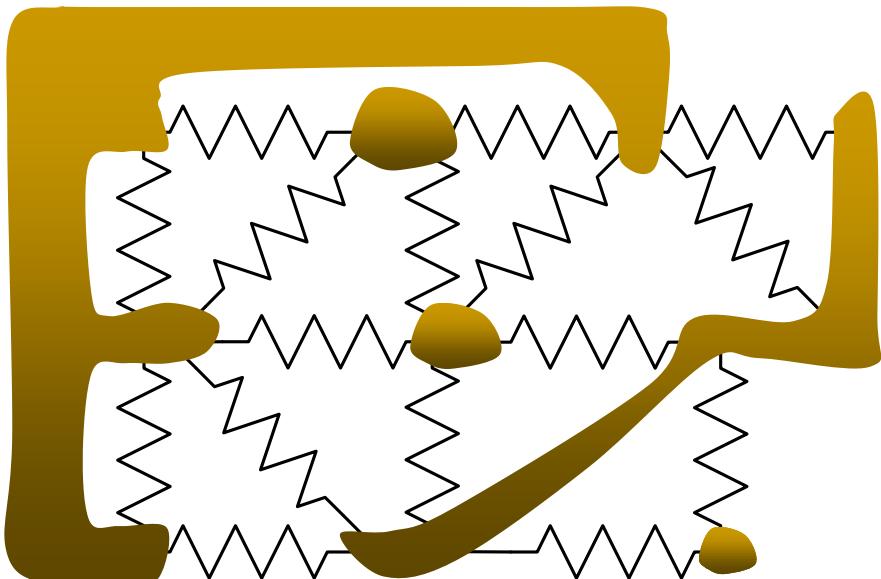
Dois pontos de ligação ligados por um fio constituem o mesmo nó



## Nós

Quantos nós tem este circuito?

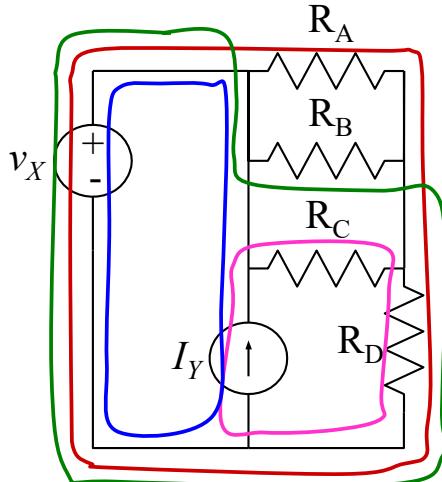
Resposta: 5



## Caminhos fechados ou *loops*

- Para analisar um circuito é importante identificar loops nesse circuito (embora não seja preciso identificar todos os loops possíveis).

- Alguns desses loops são:



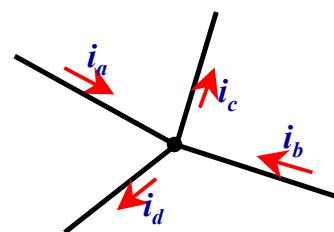
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

1.2-13

## Lei das Correntes de Kirchhoff – 1<sup>a</sup> lei: KCL

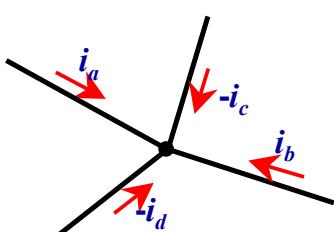
- A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó”**

$$i_a + i_b = i_c + i_d$$



- É uma consequência da Lei da Conservação da Carga: a carga não se pode perder nem criar num nó;**

- Alternativamente pode ser enunciada como:  
“A soma algébrica das correntes que entram num nó é zero”**

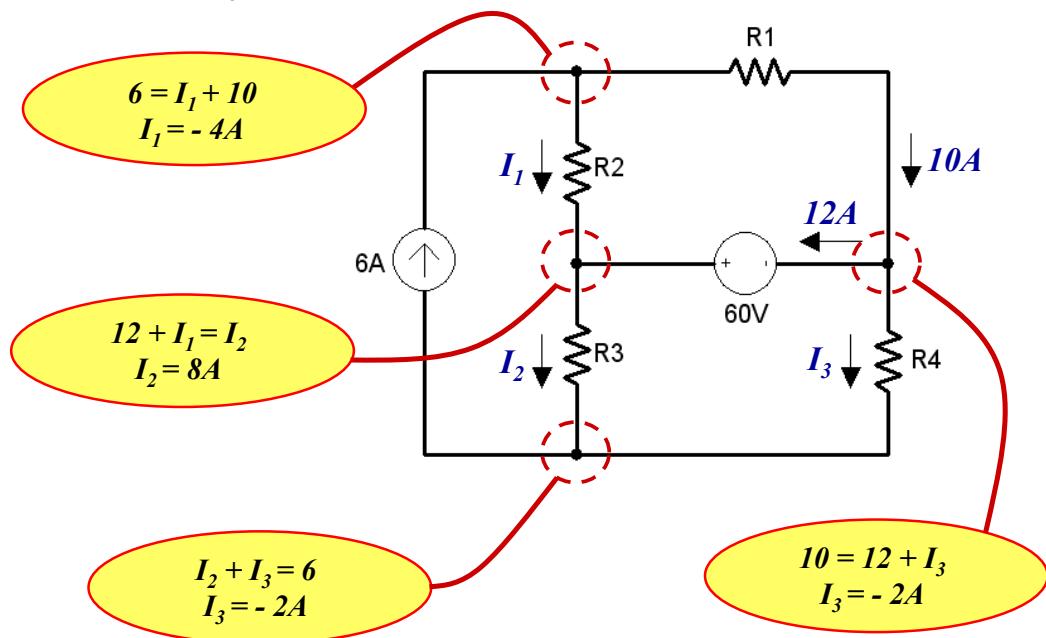


$$\sum_{n=1}^N i_n = 0$$

$$i_a + i_b - i_c - i_d = 0$$

## Lei das Correntes de Kirchhoff – 1<sup>a</sup> lei: KCL

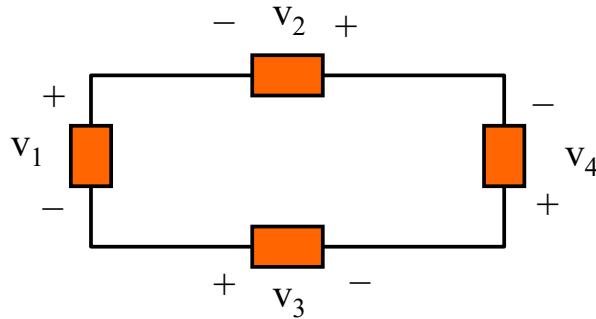
Calcular  $I_1$ ,  $I_2$  e  $I_3$ .



## Leis de Kirchhoff

lei das tensões

## Lei das Tensões de Kirchhoff – 2<sup>a</sup> lei: KVL



- “A soma algébrica das tensões ao longo de um caminho fechado (*loop*) é zero”  $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0$

- É uma consequência da Lei da Conservação da Energia;

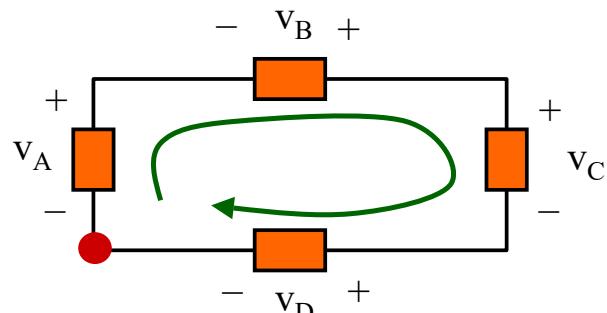
- Mais genericamente,  $\sum_{n=1}^N v_n = 0$

## Lei das Tensões de Kirchhoff – 2<sup>a</sup> lei: KVL

Para escrever a soma das tensões de um *loop*, procedemos da seguinte maneira:

**1- Escolhemos um nó como ponto de partida do caminho fechado;**

**2- Percorremos o *loop* no sentido horário ou anti-horário, adicionando cada uma das tensões que encontramos;**



**3- O sinal algébrico atribuído a cada tensão é:**

- Positivo, se encontramos primeiro o sinal positivo (+) dessa tensão;
- Negativo, se encontramos primeiro o sinal negativo (-) dessa tensão;



$$-v_A - v_B + v_C + v_D = 0$$

## Lei das Tensões de Kirchhoff – 2<sup>a</sup> lei: KVL

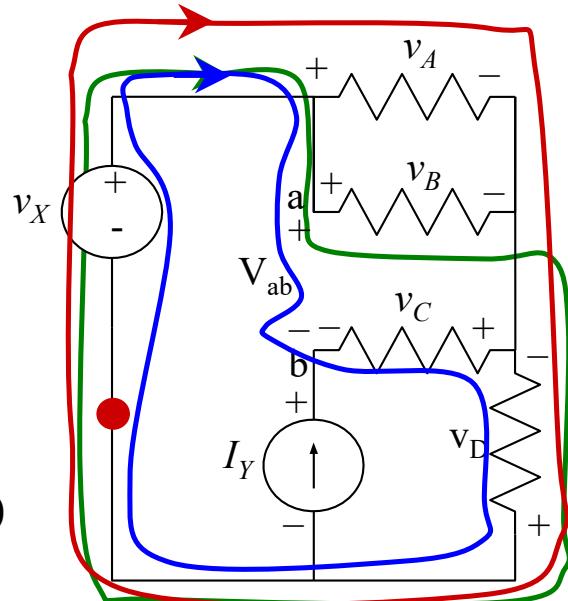
- Podemos escrever tantas equações quantos os *loops* que conseguirmos identificar no circuito:

➡  $-v_X + v_A - v_D = 0$

➡  $-v_X + v_B - v_D = 0$

**Excepção:** Caminho a azul não é um *loop*, mas pode ser considerado para efeitos da aplicação da KVL:

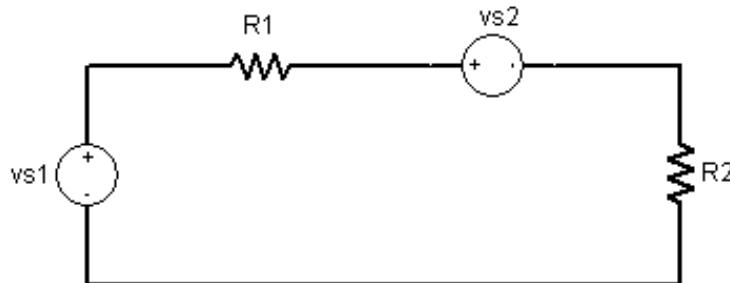
➡  $-v_X + v_{ab} - v_C - v_D = 0$



## Análise de circuitos simples

## Círculo com um só loop (ou uma só malha)

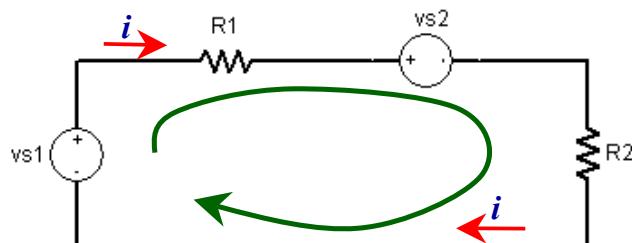
- Pretendemos analisar o **círculo série** dado;



- Como este é um círculo série, a grandeza mais importante a determinar (da qual todas as outras dependem) é a **corrente,  $i$** , no círculo.

## Círculo com um só loop – determinação de $i$

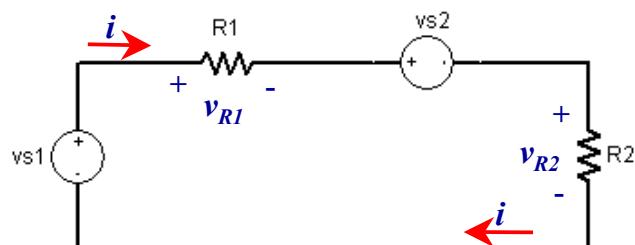
### 1- Arbitrar um sentido de referência para a corrente



### Aplicação da KVL

Lembremos que elementos em série são percorridos pela mesma corrente.

### 2- Escolher as polaridades de referência para as tensões desconhecidas

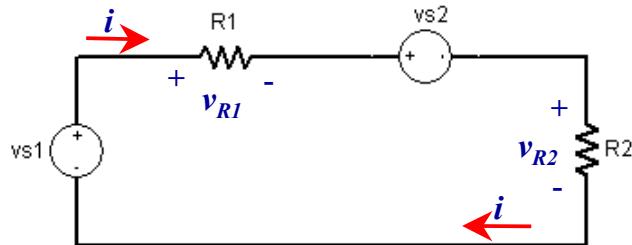


Convém escolher as polaridades de forma a que a corrente entre pelo lado positivo.

## Círculo com um só loop – determinação de $i$

3- Com base na **Lei das Tensões de Kirchhoff**, escrever a equação:

$$-v_{s1} + v_{R1} + v_{s2} + v_{R2} = 0$$



4- Aplica-se a **Lei de Ohm** para expressar  $v_{R1}$  e  $v_{R2}$  em função de  $i$ :

$$\begin{aligned} v_{R1} &= R_1 \cdot i & v_{R2} &= R_2 \cdot i \\ -v_{s1} + R_1 \cdot i + v_{s2} + R_2 \cdot i &= 0 \end{aligned}$$

$$i = \frac{v_{s1} - v_{s2}}{R_1 + R_2}$$

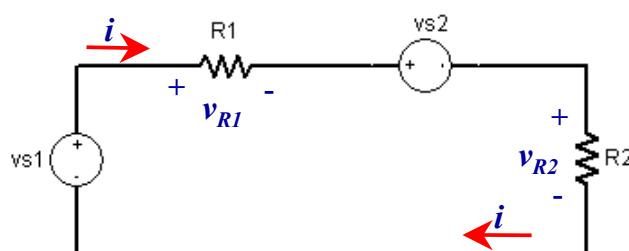
## Círculo com um só loop

• Sabendo  $i$  podemos calcular praticamente tudo sobre o circuito, por exemplo:

- A tensão aos terminais de R1:  $v_{R1} = R_1 \cdot i$

- A potência dissipada em R2:  $p_{R2} = R_2 \cdot i^2$

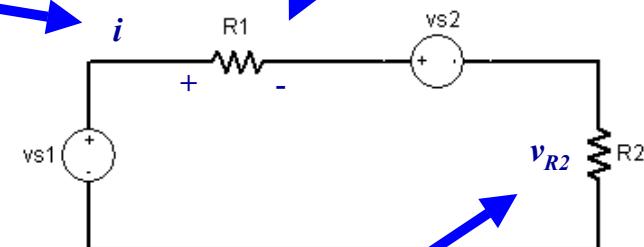
- As potências absorvidas por cada uma dos geradores:  $p_{s1} = v_{s1} \cdot (-i)$   
 $p_{s2} = v_{s2} \cdot i$



## Erros frequentes!...

Indicar polaridade... mas  
não indicar a tensão!

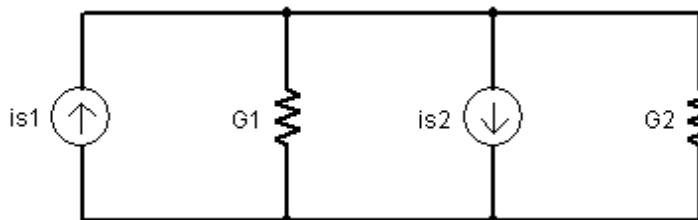
Indicar corrente...  
mas não o sentido!



Indicar tensão... mas não  
a polaridade!

## Círculo com um par de nós

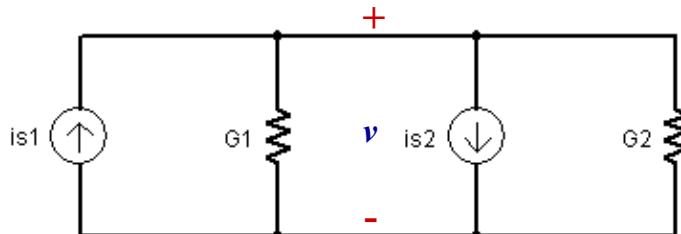
- Pretendemos analisar o **círculo paralelo** dado;



- Neste caso, como se trata de um círculo paralelo, a grandeza mais importante a determinar (da qual todas as outras dependem) é a **tensão,  $v$** , entre os dois nós.

## Círculo com um par de nós – determinação de $v$

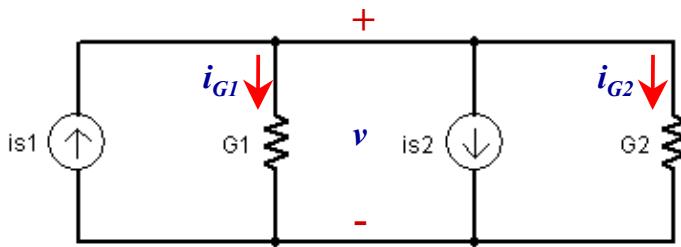
1- Arbitrar uma polaridade de referência para a tensão  $v$ ;



**Aplicação da KCL**

Lembremos que elementos em paralelo estão todos à mesma tensão.

2- Escolher sentidos de referência para as correntes desconhecidas;

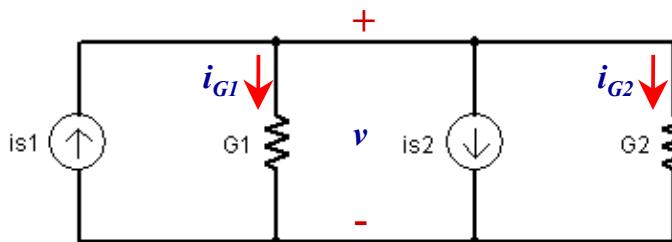


Convém escolher os sentidos de forma a que as correntes entrem pelo lado positivo da tensão.

## Círculo com um par de nós – determinação de $v$

3- Com base na **Lei das Correntes de Kirchhoff**, escrever a equação do nó:

$$-i_{s1} + i_{G1} + i_{s2} + i_{G2} = 0$$



4- Aplica-se a **Lei de Ohm** para expressar  $i_{G1}$  e  $i_{G2}$  em função de  $v$ :

$$\begin{aligned} i_{G1} &= G_1 \cdot v \\ -i_{s1} + G_1 \cdot v + i_{s2} + G_2 \cdot v &= 0 \end{aligned}$$

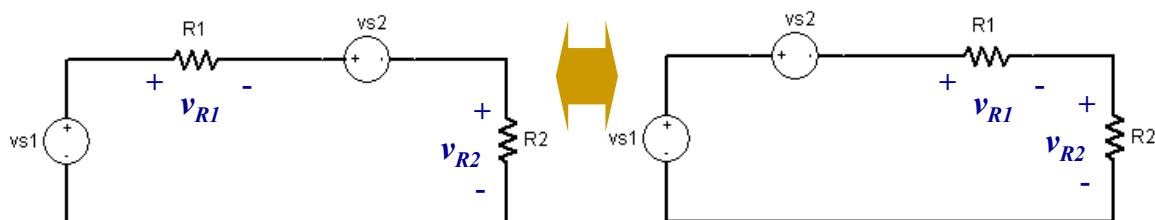
$$v = \frac{i_{s1} - i_{s2}}{G_1 + G_2}$$

## Combinação de fontes e resistências

... para simplificar a análise de circuitos

### Combinação de fontes

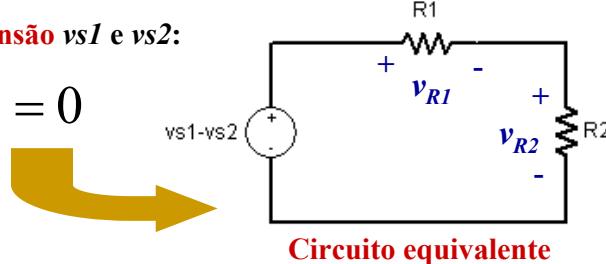
- Notar que a posição relativa dos elementos num circuito série não afecta a corrente no mesmo.



$$-\nu_{s1} + \nu_{R1} + \nu_{s2} + \nu_{R2} = 0 \quad -\nu_{s1} + \nu_{s2} + \nu_{R1} + \nu_{R2} = 0$$

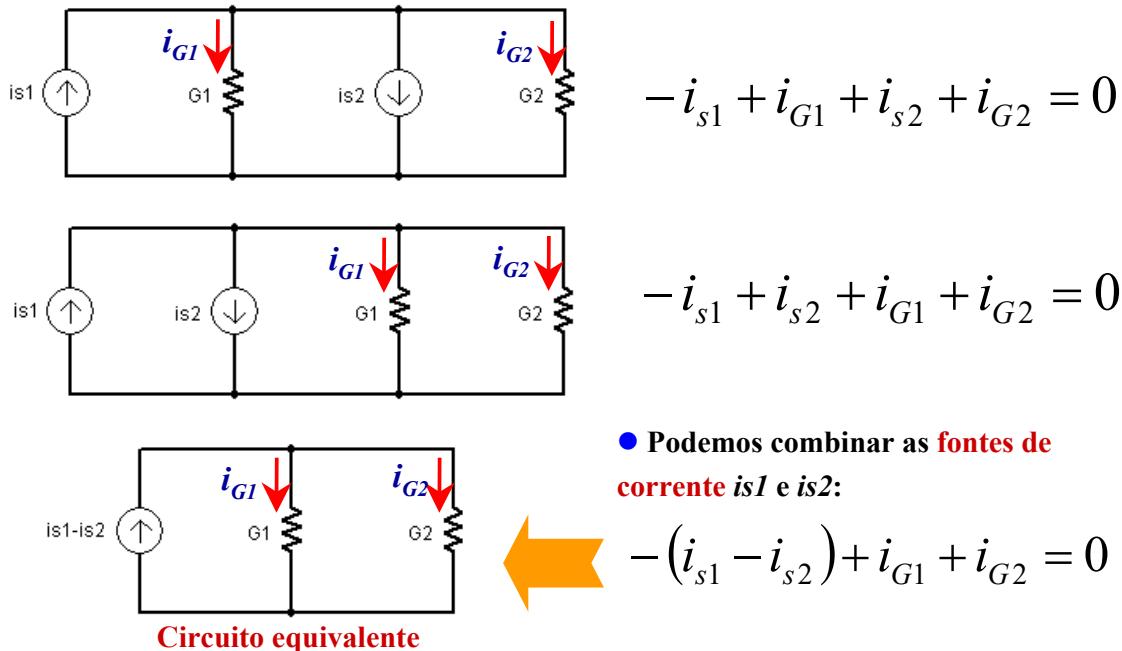
- Podemos combinar as fontes de tensão  $\nu_{s1}$  e  $\nu_{s2}$ :

$$-(\nu_{s1} - \nu_{s2}) + \nu_{R1} + \nu_{R2} = 0$$



## Combinação de fontes

- O mesmo pode ser feito para as fontes de corrente.

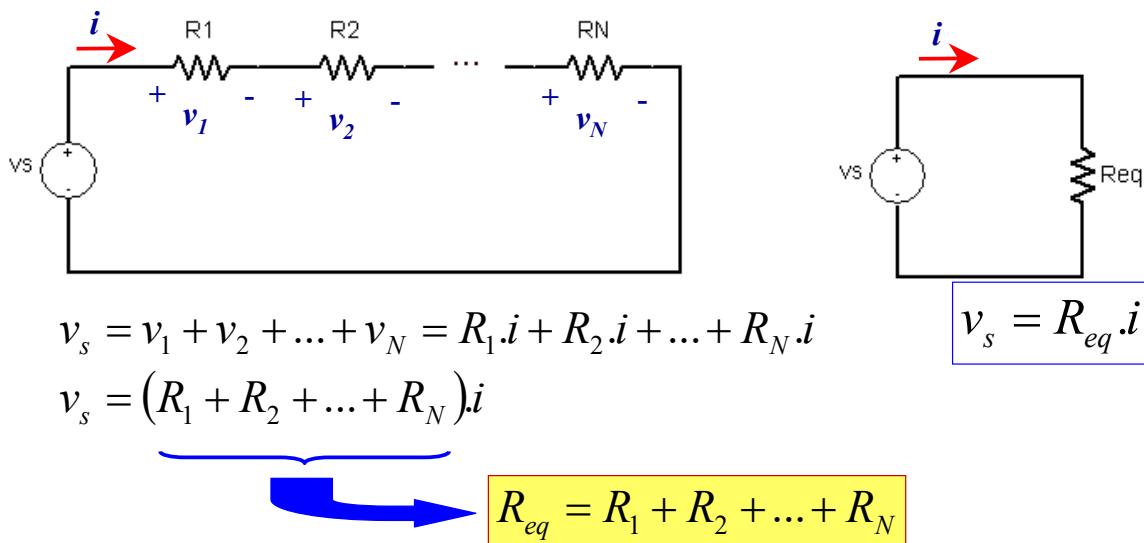


E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

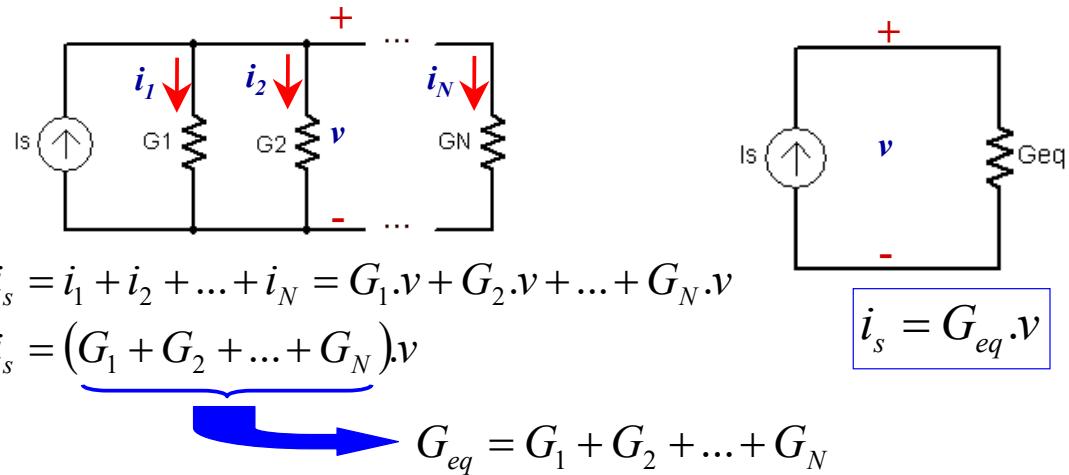
1.2-31

## Combinação de resistências – em série

- Num circuito podemos substituir combinações de resistências por uma resistência equivalente;



## Combinação de resistências – em paralelo

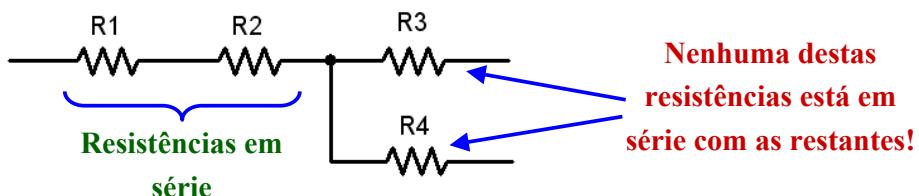


**Nota:** Para  $N=2$  a resistência equivalente é dada por:

$$R_{eq2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2}$$

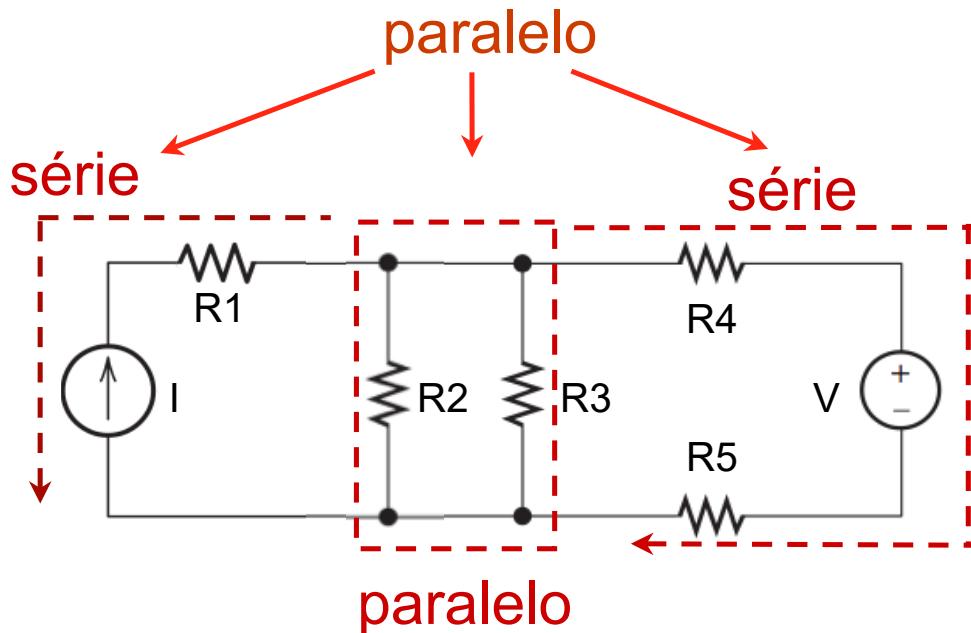
$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

## Erros frequentes: Combinação de resistências



- Nos elementos em série, não pode haver derivação nos pontos intermédios.

## Erros frequentes: Paralelos e séries



## Divisores de tensão e de corrente

Circuitos muito comuns em electrónica!

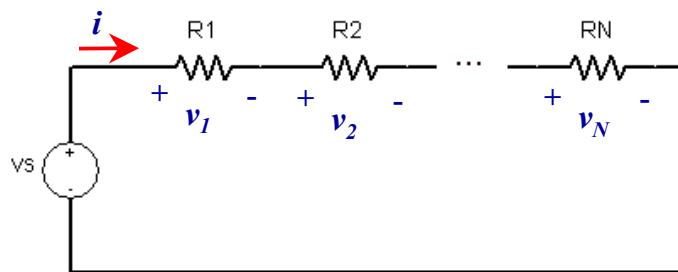
## Divisor de tensão

- Serve para exprimir a tensão aos terminais de uma resistência num circuito com várias resistências em série.

- Aplicando a Lei de Ohm a  $R_j$  (com  $1 \leq j \leq N$ )

$$v_j = R_j \cdot i$$

- Aplicando a mesma lei ao circuito todo



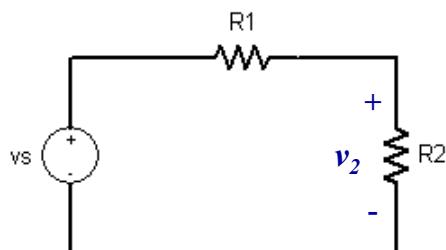
$$i = \frac{v_s}{R_1 + R_2 + \dots + R_N}$$

- Substituindo na expressão acima dá:

$$v_j = \frac{R_j}{R_1 + R_2 + \dots + R_N} v_s$$

## Divisor de tensão com duas resistências

- Aparece com mais frequência com apenas duas resistências (ou dois conjuntos) ligadas a uma fonte de tensão.



$$v_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} v_s$$

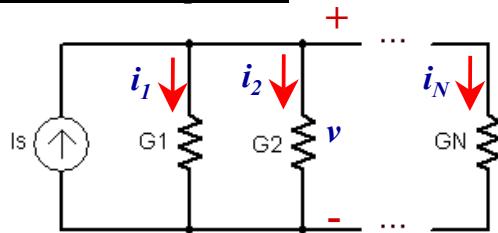
**Mnémónica:** Tensão numa das resistências é a *resistência em causa* a dividir pela soma das resistências, vezes a tensão da fonte.

## Divisor de corrente

- É o dual do divisor de tensão e serve para exprimir a corrente através de uma resistência num circuito com várias resistências em paralelo.

- Aplicando a Lei de Ohm a  $G_j$  (com  $1 \leq j \leq N$ )

$$i_j = G_j \cdot v$$



- Aplicando a mesma lei ao circuito todo

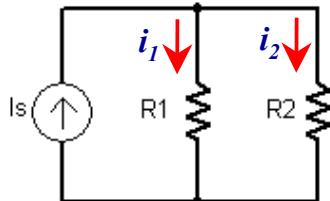
$$v = \frac{i_s}{G_1 + G_2 + \dots + G_N}$$

- Substituindo na expressão acima dá:  $i_j = \frac{G_j}{G_1 + G_2 + \dots + G_N} i_s$

- Ou:  $i_j = \frac{1/R_j}{1/R_1 + 1/R_2 + \dots + 1/R_N} i_s$

## Divisores de corrente com duas resistências

- É também com apenas duas resistências (ou grupos de resistências) que o divisor de corrente surge com mais frequência.



$$i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_s$$

**Mnémónica:** Corrente numa das resistências é a *outra resistência* a dividir pela soma das resistências, vezes a corrente da fonte.

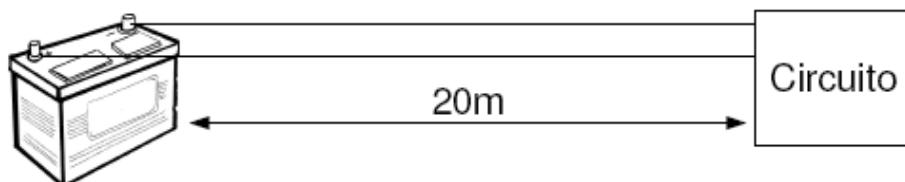
## Exercício de aplicação

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

1.2-41

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

### Problema

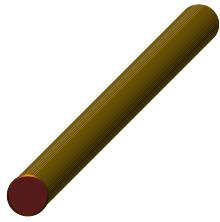


Um par de condutores de cobre com  $0,75\text{mm}^2$  de secção é utilizado para ligar uma bateria de 12 V (tensão nominal) ao circuito que alimenta. O circuito e a bateria estão distantes entre si de 20m.

- Determine a resistência de cada um destes condutores.
- Se o circuito consumir 3A e a bateria tiver uma tensão de 12,3 V aos seus terminais, qual a d.d.p. aos terminais do circuito?

## Resolução

### 1º: Resistência de cada fio condutor, $R_C$



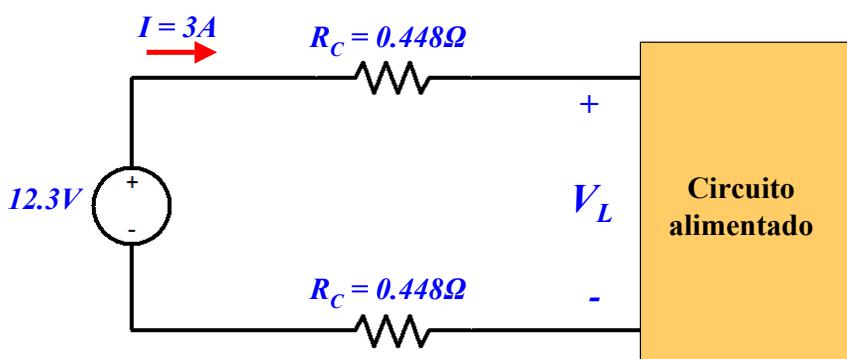
$$R_C = \rho \frac{L}{A}$$

$\rho = 1.68 \times 10^{-8} \Omega \cdot m$   
 $L = 20m$   
 $A = 0.75 \text{ mm}^2 = 0.75 \times 10^{-6} \text{ m}^2$

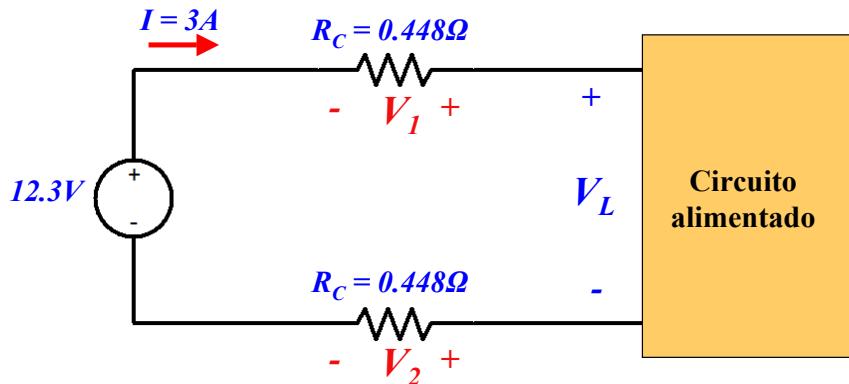
$$R_C = 1.68 \times 10^{-8} \frac{20}{0.75 \times 10^{-6}} = 0.448 \Omega$$

### 2º: Tensão aos terminais do circuito, $V_L$

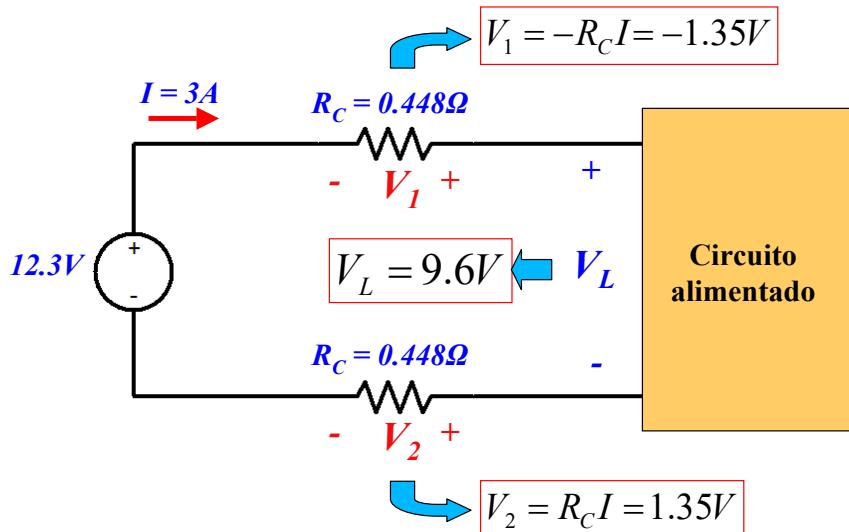
O circuito equivalente é:



- Para determinar  $V_L$  vamos usar **KVL**;
- ...mas para isso precisamos de marcar tensões de referência nas resistências.



- Aplicando **KVL**, obtermos:  $-12.3 - V_1 + V_L + V_2 = 0$
- Usando a **Lei de Ohm**:  $V_1 = -R_C I$  e  $V_2 = R_C I$
- Substituindo...  $-12.3 + R_C I + V_L + R_C I = 0$
- Substituindo os valores de  $R_C$  e  $I$ :  $-12.3 + 2(0.448 \times 3) + V_L = 0$   
 $V_L = 9.6V$



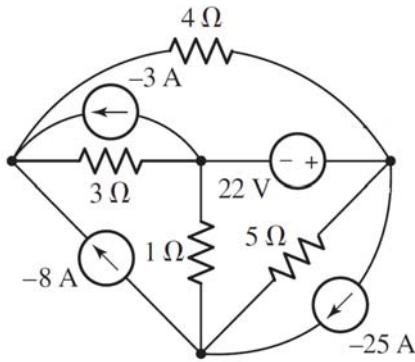
- As tensões  $V_1$  e  $V_2$  é costume chamar-se **quedas de tensão**.

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos*

**(parte 1)**



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## **Sumário**

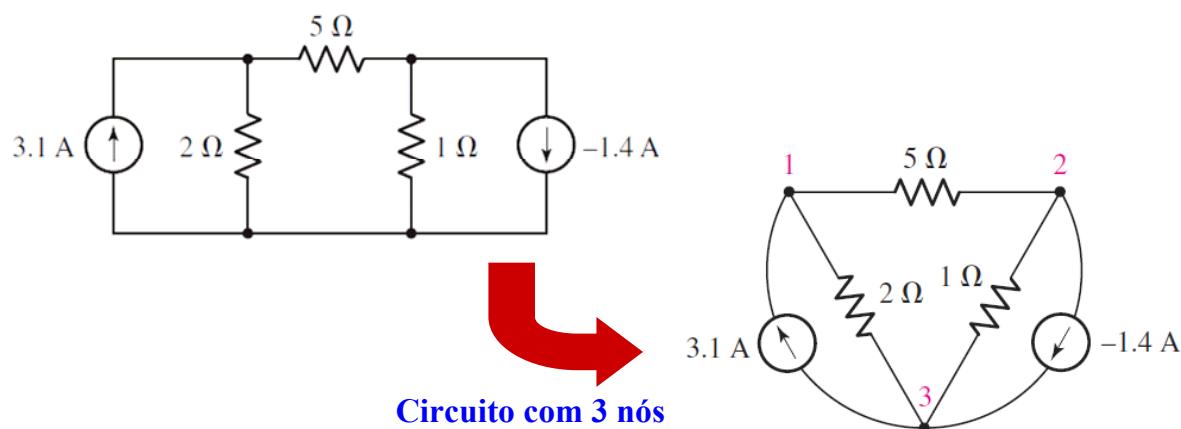
- Análise de Nodal;
- Exemplos de cálculo;
- Análise Nodal com super-nós;
- Linearidade e sobreposição;
- Exemplos de cálculo.

## Análise Nodal

2.1-3

## Análise de Nodal

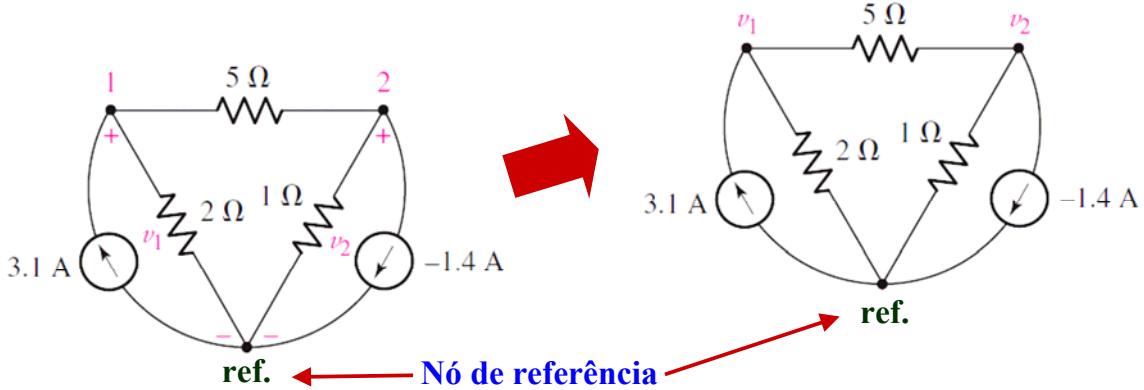
- Método sistemático que permite determinar as tensões em todos os nós de um circuito;
- **nó** – Ponto de ligação de dois ou mais elementos num circuito;



2.1-4

## Análise de Nodal – nó de referência

- Dado que uma tensão é sempre definida entre dois nós, designamos um dos nós do circuito como **Nó de Referência** – em relação ao qual todas as tensões são medidas.

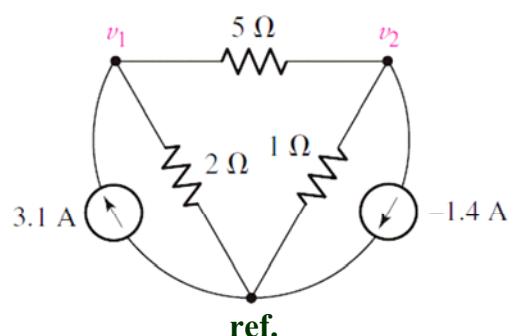


- Quando referirmos, por exemplo, a tensão  $v_1$ , estaremos a referir-nos na realidade à tensão entre o **nó 1** e o **nó de referência**.

2.1-5

## Análise de Nodal

- Para todos os efeitos práticos, o potencial eléctrico no **nó de referência** é considerado nulo;
- Um circuito com  $N$  nós tem  $N-1$  tensões – as **Tensões Nodais**;
- A polaridade de referência das tensões nodais é geralmente considerada positiva (+) em cada nó e negativa (-) no nó de referência;
- Aplicando KCL a todos os nós **excepto o de referência**, obtemos um sistema de  $N-1$  equações com  $N-1$  incógnitas que nos permite determinar as tensões nodais.



2.1-6

## Análise Nodal – exemplo 1

- Aplicemos KCL aos nós do circuito;

**KCL:** “A soma das correntes que entram num nó é igual à soma das correntes que saem desse nó”

nó 1:  $3.1 = i_1 + i_3$

nó 2:  $i_3 = i_2 - 1.4$

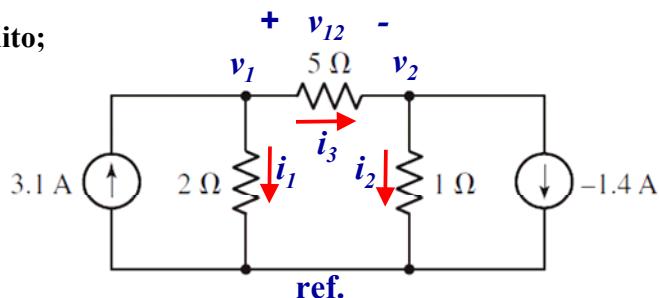
- Exprimimos agora cada uma das correntes em função das tensões:

$$i_1 = v_1 / 2 \quad i_2 = v_2 / 1 \quad i_3 = v_{12} / 5 = (v_1 - v_2) / 5$$

- Substituindo acima obtém-se

$$\begin{aligned} 3 &= 0.5v_1 + 0.2(v_1 - v_2) \\ 0.2(v_1 - v_2) &= 1v_2 - 2 \end{aligned}$$

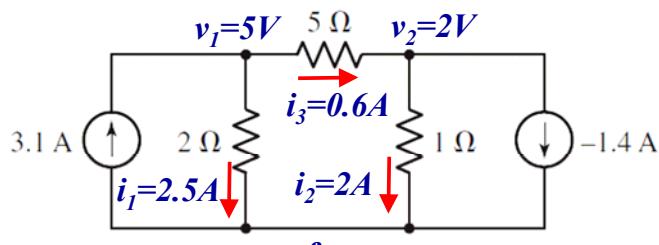
2.1-7



## Análise Nodal – exemplo 1

- O que, rearranjando, dá o sistema:

$$\begin{cases} 3.5v_1 - v_2 = 15.5 \\ -v_1 + 6v_2 = 7 \end{cases}$$



- Resolvendo por substituição obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 5V \\ v_2 = 2V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais podemos agora calcular todas as correntes no circuito

$$i_1 = v_1 / 2 = 2.5A$$

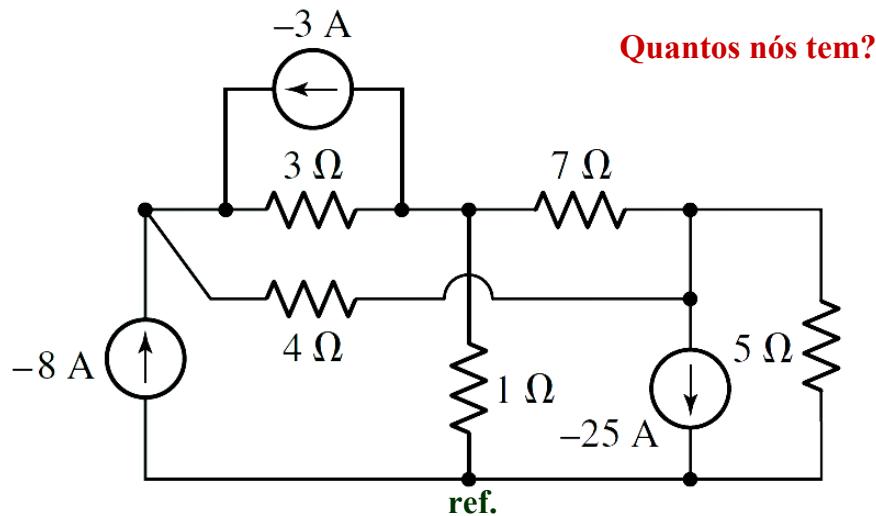
$$i_2 = v_2 / 1 = 2A$$

$$i_3 = (v_1 - v_2) / 5 = 0.6A$$

2.1-8

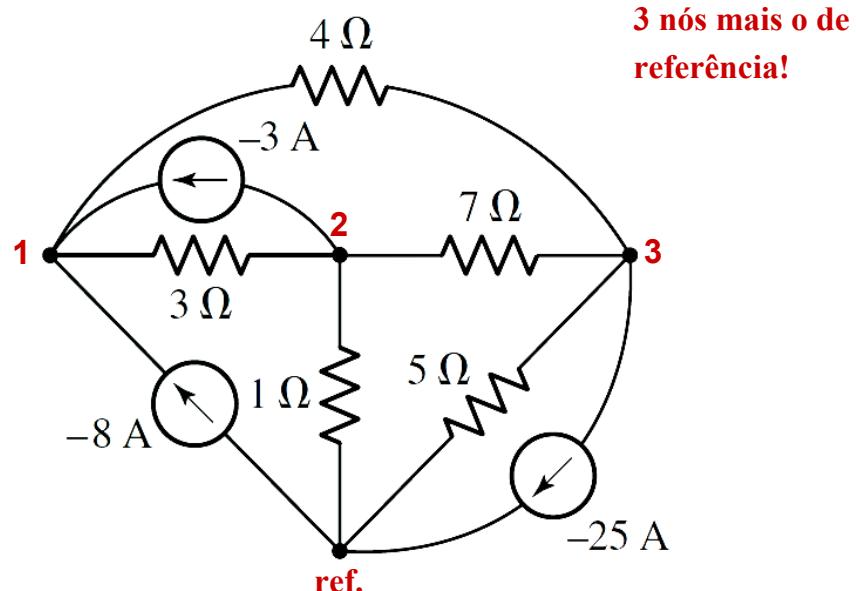
## Análise Nodal – exemplo 2

- Determinar as tensões nodais no circuito dado.



2.1-9

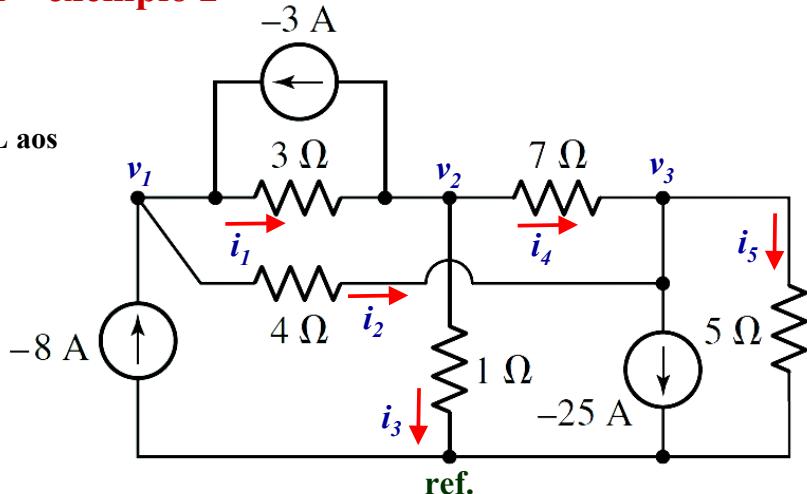
## Análise Nodal – exemplo 2



2.1-10

## Análise Nodal – exemplo 2

- Aplicando KCL aos três nós:



$$\text{nó 1: } -8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$\text{nó 2: } i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

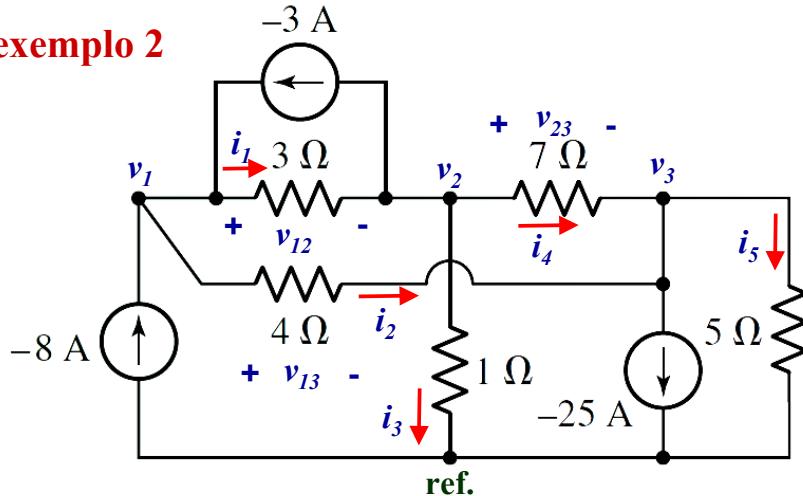
$$\text{nó 3: } i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

2.1-11

## Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 1:



$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

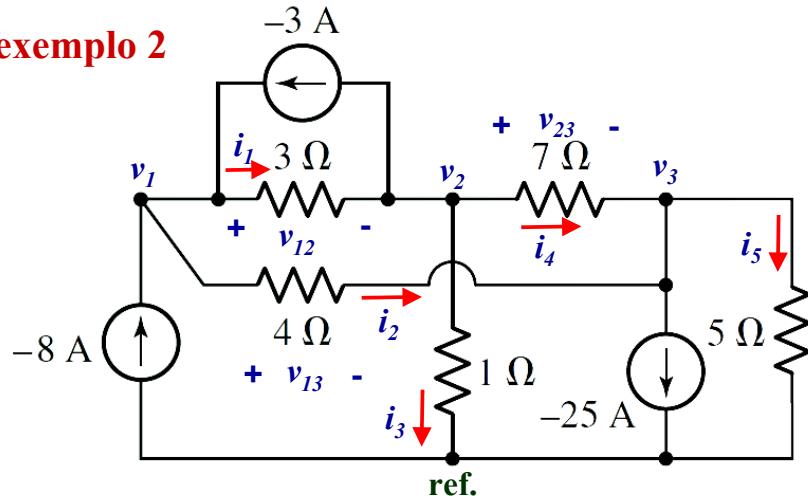
$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

2.1-12

## Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 2:



$$i_1 = -3 + i_3 + i_4$$

$$v_{12}/3 = -3 + v_2/1 + v_{23}/7 \Leftrightarrow \frac{v_1 - v_2}{3} = -3 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_2 - v_3}{7}$$

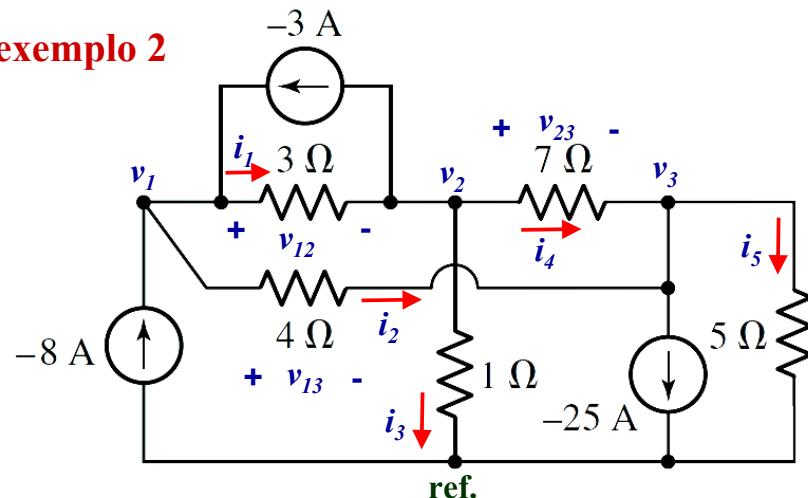
$$7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63$$

2.1-13

## Análise Nodal – exemplo 2

- Relacionando as correntes com as tensões, obtemos:

nó 3:



$$i_4 + i_2 = -25 + i_5$$

$$v_{23}/7 + v_{13}/4 = -25 + v_3/5 \Leftrightarrow \frac{v_2 - v_3}{7} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -25 + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500$$

2.1-14

## Análise Nodal – exemplo 2

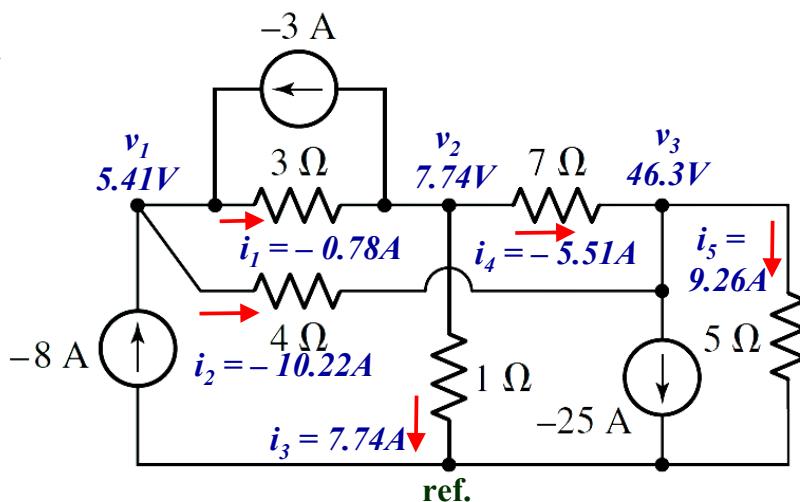
- O sistema de equações é:

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 7v_1 - 31v_2 + 3v_3 = -63 \\ 35v_1 + 20v_2 - 83v_3 = -3500 \end{cases}$$

- Resolvendo obtém-se:

$$\begin{cases} v_1 = 5.41V \\ v_2 = 7.74V \\ v_3 = 46.3V \end{cases}$$

- Com as tensões nodais, podemos agora calcular todas as correntes.



## Análise Nodal passo a passo

- Contar o número de nós  $N$ ;
- Escolher um dos nós como **nó de Referência**;
- Atribuir tensões aos nós:  $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}$ ;
- Marcar correntes em todos os ramos;
- Usando a Lei das Correntes de Kirchhoff (KCL), escrever  $N-1$  equações nodais.



## Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

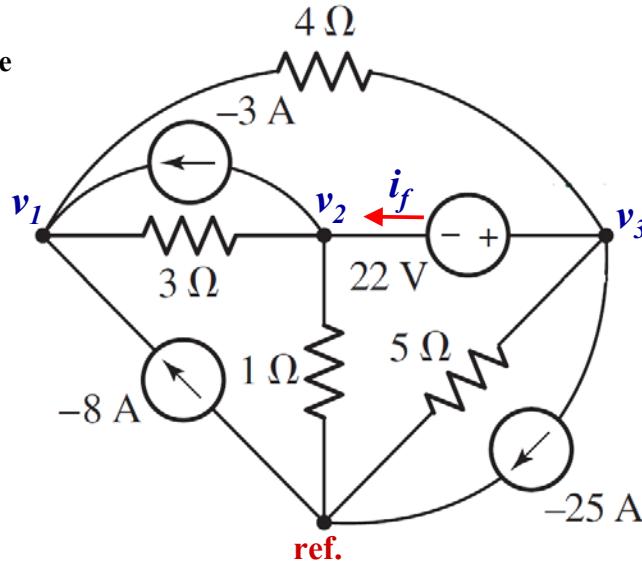
Como resolver?

### Processo 1

- marcar uma corrente na fonte de tensão:  $i_f$
- aplicar KCL aos 3 nós
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:  
 $v_3 - v_2 = 22$

Resultado:

4 equações com 4 incógnitas  
**MUITO COMPLICADO!!**



2.1-17

## Análise Nodal – Com fontes de tensão no meio

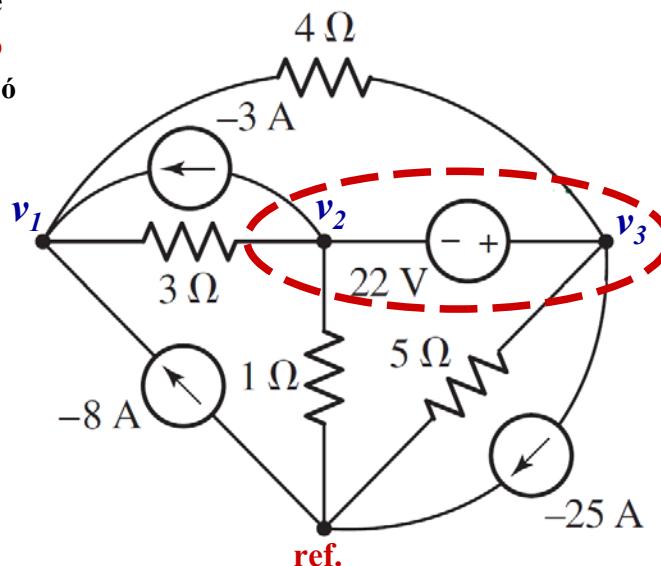
### Processo 2

- tratar os nós 2 e 3 mais a fonte de tensão como um só nó: **um super nó**
- aplicar KCL ao nó 1 e ao super-nó
- aplicar KVL aos nós 2 e 3:  
 $v_3 - v_2 = 22$

Resultado:

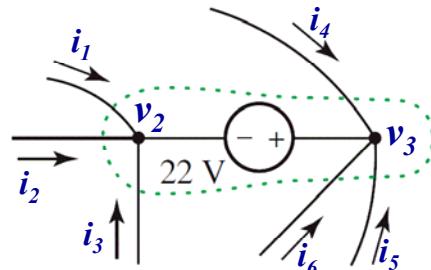
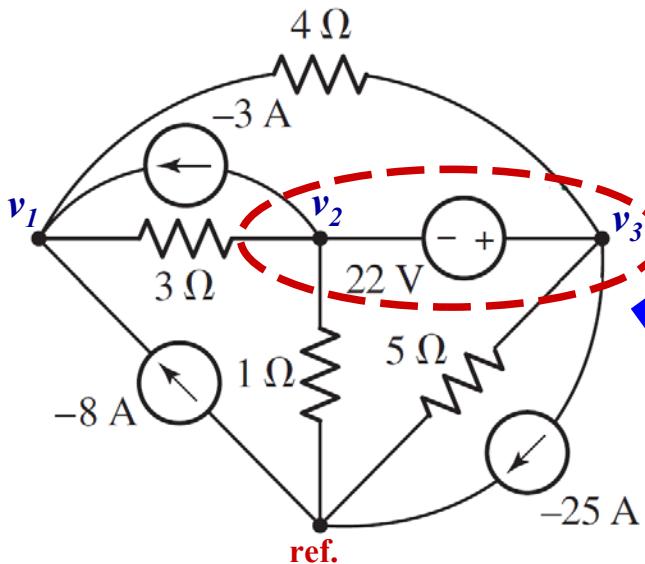
3 equações com 3 incógnitas

**PROCESSO MAIS SIMPLES!!**



2.1-18

## Análise Nodal – com super-nó



$$\sum_{k=0}^6 i_k = 0$$

- Se a soma das correntes que entram no nó  $v_2$  é zero e a soma das correntes que entram no nó  $v_3$  é zero, então a soma das correntes que entram nos dois nós também tem de ser zero.

2.1-19

## Análise Nodal – com super-nó

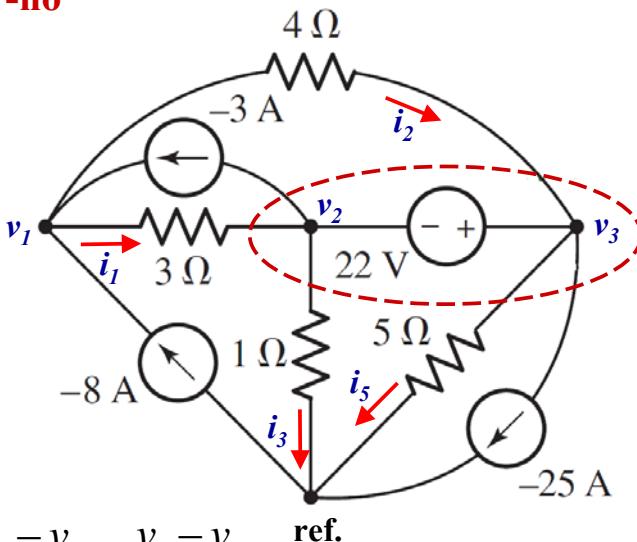
- Aplicaremos então KCL

nó 1:

$$-8 - 3 = i_1 + i_2$$

$$-8 - 3 = v_{12}/3 + v_{13}/4 = \frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4}$$

$$7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132$$

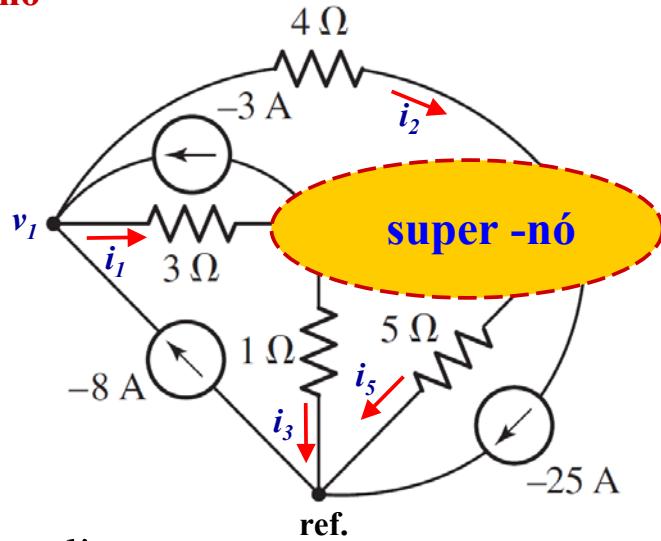


... é a mesma equação do exemplo anterior

2.1-20

## Análise Nodal – com super-nó

**NOTA:** O super-nó inclui a fonte de tensão + os dois nós aos quais a fonte está ligada



### super -nó:

$$i_1 + i_2 = -3 + i_3 + i_5 - 25$$

$$\frac{v_1 - v_2}{3} + \frac{v_1 - v_3}{4} = -28 + \frac{v_2}{1} + \frac{v_3}{5}$$

$$35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680$$

2.1-21

## Análise Nodal – com super-nó

- Finalmente, aplicamos KVL ao super-nó:

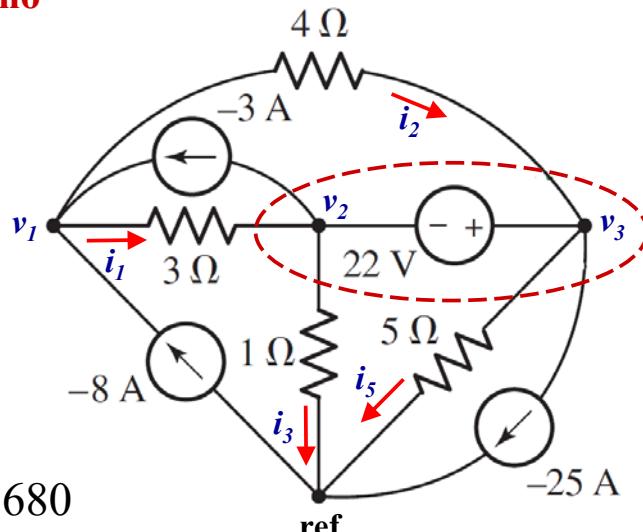
$$v_3 - v_2 = 22$$

- pelo que o sistema de equações final é

$$\begin{cases} 7v_1 - 4v_2 - 3v_3 = -132 \\ 35v_1 - 80v_2 - 27v_3 = -1680 \\ v_3 - v_2 = 22 \end{cases}$$

- Resolvendo obtém-se:

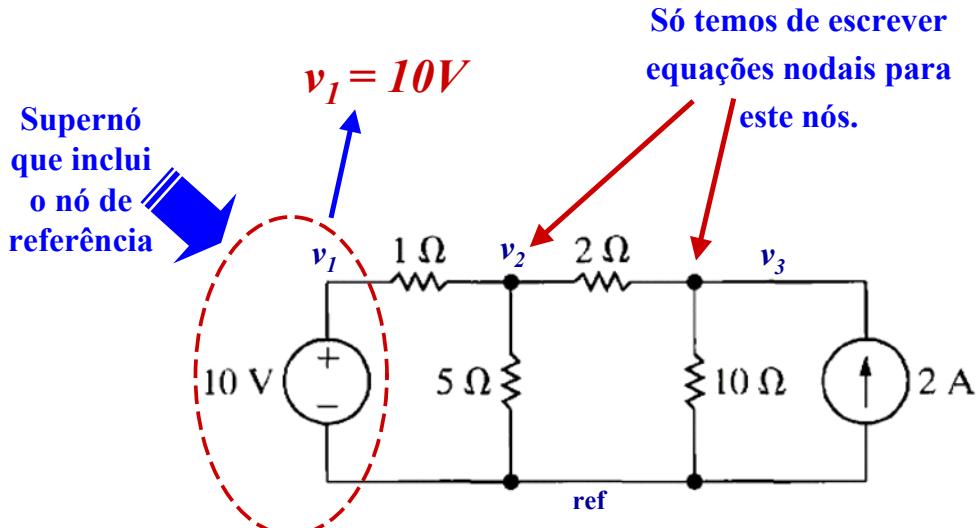
$$\begin{cases} v_1 = 1.07V \\ v_2 = 10.5V \\ v_3 = 32.5V \end{cases}$$



2.1-22

## Análise Nodal – super-nó que contém o nó de referência

- Quando o super-nó inclui o nó de referência a análise fica mais fácil!



2.1-23

## Análise Nodal passo a passo (com super-nós)

- Contar o número de nós  $N$ ;
- Escolher nó de Referência;
- Atribuir tensões aos nós:  $v_1, v_2, \dots, v_{N-1}$ ;
- Marcar correntes em todos os ramos;
- Se o circuito contiver fontes de tensão, formar super-nós que contenham essas fontes e os nós a que estão ligados;
- Usando KCL, escrever uma equação para cada nó (excepto o de referência) e para cada super-nó que não contenha o nó de referência;
- Usando KVL relacionar a tensão de cada fonte com as tensões nodais.

2.1-24

## Linearidade e Sobreposição

2.1-25

### Linearidade

● **Círcuito linear** – É um circuito composto apenas por:

- Elementos lineares;
- Fontes independentes;
- Fontes dependentes lineares.

● **Elemento linear** – É um elemento passivo que tem uma relação linear entre a tensão aos seus terminais e a corrente que o percorre.

Exemplo:

- Resistência:  $v = R.i$ ;
- Condensador e bobina.

2.1-26

## Princípio da Sobreposição

- É a consequência mais importante da linearidade.
- **Princípio da Sobreposição:** A resposta de um circuito com mais do que uma fonte pode obter-se como a soma das respostas individuais devidas a cada uma das fontes, actuando sozinhas.
- Em termos formais, podemos expressar o **Princípio da Sobreposição** como:

$$f(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)$$

Em que

- $x_1, x_2, \dots, x_n$  são as fontes;
- $f()$  são as respostas.

2.1-27

## Princípio da Sobreposição

Em termos mais concretos, pode ser enunciado como

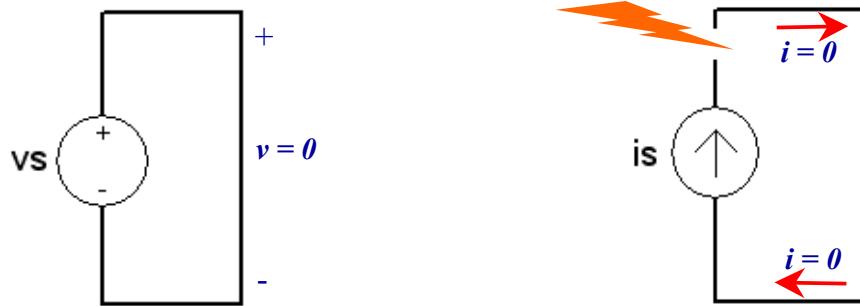
Em qualquer circuito linear contendo várias fontes, as tensões/correntes em qualquer nó/ramo podem ser calculadas **adicionando** as tensões/correntes individuais provocadas por cada uma das fontes actuando sozinhas.

2.1-28

## Desactivação das *outras* fontes

- Para determinar o efeito provocado por uma fonte, devemos **desactivar** todas as outras fontes independentes:

- Fontes de tensão devem ser **curto-circuitadas**, anulando assim a sua tensão;
- Fontes de corrente devem ser **abertas**, anulando assim a sua corrente.



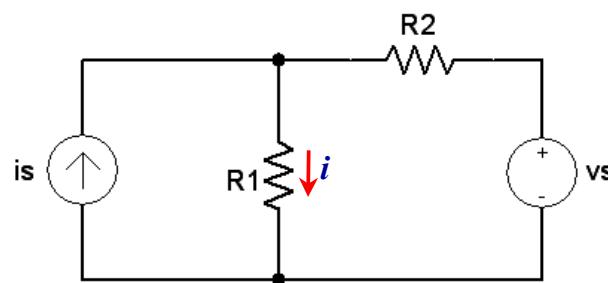
**Nota:** fontes dependentes não se desactivam!

2.1-29

## Aplicação do Princípio da Sobreposição

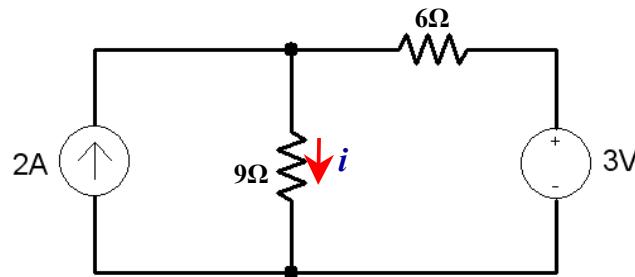
- Para o circuito dado, se

- $i_1$  for a corrente em  $R1$  produzida só por  $i_s$ , e
- $i_2$  for a corrente em  $R1$  produzida só por  $v_s$ , então
- a corrente produzida pelas duas fontes em simultâneo será  $i = i_1 + i_2$



2.1-30

## Exemplo: Para o circuito dado, calcular $i$

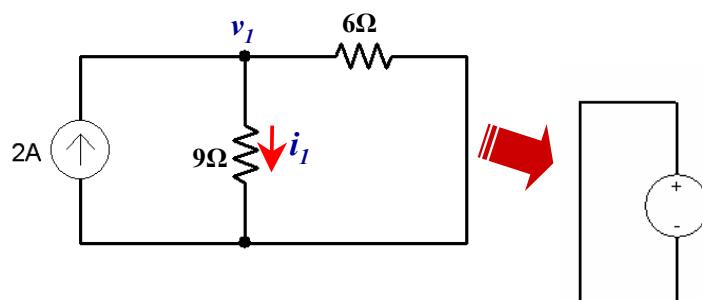


2.1-31

## Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

**1º passo:** Consideremos primeiro só o efeito da fonte de corrente:

➤ Desactivamos a fonte de tensão.



$$v_1 = 2(6//9) = 7.2V$$

$$\text{com } 6//9 = \frac{6 \times 9}{6 + 9}$$

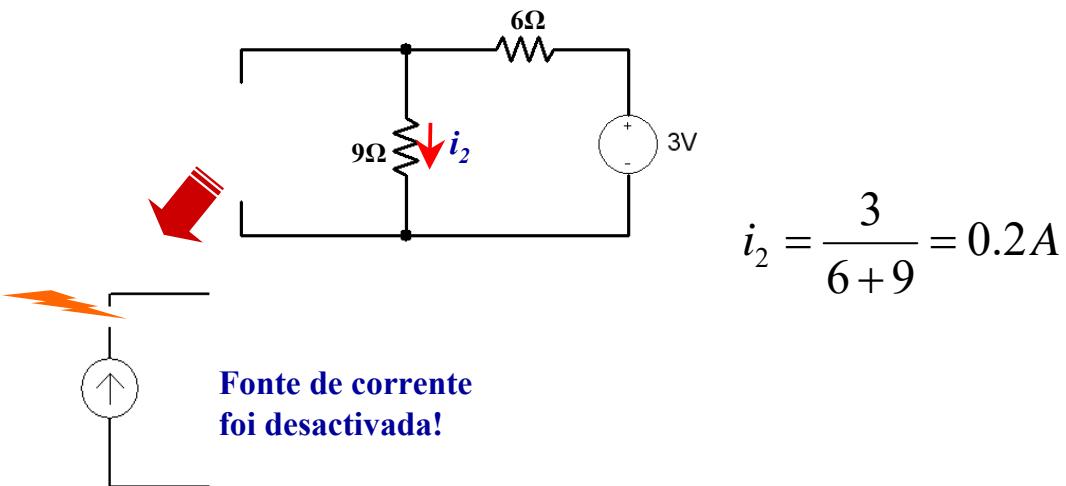
$$i_1 = \frac{v_1}{9} = \frac{7.2}{9} = 0.8A$$

2.1-32

## Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

**2º passo:** Consideremos agora só o efeito da fonte de tensão:

- Desactivamos a fonte de corrente;

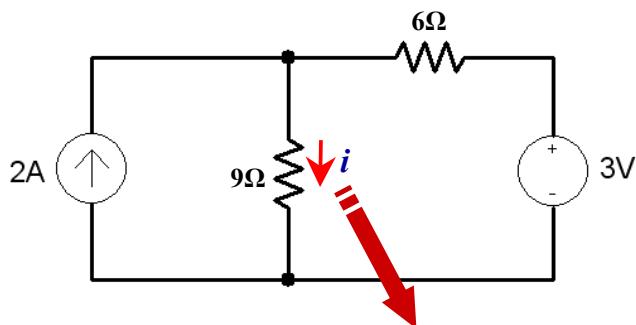


2.1-33

## Exemplo - Resolução usando o Princípio da Sobreposição

**3º passo:** Aplicamos o Princípio da Sobreposição

- $i$  vai ser dada pela soma dos contributos  $i_1$  e  $i_2$  de cada uma das fontes



$$i = i_1 + i_2 = 0.8 + 0.2 = 1A$$

2.1-34

## Princípio da Sobreposição – algumas notas

- Se tivermos  $N$  fontes independentes, o circuito será analisado  $N$  vezes considerando uma fonte de cada vez;
- Contudo, nada obriga a que apenas uma fonte esteja activa em cada análise, embora essa seja a situação mais fácil;

2.1-35

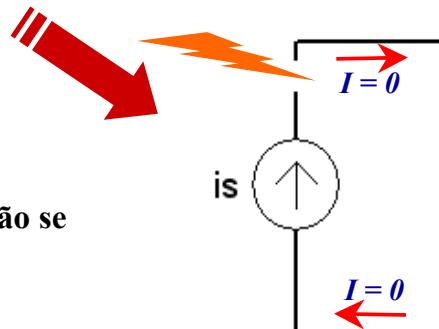
## Princípio da Sobreposição – não esquecer!

### Como se desactivam as fontes independentes?

- Fontes de tensão são curto-circuitadas  $\Rightarrow V = 0$ ;

 $V = 0$ 

- Fontes de corrente são abertas  $\Rightarrow I = 0$ ;

 $I = 0$ 

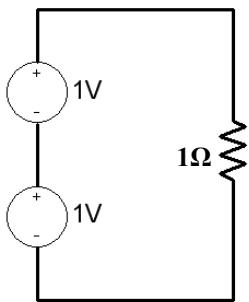
- Fontes dependentes não se desactivam.

2.1-36

## Princípio da Sobreposição – nota final

- Como o princípio só se aplica a respostas lineares, então NÃO se aplica à determinação da potência!

**Exemplo:** Potência dissipada na resistência?  $P = \frac{v^2}{R} = \frac{(1+1)^2}{1} = 4W$



Se pretendêssemos aplicar o Princípio da Sobreposição considerando que  $P = P_1 + P_2$ , sendo  $P_1$  e  $P_2$  as potências devidas a cada uma das fontes a actuar em separado, teríamos

$$P_1 = \frac{1^2}{1} = 1W \quad P_2 = \frac{1^2}{1} = 1W$$

o que resultaria num valor errado da potência na resistência:

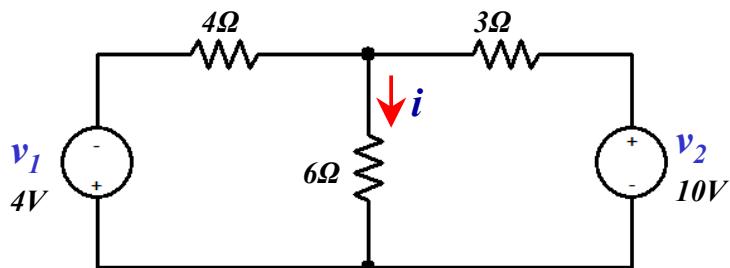
$$P = P_1 + P_2 = 2W$$

**Sobreposição não funciona com potências!**

2.1-37

## Princípio da Sobreposição – Exercício

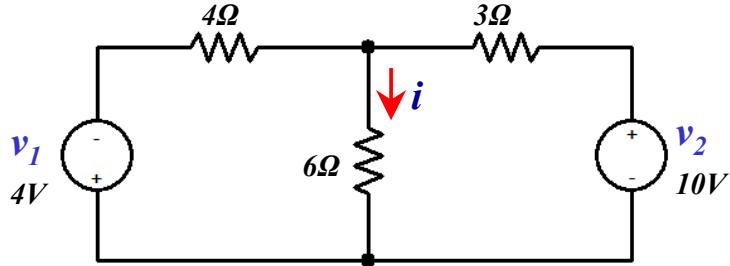
- Usando o princípio da sobreposição calcule  $i$ ;
- Determine o valor que a fonte de tensão  $v_1$  deve ter, para que a corrente  $i$  duplique.



2.1-38

## Princípio da Sobreposição – Exercício

a)



- Cada uma das fontes,  $v_1$  e  $v_2$ , vai contribuir para a corrente  $i$ :

- $i_1$  a corrente produzida só por  $v_1$ , e
- $i_2$  a corrente produzida só por  $v_2$

$$i = i_1 + i_2$$

2.1-39

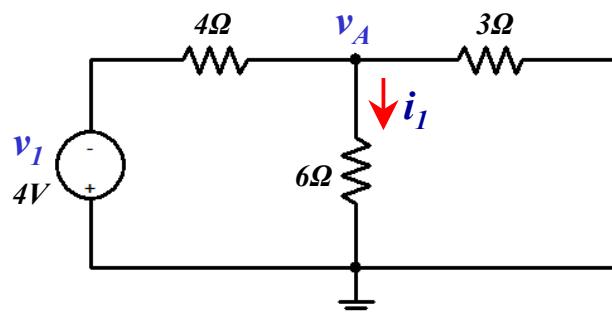
## Princípio da Sobreposição – Exercício

a)

- Calculemos o contributo da fonte  $v_1$

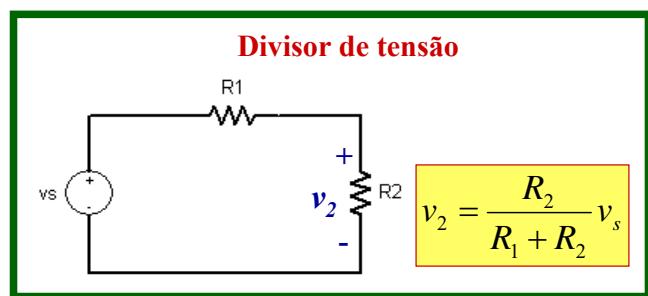
Usando a fórmula do divisor de tensão:

$$v_A = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1$$



$$i_1 = \frac{v_A}{6}$$

$$i_1 = -\frac{3//6}{3//6+4} v_1 \cdot \frac{1}{6} = -\frac{v_1}{18}$$



2.1-40

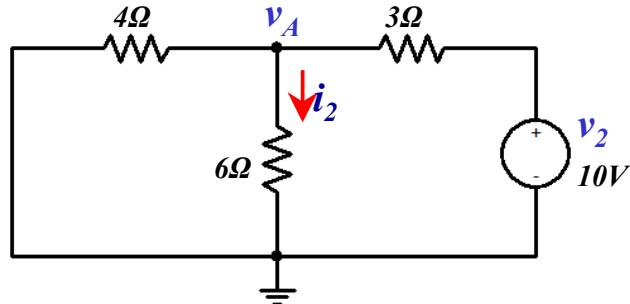
## Princípio da Sobreposição – Exercício

a)

- E agora o contributo da fonte  $v_2$

$$v_A = \frac{4//6}{4//6+3} v_2$$

- Para  $v_2 = 10V$

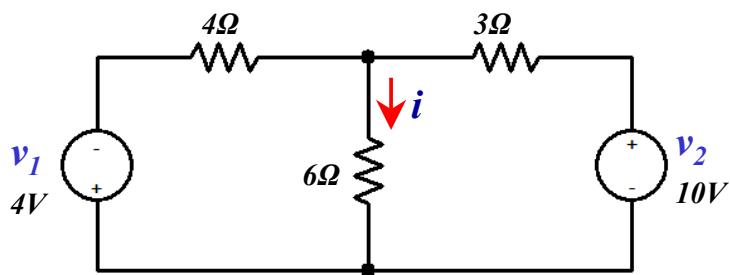


$$i_2 = v_A \frac{1}{6} = \frac{4//6}{4//6+3} 10 \frac{1}{6} = \frac{20}{27} A$$

2.1-41

## Princípio da Sobreposição – Exercício

a)



- Aplicando agora Sobreposição, calculamos a corrente  $i$ :

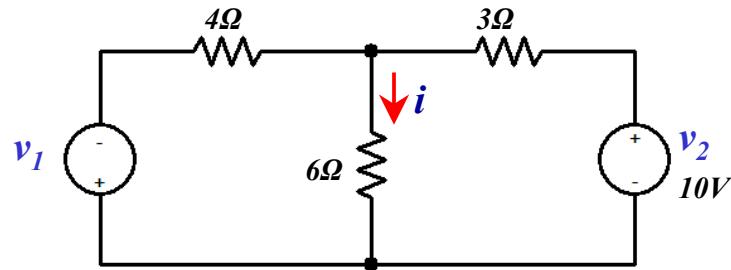
$$i = i_1 + i_2 = -\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27}$$

O que para  $v_1 = 4V$  dá     $i = \frac{14}{27} A$

2.1-42

## Princípio da Sobreposição – Exercício

**b)** Calculemos agora o valor de  $v_1$  que duplica o valor da corrente  $i$ .



● Para isso basta resolver a equação

$$-\frac{v_1}{18} + \frac{20}{27} = 2x(\text{valor obtido em } a) = 2x \frac{14}{27}$$

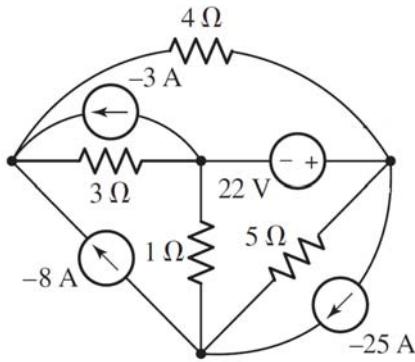
$$\text{que dá } v_1 = -\frac{16}{3} = -5.33V$$

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 2: Técnicas de Análise de Circuitos*

**(parte 2)**



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## **Sumário**

- Teorema de Thévenin;
- Exemplos de cálculo;
- Teorema de Norton;
- Equivalência entre Thévenin e Norton;
- Equivalente de Thévenin: Método Universal;
- Exemplos de cálculo.

## Teoremas de Thévenin e Norton



Léon Charles Thévenin  
(1857 - 1926)

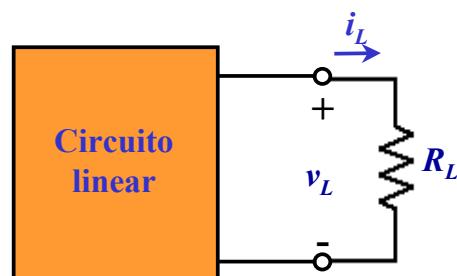


Edward Lawry Norton  
(1898 - 1983)

2.2-3

## Teoremas de Thévenin e Norton

- Duas técnicas que permitem simplificar a análise de circuitos lineares.

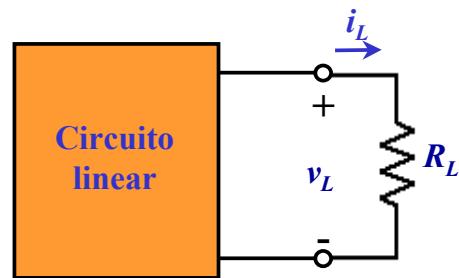


- Teoremas úteis nos casos em que estamos interessados em saber o que se passa **apenas numa parte do circuito**, por ex:

- Qual é a potência dissipada em  $R_L$ ?
- Qual é o valor de  $v_L$  para diferentes valores de  $R_L$ ?

2.2-4

## Teorema de Thévenin

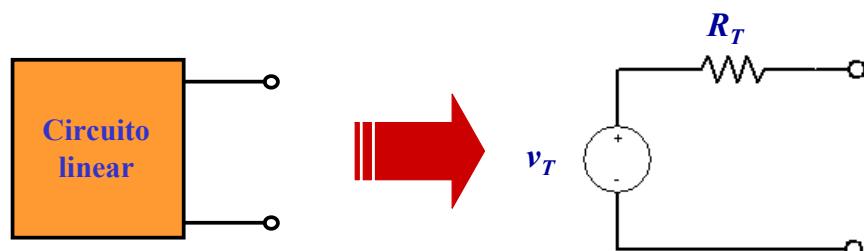


- Segundo o teorema de Thévenin, podemos substituir todo o circuito linear por um circuito equivalente mais simples;
- A análise do que se passa em  $R_L$  prossegue depois usando este circuito equivalente.

2.2-5

## Teorema de Thévenin

- Segundo o Teorema de Thévenin, o circuito equivalente é constituído por uma fonte de tensão com uma resistência em série.

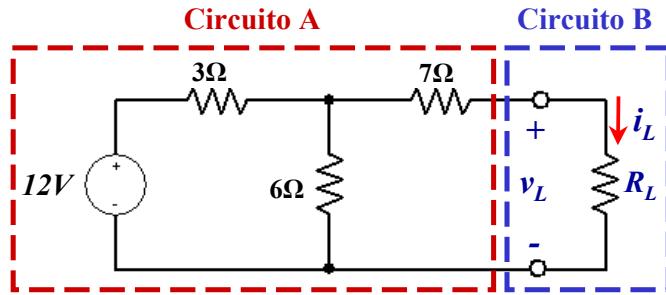


2.2-6

## Teorema de Thévenin

- A aplicação dos teoremas de Thévenin (e Norton), pressupõe que conseguimos dividir o circuito em duas partes:
  - **Círcuito A:** o circuito que pretendemos simplificar – o tal circuito linear;
  - **Círcuito B:** o circuito que queremos manter – pode ser uma resistência, mas também pode ser um circuito com mais elementos.

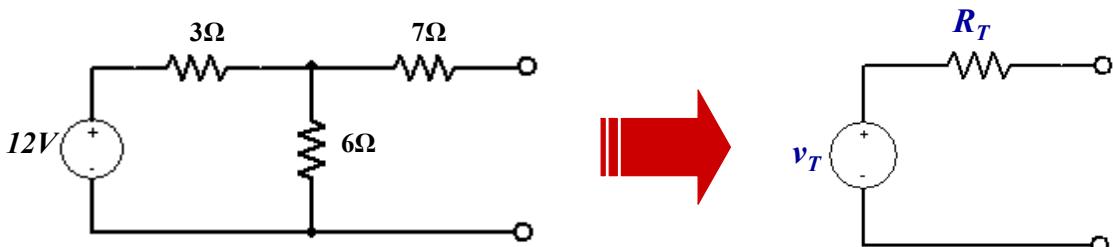
- Se estivermos apenas interessados em saber o que se passa em  $R_L$ , então...



2.2-7

## Equivalente de Thévenin do Círculo A

- Determinar o equivalente de Thévenin do **círculo A** resume-se a ... determinar os valores de  $v_T$  e  $R_T$  do equivalente.

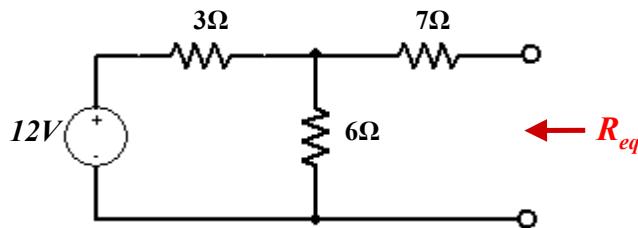
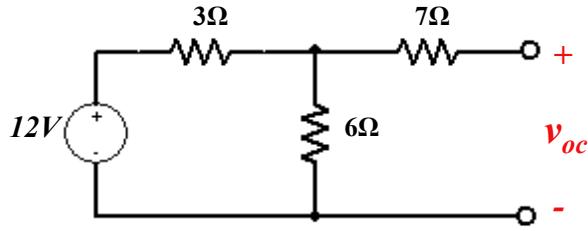


Como se procede então?

2.2-8

## Equivalente de Thévenin do Circuito A

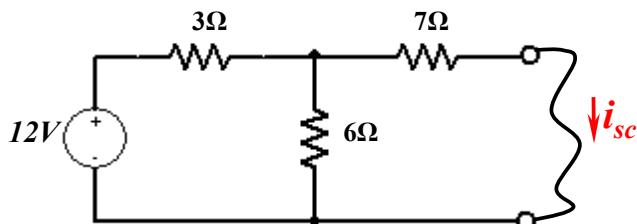
- Determinamos a tensão que aparece aos terminais do circuito A em circuito aberto, ou seja, depois de B ser desligado.
- Determinamos a resistência equivalente entre os terminais do circuito A quando este é desativado - todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).



2.2-9

## Equivalente de Thévenin do Circuito A

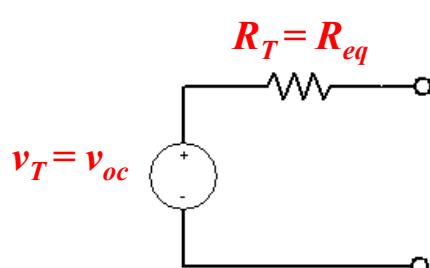
- Se for mais fácil, podemos determinar a corrente entre os terminais do circuito A quando estes são curto-circuitados – a corrente de curto-círcuito:



Esta corrente relaciona-se com os valores anteriores por:

$$i_{sc} = \frac{v_{oc}}{R_{eq}}$$

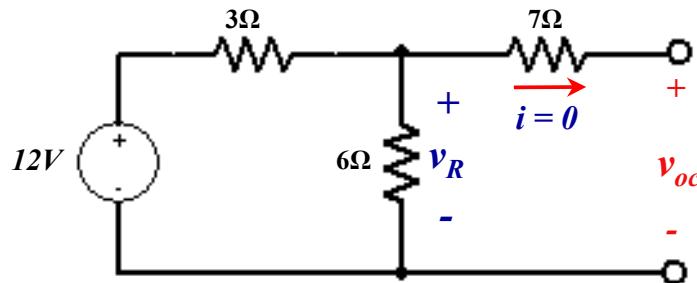
Finalmente, o equivalente de Thévenin do circuito A é dado por



2.2-10

## Aplicação do teorema de Thévenin

**1- Determinação de  $v_{oc}$ , a tensão em circuito aberto do circuito A:**

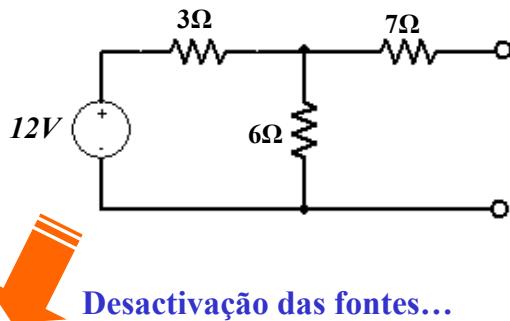


$$v_{oc} = v_R = \frac{6}{6+3} 12 = 8V$$

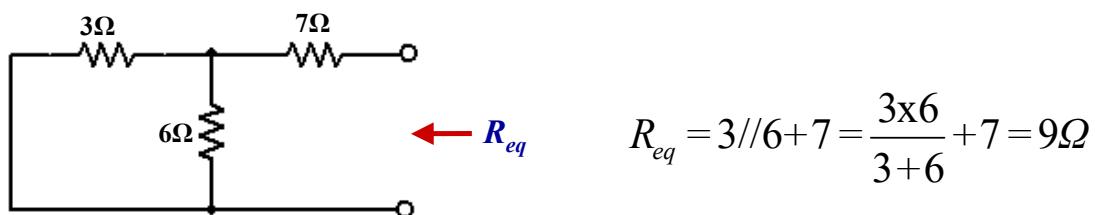
2.2-11

## Aplicação do teorema de Thévenin

**2- Determinação de  $R_{eq}$ , a resistência equivalente ou de saída:**



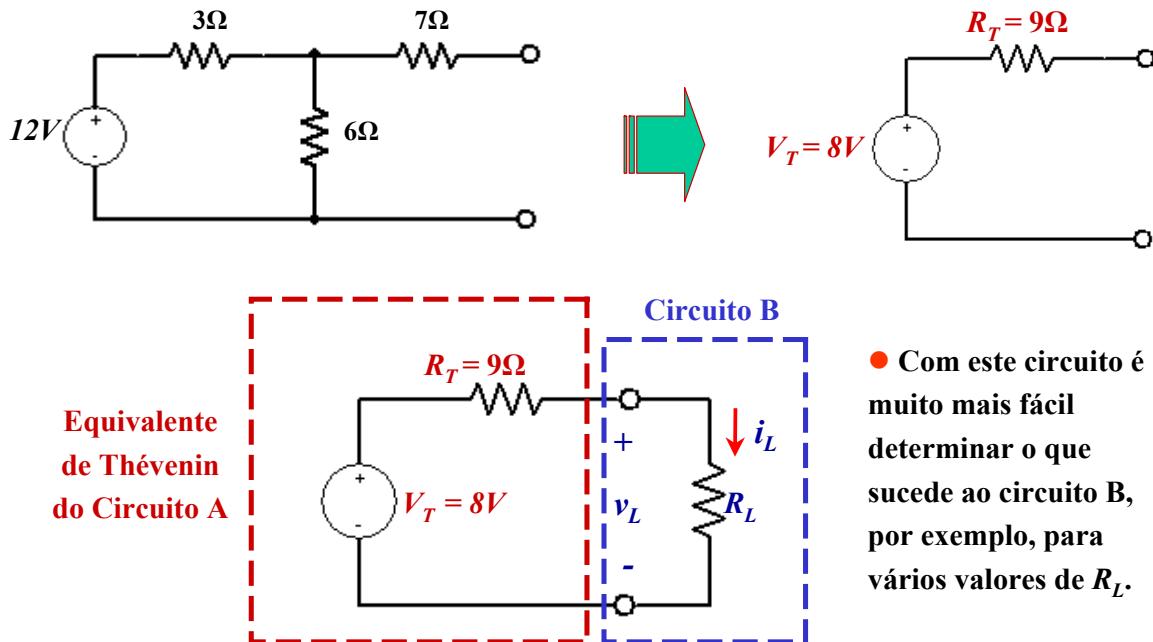
Desactivação das fontes...



2.2-12

## Aplicação do teorema de Thévenin

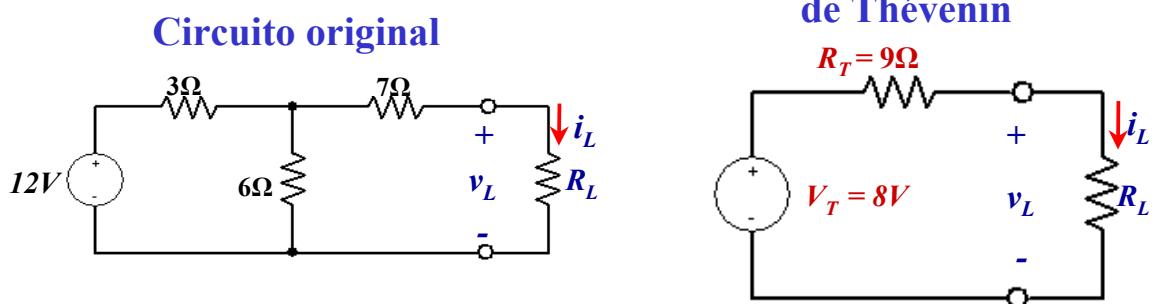
- O equivalente de Thévenin do circuito A é portanto:



2.2-13

## Aplicação do teorema de Thévenin

### Círculo c/ equivalente de Thévenin



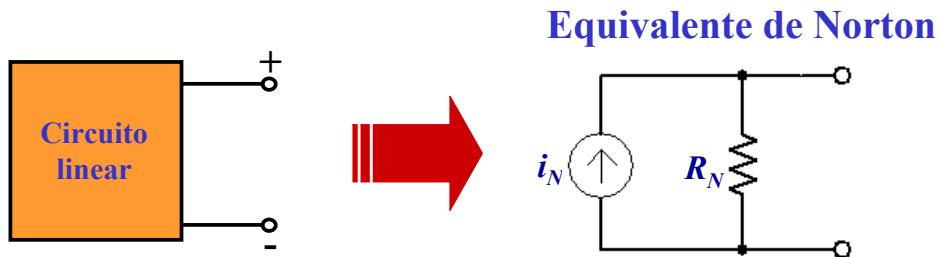
- Com o equivalente de Thévenin é possível obter informações úteis que não estão disponíveis de imediato no circuito original:

- O valor máximo de  $v_L$  (tensão de circuito aberto) é 8V;
- O valor máximo de  $i_L$  (corrente de curto-círcuito) é (8/9)A;
- O circuito A fornece a potência máxima quando  $R_L = 9\Omega$ .

2.2-14

## Teorema de Norton

- Com a aplicação deste teorema obtemos também um circuito mais simples, só que neste caso o equivalente é constituído por uma **fonte de corrente** com uma **resistência em paralelo**.



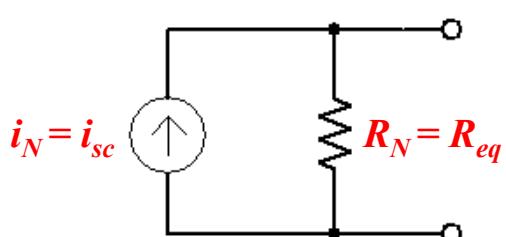
Como se procede para obter  $i_N$  e  $R_N$ ?

2.2-15

## Teorema de Norton

1.  $i_N$  é igual à corrente que flui entre os terminais do **círculo A** quando estes são curto-circuitados, ou seja, é a corrente de curto-círcuito,  $i_{sc}$  ;
- $R_N$  é igual à resistência equivalente,  $R_{eq}$ , entre os terminais do **círculo A** quando este é **desativado** - todas as fontes independentes de tensão são curto-circuitadas e todas as fontes independentes de corrente são abertas (as fontes dependentes mantêm-se).

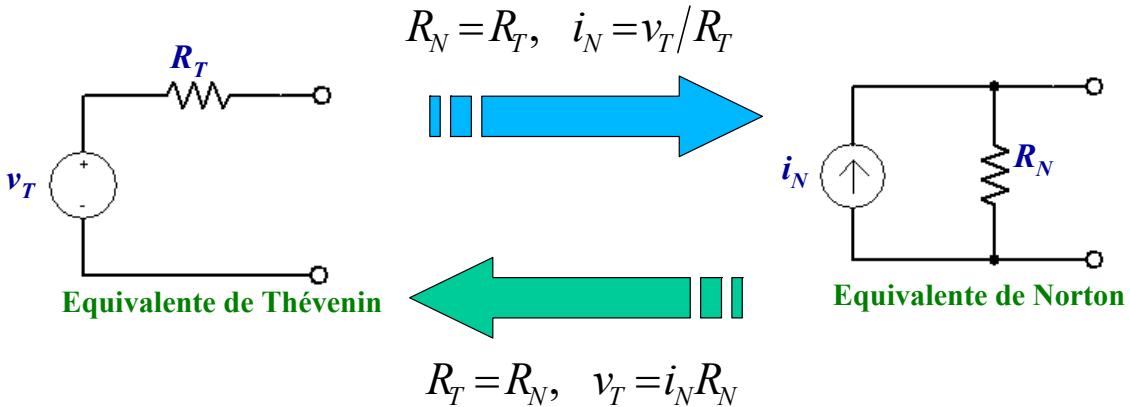
**Equivalente de Norton**



2.2-16

## Equivalência entre Thévenin e Norton

- Os equivalentes de Thévenin e Norton são equivalentes entre si;

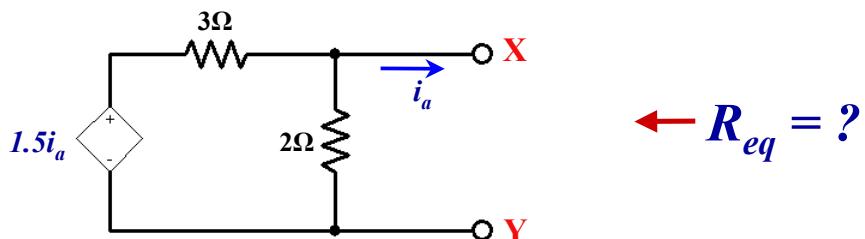


2.2-17

## Equivalentes de Thévenin e Norton – dificuldades

- Em circuitos com fontes dependentes, por vezes é impossível obter os valores de  $R_T$  ou  $R_N$ .

**Exemplo:** determinar o equivalente de Thévenin do circuito entre X e Y.



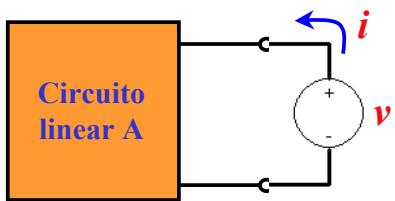
- Obter  $R_{eq}$  por simples combinação de resistências não é possível porque a fonte dependente não pode ser desactivada.

2.2-18

## Equivalente de Thévenin - Método universal

- É um método que pode ser aplicado a todos os circuitos.

### Como funciona?



- Dado o **círcuito A**...

- ... aplicamos nos terminais uma fonte de tensão de valor  $v$ , com corrente  $i$ .

- Depois analisamos o circuito de forma a obter uma expressão de  $v$  em função de  $i$ , com a forma

$$v = ai + b$$

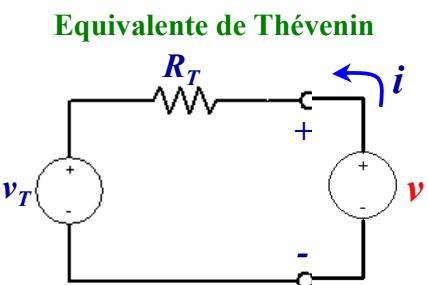
- Dos coeficientes  $a$  e  $b$  tiramos

$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

2.2-19

## Método universal - demonstração

- É fácil mostrar que o Método Universal funciona recorrendo ao próprio Equivalente de Thévenin.



- Aplicamos então aos terminais uma fonte de tensão de valor  $v$ , com corrente  $i$ .

- Aplicando KVL:  $-v_T - R_T i + v = 0$

$$v = R_T i + v_T$$

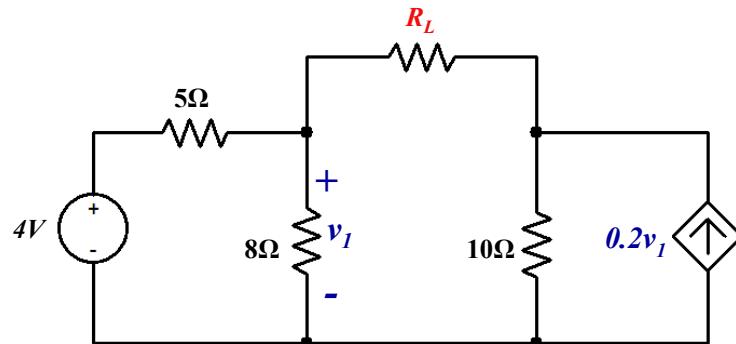
- Obtemos então uma relação de  $v$  em função de  $i$ , com a forma

$$v = ai + b$$

- Donde se conclui que  $a = R_T$  e  $b = v_T$ .

2.2-20

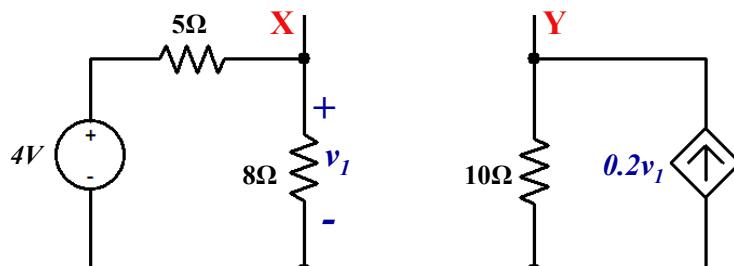
**Exemplo:** determinar o equivalente de Thévenin visto pela resistência  $R_L$ .



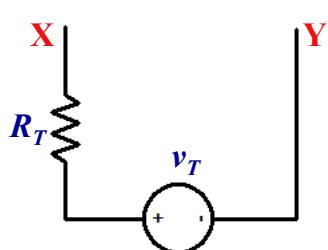
2.2-21

**Exemplo**

● Retiramos  $R_L$  e determinarmos o Equivalente de Thévenin entre os terminais X e Y.



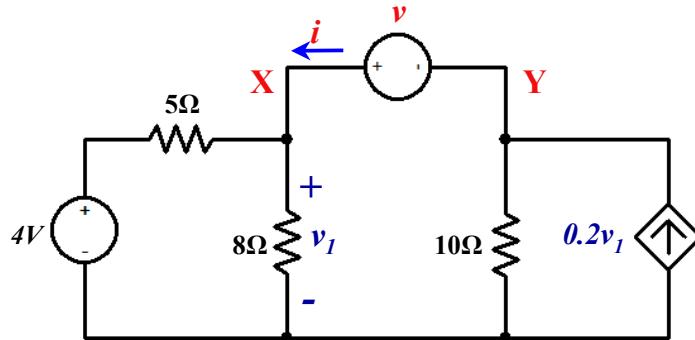
Equivalent de  
Thévenin



2.2-22

### Exemplo

- Como o circuito tem uma fonte dependente, teremos de usar o **Método Universal**;



- Agora o objectivo é determinar uma relação matemática de  $v$  em função de  $i$ , com a forma

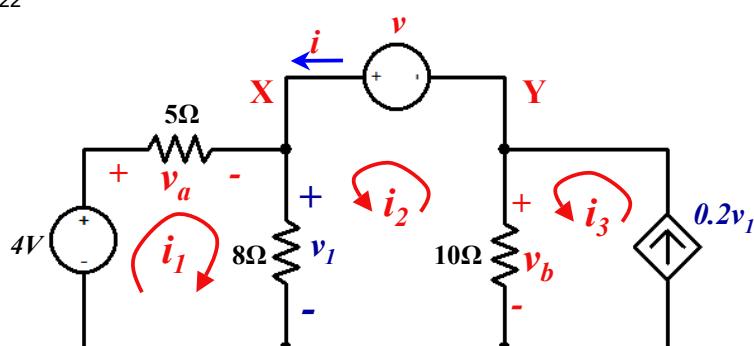
$$v = ai + b$$

2.2-23

### Exemplo

- Vamos fazer uma Análise de Malhas;

- Marcamos correntes de malha...



- ... e tensões nas resistências;

- Aplicando KVL:
 
$$\begin{cases} -4 + v_a + v_1 = 0 \\ -v_1 + v + v_b = 0 \\ i_3 = 0.2v_1 \end{cases}$$

Sendo as tensões dadas

por:

$$v_a = 5i_1$$

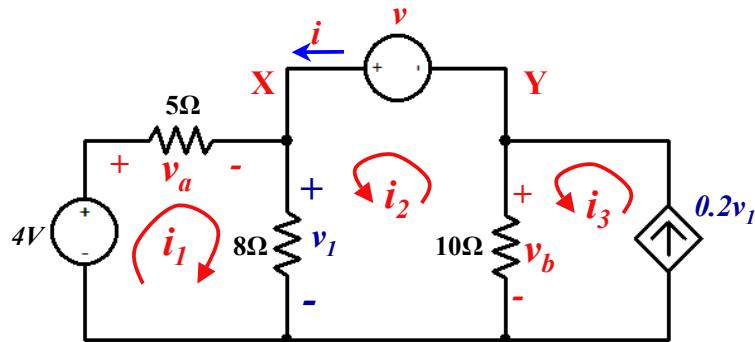
$$v_b = 10(-i_2 + i_3)$$

$$v_1 = 8(i_1 + i_2)$$

2.2-24

**Exemplo**

- Substituindo as tensões e sabendo que  $i_2 = i$ :



$$\begin{cases} -4 + 5i_1 + 8(i_1 + i) = 0 \\ -8(i_1 + i) + v + 10(-i + i_3) = 0 \\ i_3 = 0.2[8(i_1 + i)] \end{cases}$$

- Eliminando as incógnitas  $i_1$  e  $i_3$ , ficamos com uma expressão apenas com  $v$  e  $i$ , como pretendido

$$v = 6.92i - 2.46$$

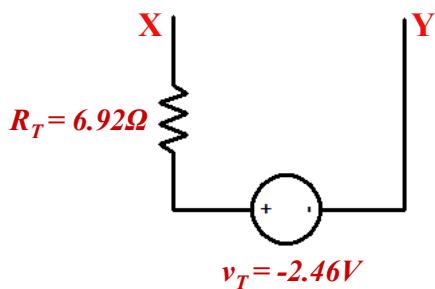
2.2-25

**Exemplo**

$$v = 6.92i - 2.46$$

$$v = ai + b$$

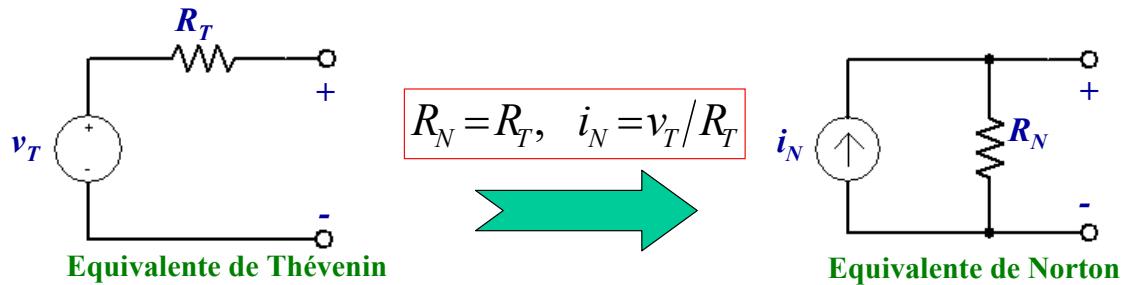
$$R_T = a \quad \text{e} \quad v_T = b$$

**Equivalente de Thévenin**

2.2-26

## Equivalente de Norton – Método Universal

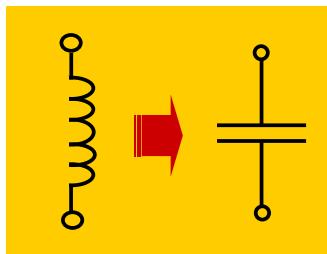
- Se estivermos interessados no Equivalente de Norton e o circuito incluir fontes dependentes...
- ... começamos por determinar o Equivalente de Thévenin recorrendo ao método universal... e depois obtemos o Equivalente de Norton por Transformação de fontes:



# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 3: Capacidade e Indutância*



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

### **Sumário**

- Redefinição de elemento activo e passivo;
- Condensador e capacidade;
- Bobina e indutância;
- Combinação de bobinas e combinação de condensadores;
- Linearidade;
- Dualidade.

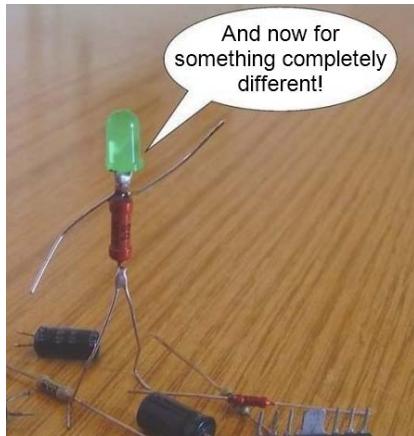
## Elementos activos e passivos

- A capacidade e a indutância são propriedades de dois novos elementos de circuito: o **condensador** e a **bobina**, respectivamente;
- Apesar de passivos, estes dois elementos têm a capacidade de armazenar e fornecer quantidades finitas de energia, pelo que a sua introdução requer uma **definição mais rigorosa de elemento activo e passivo.**

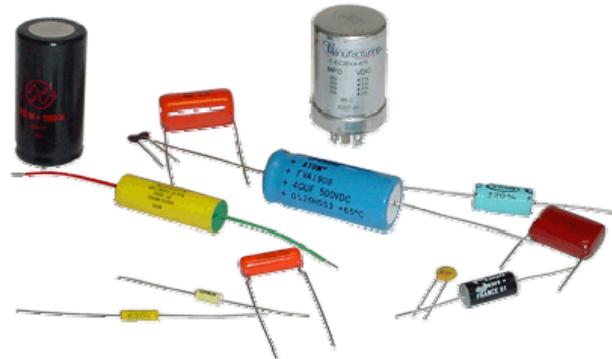
## Elemento activo e passivo – NOVA DEFINIÇÃO

- **Elemento activo** – é capaz de fornecer uma potência média  $> 0$  durante um período de tempo infinito;
- **Elemento passivo** – não é capaz de fornecer uma potência média  $> 0$  durante um período de tempo infinito.

# Condensador



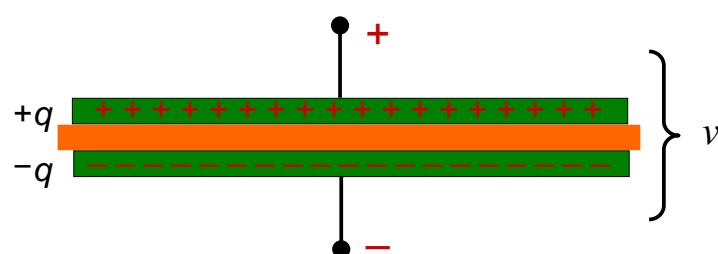
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro



3-5

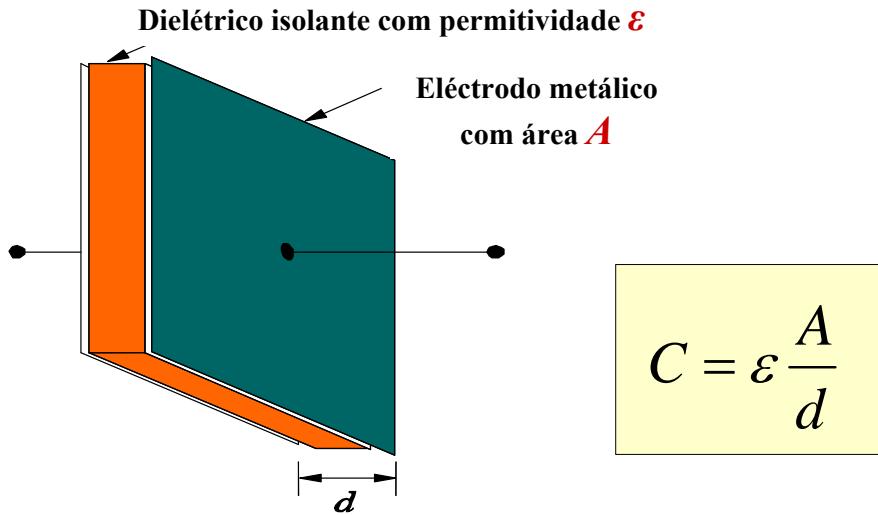
## Condensador físico

- Constituído por duas superfícies condutoras paralelas separadas por um isolador.



- Quando submetido a uma tensão,  $V$ , o condensador carrega com uma quantidade de carga,  $q$ , determinada pela sua capacidade,  $C$ .

## Condensador físico



## Condensador – modelo matemático

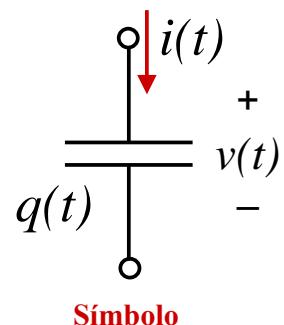
- A capacidade do condensador define-se como:

$$C = \frac{q}{v}$$

1 Coulomb / 1 Volt = 1 Farad

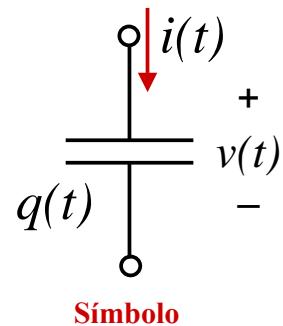
- Uma relação idêntica é:

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



## Condensador – modelo matemático

$$i = C \frac{dv}{dt}$$



● Desta relação podemos desde logo concluir que:

- Uma tensão constante aos terminais de um condensador corresponde a uma corrente nula – o condensador é pois um circuito aberto para DC;
- Uma variação brusca de tensão aos terminais de um condensador requer uma corrente infinita. Como não temos nunca correntes infinitas, segue-se daqui que um condensador não permite variações bruscas de tensão.

## Relação corrente-tensão

$$i = C \frac{dv}{dt} \Leftrightarrow dv = \frac{1}{C} idt$$

● Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial,  $t_0$ , e  $t$ , obtém-se

$$\int_{v(t_0)}^{v(t)} dv = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t idt \Leftrightarrow v(t) - v(t_0) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t idt \quad v(t) = \frac{1}{C} \int_{t_0}^t idt + v(t_0)$$

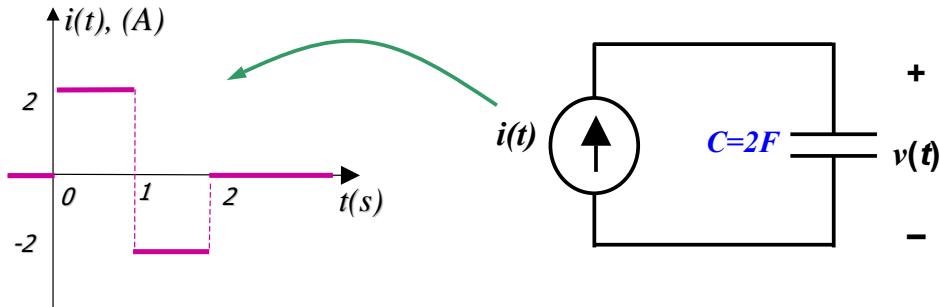
● Em muitas situações pode seleccionar-se,  $t_0 = -\infty$  e  $v(-\infty) = 0$ , o que reduz o integral a

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t idt$$

Note-se que todas estas relações assumem a Convenção de Sinais de Elemento Passivo – a corrente entra no condensador pelo terminal marcado pela polaridade (+).

## Exemplo 1

Calcular a tensão no condensador,  $v(t)$ , sabendo que  $v(t=0) = -0.5V$ .

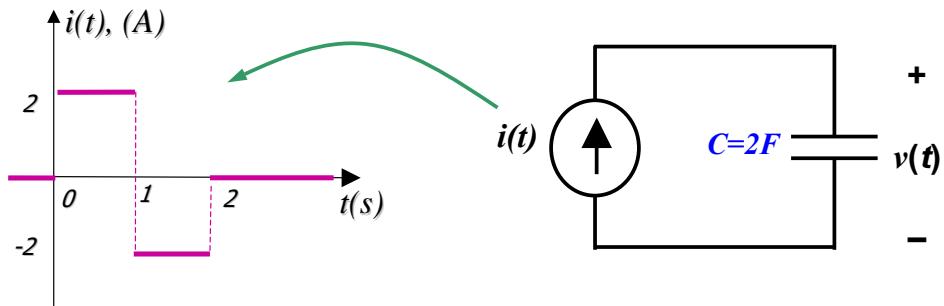


● Consideremos primeiro o intervalo 0 a 1s:

$$v_1(t) = \frac{1}{C} \int_0^t idt + v(0) = \frac{1}{2} \int_0^t 2dt - 0.5$$

$$v_1(t) = t - 0.5 \quad 0 \leq t \leq 1$$

## Exemplo 1



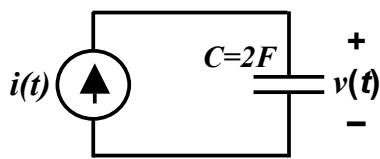
● ... e agora o intervalo 1 a 2s:

$$v_2(t) = \frac{1}{C} \int_1^t idt + v_1(1) = \frac{1}{2} \int_1^t (-2)dt + 0.5 = \frac{1}{2}(-2t + 2) + 0.5$$

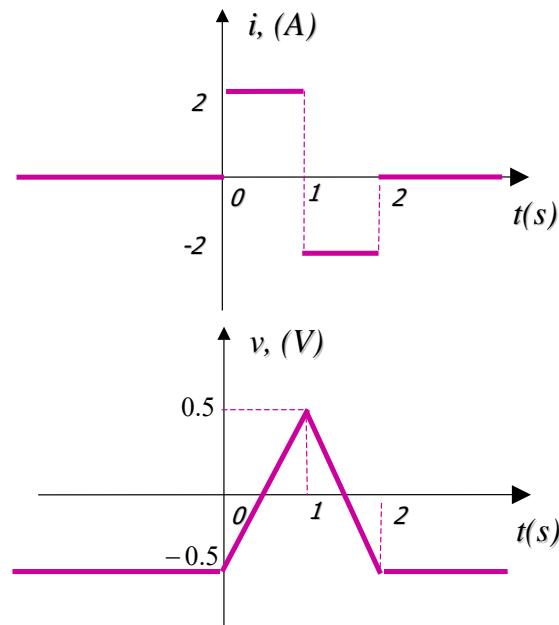
$$v_1(1) = 1 - 0.5 = 0.5V \quad v_2(t) = -t + 1.5 \quad 1 \leq t \leq 2$$

## Exemplo 1

- Obtemos então



$$v(t) = \begin{cases} -0.5 & t \leq 0 \\ t - 0.5 & 0 \leq t \leq 1 \\ -t + 1.5 & 1 \leq t \leq 2 \\ -0.5 & t \geq 2 \end{cases}$$

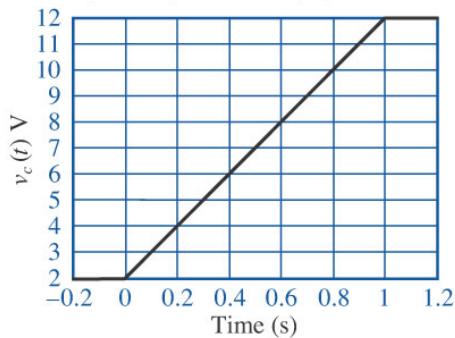


- $v(1)$  é igual à área do primeiro rectângulo de corrente x  $1/C$  mais  $v(0)$ .

## Exemplo 2

- Calcular a corrente num condensador de  $1mF$  cuja tensão varia de acordo com o gráfico seguinte.

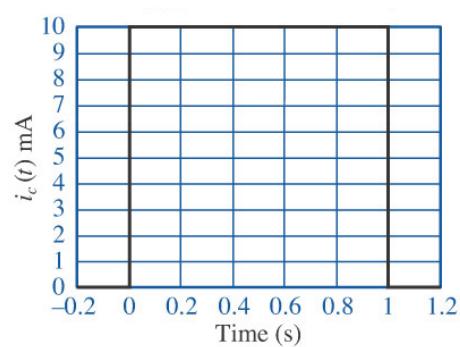
Para  $t < 0$  e  $t > 1$  a corrente é nula dado que a tensão é constante.



Para  $0 \leq t \leq 1$  temos:

$$i = C \frac{dv}{dt} = 10^{-3} \frac{12 - 2}{1s} = 10mA$$

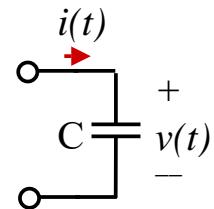
Assim:  $i(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 10mA & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$



## Energia armazenada num condensador

- A potência fornecida ao condensador é:

$$p = vi = vC \frac{dv}{dt}$$



- Como  $p = dW/dt$ , a energia armazenada no campo eléctrico é:

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^t pdt = \int_{t_0}^t (vi)dt = C \int_{t_0}^t v \frac{dv}{dt} dt = C \int_{v(t_0)}^{v(t)} v dv$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = C \left( \frac{v^2}{2} \right)_{v(t_0)}^{v(t)} \Leftrightarrow W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2} C (v(t)^2 - v(t_0)^2)$$

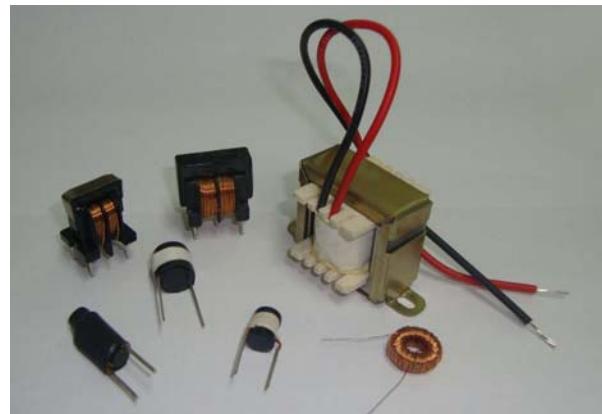
- Se seleccionarmos  $t_0$  de forma a que a tensão e a energia sejam ambos zero:

$$W(t) = \frac{1}{2} Cv(t)^2$$

## Condensador ideal – aspectos a reter

- Se a tensão aos terminais de um condensador não varia com o tempo, então a corrente através dele é nula – o condensador é um circuito aberto em DC;
- Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada num condensador mesmo quando  $i = 0$ ;
- É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a tensão aos terminais de um condensador pois isso requer uma corrente infinita; Um condensador resiste a uma variação abrupta de tensão tal como uma mola resiste a uma mudança brusca no deslocamento;
- Ao contrário da resistência, um condensador não dissipá energia; apenas a armazena.

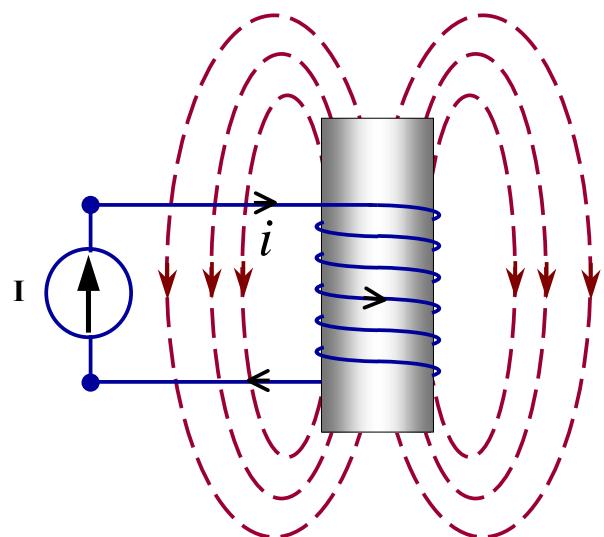
## Bobinas



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

3-17

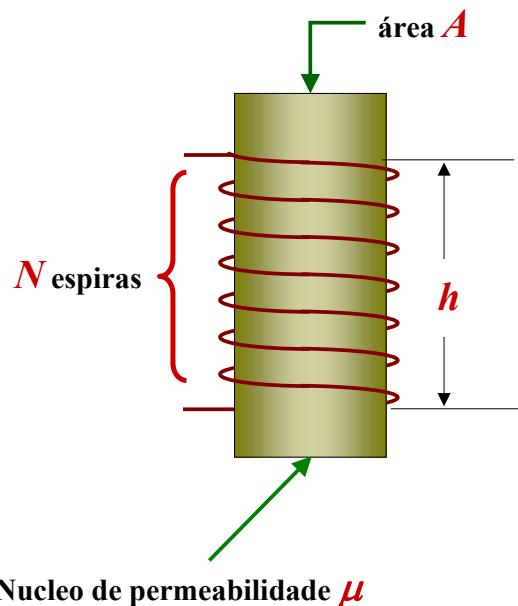
### Bobina física



- Constituída por um certo número de espiras de fio condutor enroladas.

- Quando atravessada por uma corrente,  $i$ , a bobina produz um campo magnético com intensidade de fluxo,  $\Phi$ , determinada pela sua indutância,  $L$ .

## Bobina física



$$L = \mu \frac{N^2 A}{h}$$

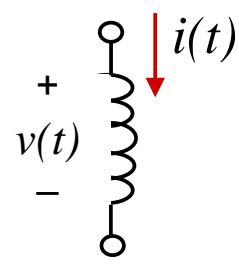
Expressão  
aproximada, válida só  
quando  $h \gg$  diâmetro

## Bobina – modelo matemático

- A indutância da bobina define-se como:

$$L = \frac{\phi}{i}$$

$$1\text{ Volt} \cdot 1\text{ Segundo} / 1\text{ Ampére} = 1\text{ Henry}$$



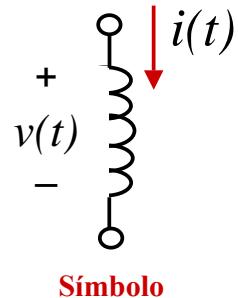
Símbolo

- Uma relação idêntica é:

$$v = L \frac{di}{dt}$$

## Bobina – modelo matemático

$$v = L \frac{di}{dt}$$



Símbolo

- Desta relação podemos desde logo concluir que:

- Tensão é proporcional à taxa de variação da corrente;
- Se a corrente é constante a tensão é nula - **bobina é um curto-circuito para DC**;
- Uma variação brusca de corrente requer tensão infinita. Como não temos tensões infinitas, segue-se que uma **bobina não permite variações bruscas de corrente**.

## Relação corrente-tensão

$$v = L \frac{di}{dt} \Leftrightarrow di = \frac{1}{L} v dt$$

- Integrando ambos os lados da igualdade entre um instante inicial,  $t_0$ , e  $t$ , obtém-se

$$\int_{i(t_0)}^{i(t)} di = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt \Leftrightarrow i(t) - i(t_0) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt$$

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{t_0}^t v dt + i(t_0)$$

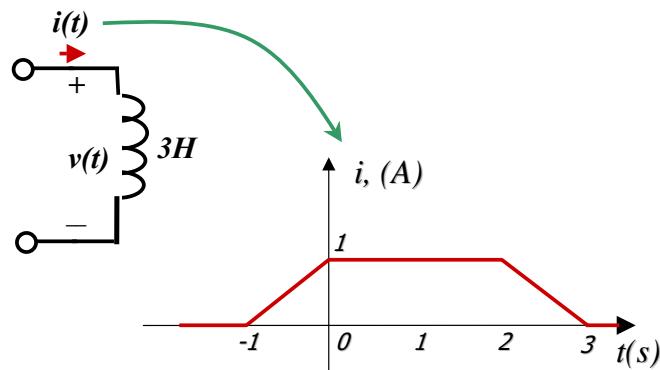
- Em muitas situações pode seleccionar-se,  $t_0 = -\infty$  e  $i(-\infty) = 0$ , o que reduz o integral a

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v dt$$

Note-se que todas estas relações assumem a **Convenção de Sinais de Elemento Passivo** – a corrente entra na bobina pelo terminal marcado pela polaridade (+).

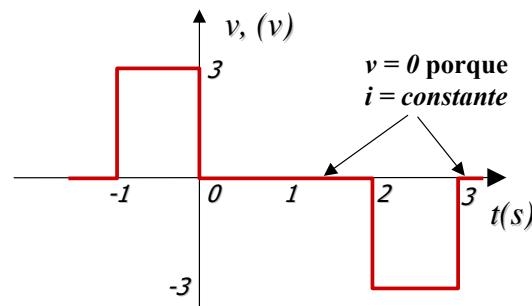
**Exemplo 3**

- Efeito da velocidade de variação da corrente na tensão da bobina



- No intervalo  $-1 < t < 0$  a tensão será:

$$v_1 = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{1\text{A}}{1\text{s}} = 3V$$



- No intervalo  $2 < t < 3$  a tensão será:

$$v_2 = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{-1\text{A}}{1\text{s}} = -3V$$

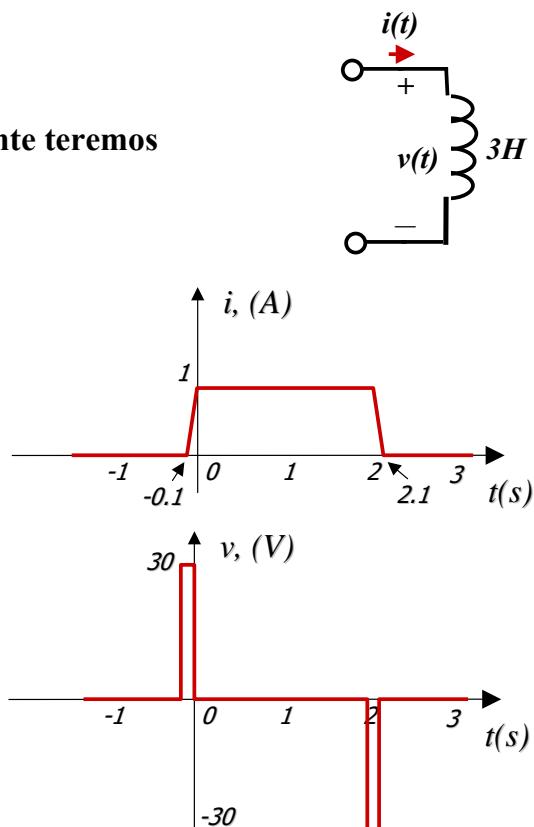
**Exemplo 4**

- Se a corrente variar mais rapidamente teremos na bobina tensões de:

$$v_1 = L \frac{di}{dt} = 3 \frac{1\text{A}}{0.1\text{s}} = 30V;$$

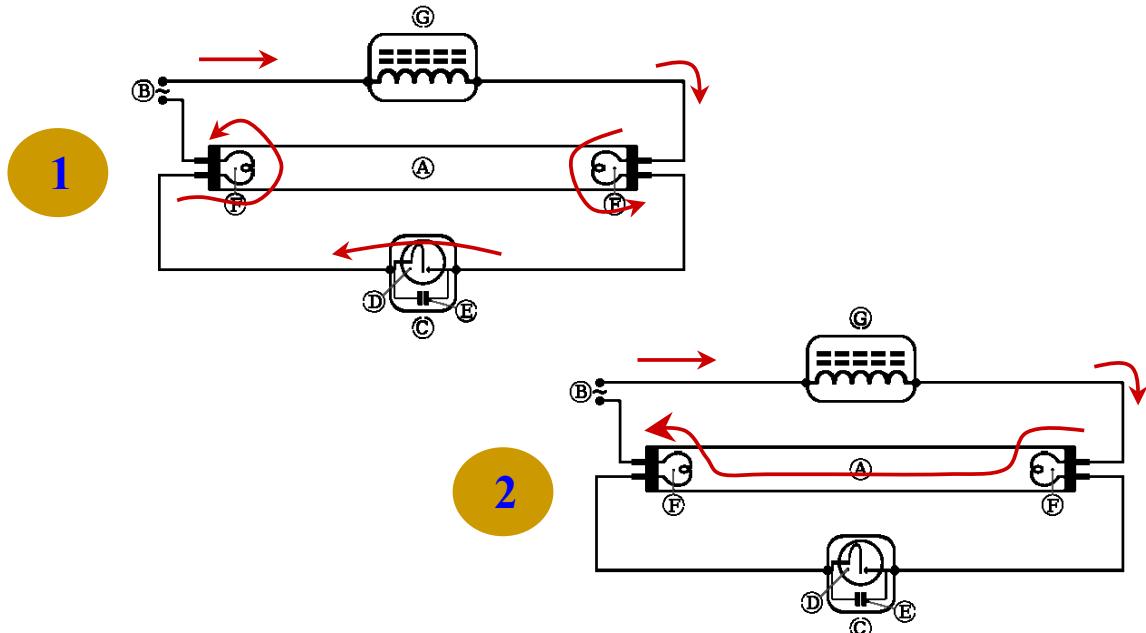
$$v_2 = -30V$$

- É por este motivo que a abertura de um interruptor num circuito indutivo causa, em geral, o aparecimento de um arco eléctrico – devido à tensão elevada que surge.



## CURIOSIDADE

- O aparecimento de um tensão elevada devido à interrupção da corrente numa bobina constitui o princípio de funcionamento das lâmpadas fluorescentes:



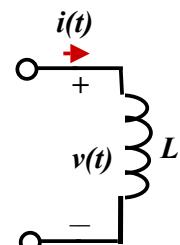
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

3-25

## Energia armazenada numa bobina

- A potência fornecida à bobina é:

$$p = vi = L \frac{di}{dt} i$$



- Como  $p=dW/dt$ , a energia armazenada no campo magnético é:

$$dw = pdt \Leftrightarrow \int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = \int_{t_0}^t pdt = L \int_{t_0}^t i \frac{di}{dt} dt = L \int_{i(t_0)}^{i(t)} idi$$

$$\int_{W(t_0)}^{W(t)} dw = L \left( \frac{i^2}{2} \right)_{i(t_0)}^{i(t)}$$

$$W(t) - W(t_0) = \frac{1}{2} L (i(t)^2 - i(t_0)^2)$$

- Se seleccionarmos  $t_0$  de forma a que a corrente e a energia sejam ambos zero:

$$W(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2$$

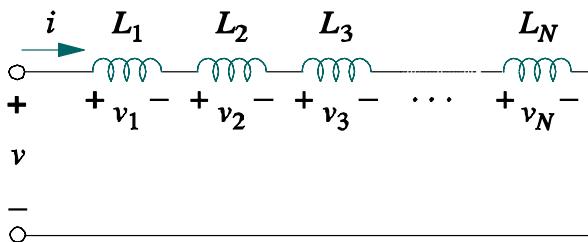
## Bobina ideal – aspectos a reter

- A tensão aos terminais duma bobina é zero se a corrente que a atravessa não varia com o tempo – a bobina é um curto-círcito em DC;
- Uma quantidade finita de energia pode ser armazenada numa bobina mesmo quando  $v = 0$  (i.e. a corrente é constante);
- É impossível variar instantaneamente (i.e. em tempo zero) a corrente aos terminais de uma bobina pois isso requer uma tensão infinita; Uma bobina resiste a uma variação abrupta de corrente assim como uma massa resiste a uma mudança brusca na velocidade;
- Ao contrário da resistência, uma bobina não dissipá energia; apenas a armazena.

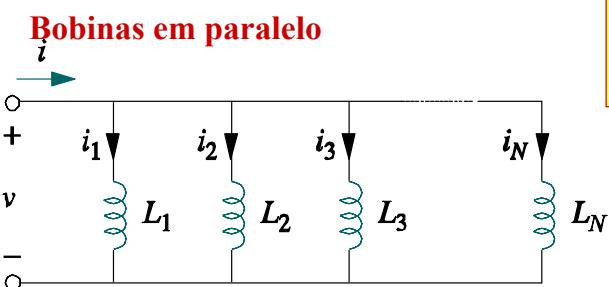
## Combinação de bobinas e condensadores

## Combinações de bobinas

### Bobinas em série



$$L_{eq} = L_1 + L_2 + L_3 + \dots + L_N$$



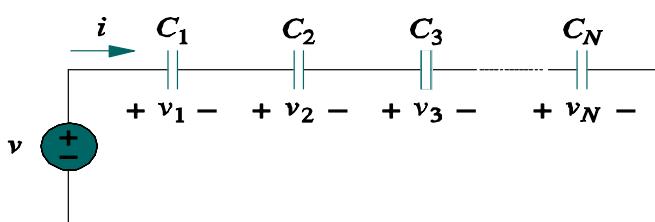
$$\frac{1}{L_{eq}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2} + \frac{1}{L_3} + \dots + \frac{1}{L_N}$$

**Nota:** Para  $N=2$  a indutância equivalente é dada por:

$$L_{eq2} = \frac{L_1 \cdot L_2}{L_1 + L_2}$$

## Combinações de condensadores

### Condensadores em série

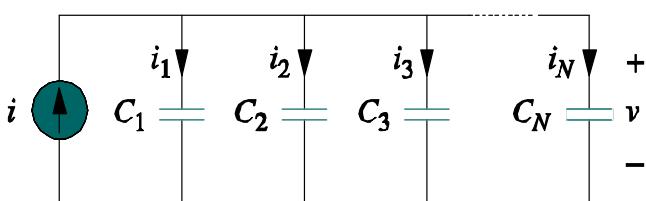


$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$$

**Nota:** Para  $N=2$  a capacidade equivalente é dada por:

$$C_{eq2} = \frac{C_1 \cdot C_2}{C_1 + C_2}$$

### Condensadores em paralelo



$$C_{eq} = C_1 + C_2 + \dots + C_N$$

## Linearidade e Dualidade

### Linearidade

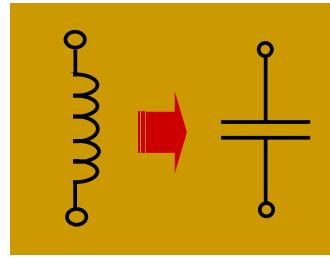
- Circuitos com bobinas e condensadores são também lineares pois as relações entre **tensão** e **corrente** nestes elementos são lineares.

$$v = L \frac{di}{dt} \quad \triangleright \text{Se } i \text{ aumentar do factor } k, v \text{ aumenta do mesmo factor;}$$

- Raciocínio idêntico mostra que o condensador é também linear;
- **Princípio da Sobreposição e teoremas de Thevenin e Norton** são também aplicáveis.

## Dualidade

- Quando enunciamos antes as características importantes do **condensador ideal** e da **bobina ideal** demos conta da semelhança dessas características;

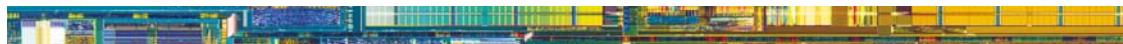


- Podemos obter as características do condensador substituindo apenas algumas palavras-chave nas características da bobina:

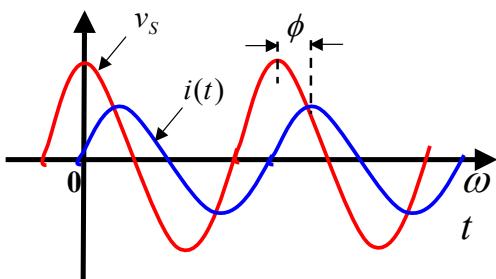
- bobina → condensador
- indutância → capacidade
- corrente → tensão
- curto-circuito → circuito aberto

- Esta propriedade resulta da **característica dual** destes elementos de circuito.

# Sinais e Sistemas Electrónicos



## Capítulo 4: Circuitos em regime sinusoidal



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## Sumário

- Introdução
- Resposta forçada a uma função sinusoidal;
- Função forçadora complexa;
- Fasores;
- Relações fasoriais para R, L e C;
- Extensão das técnicas de análise aos circuitos em regime sinusoidal;
- Impedância;
- Potência em regime sinusoidal;
- Valor eficaz.

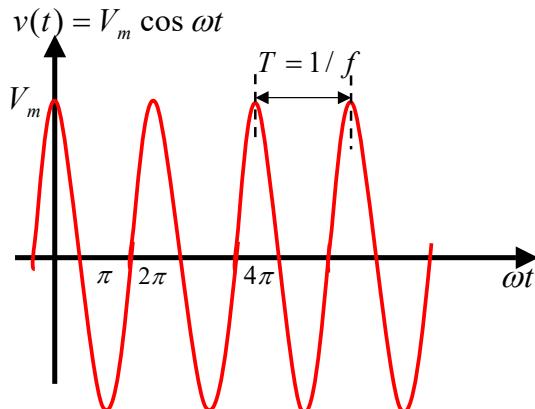
## Introdução

- O estudo da resposta dos circuitos a uma **função forçadora sinusoidal** é importante porque:

➤ Tensões sinusoidais são geradas facilmente; a **energia eléctrica** disponível é sinusoidal;

➤ A sinusóide goza da propriedade de **manter a forma** em circuitos lineares;

➤ Qualquer função periódica pode ser decomposta numa soma de sinusóides – conhecendo a resposta do circuito a cada uma das sinusóides podemos calcular a resposta à função original.



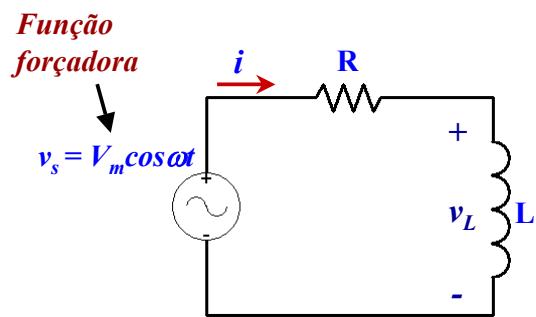
## Resposta a uma função sinusoidal

## Resposta a uma função sinusoidal

- Aplicando KVL

$$-v_s + Ri + v_L = 0$$

$$Ri + L \frac{di}{dt} = V_m \cos \omega t$$



- Dado que a resolução desta equação passa pela derivação e pela integração da função forçadora, é de prever que a sua solução,  $i(t)$ , tenha a mesma forma (e a mesma frequência) da função forçadora.

- Podemos portanto admitir que a solução tem a forma...

$$i(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad \text{em que } A \text{ e } \phi \text{ são constantes a determinar.}$$

## Função forçadora complexa

## Função forçadora complexa

- A resolução de equações diferenciais é **muito complicada** para ter utilidade em cálculos à mãos;
- O problema é simplificado se optarmos antes pela **função forçadora complexa**:

Em lugar desta:  $v_S = V_m \cos \omega t$       ↘ Função forçadora **sinusoidal**

Usamos **antes esta**:  $v_S = V_m e^{j\omega t}$       ↘ Função forçadora **complexa**

**E porque é que esta mudança para a função complexa é legítima?**

## Função forçadora complexa

... Porque segundo a **Fórmula de Euler**:

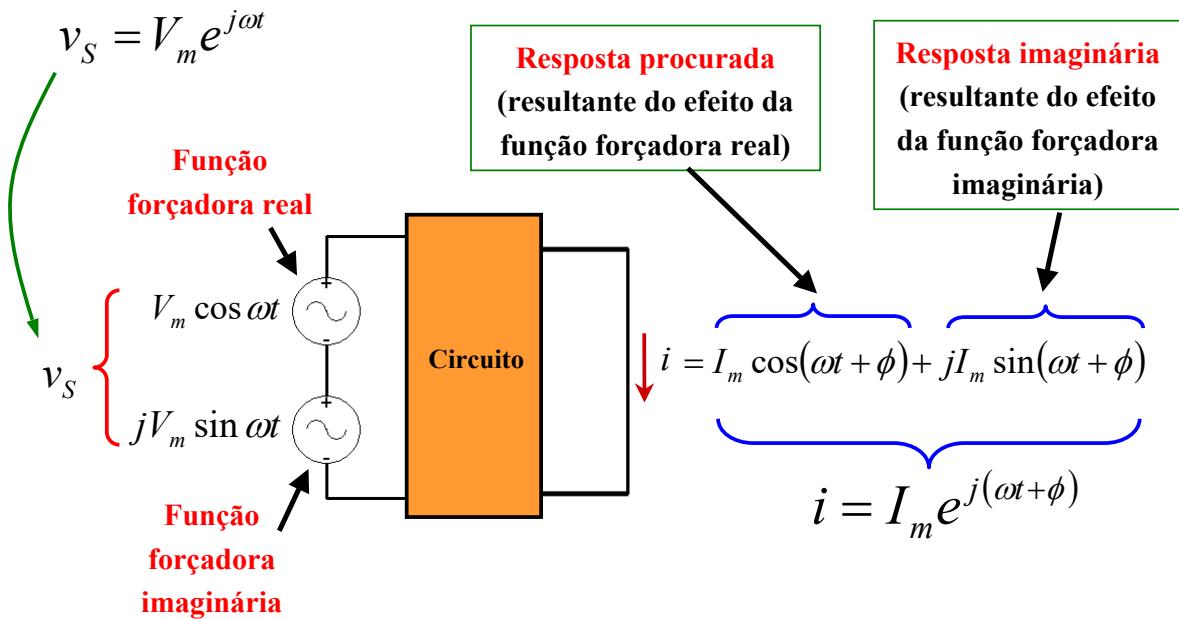
$$V_m e^{j\omega t} = V_m \cos \omega t + jV_m \sin \omega t$$

↗ **Função forçadora complexa**       $\underbrace{V_m \cos \omega t}_{\text{Função forçadora real dada}}$        $\underbrace{jV_m \sin \omega t}_{\text{Função forçadora imaginária}}$

- Portanto, ao aplicar a função forçadora complexa estamos, de facto, a aplicar, em simultâneo, **duas funções**:
  - A função forçadora sinusoidal usada no circuito real;
  - Uma função forçadora imaginária.
- O resultado obtido da análise, terá também uma **parte real** e uma **parte imaginária**. A parte real será a resposta desejada. A parte imaginária deve ser ignorada.

## Aplicação de uma função forçadora complexa

- Esta abordagem funciona graças ao Princípio da Sobreposição.



## Fasores

## O fasor

- Uma grandeza sinusoidal é completamente caracterizada pela **amplitude**, pela **fase** e pela **frequência**;

$$i = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \longrightarrow \quad i = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

- Mas num circuito linear, a **frequência** é a mesma para todas as **tensões e correntes**, pelo que a sua indicação é **supérflua**;

- Vamos então optar por uma **representação complexa**, na **forma polar**, que **omite a frequência**:

$$i = I_m e^{j\phi} \quad \longrightarrow \quad I = I_m \angle \phi$$

representação abreviada que se designa por **fasor**.

## O fasor

- Assim, a função forçadora real

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + 0) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{V} = V_m \angle 0^\circ$$

e a resposta real

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \xrightarrow{\text{é representada pelo fasor}} \mathbf{I} = I_m \angle \phi$$

- Fasores são quantidades complexas; são escritos em **maiúsculas** e em **bold**;
- Fasores **não** são funções do tempo.

***i(t)***

é uma representação  
no domínio do tempo

***I***

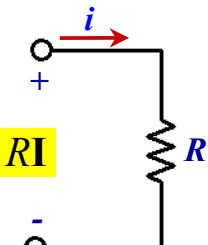
é uma representação  
no domínio da frequência

## Relações fasoriais para R, L e C

- Sendo representações no domínio da frequência, os fasores têm a vantagem de transformar as **relações diferenciais** corrente-tensão das bobinas e condensadores, em simples **relações algébricas**, simplificando assim a análise de circuitos em regime sinusoidal estacionário;
- Vejamos então como ficam as **relações corrente-tensão** dos três elementos passivos que conhecemos, no domínio da frequência:
  - Resistência;
  - Bobina;
  - Condensador.

### Relação entre os fasores V e I na resistência

$$V_m \angle 0^\circ = RI_m \angle \phi \quad \text{ou} \quad \mathbf{V} = R\mathbf{I}$$



- Na forma fasorial (domínio da frequência), a relação corrente-tensão na resistência é igual à do domínio do tempo;

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I}$$

- Isto implica  $\phi = 0$ , ou seja, tensão e corrente estão sempre em fase no circuito.

## Relação entre os fasores V e I na bobina

- Para a bobina temos  $v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$

Substituindo  $v(t)$  pela função forçadora complexa

$$v(t) = V_m e^{j\omega t}$$

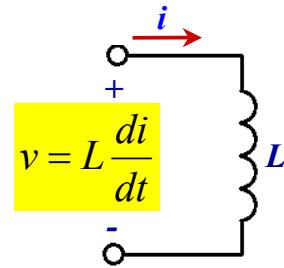
e  $i(t)$  pela resposta complexa  $i(t) = I_m e^{j(\omega t + \phi)}$

$$\text{obtemos } V_m e^{j\omega t} = L \frac{d}{dt} (I_m e^{j(\omega t + \phi)}) = j\omega L I_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

$$\text{Dividindo por } e^{j\omega t} \text{ obtemos } V_m = j\omega L I_m e^{j\phi}$$

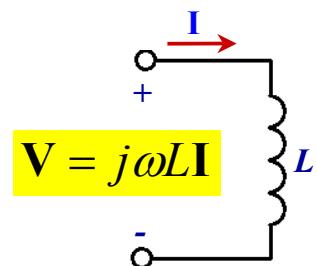
$$\text{O que dá na forma polar } V_m \angle 0^\circ = j\omega L I_m \angle \phi$$

$$\text{A relação fasorial é portanto } \mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$$



## Relação entre os fasores V e I na bobina

$$\mathbf{V} = j\omega L \mathbf{I}$$

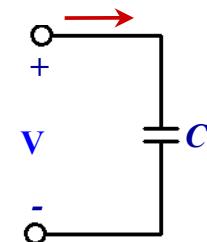


- Ou seja, a **relação diferencial** entre  $v(t)$  e  $i(t)$  que existe no domínio do tempo, transforma-se numa **relação algébrica** no domínio da frequência;
- Como o ângulo do factor  $j\omega L$  é  **$90^\circ$** , a fase de  $\mathbf{V}$  é igual à fase de  $\mathbf{I}$  mais  **$90^\circ$**  - ou seja, a **corrente está atrasada em relação à tensão de  $90^\circ$** .

## Relação entre os fasores V e I no condensador

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$

$$\mathbf{I} = j\omega C\mathbf{V}$$



- Mais uma vez, obtemos uma **relação algébrica** entre os fasores de corrente e tensão no domínio da frequência;
- Aqui é a fase de  $\mathbf{I}$  que é igual à fase de  $\mathbf{V}$  mais  $90^\circ$  - ou seja, a **corrente está avançada em relação à tensão de  $90^\circ$** .
- É de notar a semelhança entre as relações corrente-tensão das bobinas e condensadores no domínio da frequência e a lei de Ohm;

## Técnicas de Análise de Circuitos com fasores

## Técnicas de análise de circuitos com fasores

- Também se aplicam quando as tensões e as correntes são representadas por fasores.

### KVL

Ao longo de um caminho fechado temos  $\mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2 + \dots + \mathbf{V}_N = 0$

### KCL

Em qualquer nó de um circuito verifica-se  $\mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \dots + \mathbf{I}_N = 0$

- Análise Nodal e Análise de Malhas são também aplicáveis no domínio da frequência;

- O mesmo pode ser dito em relação aos Princípio da Sobreposição, Transformações de fontes e teoremas de Thévenin e Norton.

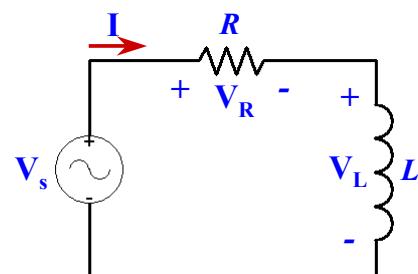
### Aplicação da KVL ao circuito RL

- Agora, tensões e correntes são representadas pelo fasor correspondente.

- A aplicação da KVL faz-se da mesma maneira:

$$-\mathbf{V}_S + \mathbf{V}_R + \mathbf{V}_L = 0$$

Substituindo pelas relações V/I obtidas antes



$$-\mathbf{V}_S + R\mathbf{I} + j\omega L\mathbf{I} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_S}{R + j\omega L}$$

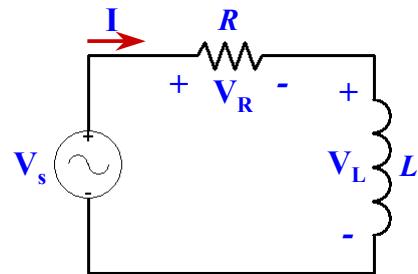
Se, no domínio do tempo, a fonte é  $\mathbf{V}_s = V_m \cos \omega t$ , então o fasor correspondente é

$$\mathbf{V}_S = V_m \angle 0^\circ$$

## Aplicação da KVL ao circuito RL

Pelo que  $\mathbf{I} = \frac{V_m \angle 0^\circ}{R + j\omega L}$

$$\mathbf{I} = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \angle \left( -\arctg \frac{\omega L}{R} \right)$$



Relembrando...

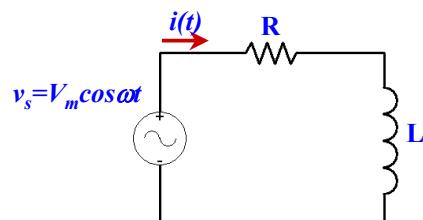
$$\mathbf{I} = I_m \angle \phi \longrightarrow i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

Convertemos para o domínio do tempo  $i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$

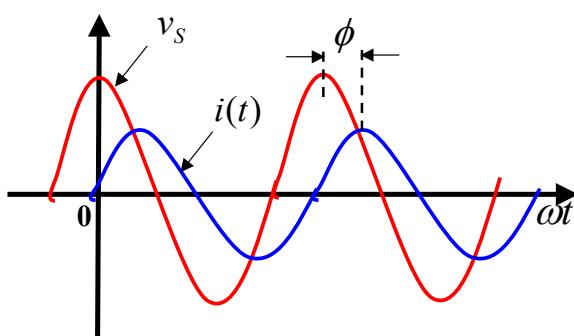
## Conclusões

$$i(t) = \frac{V_m}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{\omega L}{R}\right)$$

- A amplitude da resposta é proporcional à amplitude da função forçadora – se assim não fosse o circuito não era linear!



- A amplitude da resposta diminui com  $R$ ,  $L$  e  $\omega$ , mas não de forma proporcional;



## Impedância

- No domínio da frequência, vimos que as relações  $V/I$  para os três elementos passivos que conhecemos são

$$\mathbf{V} = R\mathbf{I} \quad \mathbf{V} = j\omega L\mathbf{I} \quad \mathbf{V} = \frac{\mathbf{I}}{j\omega C}$$

Escrevendo estas expressões como a razão entre os fasores de tensão e corrente

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

verificamos que estas razões dependem apenas dos valores dos elementos e da frequência;

- Por se tratarem de razões entre  $V$  e  $I$ , estas quantidades complexas são expressas com unidades de Ohm. Chamam-se genericamente **impedâncias** e representam-se pela letra **Z**.

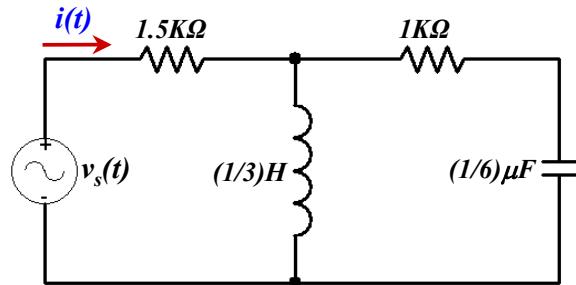
## Impedância

$$\frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = R \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = j\omega L = X_L \quad \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{I}} = \frac{1}{j\omega C} = X_C$$

- Embora possa ser um numero complexo, a **impedância não é um fasor** pois não tem uma correspondência no domínio do tempo.

- A **validade das leis de Kirchhoff** no domínio da frequência implica que as impedâncias podem ser associadas em série e em paralelo seguindo as mesmas regras usadas nas resistências.

**Exemplo 1 – Determinar  $i(t)$  no circuito sabendo que  $v_s(t) = 40\sin(3000t)$  [Volts]**



- Comecemos por calcular o fasor da função forçadora.

$$v_s(t) = 40 \sin 3000t = 40 \cos(3000t - 90^\circ) \rightarrow V_s = 40 \angle -90^\circ V$$

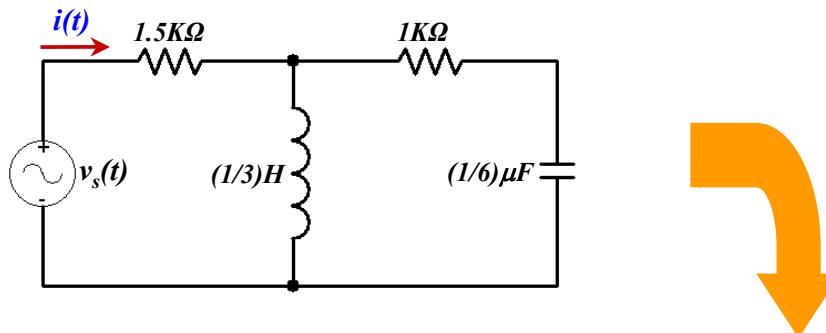
- À frequência de **3000 rad/s**, as impedâncias da bobina e do condensador são:

$$Z_L = j\omega L = j(3000)(1/3) = j1K\Omega$$

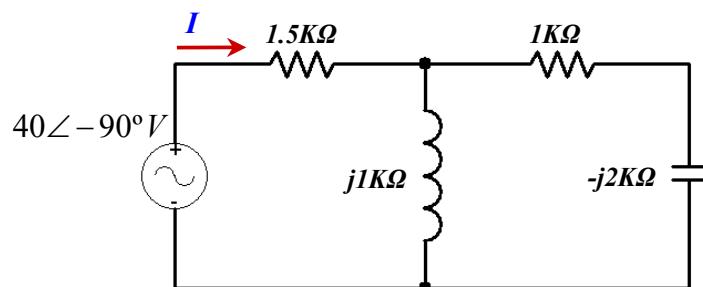
$$Z_C = \frac{1}{j\omega C} = \frac{-j}{(3000)(1/6)10^{-6}} = -j2K\Omega$$

**Exemplo 1**

- Desenhamos agora o circuito no domínio na frequência.



Toda a análise  
é feita agora  
nesto circuito!



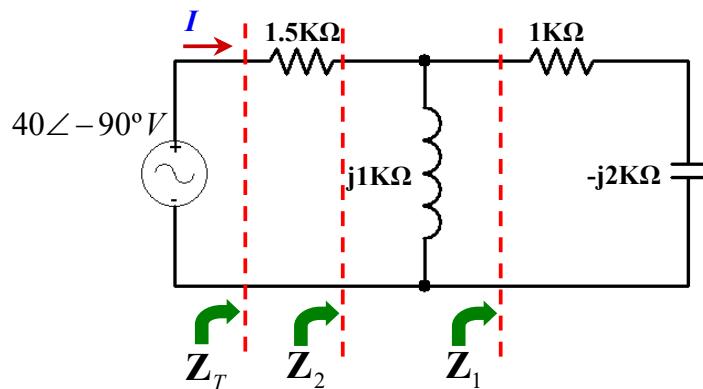
## Exemplo 1

- Calculamos agora a impedância total vista pela fonte

$$\mathbf{Z}_1 = (1 - j2) K\Omega$$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_2 &= j1 // \mathbf{Z}_1 = \frac{j1(1 - j2)}{j1 + 1 - j2} \\ &= (0.5 + j1.5) K\Omega\end{aligned}$$

$$\mathbf{Z}_T = 1.5 + \mathbf{Z}_2 = (2 + j1.5) K\Omega$$



Convertendo para a forma polar  $\mathbf{Z}_T = 2.5\angle 36.87^\circ K\Omega$

$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}_s}{\mathbf{Z}_T} = \frac{40\angle -90^\circ}{2.5\angle 36.87^\circ} = 16\angle -126.9^\circ mA$$

- O que transformando de volta para o domínio do tempo resulta em  $i(t) = 16 \cos(3000t - 126.9^\circ) mA$

## Potência em regime sinusoidal

### Valor eficaz

## Potência

- Potência instantânea

$$p(t) = v(t)i(t)$$

- Potência média - é a média da potência instantânea calculada num período:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt$$

## Potência média em regime sinusoidal

- Admitamos que a tensão e a corrente num dado elemento de circuito é dada por:

$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \theta) \quad \text{e} \quad i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi)$$

- A potência instantânea nesse elemento é portanto

$$\begin{aligned} p(t) &= V_m I_m \cos(\omega t + \theta) \cos(\omega t + \phi) \\ &= \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta &= \\ &= \frac{1}{2} \cos(\alpha + \beta) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \cos(\alpha - \beta) \end{aligned}$$

- Ou seja,  $p(t)$  inclui duas parcelas
  - Uma que é constante e independente do tempo;
  - Outra que varia ao dobro da frequência de operação

## Potência média em regime sinusoidal

- A potência média é portanto

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \left[ \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi) + \frac{1}{2} V_m I_m \cos(2\omega t + \theta + \phi) \right] dt \end{aligned}$$

- Como o valor médio de um cosseno (ou seno) num período é zero, segue-se que

$$P = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

Aplicaremos este resultado às situações em que o elemento em causa é

- uma resistência;
- um elemento reactivo: bobina ou condensador.

## Potência absorvida por uma resistência

$$P_R = \frac{1}{2} V_m I_m \cos(\theta - \phi)$$

- Como numa resistência

- a corrente e a tensão estão em fase:  $\theta - \phi = 0$
- e  $V_m = I_m R$

então

$$P_R = \frac{1}{2} I_m^2 R = \frac{1}{2} \frac{V_m^2}{R}$$

### Potência absorvida por uma bobina ou um condensador

- Numa **bobina** temos  $\theta - \phi = 90^\circ$

- Numa **condensador** temos  $\theta - \phi = -90^\circ$

Em qualquer dos casos temos  $\cos(\theta - \phi) = 0$

logo  $P_L = 0$  e  $P_C = 0$

**A potência média fornecida a um circuito contendo apenas bobinas e condensadores é zero.**

### Valor eficaz

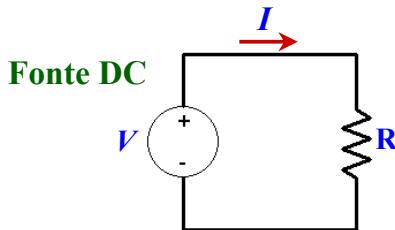
- Como sabemos, a energia elétrica chega a nossas casas na forma de uma tensão alternada sinusoidal com o valor de 220V. 220V é o chamado **valor eficaz** da tensão;
- O valor eficaz de uma tensão ou corrente periódica, é uma **medida da eficácia** dessa tensão ou corrente de fornecer potência a uma carga;



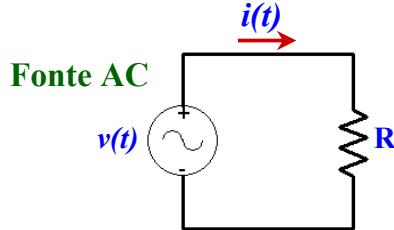
**Valor eficaz de um corrente periódica:** é igual ao valor da corrente DC que, ao fluir através de uma dada resistência, fornece a mesma potência média que a corrente periódica.

## Valor eficaz

Vejamos como calcular o valor eficaz de uma corrente (ou tensão) sinusoidal atendendo à definição.



$$P_{DC} = I^2 R$$



$$P_{AC} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 R dt$$

Igualando as duas potências, definimos o valor eficaz da corrente

$$I_{eff}^2 R = \frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 R dt \quad \rightarrow \quad I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

## Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i(t)^2 dt}$$

- O valor eficaz é, assim, obtido tirando a raiz quadrada à média do quadrado da corrente. Por esse motivo é habitualmente chamado de **valor RMS (Root-Mean-Square)**.

- Se  $i(t)$  for a corrente sinusoidal

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \phi) \quad \text{com} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

O seu respectivo valor eficaz será

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

## Valor eficaz

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I_m^2 \cos^2(\omega t + \phi) dt}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$= \sqrt{\frac{1}{T} \frac{I_m^2}{2} \int_0^T [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt}$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$= I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} [1 + \cos(2\omega t + 2\phi)] dt} = I_m \sqrt{\frac{\omega}{4\pi} [t]_0^{2\pi/\omega}}$$

➡  $I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

## Valor eficaz

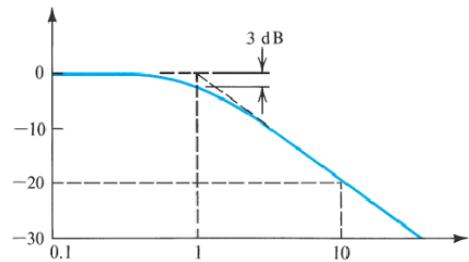
$$I_{eff} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$

- O valor eficaz é portanto independente da fase da corrente ou tensão;
- A corrente  $\sqrt{2} \cos(\omega t + \phi)$  tem o valor eficaz de **IA**, e por isso fornece a uma resistência a mesma potência média que uma corrente DC de **IA**;
- Notar que o factor  $\sqrt{2}$  só é válido para ondas sinusoidais.

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 5: Noções de Sistemas e Sinais*



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



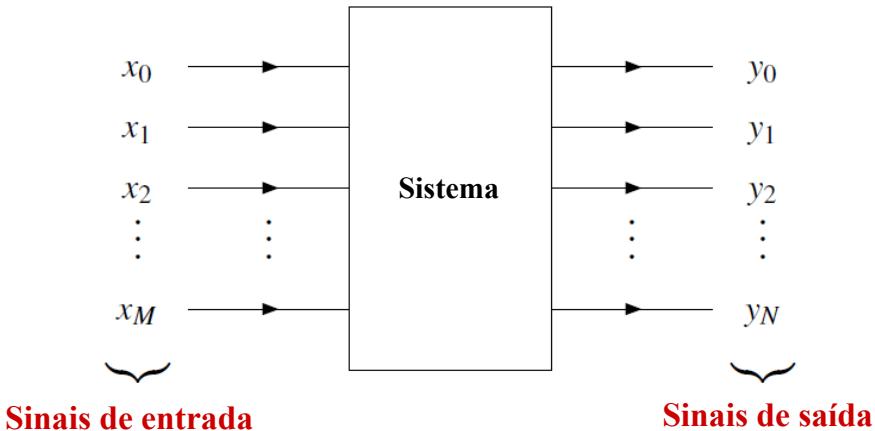
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## **Sumário**

- Nocão de sistema;
- Sinais: definição e classificação;
- Sinais nos domínios do tempo e da frequência;
- Resposta em frequência – caso do circuito RC passa-baixo;
- O decibel (dB);
- Resposta de amplitude e de fase;
- Circuito RC passa-alto;
- Diagramas de Bode;
- Resposta ao degrau – tempo de subida e tilt.

## Sistema

**Entidade que produz um conjunto de *sinais de saída* como resposta a um conjunto de *sinais entradas*.**



## Sinal

**É uma função do tempo que traduz **informação** sobre um ou mais fenómenos.**

- Os sinais apresentam-se, em geral, em função do tempo:

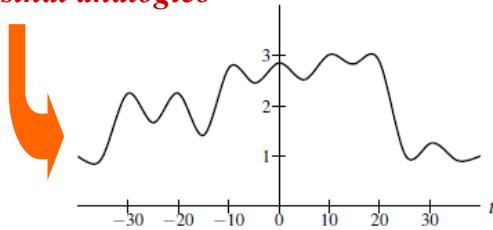
- Velocidade dum veículo;
- Temperatura ambiente;
- Ritmo cardíaco;
- Tensão eléctrica da rede de distribuição;
- Som de um tema musical;
- ...

**Aqui estamos particularmente interessados em sinais que podem ser representados por tensões ou correntes eléctricas.**

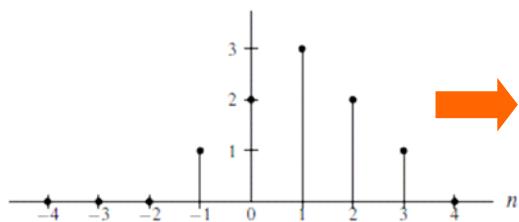
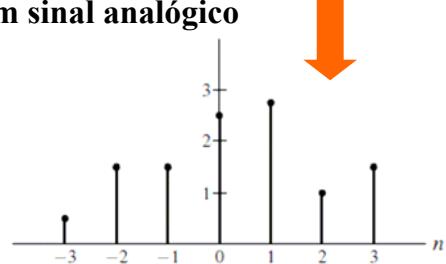
## Classificação de sinais

Contínuo no tempo e na amplitude:

*sinal analógico*



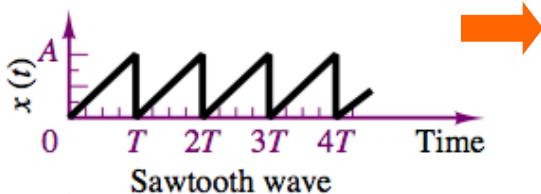
Definido só em *instantes discretos*  
mas continuo na amplitude: ainda é  
um sinal analógico



Definido em instantes discretos e  
com valores discretos de amplitude:  
*sinal digital*

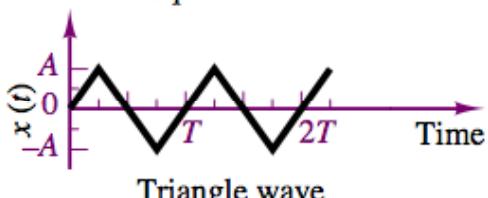
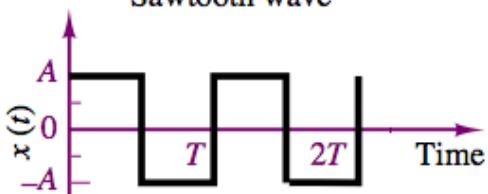
## Classificação de sinais

**periódico**

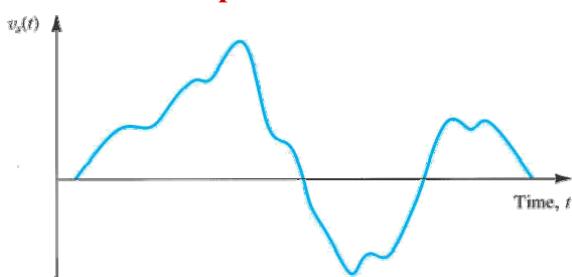


Uma função  $x(t)$  é periódica, com período  $T$ , se

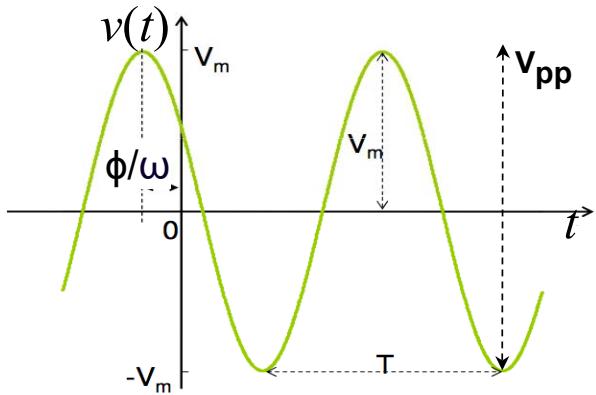
$$x(t) = x(t + T) \text{ para qualquer } t$$



**aperiódico**



## Sinais nos domínios do tempo e da frequência



$$v(t) = V_m \cos(\omega t + \phi)$$

V<sub>m</sub> - amplitude máxima (de pico)  
 T - período (s)  
 f - frequência (Hz) = 1/T  
 ω - frequência angular (rad/s)  
 φ - ângulo de fase (rad ou °)  
 V<sub>pp</sub> - amplitude pico a pico

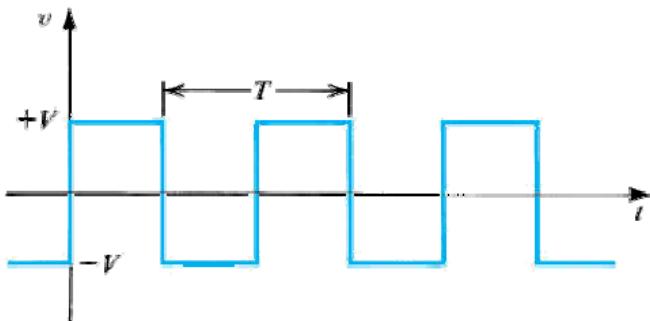
A **sinusóide** é o sinal **mais importante** no estudo de circuitos electrónicos.

*Porquê?*

## Sinais nos domínios do tempo e da frequência

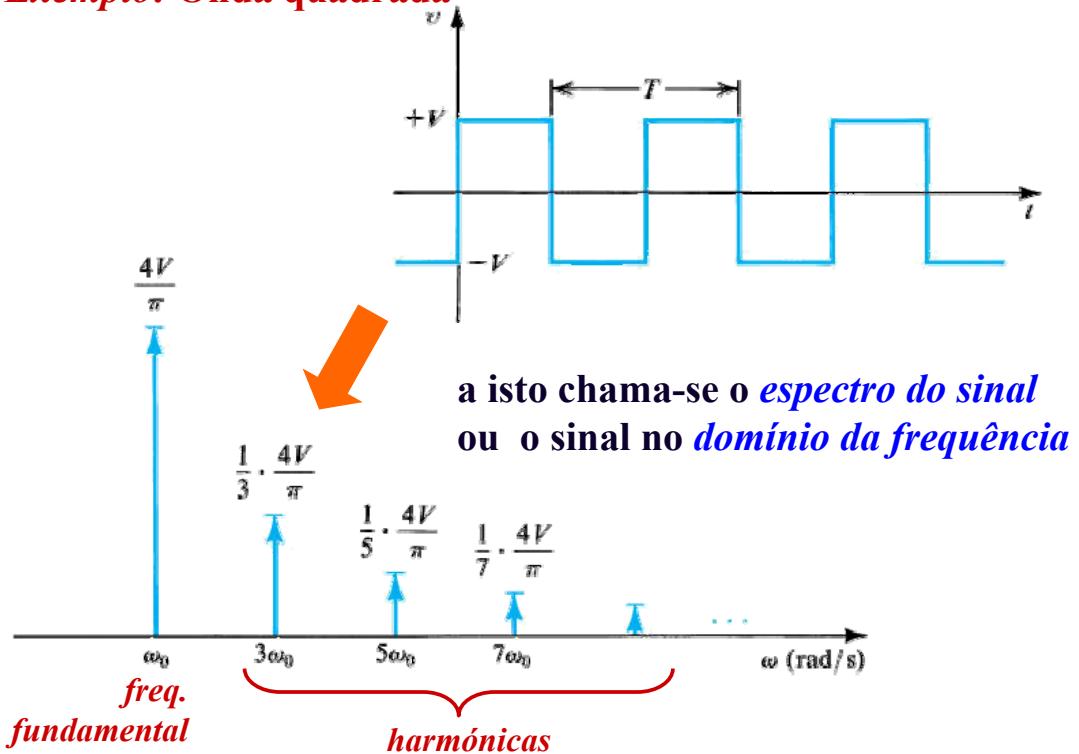
... porque segundo a **série/transformada de Fourier**, **qualquer sinal** pode ser descrito como uma soma de sinusoides de diferentes amplitudes e frequências.

*Exemplo:*  
**Onda quadrada**



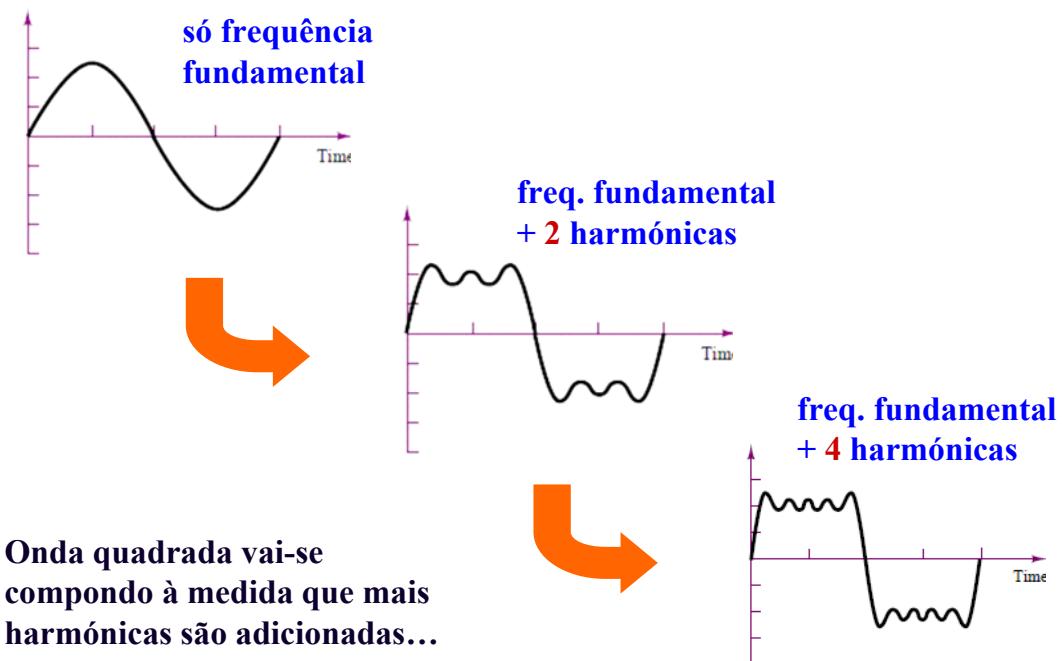
$$v(t) = \frac{4V}{\pi} \left( \sin \omega_0 t + \frac{1}{3} \sin 3\omega_0 t + \frac{1}{5} \sin 5\omega_0 t + \dots \right)$$

sendo  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$  a **frequência fundamental**

**Exemplo: Onda quadrada**

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

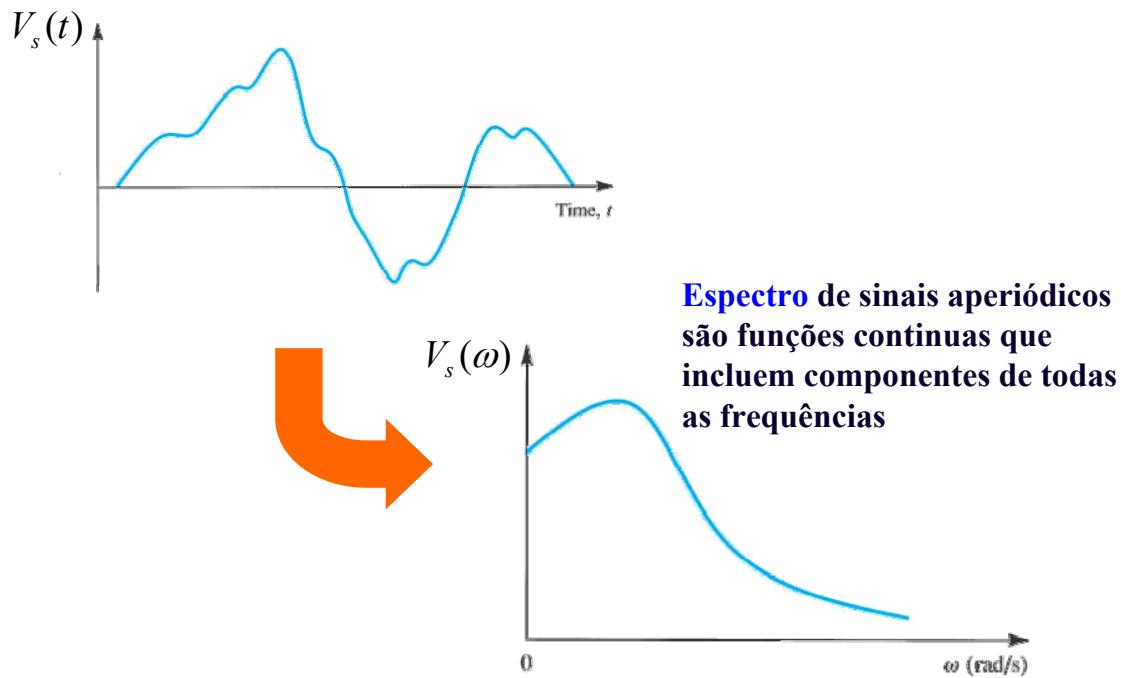
5-9

**Exemplo: Onda quadrada**

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

5-10

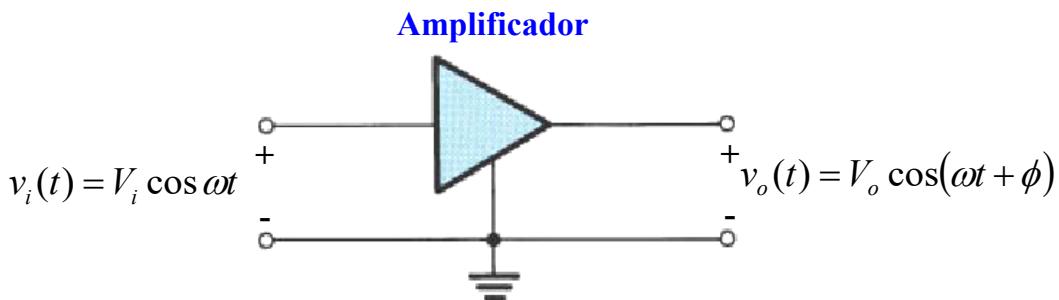
### Exemplo: sinal aperiódico



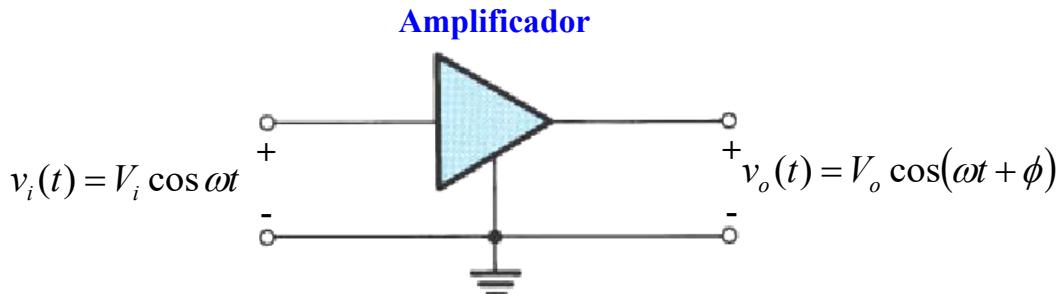
### Resposta em frequência

## Resposta em frequência

- Caracteriza a forma como um sistema responde a sinusóides de diferentes frequências;
- É uma característica importante exactamente porque... *qualquer sinal pode ser expresso como uma soma de sinusóides.*



## Resposta em frequência



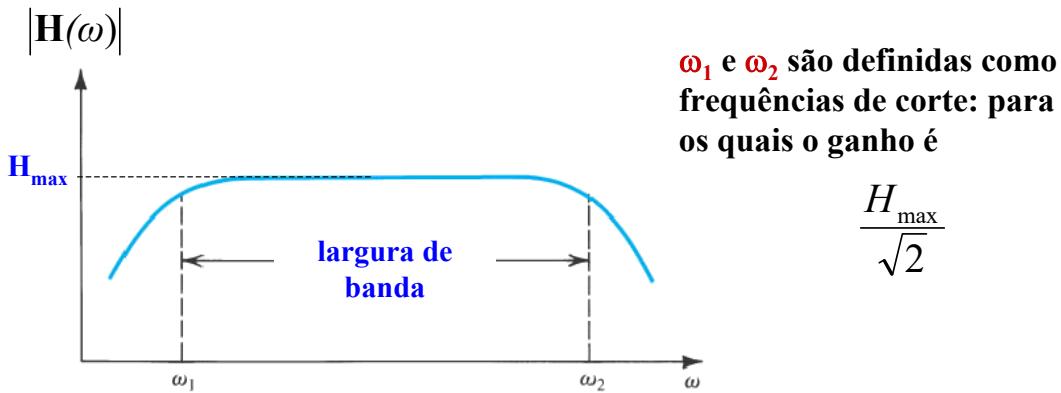
A resposta em frequência do amplificador é expressa pela sua função de transferência:

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)}$$

que inclui a resposta de amplitude,  $|H(\omega)|$   
e a resposta de fase,  $\angle H(\omega)$

## Resposta em frequência

- A resposta em amplitude traduz a gama de frequências que o sistema amplifica e a gama que tende a atenuar;
- O amplificador funciona como um *filtro* com uma dada *largura de banda*;



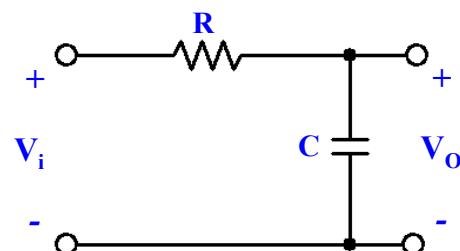
## Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

Usando a relação do divisor de tensão, podemos escrever

$$V_o(\omega) = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C} V_i(\omega)$$

Neste caso, a função de transferência é

$$H(\omega) = \frac{V_o(\omega)}{V_i(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega RC}$$



Notar que a função de transferência é adimensional

Exprimindo em módulo e fase...

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \angle H(\omega) = -\text{arctg}(\omega RC)$$

## Resposta em frequência do circuito RC (passa-baixo)

$$|\mathbf{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega RC)^2}} \quad \angle \mathbf{H}(\omega) = -\arctg(\omega RC)$$

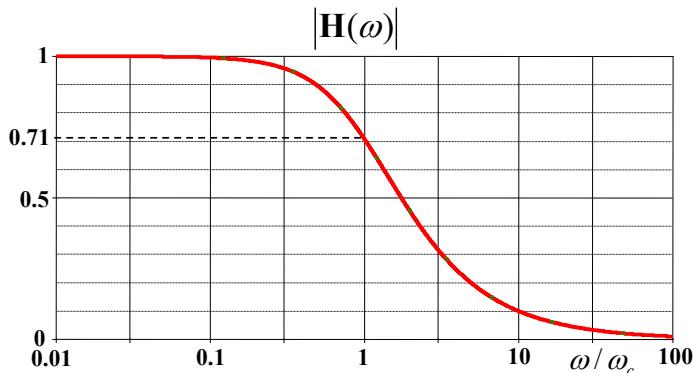
- Na representação em módulo e fase, a função de transferência indica a **atenuação** e o **desfasamento** introduzido pelo circuito na sinusóide de frequência  $\omega$ .

### Comportamento na frequência

- Para frequências muito baixas  $|\mathbf{H}(0)| \approx 1 \quad \angle \mathbf{H}(0) \approx 0$   
pelo que  $V_o \approx V_i$
- Para  $\omega = \omega_c = 1/RC$ , temos  $|\mathbf{H}(\omega_c)| = 1/\sqrt{2} \quad \angle \mathbf{H}(\omega_c) = -45^\circ$
- Para frequências muito elevadas  $|\mathbf{H}(\infty)| = 0 \quad \angle \mathbf{H}(\infty) = -90^\circ$   
pelo que  $V_o \approx 0$

Assim, este circuito é conhecido como **filtro passa-baixo**.

## Comportamento na frequência do RC passa baixo



Frequência de corte

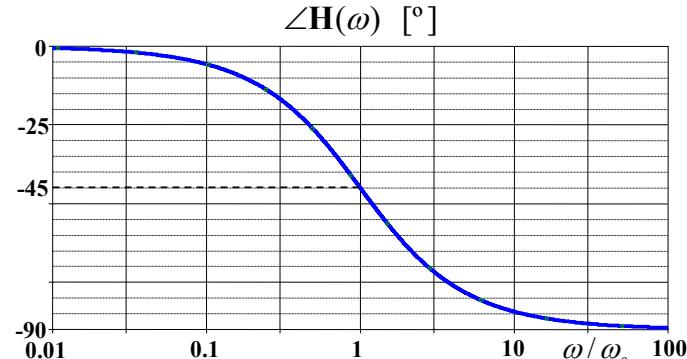
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

Notar:

- Eixo X normalizado;
- Escala logarítmica em X.

- Mas esta resposta de amplitude costuma representar-se numa **medida logarítmica**: em **decibeis (dB)**:

$$20 \log |\mathbf{H}(\omega)| \text{ (dB)}$$



## deciBel (dB)

- O **deciBel** corresponde a  $1/10$  da unidade base: o **bel**;
- Esta unidade surgiu no contexto dos primeiros sistemas de telefones para quantificar a perda de **potência** de um sinal numa ligação, definindo-se como:

$$\log \frac{P_{out}}{P_{in}} \text{ (bel)} \quad \text{ou} \quad 10 \log \frac{P_{out}}{P_{in}} \text{ (decibel)}$$

- Porquê uma unidade baseada na função logaritmo?
- Porque a percepção de intensidade do ouvido humano é logarítmica: e.g. se a intensidade sonora aumentar  **$10X$**  a sensação é de apenas uma **duplicação** da intensidade!
- Tratando-se de relações entre tensões, o decibel é definido como

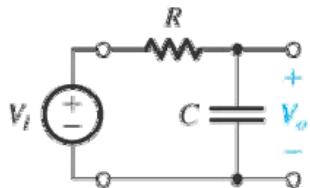
$$20 \log \frac{V_{out}}{V_{in}} \text{ (decibel)}$$

## Resposta em frequência do RC passa-baixo (em dB)

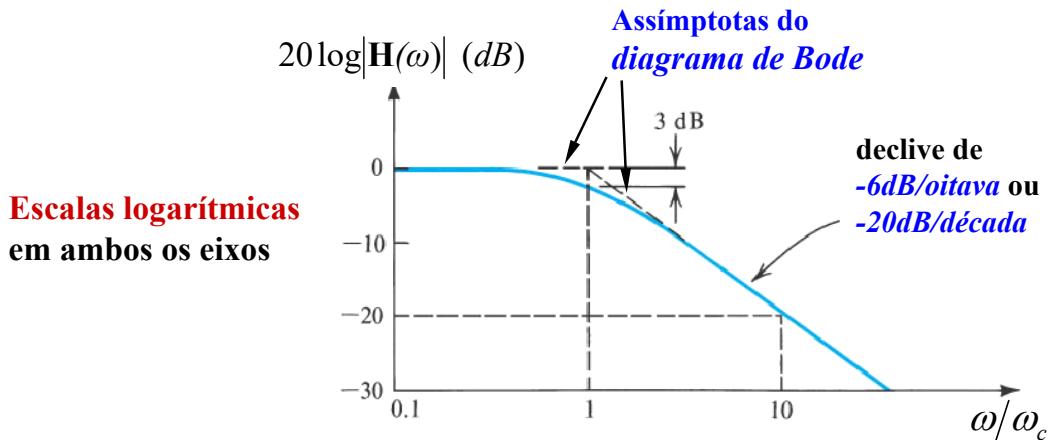
$$20 \log |\mathbf{H}(\omega)| = 20 \log \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

- Para frequências muito baixas:  $|\mathbf{H}(0)| \approx 1$  ou  $0\text{dB}$
- Para  $\omega = \omega_c$ :  $|\mathbf{H}(\omega_c)| = 1/\sqrt{2}$  ou  $20 \log(0.707) = -3\text{dB}$
- Para frequências elevadas:  $|\mathbf{H}(\omega)| \approx \frac{\omega_c}{\omega}$ 
  - Portanto, se  $\omega$  duplicar,  $|\mathbf{H}(\omega)|$  diminui para  $1/2$ . Como  $20 \log(0.5) = -6$ , então a amplitude cai  **$6\text{dB}$** ;
  - Se  $\omega$  aumentar de um factor de  $10$ ,  $|\mathbf{H}(\omega)|$  diminui para  $1/10$ . Como  $20 \log(0.1) = -20$ , então a amplitude cai  **$20\text{dB}$** .

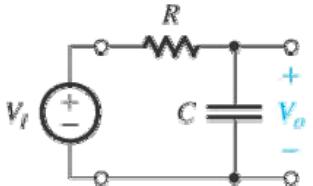
## Resposta do RC passa-baixo: diagrama de Bode



- Com estes dados podemos obter um traçado **assimptótico** da resposta do filtro: o chamado **Diagrama de Bode**.



## Resposta do RC passa-baixo: diagrama de Bode



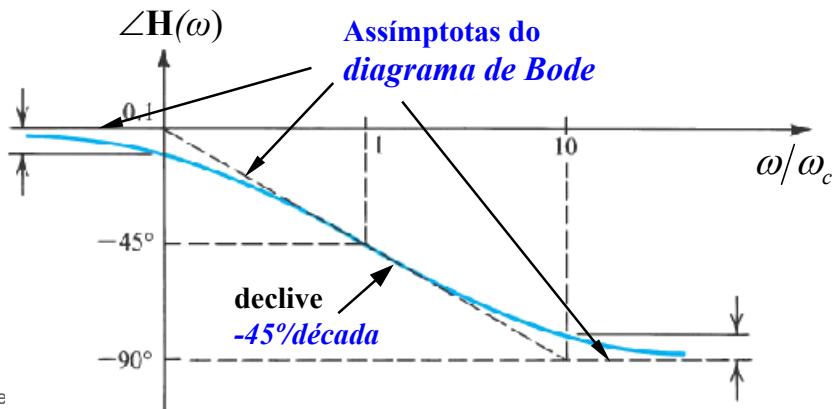
- Para a **resposta de fase** também é possível obter um diagrama de Bode.

$$\angle H(\omega) = -\text{arctg}(\omega RC) = -\text{arctg}(\omega/\omega_c)$$

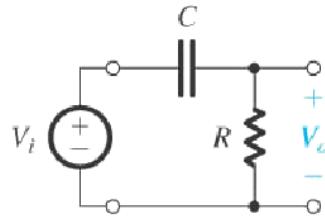
- Para frequências muito baixas, e.g.  $\omega < 0.1\omega_c$ :  $\angle H(0) \approx 0^\circ$
- Para frequências muito elevadas, e.g.  $\omega > 10\omega_c$ :  $\angle H(\infty) \approx -90^\circ$

- Para  $\omega = \omega_c$ :

$$\angle H(\omega_c) = -45^\circ$$



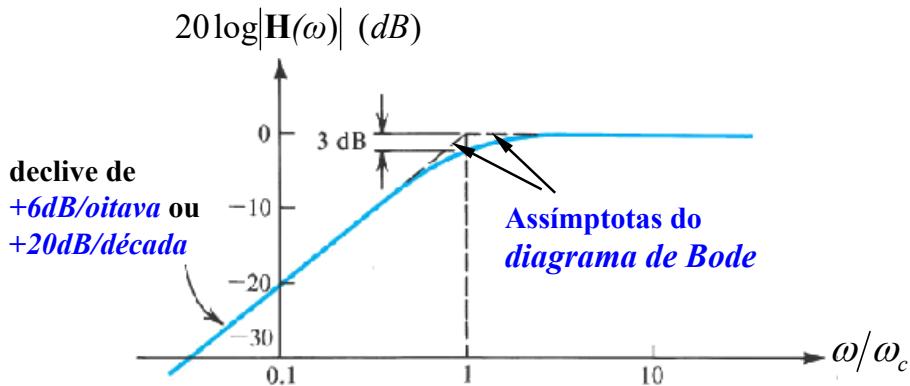
## Resposta do RC passa-alto: diagrama de Bode



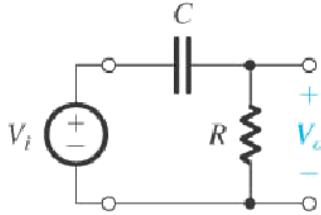
$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_c/\omega)^2}}$$

$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

- Para a resposta em amplitude o **Diagrama de Bode** é



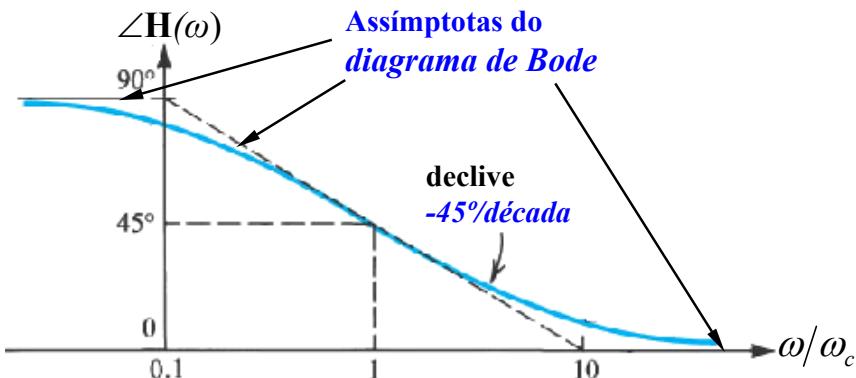
## Resposta do RC passa-alto: diagrama de Bode



$$\angle H(\omega) = \arctg(\omega_c/\omega)$$

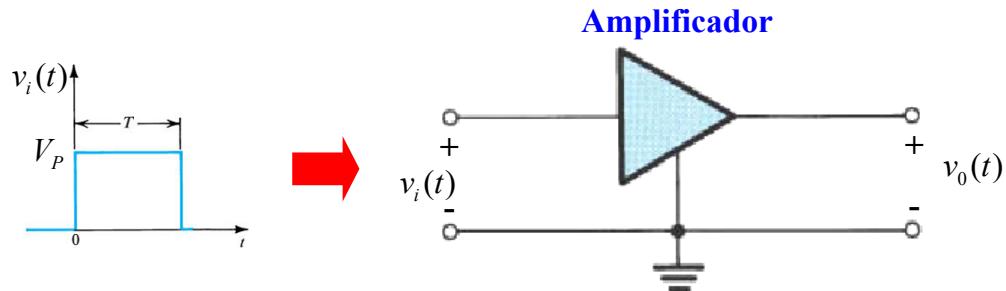
$$\omega_c = \frac{1}{RC}$$

- Para a resposta de fase o **Diagrama de Bode** é



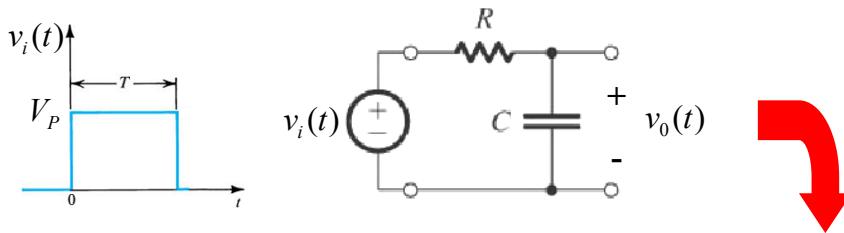
## Resposta ao degrau

## Resposta ao degrau

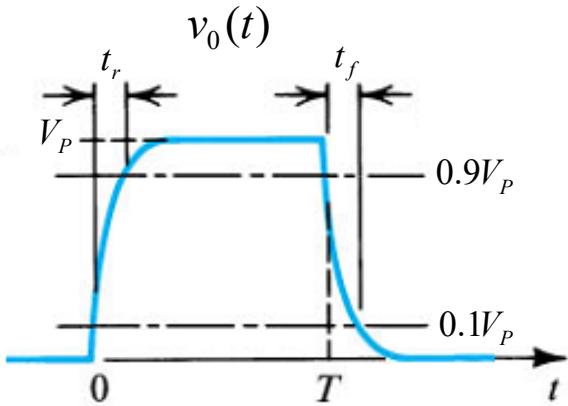


- Traduz a forma com o sistema reage quando lhe é aplicado na entrada um ***sinal em degrau***: variação abrupta entre dois valores;
- Na prática o que se faz é aplicar, não um degrau, mas um impulso ou uma onda quadrada;
- A resposta ao degrau permite inferir sobre a resposta em frequência.

## Sistema tem o comportamento dum RC passa-baixo

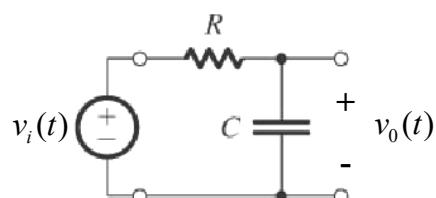
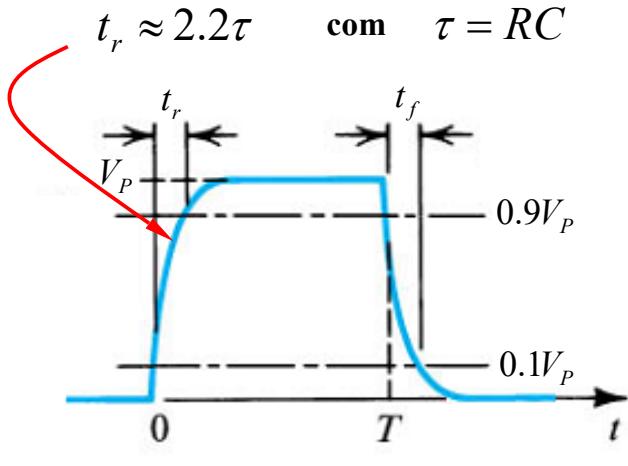


- A velocidade com que o circuito responde ao degrau é quantificada pelo **tempo de subida,  $t_r$** ;
- $t_r$  - tempo que  $v_0(t)$  leva para subir de **10%** de  $V_P$  até **90%**;
- $t_f$  - **tempo de descida** – define-se de forma identica (90 a 10%).



## Sistema tem o comportamento dum RC passa-baixo

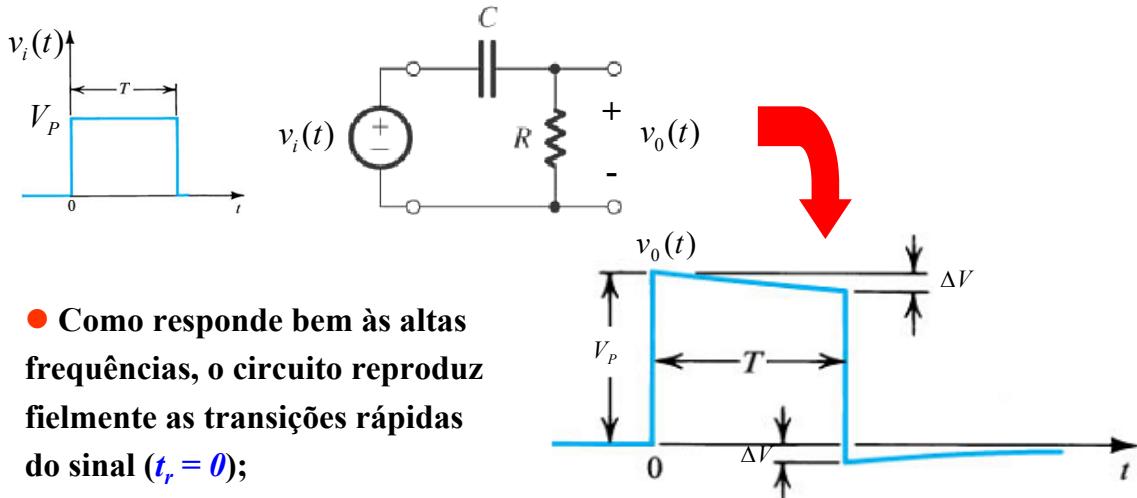
- Do estudo da carga do condensador é possível mostrar que ...



Ora, como  $\tau = RC = 1/\omega_c$   
então  $t_r = \frac{2.2}{\omega_c}$

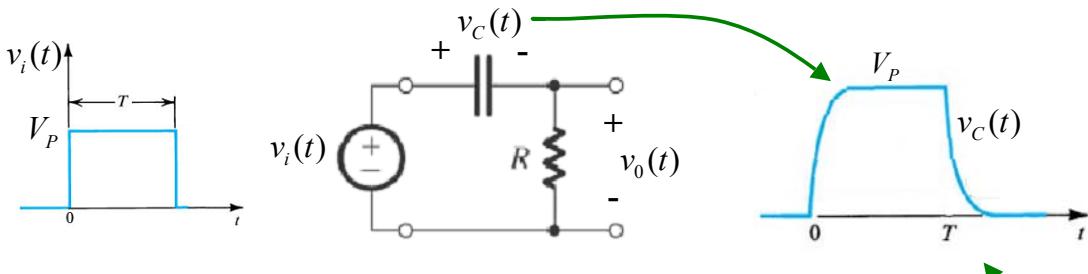
- Portanto a resposta ao degrau é tão mais rápida quanto maior for  $\omega_c$ .

## Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto

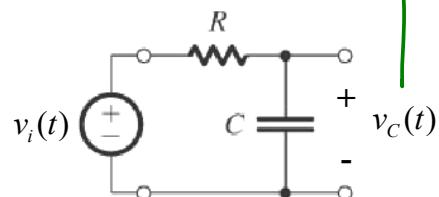


- Como responde bem às altas frequências, o circuito reproduz fielmente as transições rápidas do sinal ( $t_r = 0$ );
- ... mas como responde mal às frequências baixas (incluindo DC), não reproduz bem as partes planas do sinal;
- Vejamos primeiro porque razão  $v_0(t)$  tem esta forma.

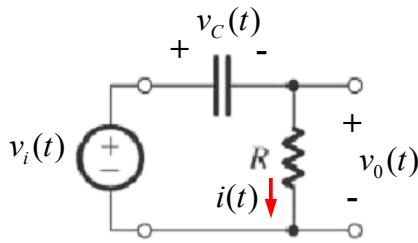
## Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



- Para se perceber a forma de  $v_0(t)$ , reparemos, primeiro, que o circuito é também um RC série, logo  $v_C(t)$  deve ser igual à tensão de saída do RC passa-baixo.



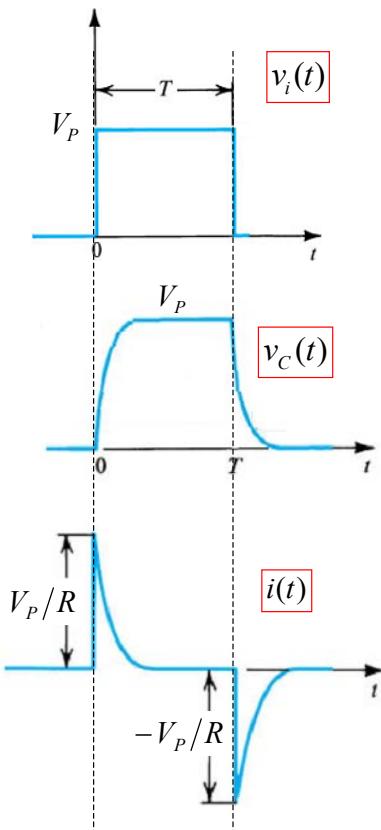
## Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



- A corrente no circuito,  $i(t)$ , deverá ter a forma...

• Em  $t = 0$ , como o condensador está descarregado  $i(t = 0^+) = \frac{V_p}{R}$

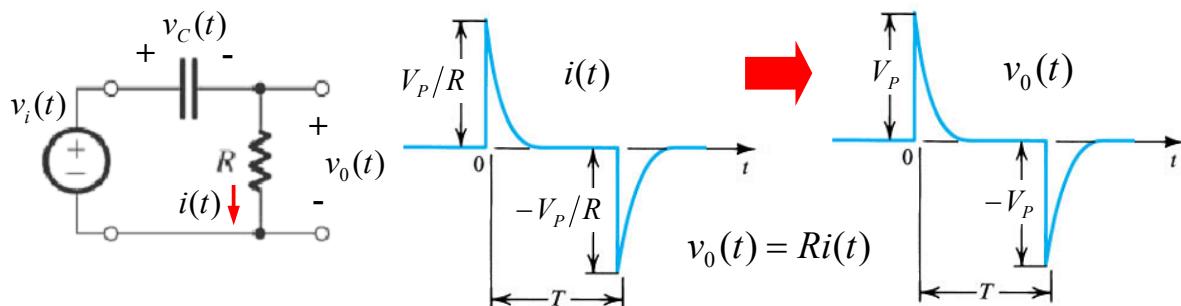
• Em  $t = T^+$ ,  $v_i(t = T^+) = 0V$  e  $v_c(t = T^+) = V_p$   
pelo que  $i(t = T^+) = -\frac{V_p}{R}$



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

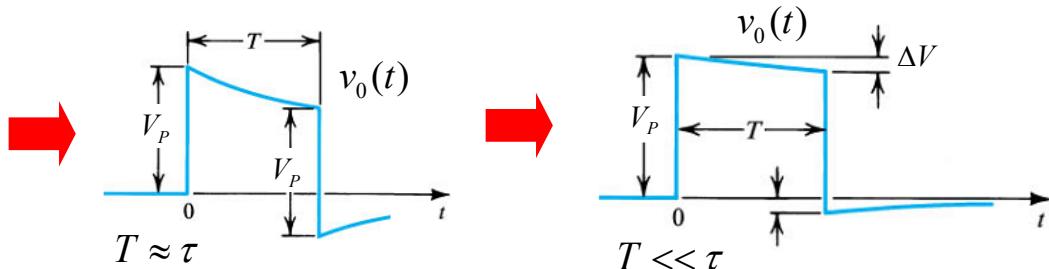
5-31

## Sistema tem o comportamento dum RC passa-alto



- Mas note-se que esta é a resposta se  $T \gg \tau$

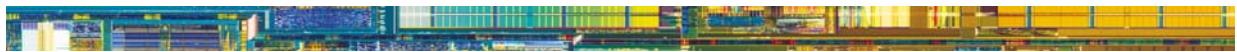
Se  $T$  for mais baixo, obtemos



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

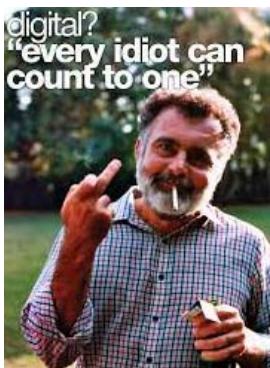
5-32

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 6: Amplificadores operacionais*

### **(parte 1)**



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## **Sumário**

- **Amplificador operacional: fundamentos;**
- **Modelo equivalente simplificado;**
- **Realimentação: configuração inversora;**
- **Calculo o ganho;**
- **Modelo ideal do OpAmp;**
- **Noção de curto-circuito virtual na entrada;**
- **Configuração não-inversora;**
- **Limites do modelo ideal.**

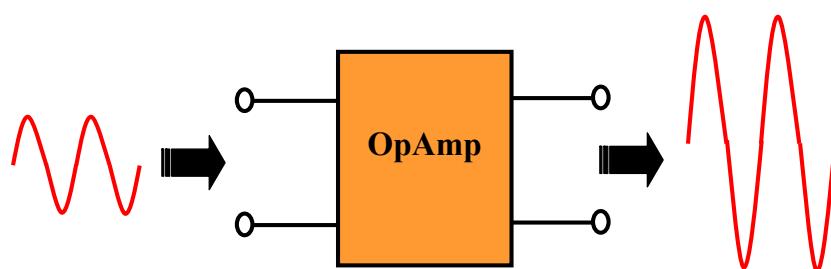
## Fundamentos e modelo simplificado

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

6.1-3

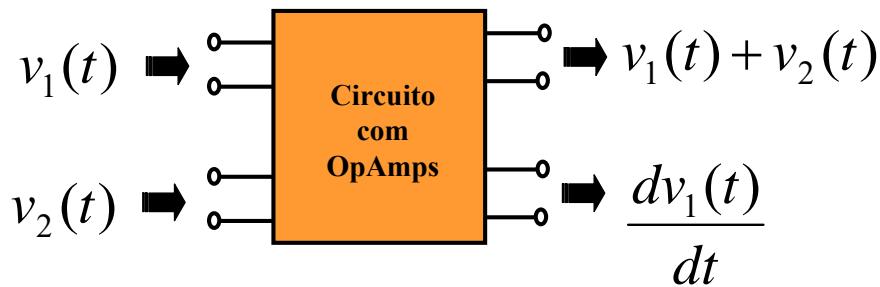
### Amplificador Operacional ou *OpAmp*

**Amplificador** – Porque transforma (*amplifica*) um sinal eléctrico (tensão) de pequeno valor, numa réplica de maior valor.



## Amplificador Operacional ou *OpAmp*

**Operacional** – Porque é usado em circuitos que realizam *operações* matemáticas (soma, multiplicação, derivação, etc.) em um ou mais sinais eléctricos.

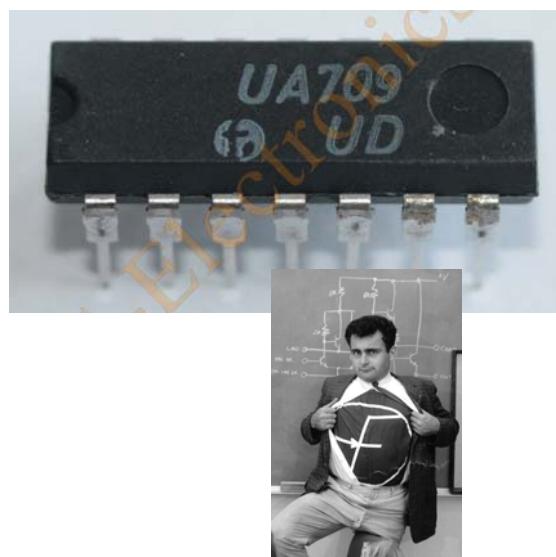


## Como se apresenta fisicamente?



**K2-W (1953)** primeiro OpAmp modular (alimentado a 600V)

**μA709 (1965)**  
Segundo OpAmp monolítico da história. Primeiro a gozar de grande sucesso comercial.

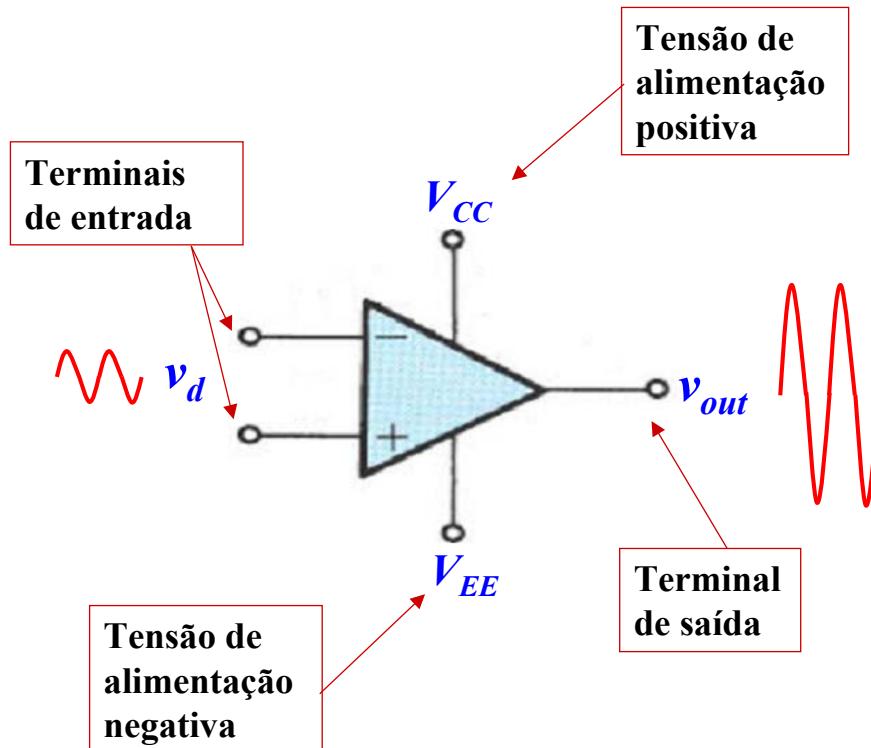


## Como se apresenta fisicamente?

### OpAmps modernos

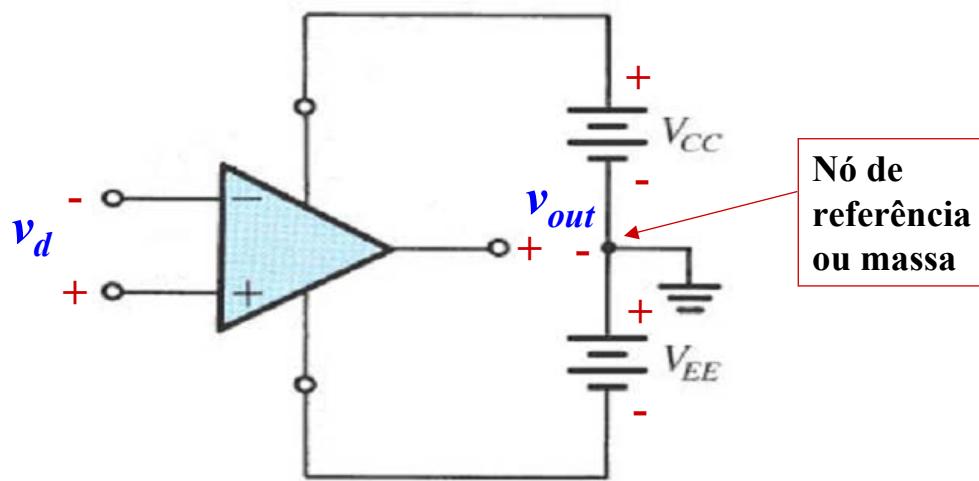


## Simbolo e terminais



## Sinais de entrada e saída

- O OpAmp amplifica a tensão  $v_d$  aplicada entre as duas entradas (+) e (-);
- A tensão de saída,  $v_{out}$ , é medida em relação ao ponto comum das duas tensões de alimentação – o nó de referência.



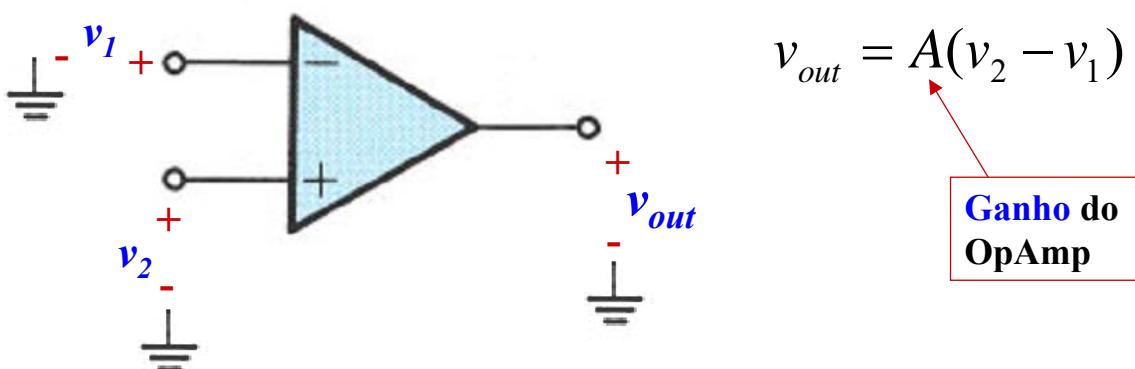
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

6.1-9

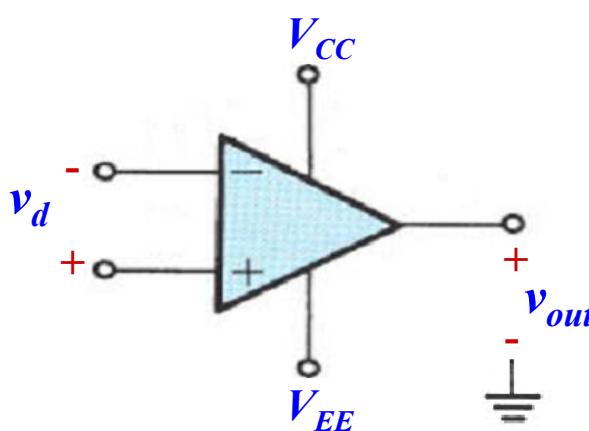
## Ganho do OpAmp

- Para simplificar, é costume omitir-se as ligações de alimentação;
- $V_d$  é a chamada **tensão diferencial** de entrada do OpAmp:

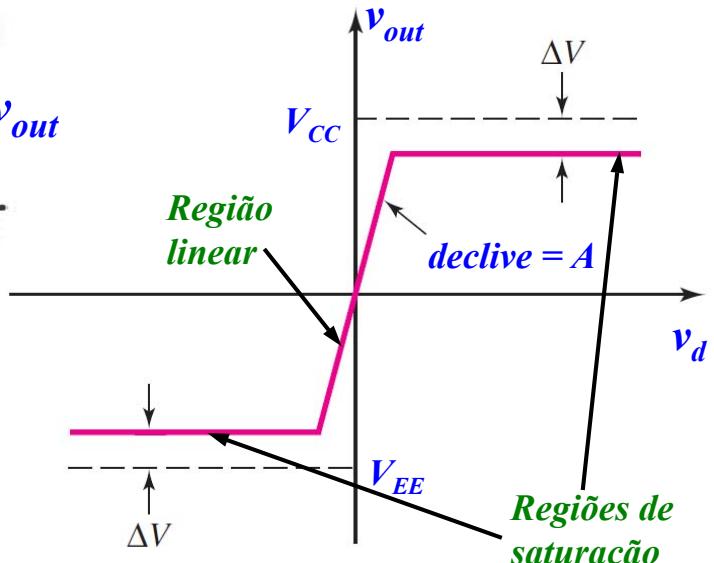
$$v_d = v_2 - v_1$$



## Característica entrada/saída do OpAmp

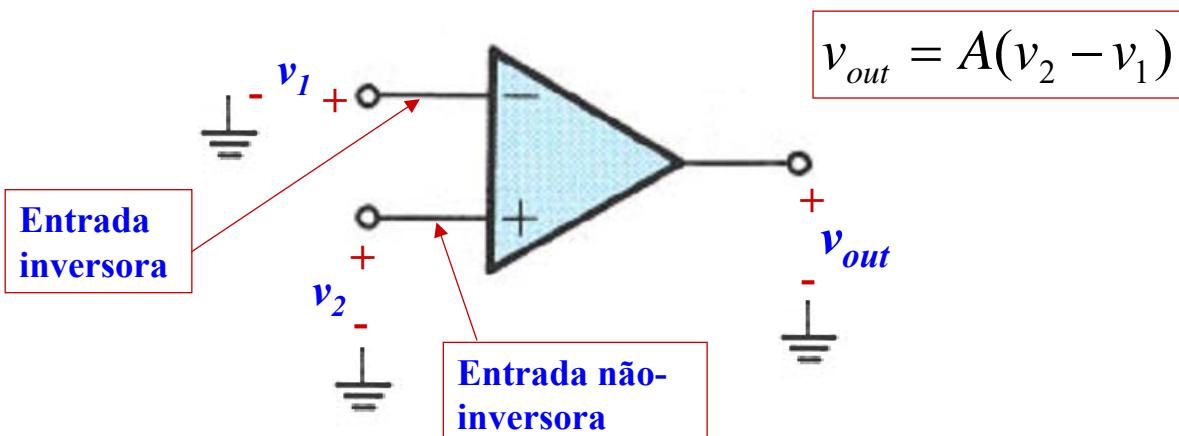


- $V_{CC}$  e  $V_{EE}$  são **15** e **-15V** no máximo;
- $A$  (ganho) pode ser da ordem de  **$10^6$** .

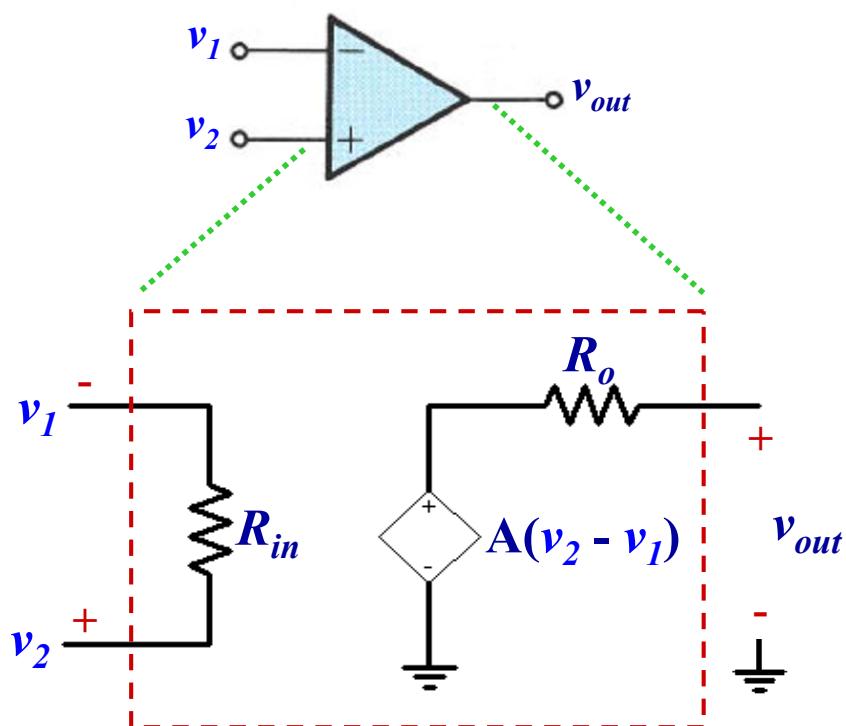


## Entradas inversora e não-inversora

- Entrada **inversora**: marcada com **(-)** ⇒ Porque a tensão  $v_1$  aparece na equação de  $v_{out}$  com o sinal **(-)**: se  $v_1$  aumentar  $v_{out}$  diminui;
- Entrada **não inversora**: marcada com **(+)** ⇒ Porque a tensão  $v_2$  aparece na equação de  $v_{out}$  com o sinal **(+)**: se  $v_2$  aumentar  $v_{out}$  aumenta.



## Modelo equivalente do OpAmp



- $R_{in}$  – resistência de entrada;
- $R_o$  – resistência de saída;
- $A$  – ganho em tensão.

**NOTA:** Modelo só é válido se o OpAmp estiver a funcionar na região linear!

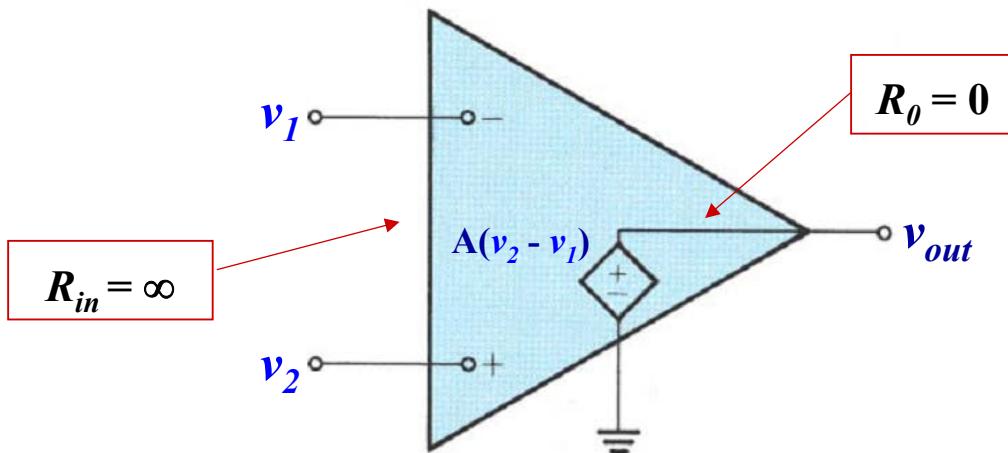
## OpAmp – valores típicos

$A$  – ganho em tensão,  $R_{in}$  – resistência de entrada;  $R_o$  – resistência de saída.

Part Number	$\mu$ A741	LM324	LF411	AD549K
Description	General purpose	Low-power quad	Low-offset, low-drift JFET input	Ultralow input bias current
Open loop gain $A$	$2 \times 10^5$ V/V	$10^5$ V/V	$2 \times 10^5$ V/V	$10^6$ V/V
Input resistance	$2 \text{ M}\Omega$	*	$1 \text{ T}\Omega$	$10 \text{ T}\Omega$
Output resistance	$75 \Omega$	*	$\sim 1 \Omega$	$\sim 15 \Omega$

## Modelo simplificado do OpAmp

- Em geral  $R_{in}$  é muito elevado e  $R_o$  é muito pequeno comparado com os valores das resistências usadas nos circuitos;
- Pelo que, na prática, adopta-se um modelo mais simples para o OpAmp:



## Realimentação

## OpAmp e *feedback*

- Mas por que razão são os OpAmps fabricados com ganhos tão elevado?

**R: Para serem usados em circuitos com realimentação (feedback) negativa?**

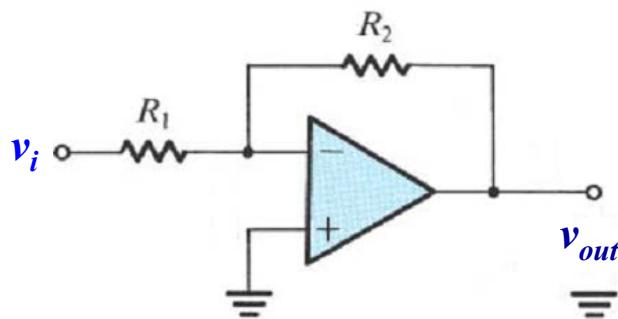
- Com realimentação negativa os circuitos resultantes não têm um ganho tão elevado, mas passam a gozar de vários benefícios:

- Ganho depende apenas de componentes exteriores ao OpAmp;
- Melhor linearidade (menor distorção);
- Maior largura de banda;
- Melhores características de resistência de entrada e saída.

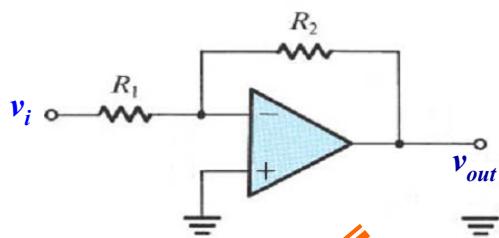
## Configuração inversora

## Configuração inversora do OpAmp

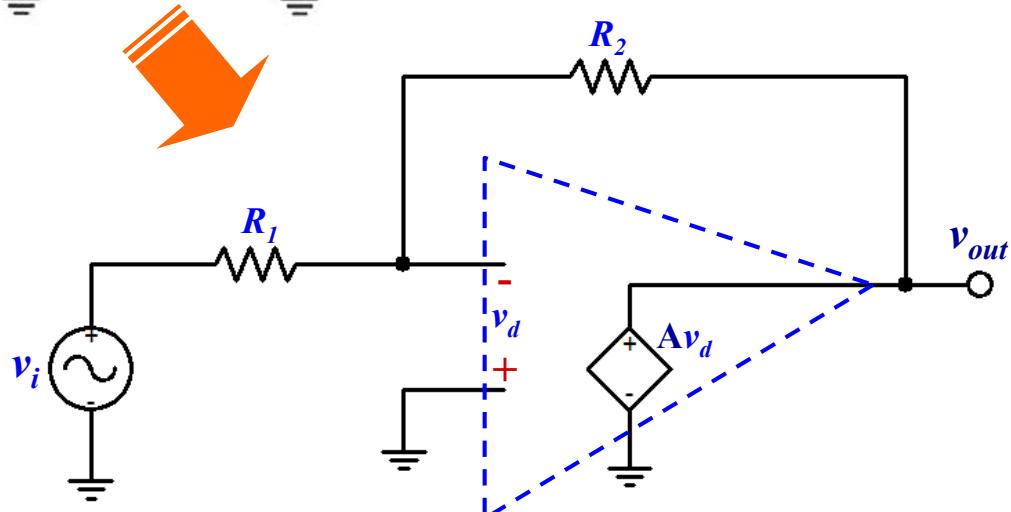
- Utiliza duas resistências numa configuração de **realimentação negativa** (ou *feedback* negativo);
- A configuração chama-se **inversora** porque quando a tensão de entrada,  $v_i$ , aumenta a tensão de saída,  $v_{out}$ , diminui.



## Configuração inversora do OpAmp

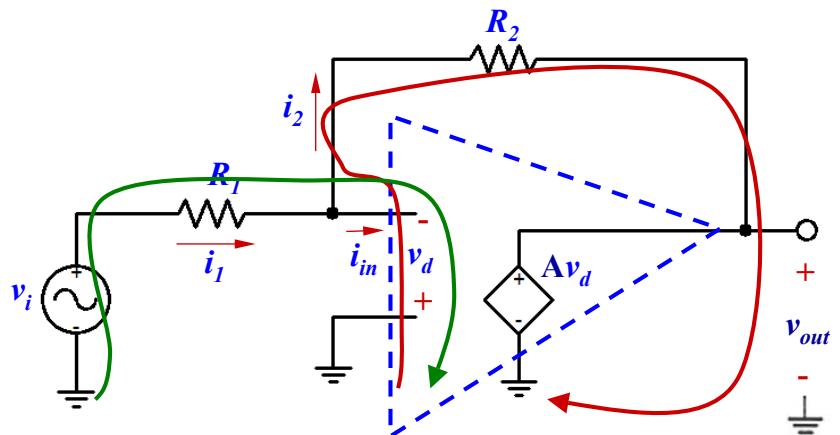


Para analisar o circuito  
substituímos o OpAmp pelo  
**modelo equivalente**



## Configuração inversora do OpAmp

- Queremos obter o ganho do circuito, ou seja, uma relação matemática entre  $v_{out}$  e  $v_i$ .



- Loop de entrada (a verde):  $-v_i + R_1 i_1 - v_d = 0$

- Loop de saída (a vermelho):  $v_d + R_2 i_2 + v_{out} = 0$

## Configuração inversora do OpAmp

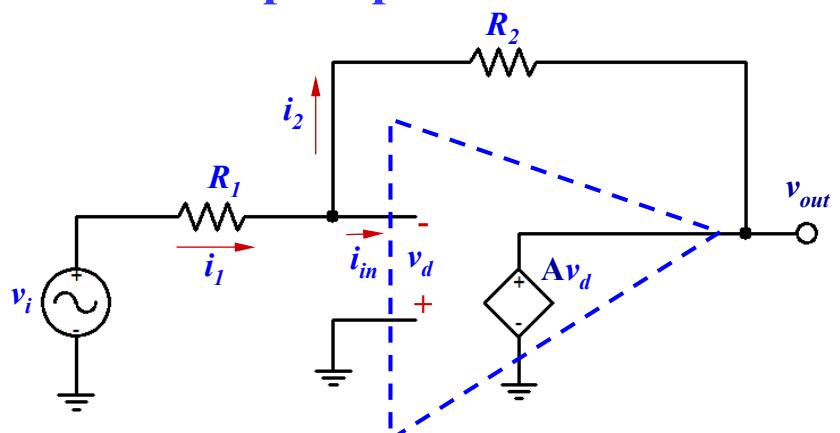
- Sabemos que

$$i_{in} = 0 \Rightarrow i_2 = i_1$$

$$v_{out} = A v_d$$

- Substituindo nas equações anteriores:

$$\begin{cases} -v_i + R_1 i_1 - \frac{v_{out}}{A} = 0 \\ \frac{v_{out}}{A} + R_2 i_1 + v_{out} = 0 \end{cases}$$



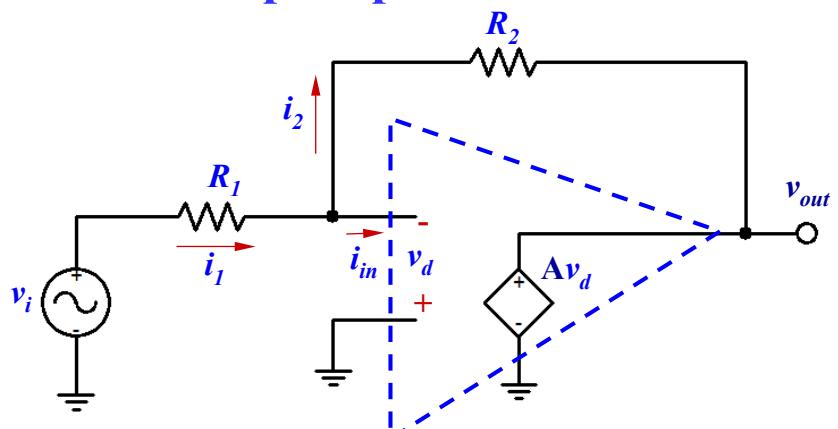
- Eliminando  $i_1$ , obtemos:

$$v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \left( \frac{R_2}{R_1} + 1 \right) \frac{1}{A}} v_i$$

## Configuração inversora do OpAmp

- À razão  $v_{out} / v_i$  chamamos **ganho em malha fechada**, ou apenas **ganho do circuito**.

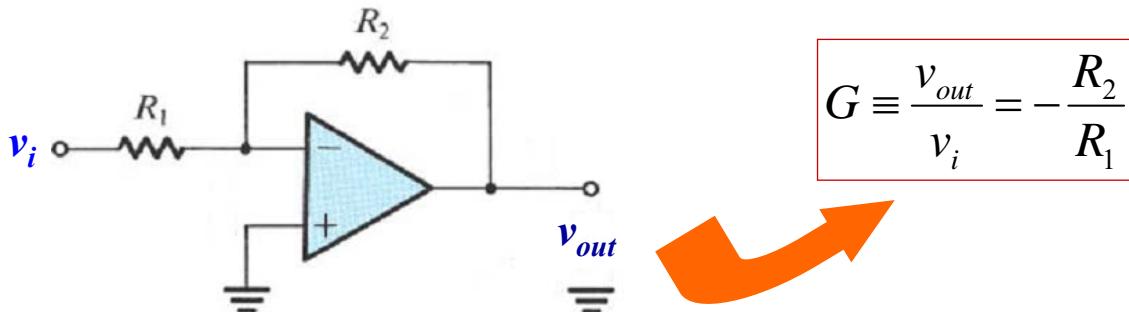
$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i}$$



- Para os valores tipicamente muito elevados de  $A$  a equação do ganho reduz-se a

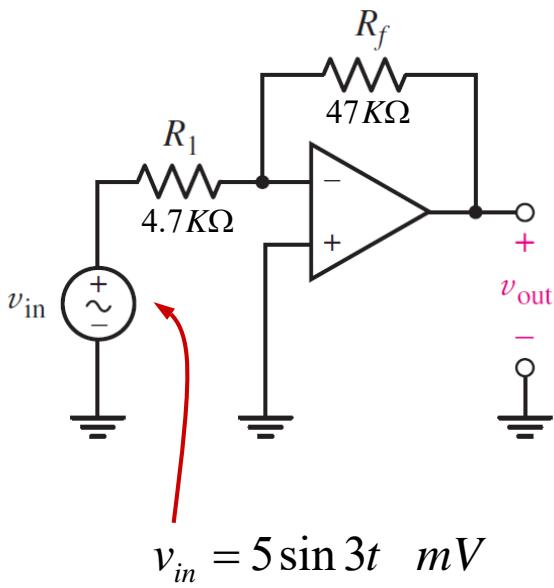
$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$

## Configuração inversora do OpAmp



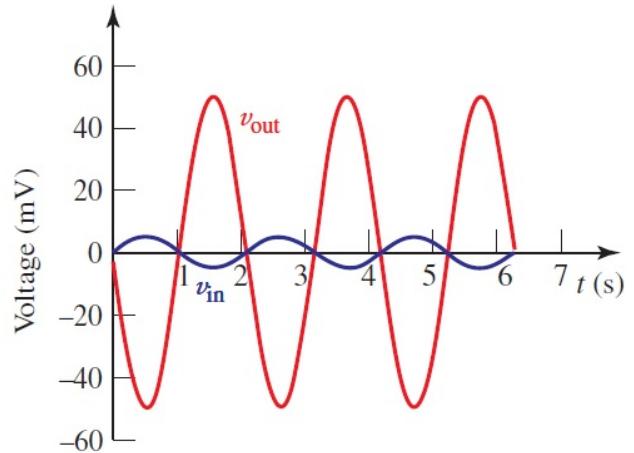
- Este é um **resultado notável** dos circuitos com feedback negativo em geral, e dos OpAmps em particular:
  - O Ganho depende apenas do valor de resistências exteriores ao OpAmp;
  - O valor do ganho em tensão do OpAmp,  $A$ , não é relevante desde que seja suficientemente elevado;
- O sinal (–) no ganho indica que há inversão da entrada para a saída.

## Configuração inversora - exemplo



$$G = -\frac{R_f}{R_1} = -\frac{47}{4.7} = -10$$

$$v_{out} = -50 \sin 3t \text{ mV}$$



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

6.1-25

## Região linear da configuração inversora

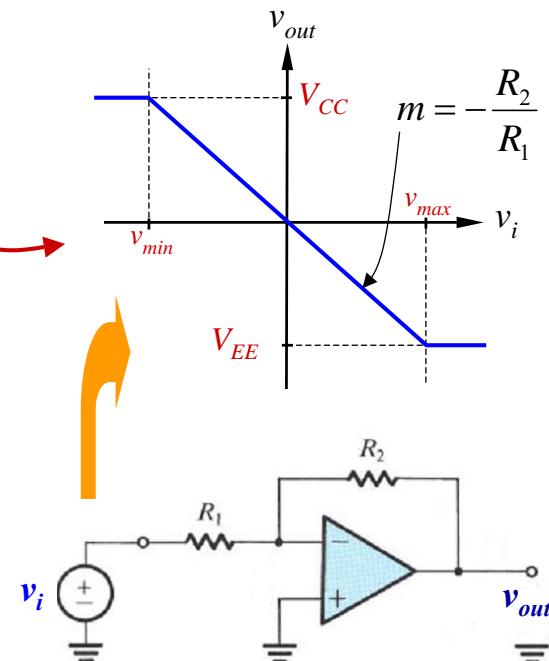
- Para que o OpAmp opere na região linear, o valor de  $v_i$  tem de se situar entre  $v_{min}$  e  $v_{max}$ .

- Substituindo  $v_{out} = -\frac{R_2}{R_1} v_i$

em  $V_{EE} < v_{out} < V_{CC}$

obtém-se:

$$-\frac{R_1}{R_2} V_{CC} < v_i < -\frac{R_1}{R_2} V_{EE}$$



- Assumiu-se aqui que os limites de  $v_{out}$  são as tensões de alimentação, o que nem sempre é o caso.

## Modelo ideal do OpAmp

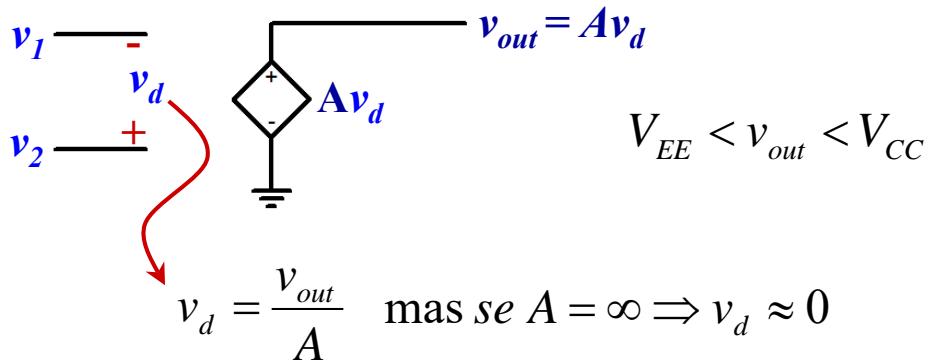
### OpAmp ideal

- A análise de circuitos com OpAmps é muito mais simples se considerarmos o ganho em tensão do OpAmp infinito:  $A = \infty$ . Adicionando este pressuposto ao modelo simplificado do OpAmp, obtemos:

### Modelo do OpAmp ideal

- $R_{in} = \infty$ ;
- Correntes nas entradas (+) e (-) do OpAmp são nulas;
- $R_o = 0$ ;
- $A = \infty$

## Curto-circuito virtual no OpAmp



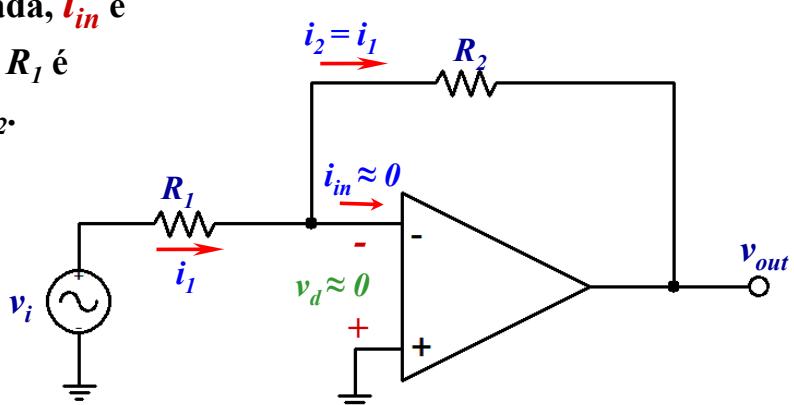
- Como  $v_{out}$  é uma tensão de valor compreendido entre as tensões de alimentação do OpAmp (e.g.  $-15$  e  $+15V$ ) e  $A$  é muito elevado, então  $v_d$  é forçosamente quase nulo:
  - ⇒ Podemos então admitir que existe um **curto-circuito (virtual)** entre as entradas (-) e (+) do OpAmp.
- Este curto-circuito virtual só existe se o amplificador estiver a funcionar na região linear (se não estiver saturado, ver pg. 6.1-11).

## Análise da configuração inversora usando o modelo do OpAmp ideal

- A análise deste circuito torna-se muito fácil se tivermos em mente que:

1) A tensão diferencial de entrada,  $v_d$  é nula  $\Rightarrow$  a corrente  $i_1$  depende apenas de  $v_i$ ;

2) A corrente de entrada,  $i_{in}$  é zero  $\Rightarrow$  a corrente em  $R_1$  é igual à corrente em  $R_2$ .



## Análise da configuração inversora usando o modelo do OpAmp ideal

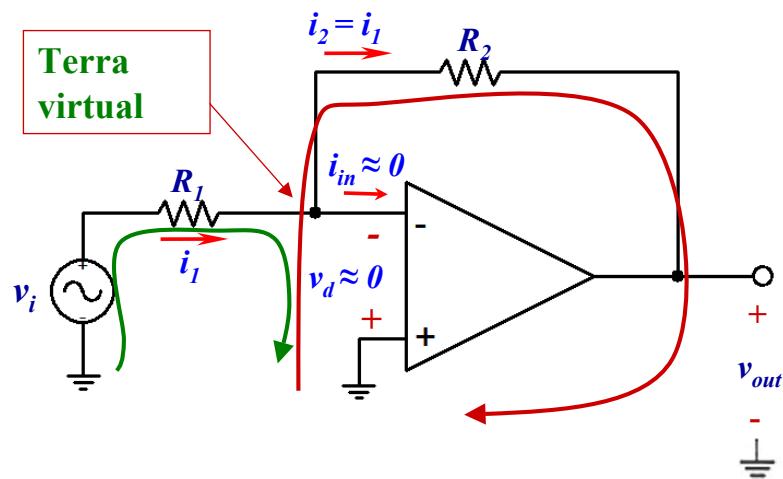
- As equações dos loops de entrada e de saída são agora:

$$-v_i + R_1 i_1 - 0 = 0$$

$$0 + R_2 i_1 + v_{out} = 0$$

- De onde se tira

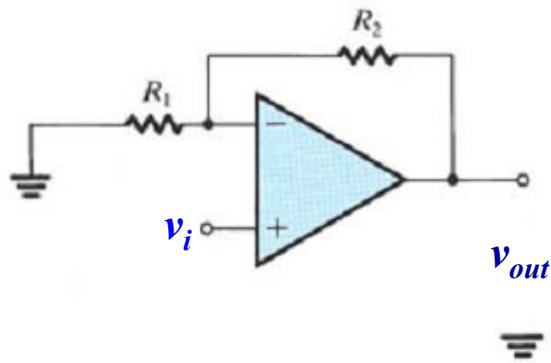
$$\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$$



- Usando o modelo do OpAmp ideal conseguimos portanto chegar ao mesmo resultado de uma forma mais simples.

## Configuração não inversora

## Configuração não-inversora do OpAmp



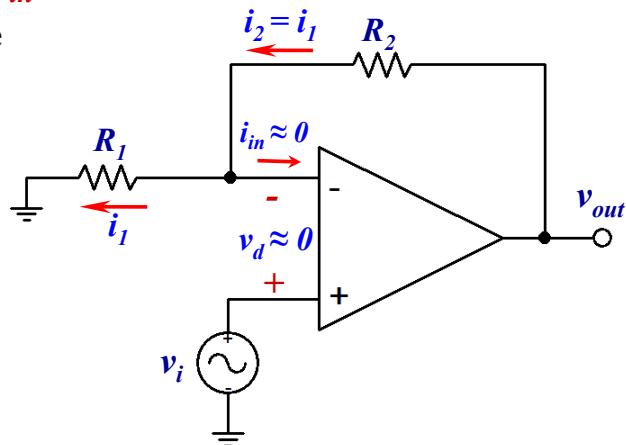
- Utiliza também duas resistências numa configuração de **realimentação negativa**;
- ... mas aqui o ganho **G** é positivo, razão porque a configuração se chama de **não-inversora** – quando a tensão de entrada, **v<sub>i</sub>**, aumenta, a tensão de saída, **v<sub>out</sub>**, também aumenta.

## Análise da configuração não-inversora

- É feita de forma idêntica à da configuração inversora:

1) A tensão diferencial de entrada, **v<sub>d</sub>** é nula  $\Rightarrow$  a corrente **i<sub>I</sub>** depende apenas de **v<sub>i</sub>**;

2) A corrente de entrada, **i<sub>in</sub>** é zero  $\Rightarrow$  a corrente em **R<sub>1</sub>** é igual à corrente em **R<sub>2</sub>**.



## Análise da configuração não-inversora

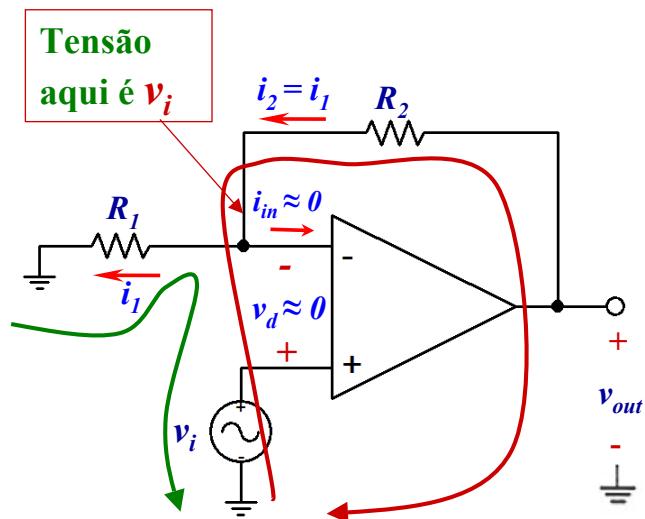
- As equações dos loops de entrada e de saída são agora:

$$-R_1 i_1 + v_i = 0$$

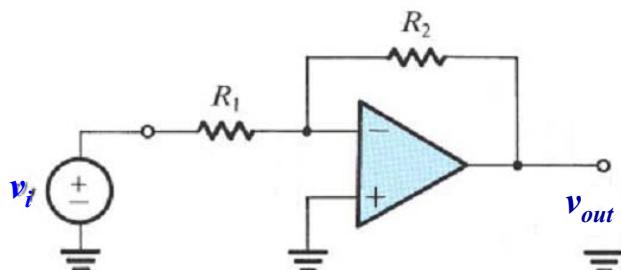
$$-v_i - R_2 i_1 + v_{out} = 0$$

- Eliminando  $i_1$  nas equações obtemos

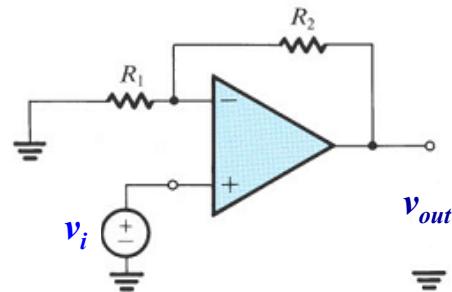
$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$



## Conclusão: configurações inversora e não-inversora



**Inversora:**  $\frac{v_{out}}{v_i} = -\frac{R_2}{R_1}$



**Não-inversora:**  $\frac{v_{out}}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$

## Limite das aproximações obtidas com o modelo do OpAmp ideal

- Voltando à expressão precisa do ganho da configuração inversora:

$$G = -\frac{R_2}{R_1} \frac{1}{1 + \left( \frac{1}{A} \frac{R_2}{R_1} + \frac{1}{A} \right)}$$

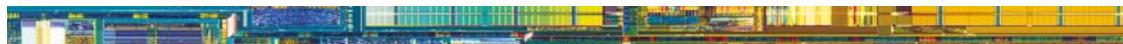
- ...constatamos que as aproximações anteriores para o ganho são válidas se:

⇒  $A$  for muito grande;

⇒ e  $R_2/R_1 \ll A$ .

- Ou seja, perdem a validade para ganhos em malha fechada,  $G$ , com valores da ordem de  $A$ .

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 6: Amplificadores operacionais (parte 2)*



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

### **Sumário**

- Resistência de entrada e resistência de saída num amplificador de tensão;
- Resistências de entrada e de saída das configurações inversora e não-inversora;
- Outras configurações do OpAmp
  - Seguidor de tensão;
  - Utilidade do seguidor de tensão;
  - Amplificador somador;
  - Amplificadores integrador e diferenciador;
  - OpAmp como comparador.

## Resistências de entrada e de saída de amplificadores

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

6.2-3

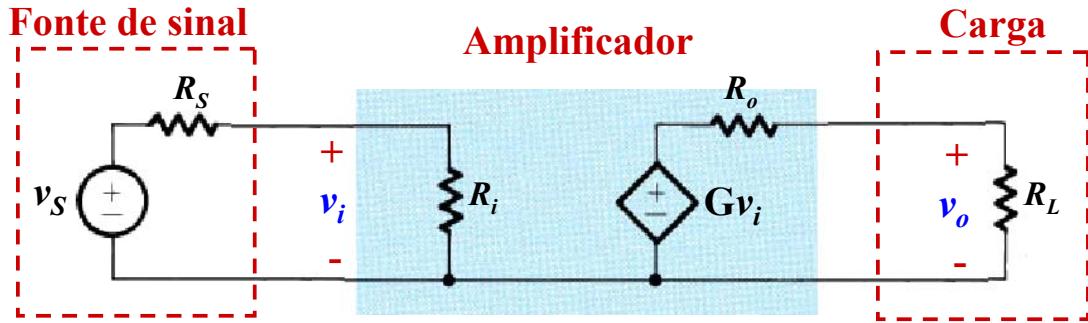
### Fonte de sinal, amplificador e carga



- Numa cadeia de amplificação como esta interessa sempre **maximizar a eficiência com que o sinal é transferido...**
  - ... da fonte de sinal para a entrada do amplificador, e
  - ... da saída do amplificador para a carga.

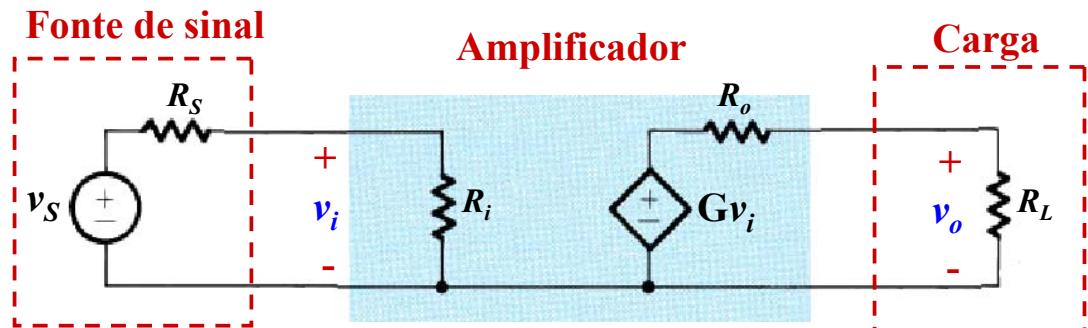
## Cadeia de amplificação: equivalente de Thévenin

- Substituindo cada um dos elementos da cadeia anterior pelo seu modelo, obtemos:



- No que se segue admitimos que o sinal a transferir da fonte de sinal para a carga é um **sinal em tensão**.

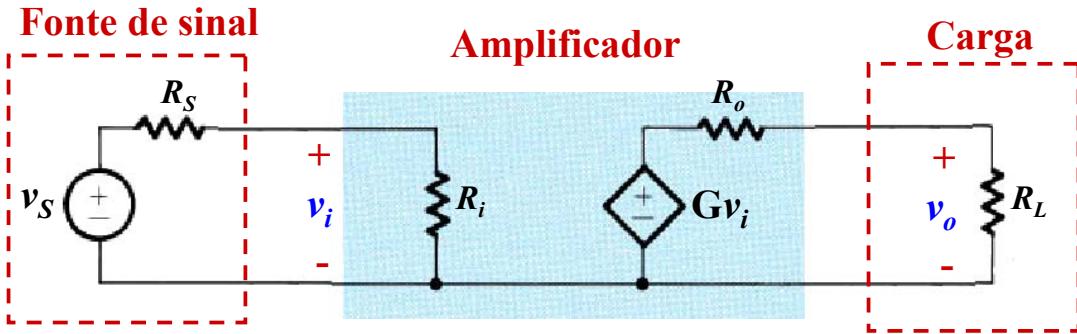
## Máxima eficiência...



- A máxima eficiência será conseguida se todo o sinal produzido pela fonte de sinal aparecer na entrada do amplificador. Ou seja se  $v_i = v_s$
- ... e se todo o sinal produzido pelo amplificador aparecer na resistência de carga. Ou seja se  $v_o = Gv_i$

## Eficiência da entrada do amplificador

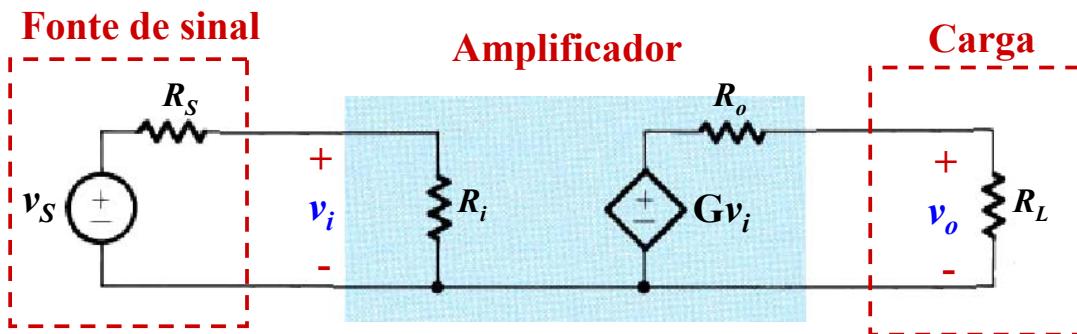
... mas não é isso que acontece!



- A tensão que aparece efectivamente entre os terminais de entrada do amplificador é:

$$v_i = \frac{R_i}{R_i + R_s} v_s \quad \text{Se } R_s = 100\Omega \text{ e } R_i = 500\Omega \text{ então:} \quad v_i = 0.83v_s$$

## Eficiência da entrada do amplificador



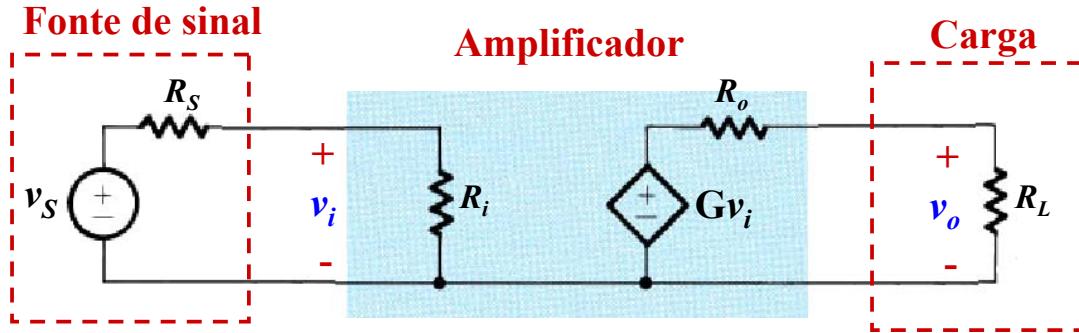
- Para termos  $v_i \approx v_s$ , como é pretendido, precisamos de ter  $R_i$  muito elevado.

Em concreto deveremos ter  $R_i \gg R_s$ :

$$v_i = \frac{1}{1 + \frac{R_s}{R_i}} v_s \quad \text{se } R_i \gg R_s, \text{ então } v_i \approx v_s$$

## Eficiência da saída do amplificador

- O raciocínio que fazemos relativamente à saída do amplificador é idêntico:



- A tensão  $v_o$  que aparece efectivamente na resistência de carga,  $R_L$ , é:

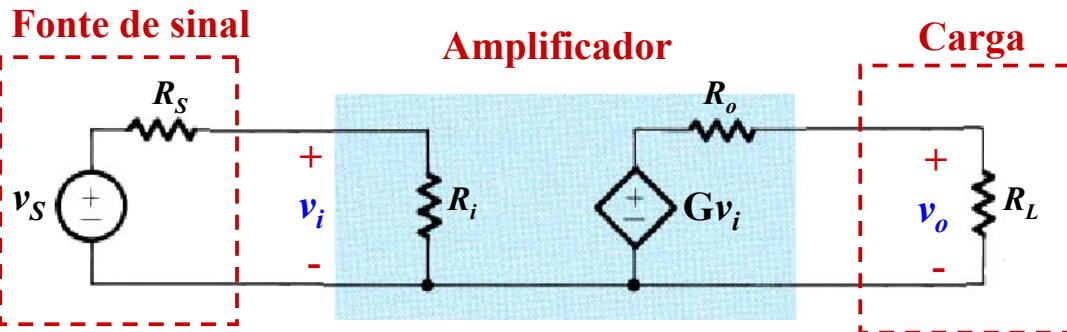
$$v_o = \frac{R_L}{R_L + R_o} Gv_i$$

► Se  $R_o = 10\Omega$  e  $R_L = 1\Omega$ , então:

$$v_o = 0.09Gv_i$$

► Estamos pois muito longe de ter  $v_o = Gv_i$

## Eficiência da saída do amplificador



- Para termos  $v_o \approx Gv_i$ , como pretendido, precisamos de ter  $R_o$  muito baixo.

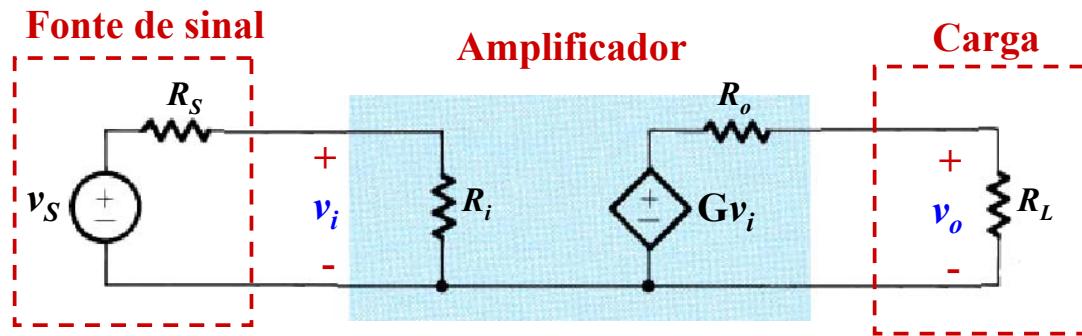
Em concreto deveremos ter  $R_o \ll R_L$ :

$$v_o = \frac{1}{1 + \frac{R_o}{R_L}} Gv_i \quad \text{se} \quad R_o \ll R_L, \quad \text{então} \quad v_o \approx Gv_i$$

## Conclusão: Máxima eficiência do amplificador

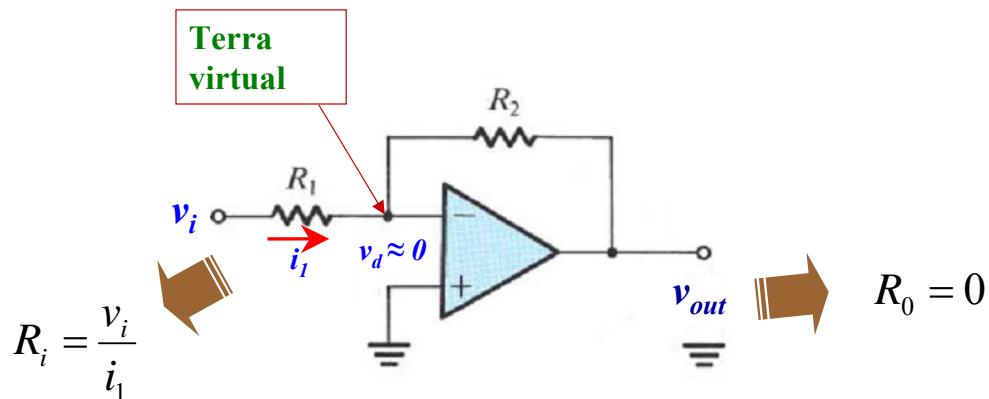
- Para maximizar a eficiência do acoplamento de sinal na entrada e na saída, um **amplificador de tensão** deve apresentar:

$$R_i \gg R_S \quad \text{e} \quad R_o \ll R_L$$

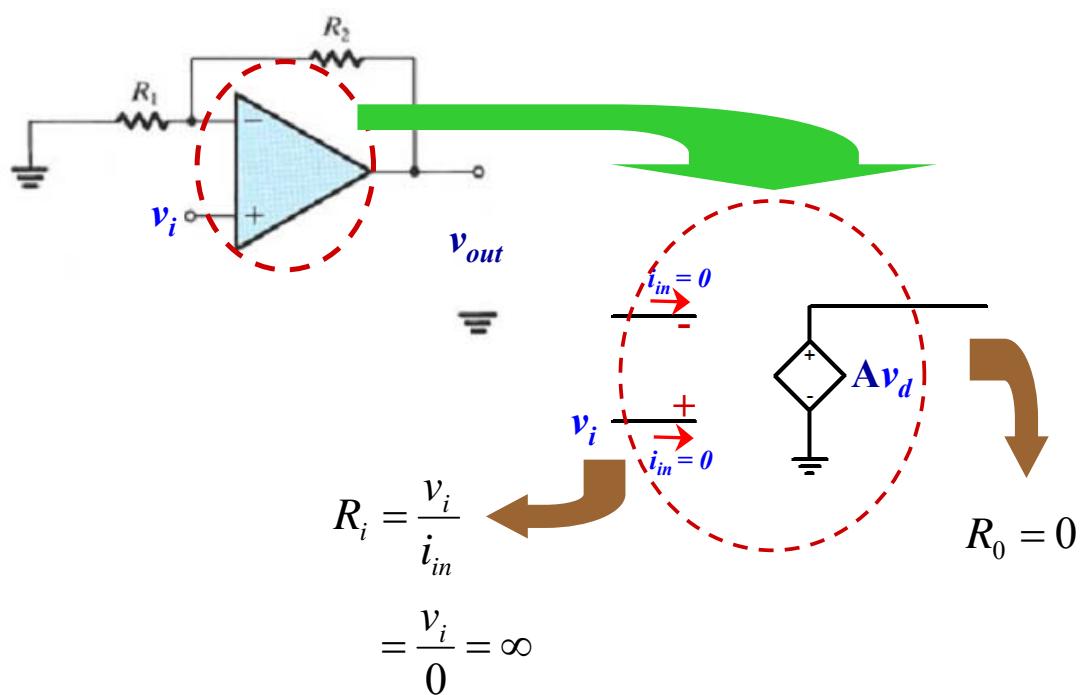


**Resistências de entrada ( $R_i$ ) e de saída ( $R_o$ ) das configurações inversora e não-inversora**

## $R_i$ e $R_o$ na configuração inversora



## $R_i$ e $R_o$ na configuração não-inversora

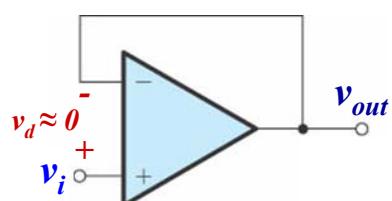


## Seguidor de tensão

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

6.2-15

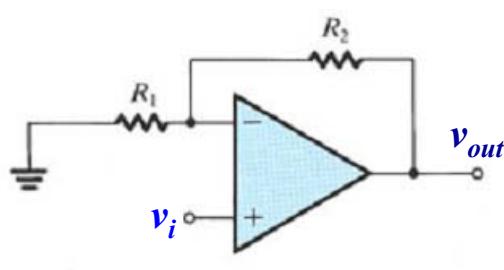
### Seguidor de tensão ou *buffer*



$$v_{out} = v_i$$

- Saída segue a entrada!

- Na realidade, este circuito é um caso particular da configuração não-inversora.



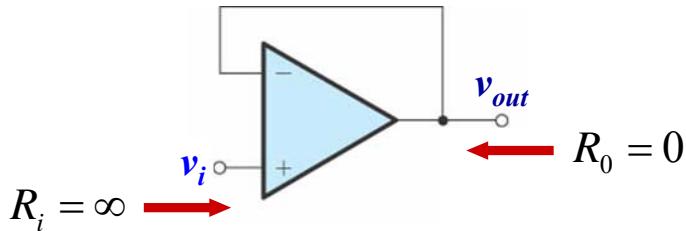
$$G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

- Se  $R_1 = \infty$  e  $R_2 = 0$ ...

→  $G \equiv \frac{v_{out}}{v_i} = 1$

## Seguidor de tensão

- Mas que utilidade poderá ter um circuito com ganho = 1 ?

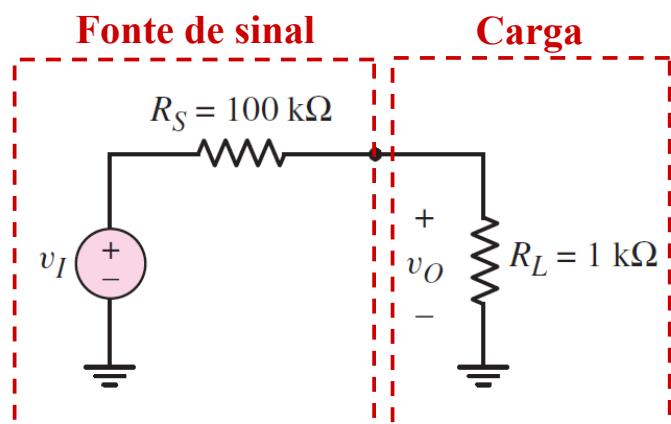


- Tal como a configuração não-inversora, este circuito também apresenta  $R_i = \infty$  e  $R_o = 0$ , sendo útil quando queremos ligar um circuito com resistência de saída elevada a outro com resistência de entrada baixa.

## Utilidade do seguidor de tensão

- Suponhamos uma fonte de sinal ligada a uma carga;
- Para conseguirmos maximizar a eficiência do acoplamento entre a fonte e a carga (de forma a ter  $v_o \approx v_i$ ), é necessário que:

$$R_L \gg R_S$$



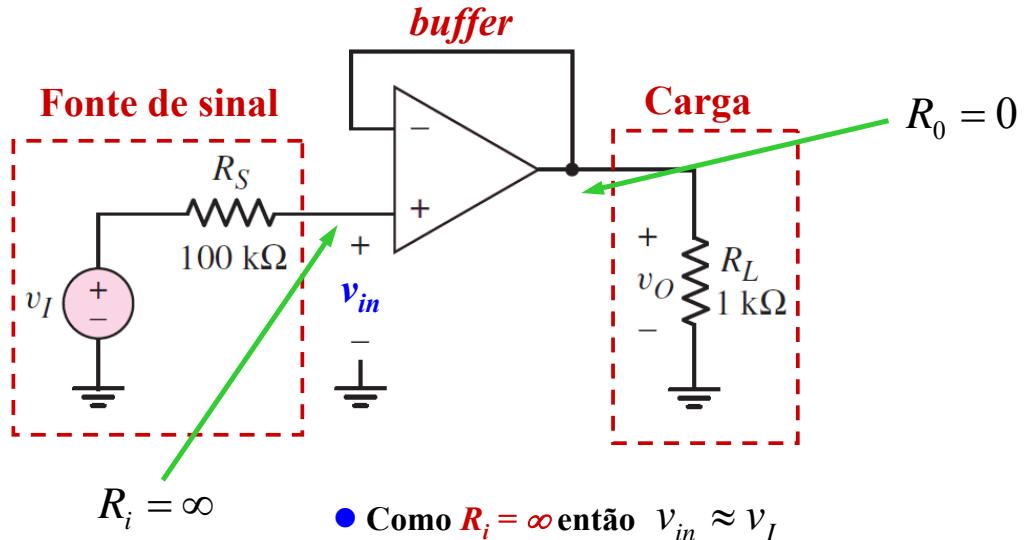
$$v_o = \frac{1K}{1K + 100K} v_i \approx 0.01 v_i$$

o que não é o caso.

$v_o$  vai ser apenas uma pequena fração de  $v_i$  !

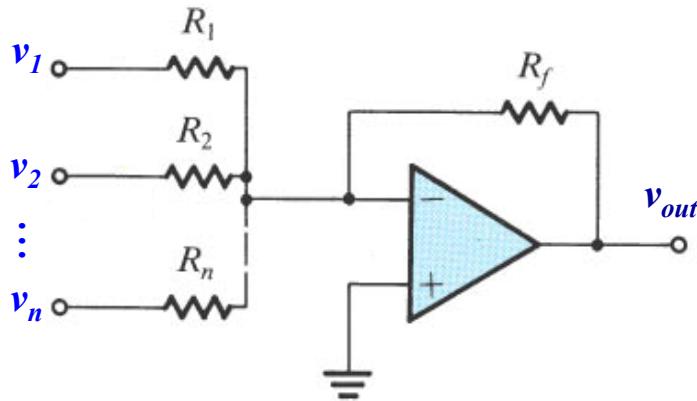
## Utilidade do seguidor de tensão

- Problema resolve-se com um *buffer* entre a fonte de sinal e a carga:



## Amplificador somador

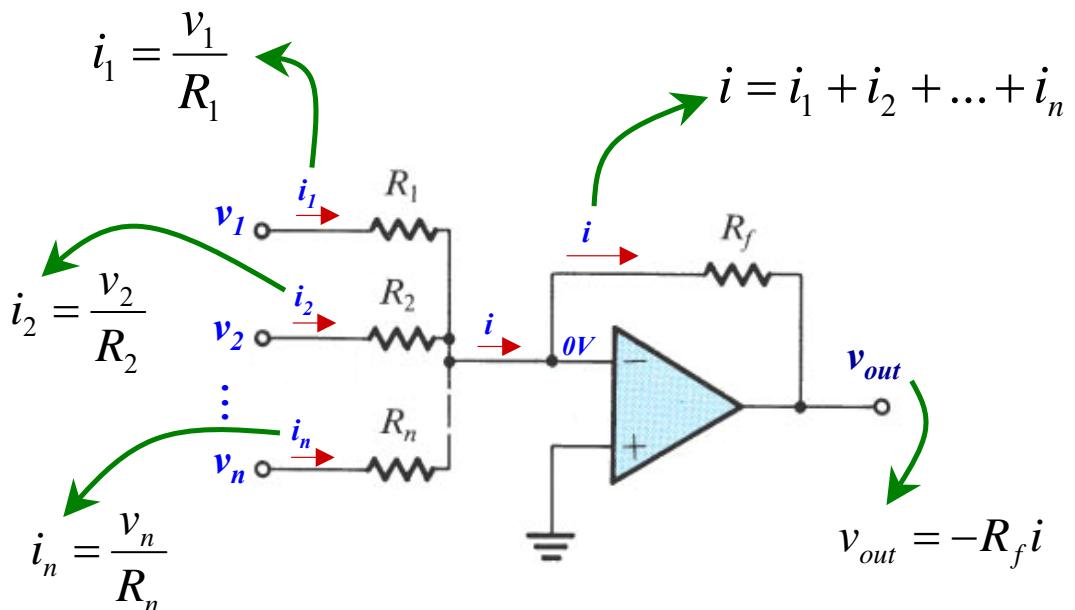
## Amplificador somador



$$v_{out} = K_1 v_1 + K_2 v_2 + \dots + K_n v_n$$

- Saída é uma soma ponderada das tensões de entrada.

## Amplificador somador



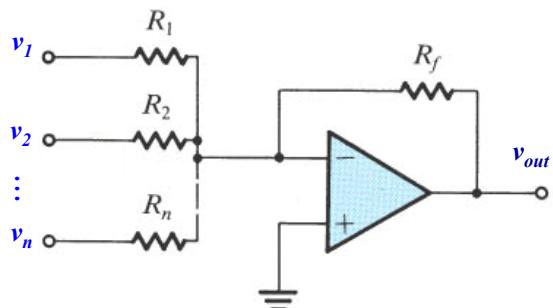
## Amplificador somador

- Conjugando as expressões anteriores obtemos

$$v_{out} = - \left( \frac{R_f}{R_1} v_1 + \frac{R_f}{R_2} v_2 + \dots + \frac{R_f}{R_n} v_n \right)$$

- Saída é portanto a soma ponderada dos sinais de entrada;

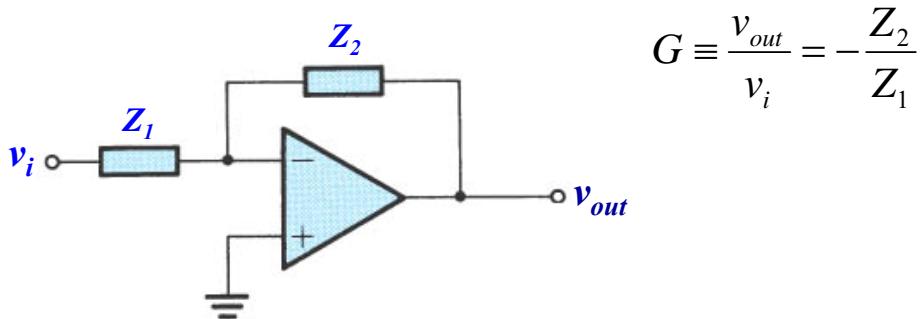
- Coeficientes de cada entrada podem ser ajustados individualmente.



## Amplificadores integrador e diferenciador

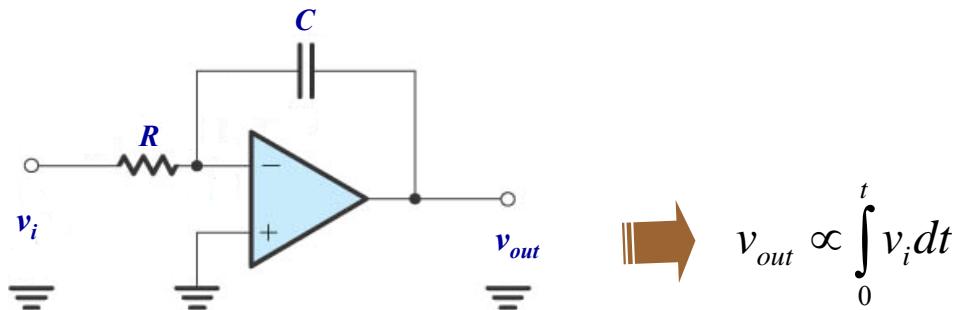
## Configurações inversoras com impedâncias

- Se substituirmos, na configuração inversora, as resistências  $R_1$  e  $R_2$  por impedâncias (de condensadores ou bobinas) obtemos amplificadores com ganho dependente da frequência.



## Configuração integradora

- Aqui a resistência de feedback  $R_2$  é substituída por um condensador.
- A tensão de saída é proporcional ao integral do sinal de entrada.

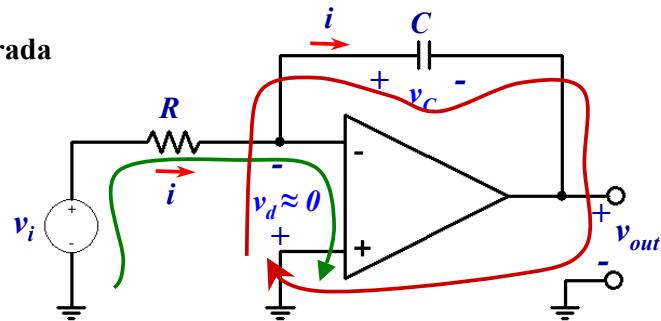


## Análise da configuração integradora

- Aplicando KVL à malha de entrada

$$-v_i + R \cdot i + 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{v_i}{R}$$



- Para a malha de saída:

$$v_C + v_{out} = 0 \Leftrightarrow v_{out} = -v_C = -\left( \frac{1}{C} \int_0^t i dt + v_C(0) \right)$$

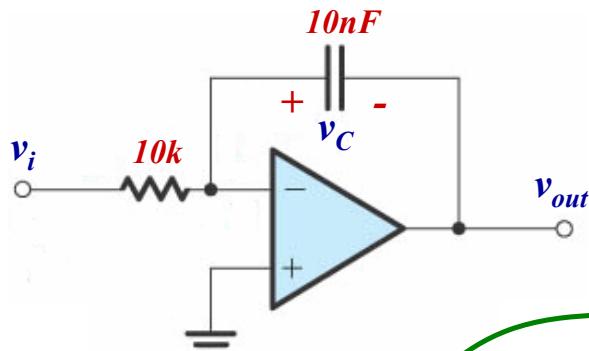
- Substituindo a equação anterior

$$v_{out} = -\left( \frac{1}{RC} \int_0^t v_i dt + v_C(0) \right)$$

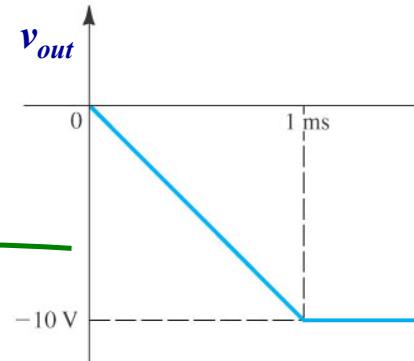
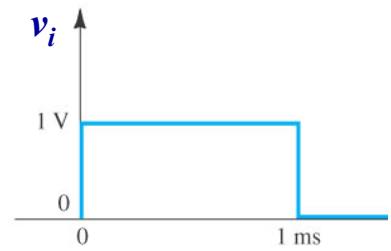
● RC é a *constante de tempo de integração*.

## Configuração integradora

- Uma aplicação: conversão de ondas quadradas em triangulares.

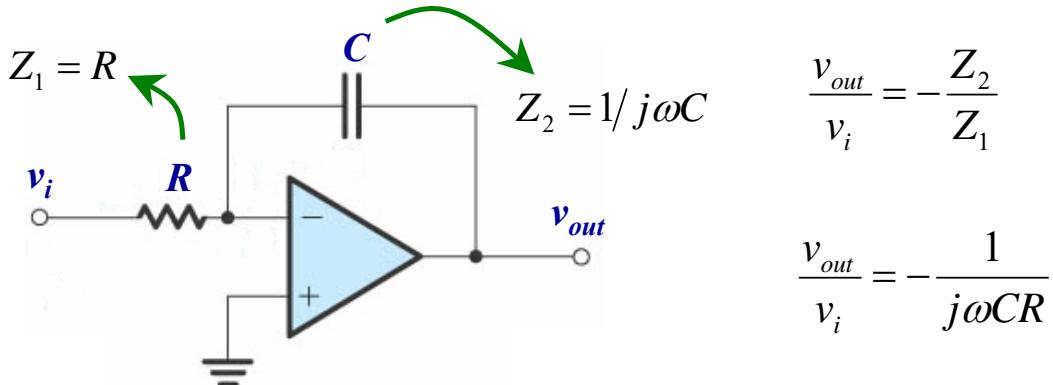


$$v_{out} = -10^4 \int_0^t v_i dt$$



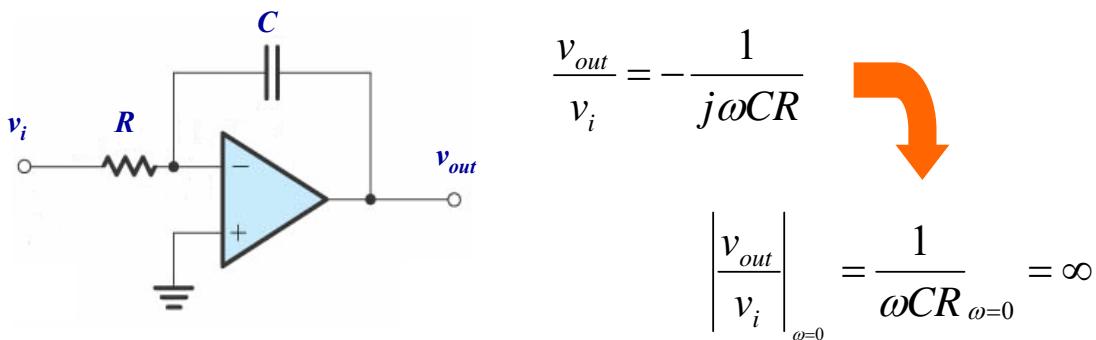
Assumindo  $v_C(0) = 0V$

## Configuração integradora



- Ganho do circuito diminui com a frequência - circuito é um **filtro passa baixo**;
- Ganho é unitário para  $\omega_I = 1/RC$ .

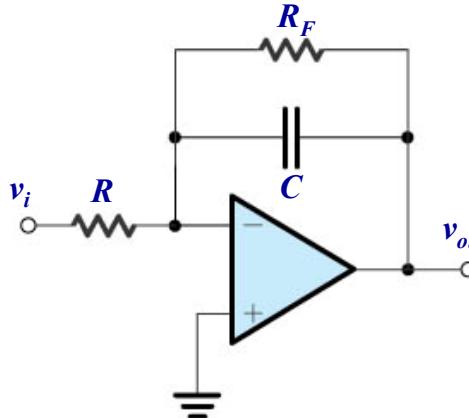
## Configuração integradora



- Em DC ( $\omega = 0$ ) o ganho do integrador é **infinito** (condensador é um circuito aberto).
- Ou seja, qualquer tensão DC na entrada, por pequena que seja, produz, mais tarde ou mais cedo, a **saturação da saída**.

## Configuração integradora

- Para evitar este problema é costume usar-se o integrador com uma resistência de valor elevado em paralelo com o condensador.



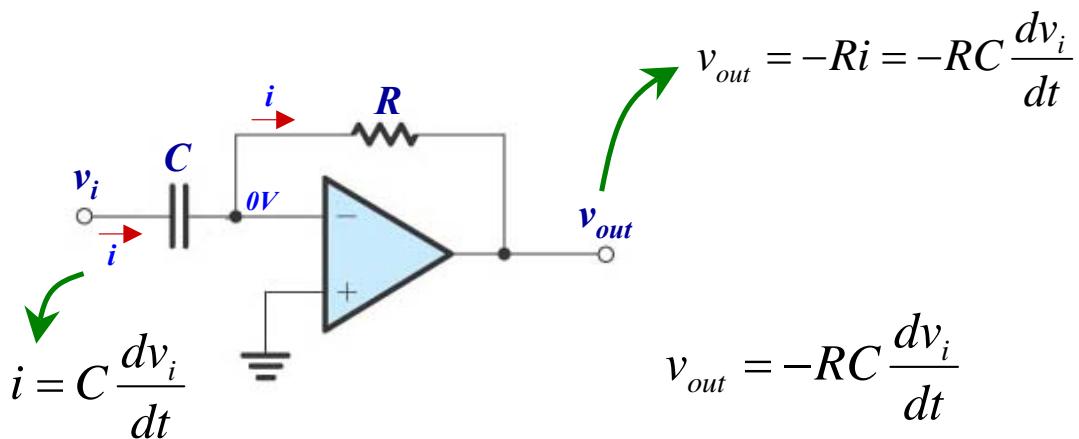
- Agora o ganho em DC é

$$\left| \frac{v_{out}}{v_i} \right|_{\omega=0} = \frac{R_F}{R}$$

- ... no entanto, assim, o integrador já não é ideal.

## Configuração diferenciadora

- Trocando a resistência e o condensador obtemos um circuito que produz uma saída proporcional à derivada do sinal de entrada.



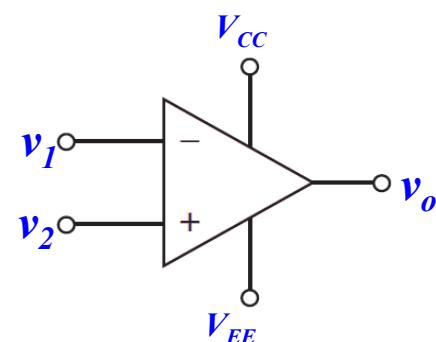
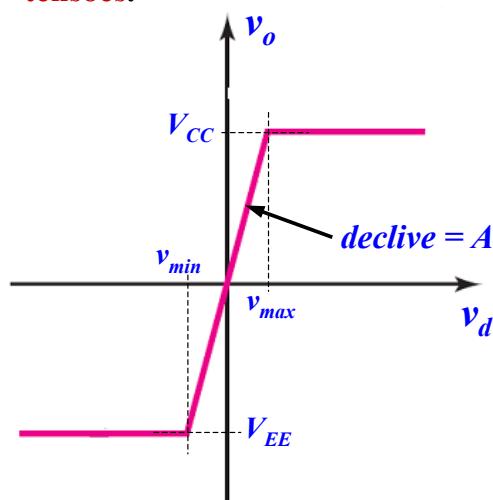
## OpAmp como comparador

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

6.2-33

### Comparador

- Devido ao ganho muito elevado, um OpAmp pode ser usado em loop aberto (sem feedback) como comparador de tensões.



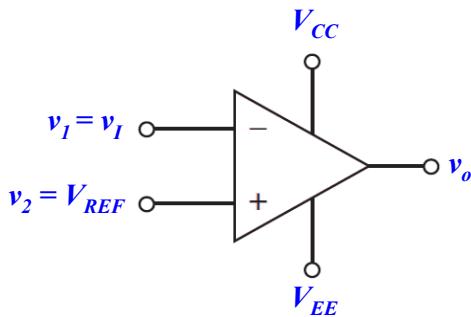
$$\text{Se: } V_{CC} = -V_{EE} = 15V$$

$$A = 10^5$$

$$v_{\max} - v_{\min} = \frac{30}{10^5} = 0.3mV$$

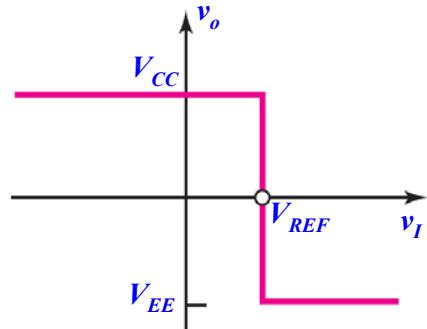
- Portanto a região linear pode considerar-se quase vertical.

## Comparador



$$v_o = \begin{cases} V_{CC} & \text{se } v_I < V_{REF} \\ V_{EE} & \text{se } v_I > V_{REF} \end{cases}$$

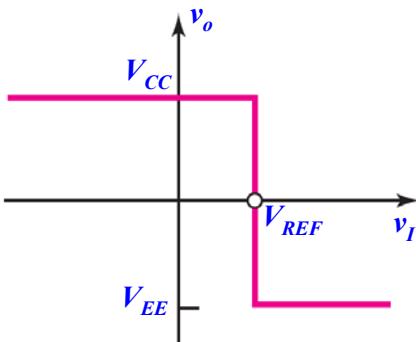
- Circuito tem uma saída binária resultante da comparação das duas tensões de entrada.



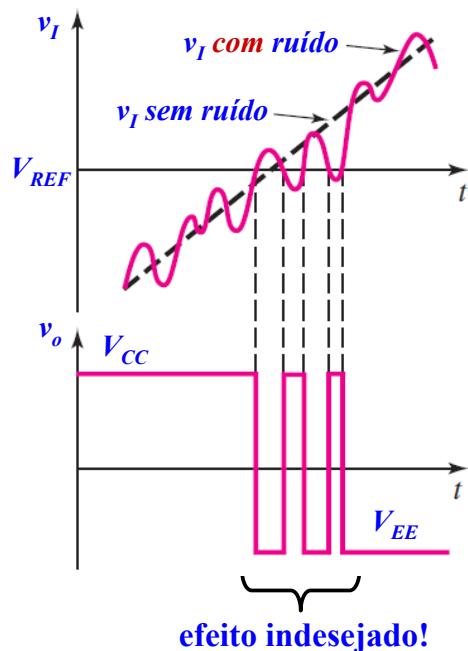
**NOTA:** assumindo que as tensões de saturação são  $V_{CC}$  e  $V_{EE}$ , o que nem sempre acontece!

## Comparador com *feedback* regenerativo

- Os comparadores em loop aberto não são aconselhados quando o sinal  $v_I$  têm muito ruído.



- Isto pode acontecer, por exemplo, se o sinal  $v_I$  vier dum sensor de temperatura.

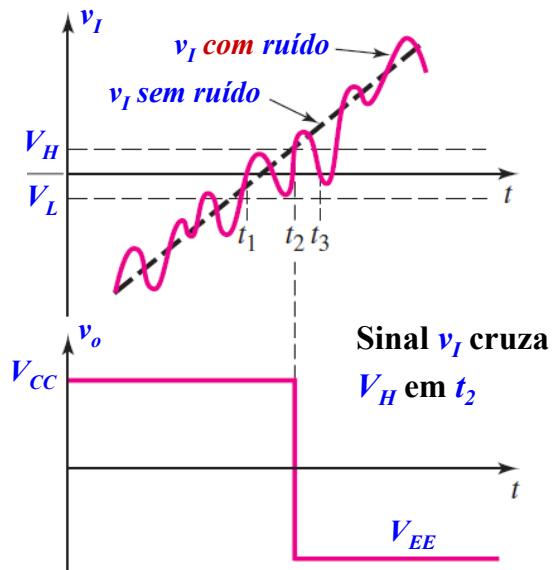
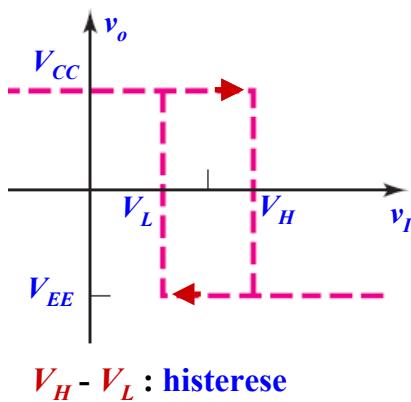


## Comparador com *feedback* regenerativo

- Precisamos dum comparador com dois níveis de comparação:

$V_H$  – quando  $v_I$  sobe;

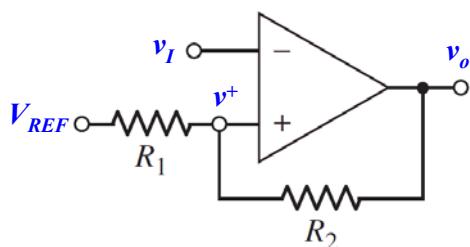
$V_L$  – quando  $v_I$  desce



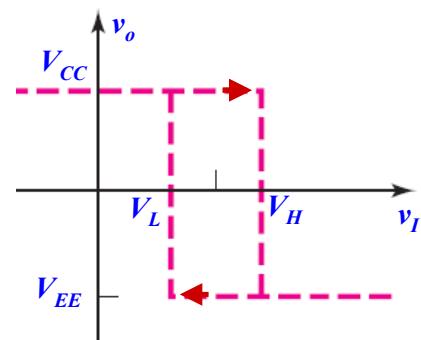
Assim temos uma comutação *limpa*!

## Comparador com *feedback* regenerativo

- Este comparador obtém-se usando **feedback positivo**. A tensão de comparação depende do estado da saída.



- $V_H$  e  $V_L$  obtêm-se por **Sobreposição...**



$$v^+ = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} v_o$$

$$V_H = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{CC}$$

$$V_L = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF} + \frac{R_1}{R_1 + R_2} V_{EE}$$

## Comparador com *feedback* regenerativo - projeto

- Pretendemos obter a característica com os valores indicados.

Dos resultados anteriores...

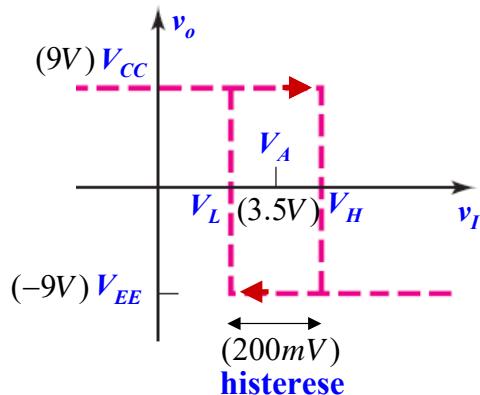
$$V_H - V_L = \frac{R_1}{R_1 + R_2} (V_{CC} - V_{EE})$$

donde se tira  $R_2/R_1 = 89$

e.g.  $R_2 = 82K + 6K8; R_1 = 1K$

$$V_A = \frac{V_H + V_L}{2} \quad \text{Usando as expressões anteriores: } V_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{REF}$$

$$\text{donde } V_{REF} = \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) V_A = \left(1 + \frac{1}{89}\right) 3.5 = 3.54V$$



# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 7: Díodos e Aplicações*



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



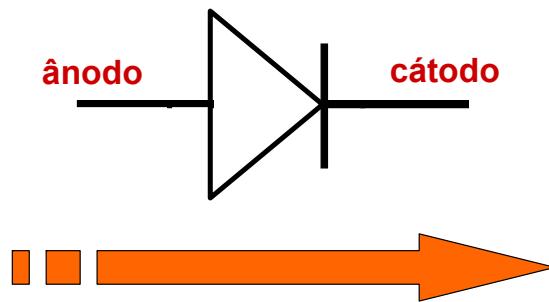
Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

### **Sumário**

- **Introdução;**
- **Fundamentos físicos do díodo;**
- **Junção *pn* em equilíbrio, inversamente e directamente polarizada;**
- **Característica corrente/tensão do díodo;**
- **Parâmetros mais importantes do díodo – valores típicos;**
- **Modelos simplificados para análise de circuitos;**
- **Rectificadores: meia onda; onda completa; filtragem;**
- **Díodo Zener e aplicações;**
- **Díodo LED e foto-díodo.**

## Introdução

- O díodo é o componente electrónico (não linear) mais simples;
- Distingue-se por conduzir apenas num sentido: a aplicação mais comum é em circuitos de rectificação.



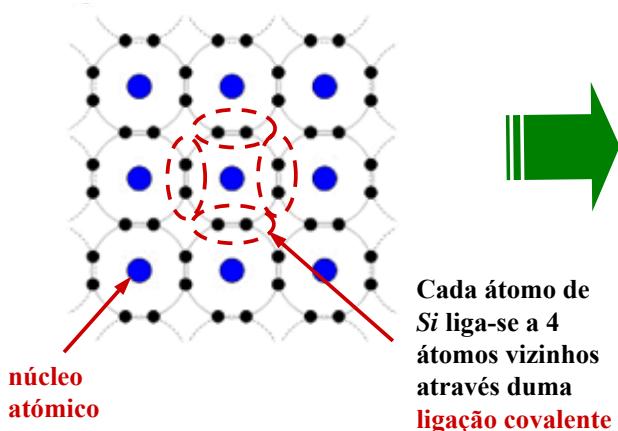
**Corrente só passa neste sentido!**

## Fundamentos físicos do díodo

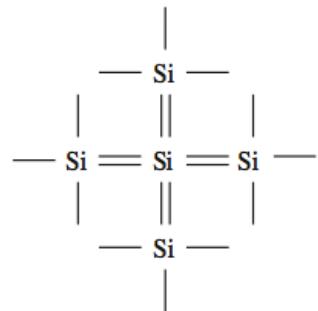
## Semicondutores

- Elementos com **4** electrões de valênciā, e.g. **silício**;
- Valores de condutividade entre a dos isoladores e a dos condutores.

Estrutura cristalina do **silício intrínseco** (representação 2D)

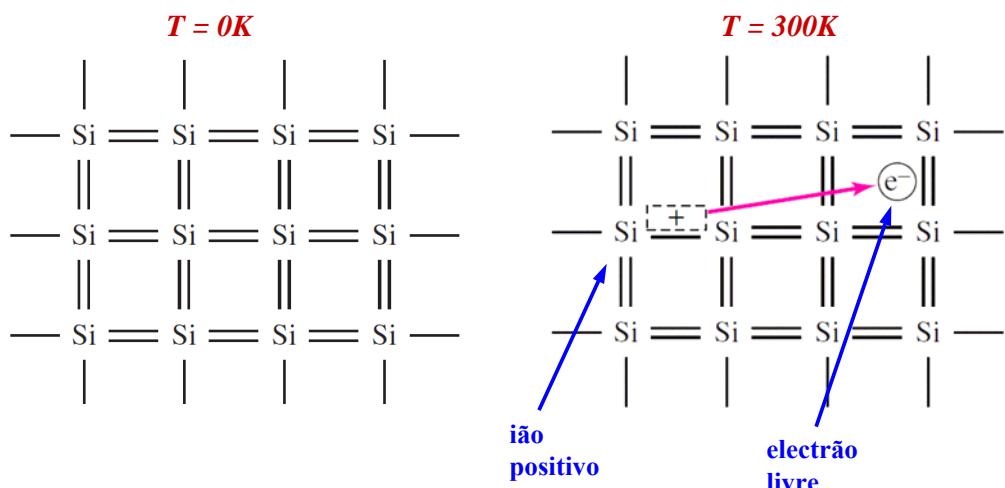


Representação simplificada



## Semicondutores

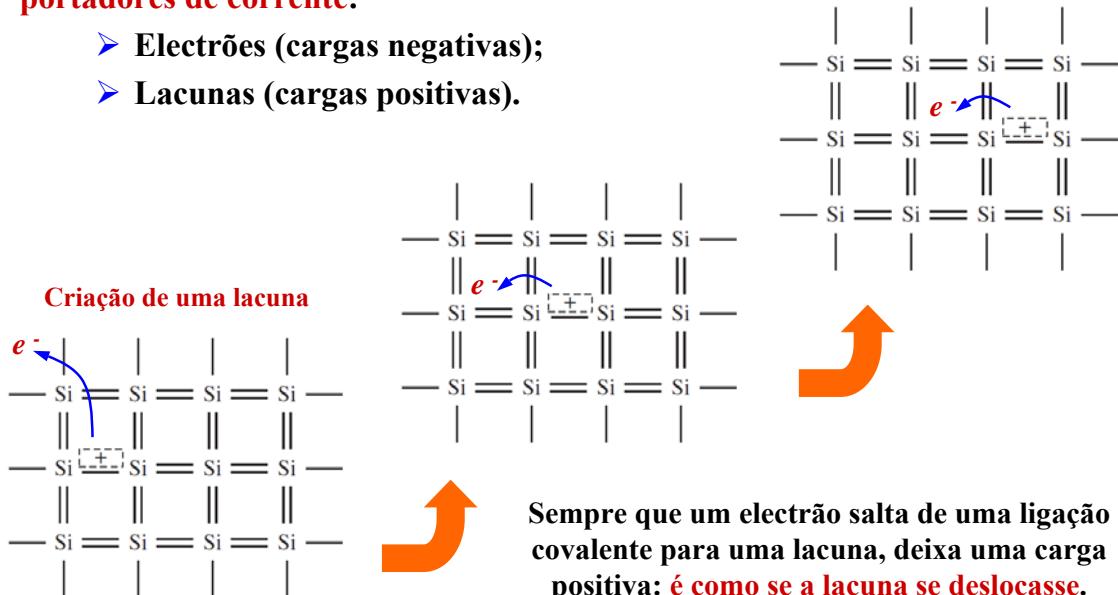
- A **0 Kelvin** o Si não tem electrões livres – condutividade é zero;
- Temperatura rompe algumas ligações, gerando **electrões livres**.



## Semicondutores

- Semicondutores distinguem-se dos condutores por terem **dois tipos de portadores de corrente**:

- Electrões (cargas negativas);
- Lacunas (cargas positivas).



## Dopagem

- Para aumentar a condutividade, o silício é **dopado**, ou seja misturado com outros elementos.

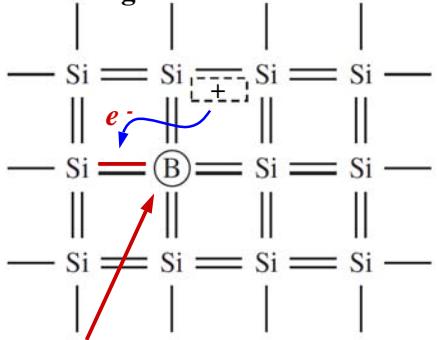
Dopagem com elemento com 5 electrões de valência (e.g fósforo - P)

gera um electrão livre



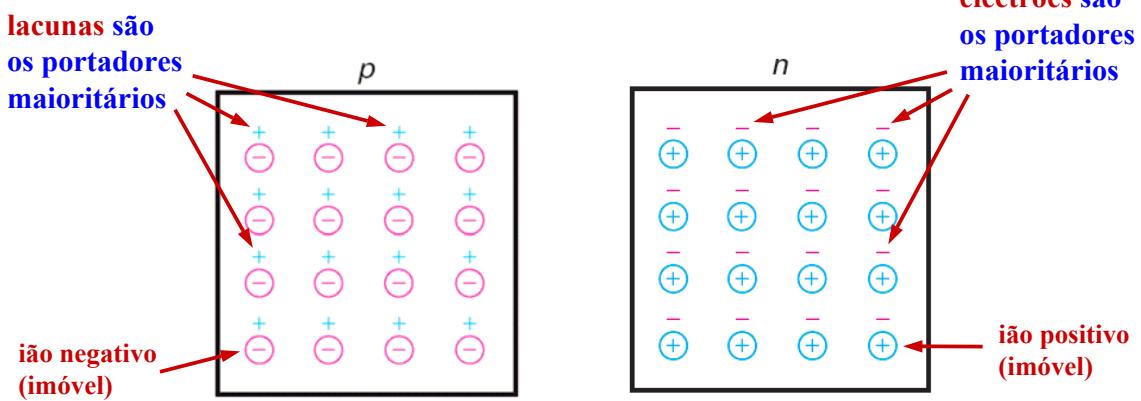
Dopagem com elemento com 3 electrões de valência (e.g boro - B)

gera uma lacuna



## Semicondutores do tipos *n* e *p*

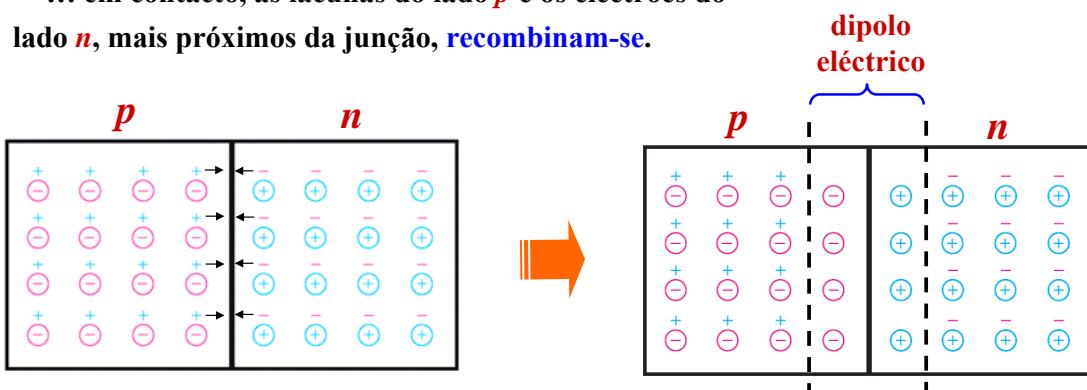
- Um semicondutor do tipo *n* ou *p* tem apenas melhor condutividade que uma semicondutor intrínseco.



- A *magia* acontece quando os dois tipos de semicondutor entram em contacto, formando um *díodo de junção*...

## A junção *pn*

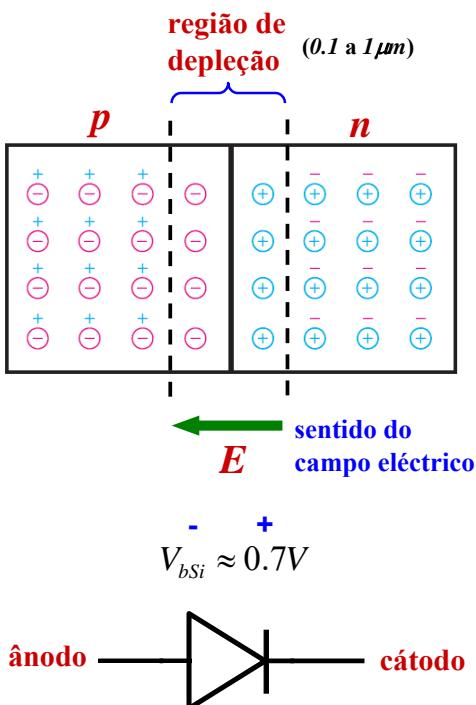
- ... em contacto, as lacunas do lado *p* e os electrões do lado *n*, mais próximos da junção, recombinaam-se.



- Os iões próximos da junção deixam de estar electricamente *cobertos*, criando um *dipolo eléctrico*;

- Este dipolo opõem-se ao movimento de lacunas de *p* → *n* e electrões de *n* → *p*.

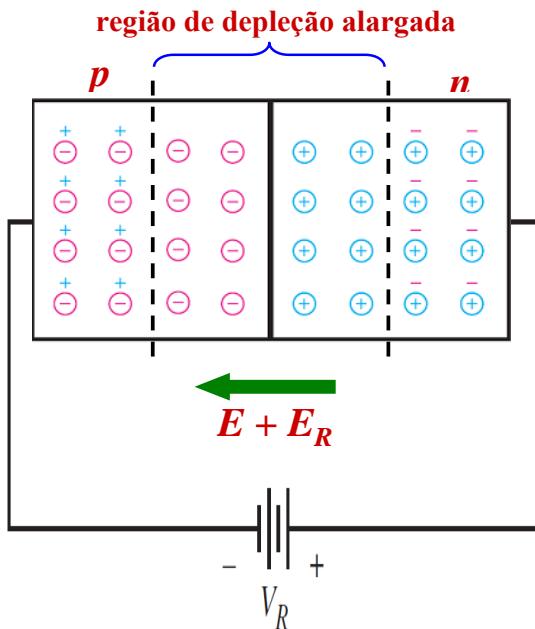
## A junção *pn* em equilíbrio



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

7-11

## A junção *pn* polarizada inversamente



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

- A região do dipolo chama-se **de depleção** porque está vazia de cargas móveis;

- O dipolo estabelece um **campo eléctrico**, **E** que trava a difusão de electrões e lacunas através da junção;

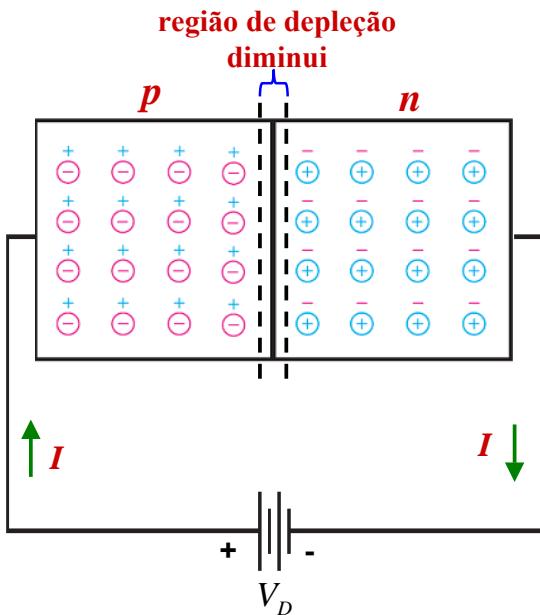
- À diferença de potencial do dipolo chamamos **potencial de barreira**, **V<sub>b</sub>**;

- No silício o valor do potencial de barreira é tipicamente de **0.7V**.

- A junção *pn* é um **díodo**...

7-12

## A junção *pn* polarizada directamente



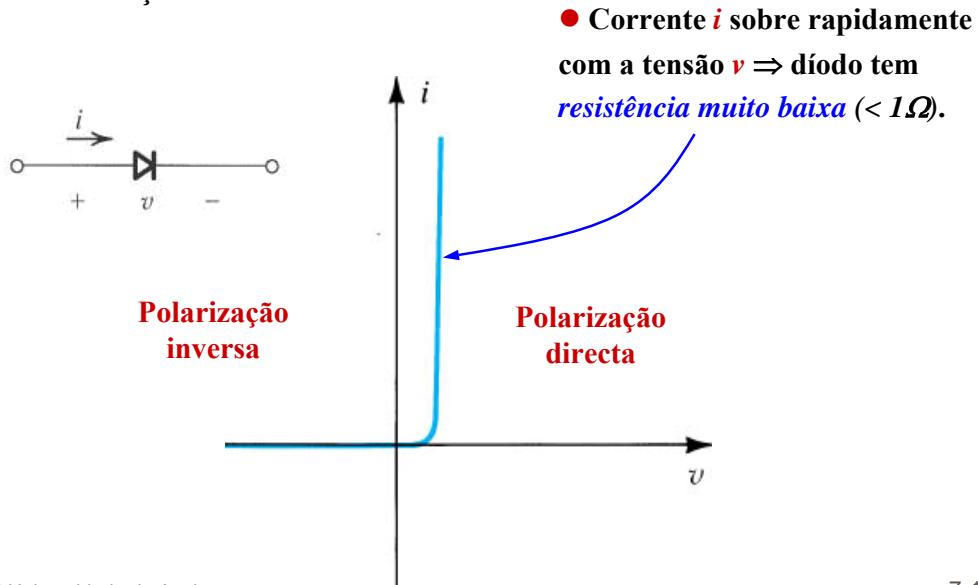
- O + da fonte externa repele lacunas em direcção à junção; o - repele electrões também em direcção à junção;
- Se  $V_D$  for superior ao potencial de barreira ( $V_b$ ) a região de depleção quase desaparece;
- Electrões e lacunas conseguem atravessar sem dificuldade a região de depleção;
- O díodo conduz!

## Característica corrente/tensão do díodo

## Característica corrente-tensão

- Duas regiões principais de funcionamento:

- Polarização inversa:  $v < 0$ ;
- Polarização directa:  $v > 0$ .

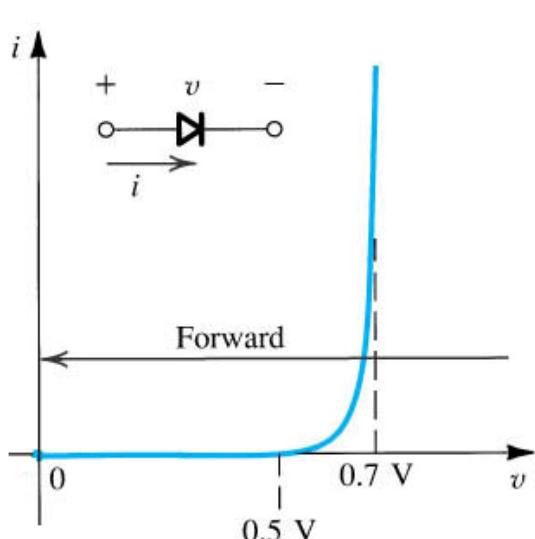


E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

7-15

### Polarização directa

- Nesta região, a corrente cresce *exponencialmente* com a tensão sendo dada aproximadamente por



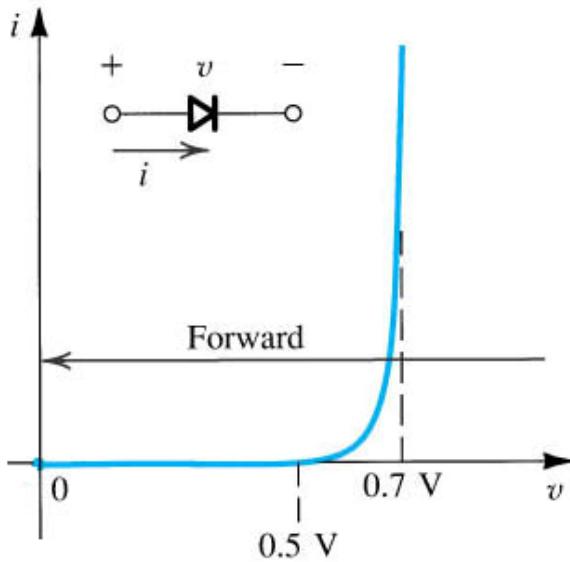
$$i = I_S (e^{v/nV_T} - 1)$$

$I_S$  – corrente de saturação inversa (para diodos de sinal:  $10^{-15}A$ );

$V_T$  – tensão térmica:  $25mV$  a  $20^\circ C$ ;

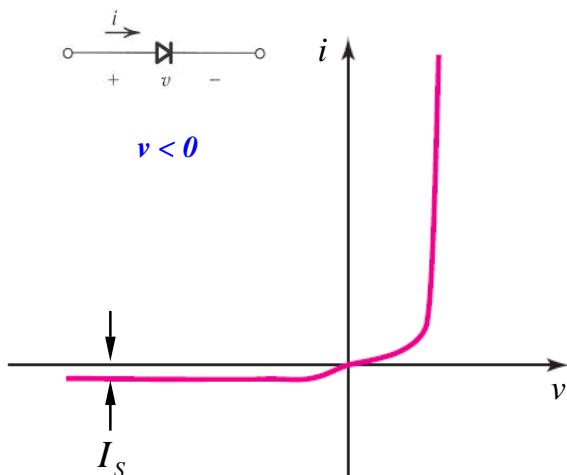
$n$  – coeficiente de emissão: constante empírica de valor entre 1 e 2.

## Polarização directa – observações importantes



- Devido à característica exponencial, abaixo de **0.5V** o diodo quase não conduz. Esta é a **tensão de cut-in**;
- Em condução normal, a tensão  **$v$**  varia em apenas **0.12V** ( $n = 2$ ) por cada década (10x) de variação de  **$i$** ;
- Em condução normal, o valor típico de  **$v$**  é entre **0.6** e **0.8V**;
- Valores típicos para um diodo de sinal. Díodos de potência exibem valores mais elevados de tensão de condução.

## Polarização inversa



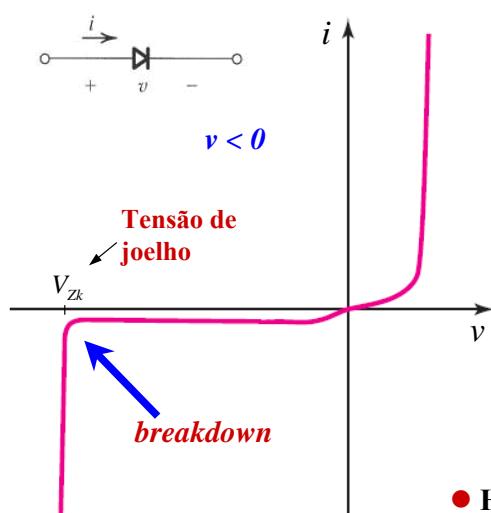
- Para valores negativos de  **$v$** , bastante inferiores a  **$nV_T$** , a corrente  **$i$**  é dada por

$$i = I_S \left( e^{v/nV_T} - 1 \right) \approx -I_S$$

que é a **corrente de saturação inversa** da junção, da ordem dos  **$10^{-15}A$** , (bastante insensível a  **$v$** )

- Na prática, a corrente inversa é bastante maior (da ordem do  **$nA$** ) por causa das correntes de fuga pela superfície do diodo.

## Região de breakdown



- Campo eléctrico elevado causa um aumento súbito da corrente;

- Dois mecanismos de *breakdown*:

➢ *Efeito Zener*:  $V_{zk} < 5V$

➢ *Avalanche*:  $V_{zk} > 7V$

- Ocorre em todos os diodos – circuito externo deve limitar a corrente no diodo;

- Há diodos especificamente desenhados de forma a funcionar na região de *breakdown* – os diodos Zener.

## Características de diodos comuns

**1N4148**  
(díodo de sinal)



**1N4007**  
(díodo de potência)



Características		1N4148	1N4007
$V_F$	Tensão directa @ 10mA @ 1A	0.7V	0.6V 1.1V
$I_{F(max)}$	Corrente directa máxima	0.3A	1A
$V_{R(max)}$	Tensão inversa máxima	75V	1000V
$I_{R(max)}$	Corrente inversa máxima @ 25°C @ 100°C	10nA	5μA 50μA
$P_{(max)}$	Potência máxima dissipada	0.5W	3W

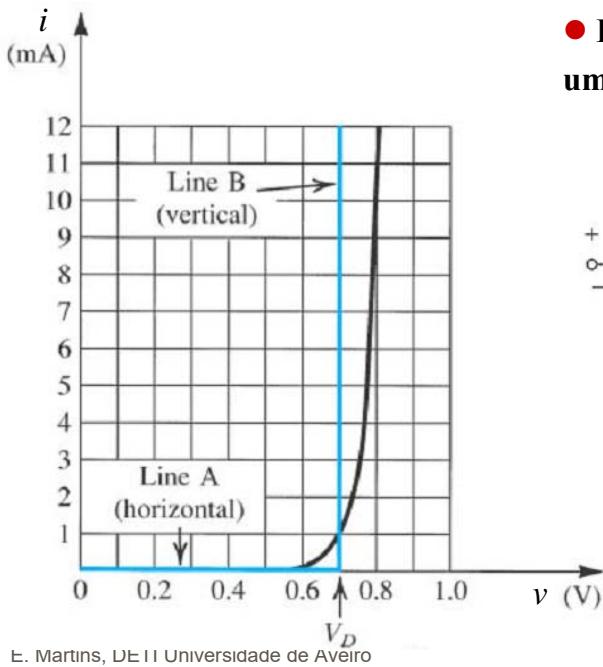
## Modelos simplificados do díodo

## Modelos do díodo para análise de circuitos

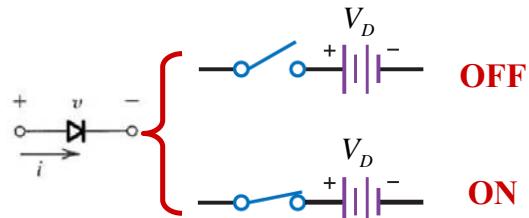
- Exponencial – baseado na relação exponencial  $i(v)$ . É o mais preciso mas também o mais difícil de usar.
- Na prática, os modelos que se usam são:
  - Tensão constante;
  - Ideal.

## Modelo de tensão constante

- Curva  $i(v)$  do díodo é simplificada para uma linha vertical – despreza-se  $r_D$ ;



- Em condução, o díodo apresenta uma tensão  $V_D$  constante ( $0.7V$ );

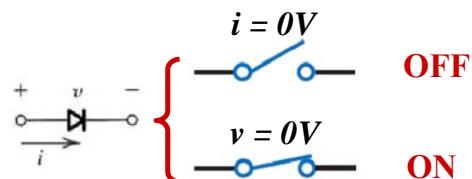
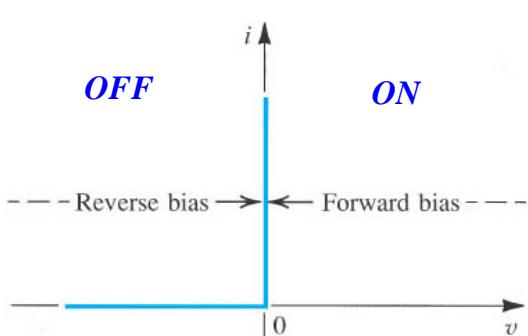


- É o modelo mais popular para análise rápida manual. É um dos que iremos usar mais.

7-23

## Modelo ideal

- Considera que o díodo é um interruptor ideal com  $V_F = 0V$ ;

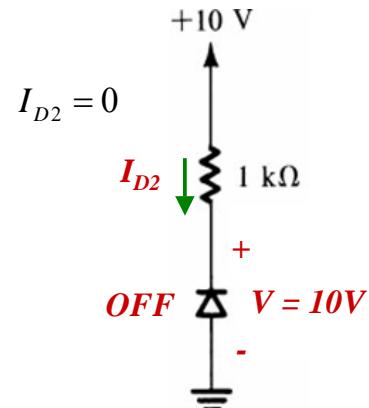
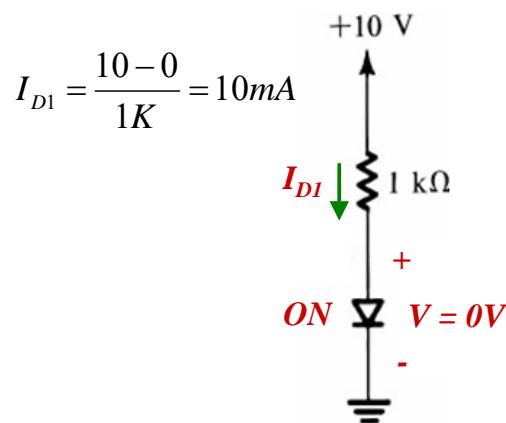


- Válido só em aplicações com tensões muito maiores que as tensões normais de condução do díodo;

- Útil numa primeira análise de circuitos com vários díodos.

## Modelo ideal

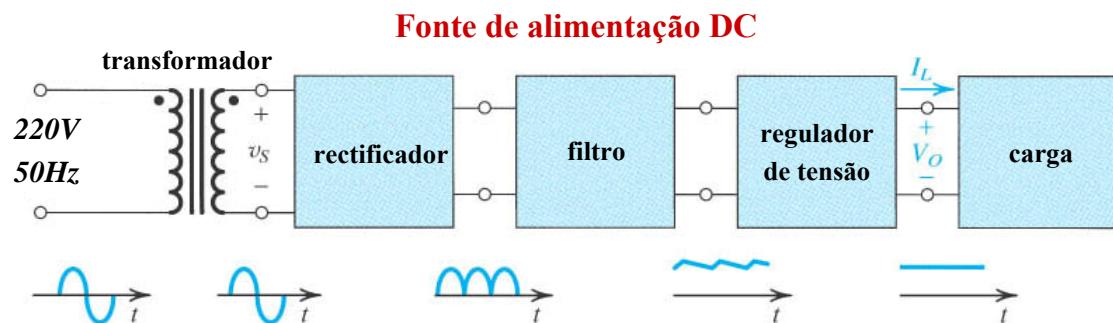
- Díodo *on*;
- Tensão no díodo é *0V*;
- Corrente é limitada apenas pela resistência.
- Díodo *off*;
- Corrente no díodo é *0A*;
- Tensão inversa do díodo é a tensão de alimentação.



## Rectificadores

## Rectificadores

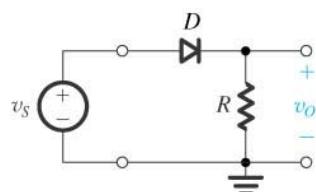
- É uma das aplicações práticas mais importantes dos diodos;



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

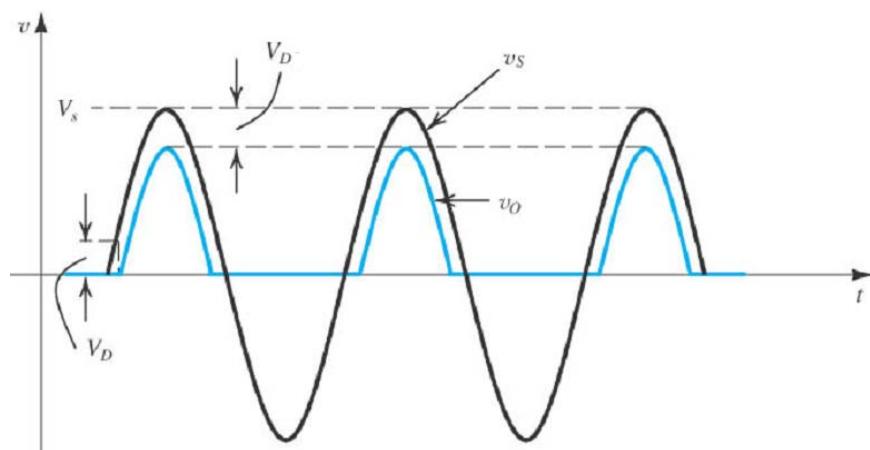
7-27

## Rectificador de meia onda

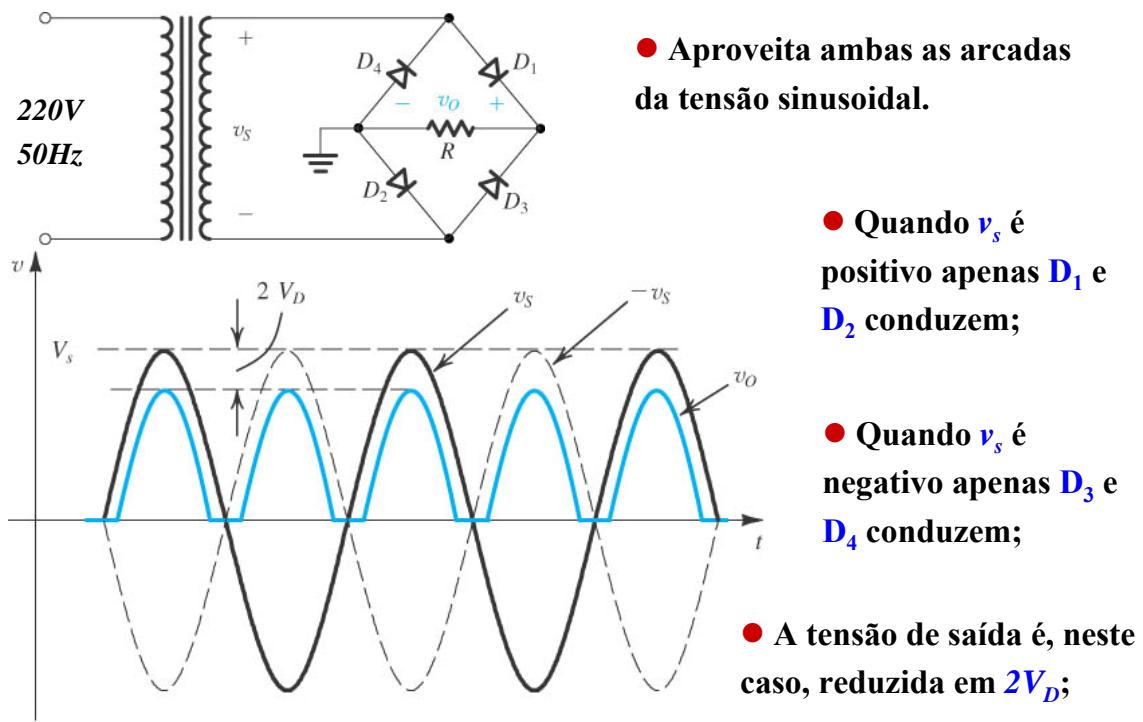


- A tensão  $v_0$  segue  $v_s$  (a menos de  $V_D$ ) nas arcadas positivas:

$$v_0 \approx v_s - V_D$$



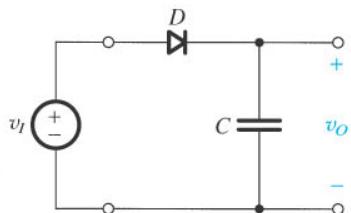
## Rectificador de onda completa – em ponte



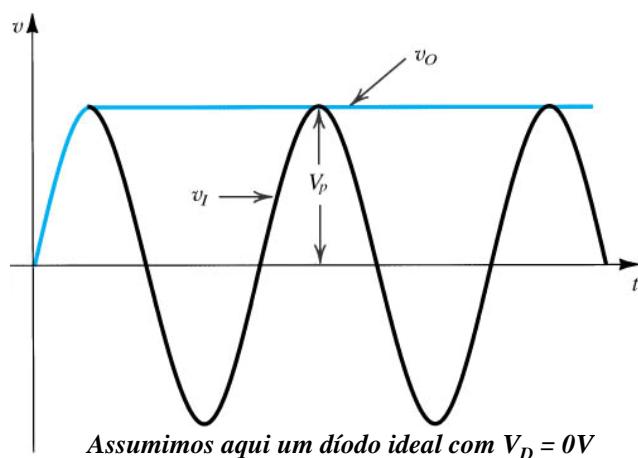
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

7-29

## Rectificador de meia onda com filtragem

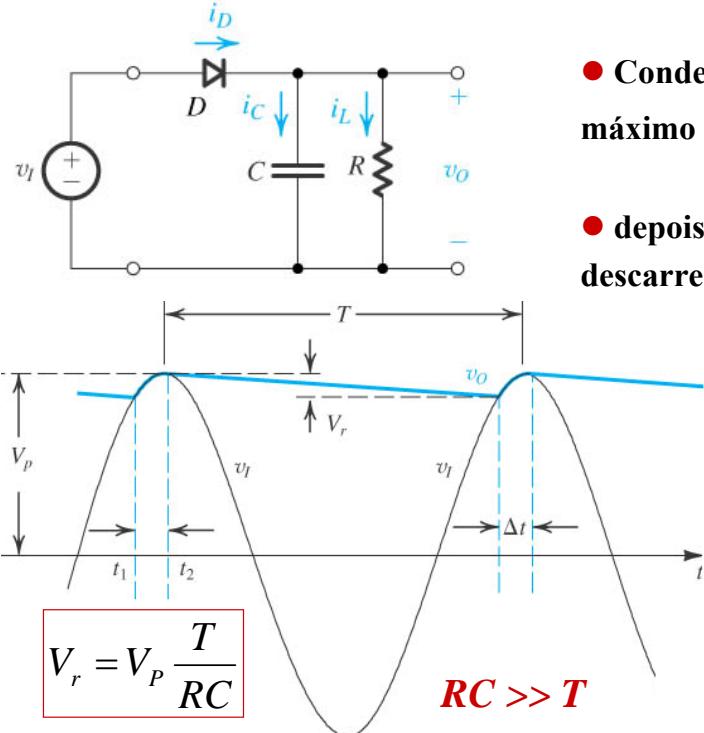


- Condensador carrega na primeira arcada positiva; depois não tem por onde descarregar.



- A tensão  $v_o$  é puramente DC, mas apenas porque não temos carga na saída.

## Rectificador de meia onda com filtragem



- Condensador carrega até ao valor máximo  $V_P$ ;

- depois D corta e o condensador descarrega sobre R;

- D volta a conduzir quando  $v_I$  ultrapassa a tensão no condensador;

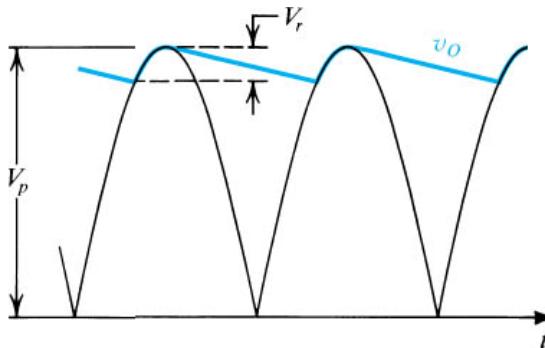
- Quando maior C menor será a ondulação residual – a tensão de ripple,  $V_r$ .

E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

7-31

## Rectificador de onda completa com filtragem

- Neste caso a frequência de ripple é o dobro da frequência do sinal sinusoidal



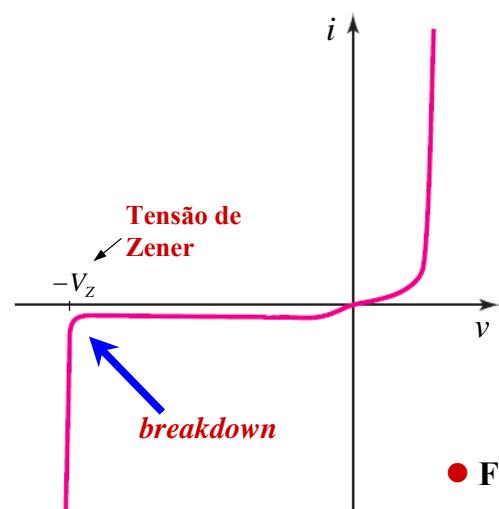
- A expressão para  $V_r$  é

$$V_r = V_p \frac{T}{2RC}$$

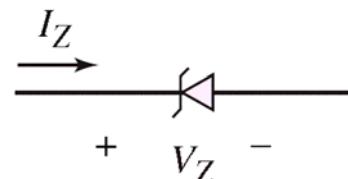
- Para o mesmo valor de ripple o condensador pode ter metade do valor. A corrente no diodo é menor.

## Díodos Zener e aplicações

### Díodo Zener

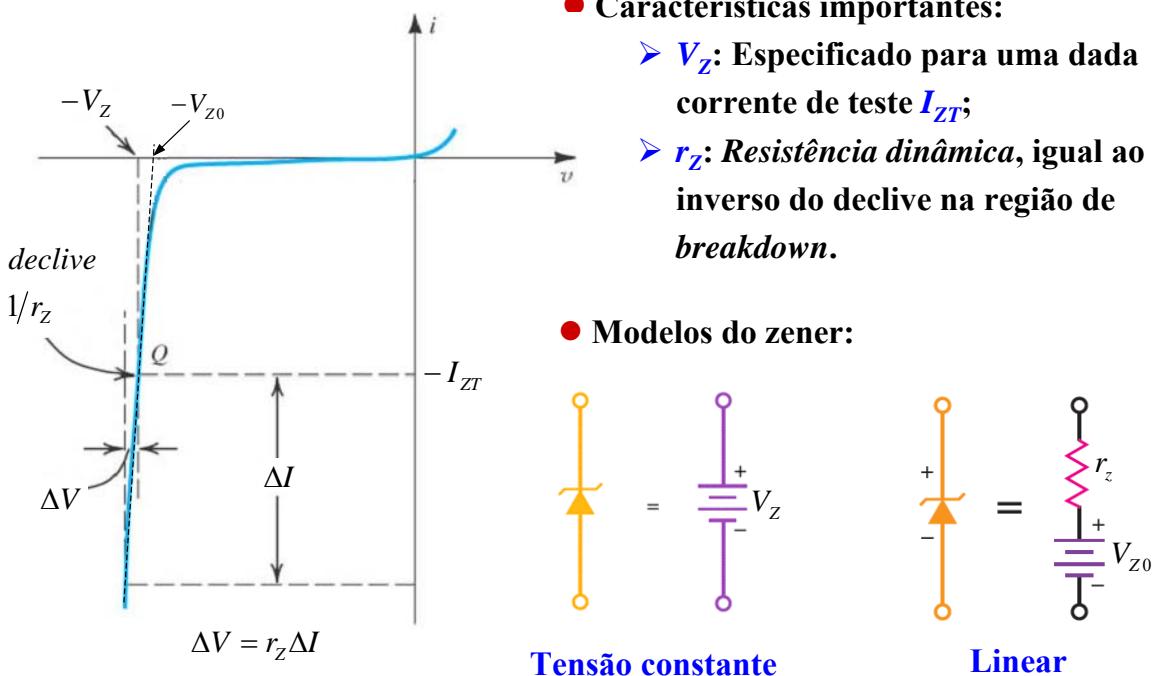


- Díodos especialmente concebidos para operar na região de ***breakdown***.



- Valor de  $V_Z$  é determinado pelo **grau de dopagem** das regiões  $n$  e  $p$ ;
- Fabricados com valores padrão de  $V_Z$  entre  $2V$  e centenas de Volt;
- O facto de  $V_Z$  variar muito pouco com a corrente, torna o zener útil para **regular tensões**, e.g. atenuar o *ripple* duma tensão (rectificada).

## Díodo Zener - modelos



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

7-35

## Características típicas de díodos zener - exemplo

**Série BZX79-** Valores desde 2.1 a 75V



BZX79-XXX	$V_Z$ (V)	$r_z$ ( $\Omega$ )	$I_{ZT}$ (mA)
3V3	3.3	85	5
5V1	5.1	40	5
6V8	6.8	6	5
12	12	10	5
24	24	25	5

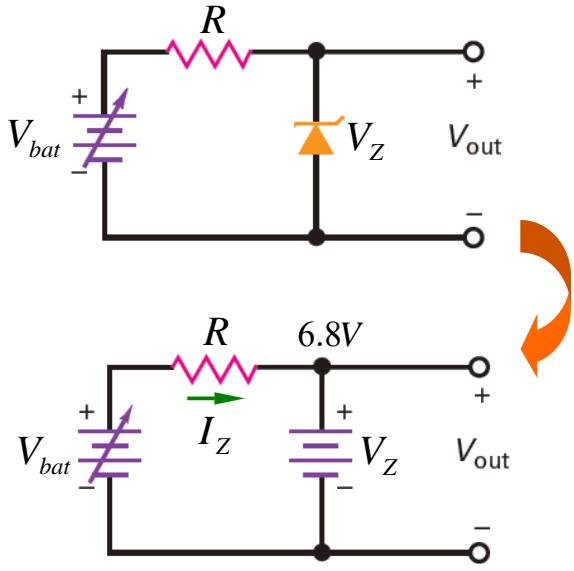
$$V_F = 0.9V @ 10mA;$$

$$P_{max} = 0.5W;$$

$$I_{Zmax} = P_{max} / V_Z$$

## Aplicação 1: Zener como regulador de tensão

- A partir duma bateria de automóvel, cuja tensão pode variar entre 13.8V e 10.5V, queremos gerar uma tensão constante de 6.8V.



$$10.5V \leq V_{bat} \leq 13.8V$$

$$V_Z = 6.8V \Rightarrow \text{Zener BZX79-6V8}$$

A corrente  $I_Z$  deve ser o mais próxima possível de  $I_{ZT} = 5mA$ .

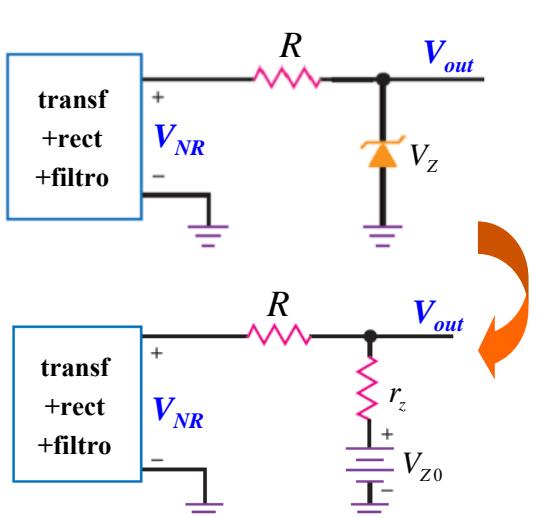
Tomando o valor médio de  $V_{bat}$ :

$$\overline{V_{bat}} = (10.5 + 13.8)/2 = 12.2V$$

$$R = \frac{\overline{V_{bat}} - V_Z}{I_{ZT}} = \frac{12.2 - 6.8}{5} \approx 1K$$

## Aplicação 2: Zener como redutor de ripple

- A partir duma tensão não regulada ( $V_{NR}$ ) de 18V, com 1V de ripple, pretendemos gerar uma tensão regulada de  $V_{out} = 10V$ .



$$V_{NR}: V_P = 18V; V_r = 1V$$

$$V_Z = 10V \Rightarrow \text{Zener BZX79-10}$$

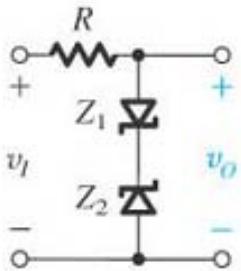
Valor de R, supondo  $I_{ZT} = 5mA$ :

$$R = \frac{17.5 - 10}{5} = 1.5K\Omega$$

O ripple em  $V_{out}$  calcula-se usando o valor tabelado  $r_z = 10\Omega$ :

$$V_{r\_out} = V_r \frac{r_z}{r_z + R} = 6.6mV$$

### Aplicação 3: Zener como limitador (*clipper*)



Se o valor de  $v_I$  for baixo, tal que

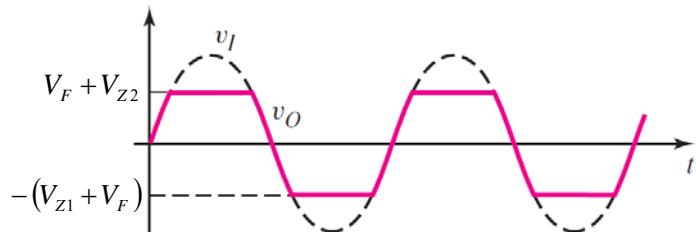
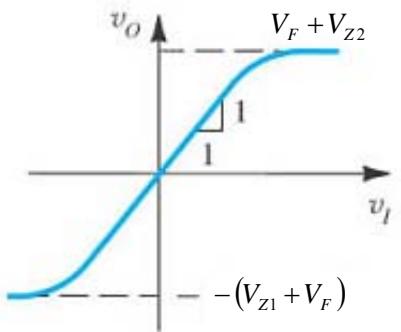
$$-(V_{Z1} + V_F) < v_I < (V_F + V_{Z2}) \Rightarrow v_O \text{ acompanha } v_I$$

Se  $v_I$  for elevado a ponto de  $Z_1$  e  $Z_2$  conduzirem...

$$\Rightarrow v_O \text{ fica limitado superiormente a } V_F + V_{Z2}$$

Se  $v_I$  baixar a ponto de  $Z_1$  e  $Z_2$  conduzirem...

$$\Rightarrow v_O \text{ fica limitado inferiormente a } -(V_{Z1} + V_F)$$

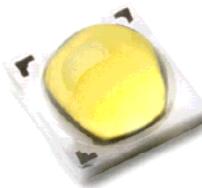
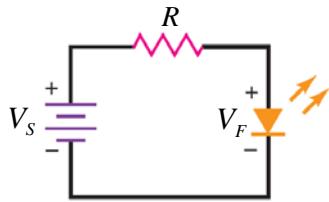


### Díodo LED e fotodíodo

## Díodo LED (*Light-Emitting Diodes*)



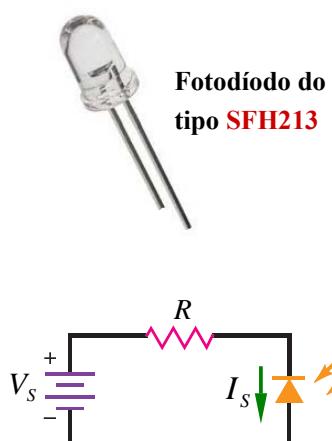
- A recombinação de electrões e lacunas nos semicondutores usados (e.g GaAs, GaP) resulta na emissão de fotões: ***electroluminescência***;
- A cor da luz ( $\lambda$ ) depende dos dopantes usados e pode ser visível ou não (IR);
- Tensão directa,  $V_F$ , depende muito da cor do LED, variando de 1.7 (vermelho) a 3.3V (azul);
- Disponíveis em potências de  $mW$  até *Watts* (LEDs usados em iluminação).



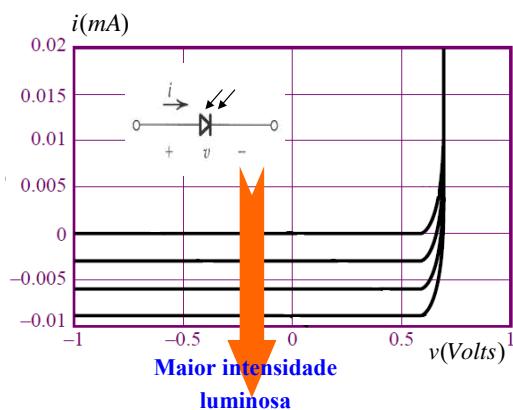
E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

7-41

## Fotodíodo



- Funcionam em polarização inversa;
- Fotões incidentes na região de depleção geram pares electrão-lacuna (***foto-ionização***), aumentando a corrente inversa,  $I_S$ , do díodo;
- Usados como detectores/medidores de intensidade luminosa.



E. Martins, DETI Universidade de Aveiro

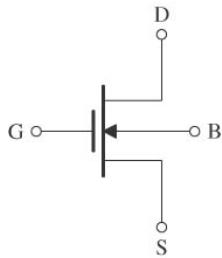
7-42

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 8: O transístor MOS*

### *(parte 1)*



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

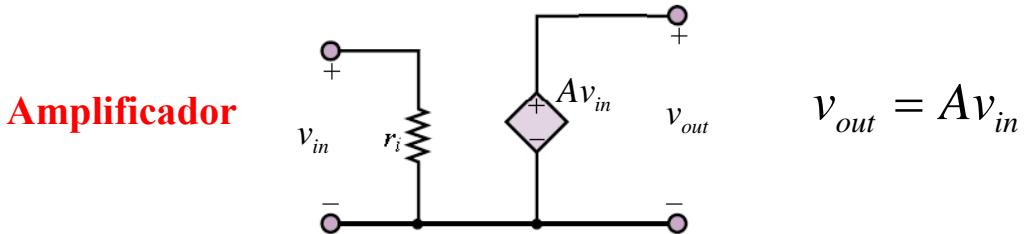
## **Sumário**

- **Introdução;**
- **Estrutura física e funcionamento do MOSFET;**
- **Modelo quadrático do NMOS e MOSFET de canal  $p$ ;**
- **MOSFET em DC;**
- **MOSFET como amplificador.**

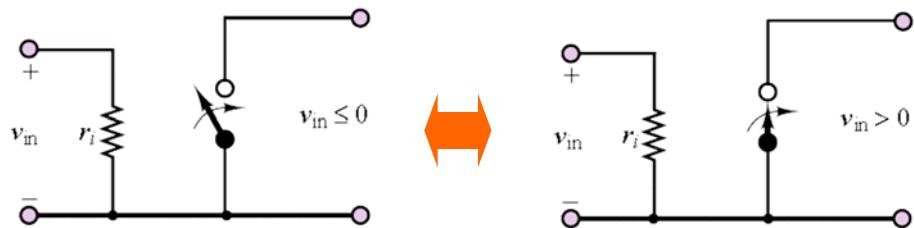
## Introdução

### O que é um transístor?

- Dispositivo semicondutor que pode funcionar como:



### Interruptor electrónico



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-3

## Introdução



- Transístores são dispositivos de **3 terminais**.
- Duas grandes famílias:
  - transístores **bipolares**, ou **BJT**;
  - transístores de **efeito de campo**, ou **FET**.
- De entre os transístores do tipo FET, o **MOSFET** (*Metal-Oxide Semiconductor Field-Effect Transistor*, também chamado de IGFET), é o dispositivo mais importante. É o dispositivo base de mais de **99%** dos circuitos integrados digitais.

## Estrutura física e funcionamento do MOSFET

E. Martins, DET Universidade de Aveiro

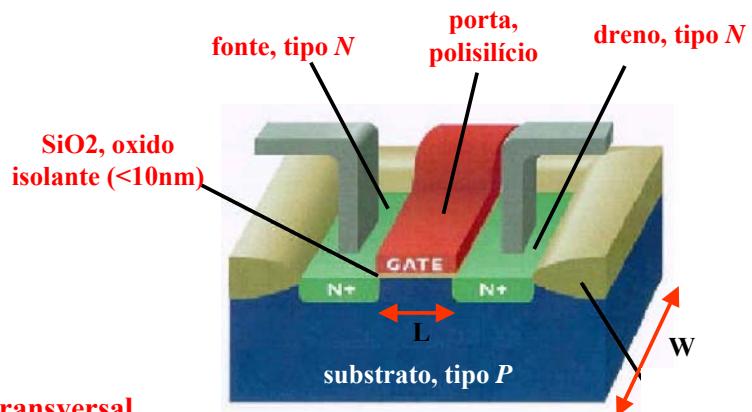
8.1-5

Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

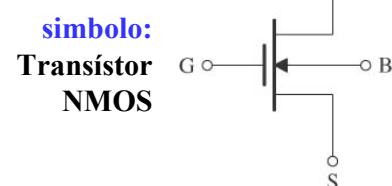
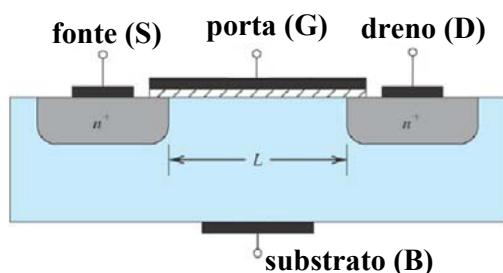
### Estrutura do MOSFET de canal N

- Dispositivo simétrico: dreno é, por convenção, o terminal de maior tensão ( $I_{DS} > 0$ );

- Substrato é ligado à tensão mais baixa do circuito (em geral, GND).



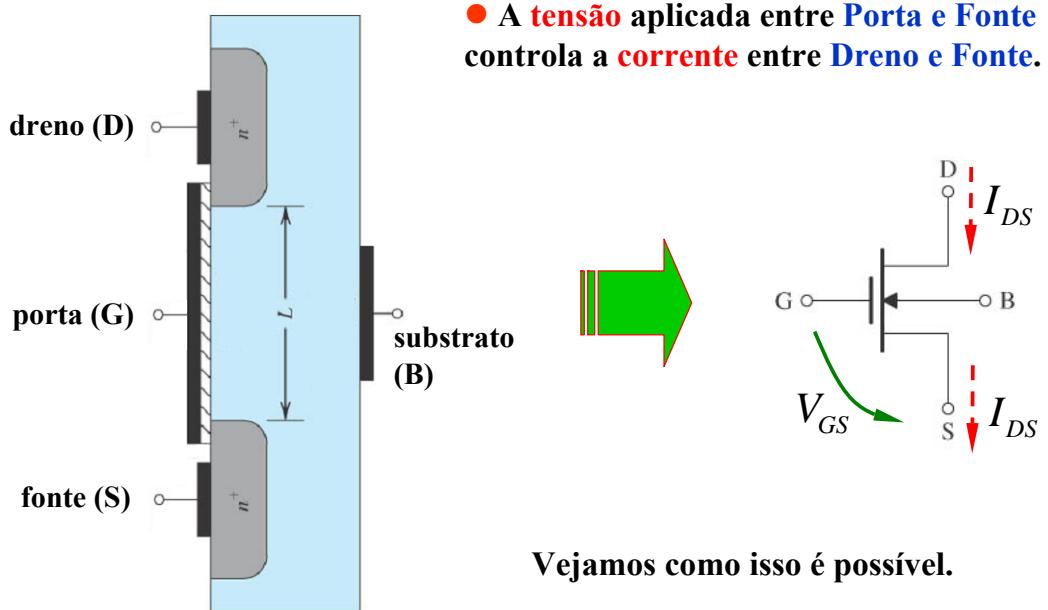
Representação em corte transversal



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-6

## Funcionamento

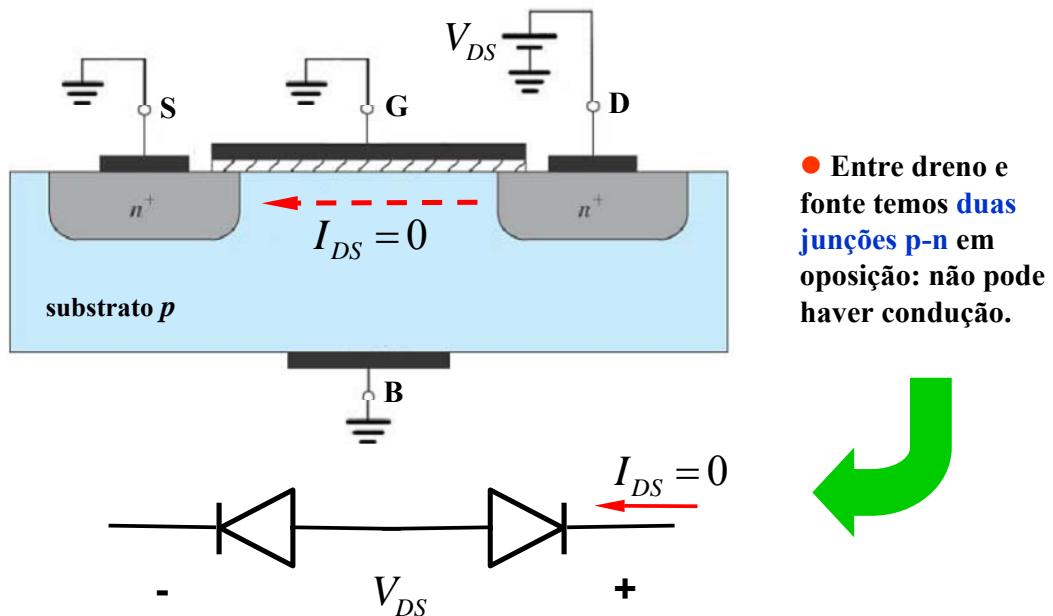


E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-7

## Funcionamento

- Se  $V_{GS} = 0$  então  $I_{DS} = 0$ .



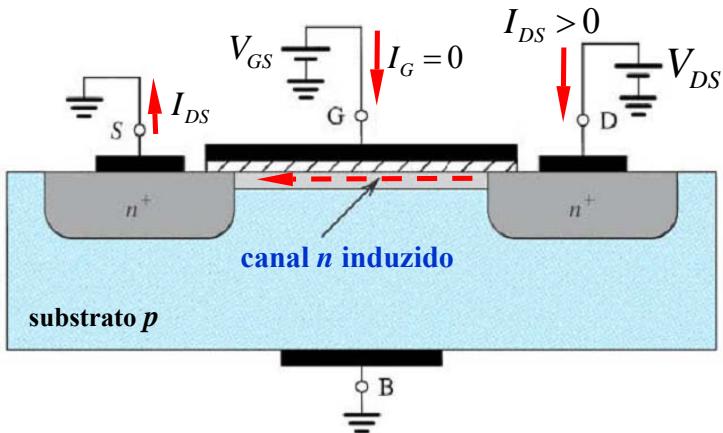
E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-8

## Funcionamento

- Se  $V_{GS} \geq V_T$  então  $I_{DS} > 0$ .

- Tensão positiva na porta repele lacunas para baixo, criando zona de carga negativa correspondente aos iões receptores que ficam a ‘descoberto’;

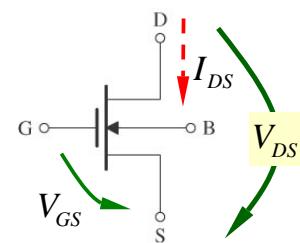
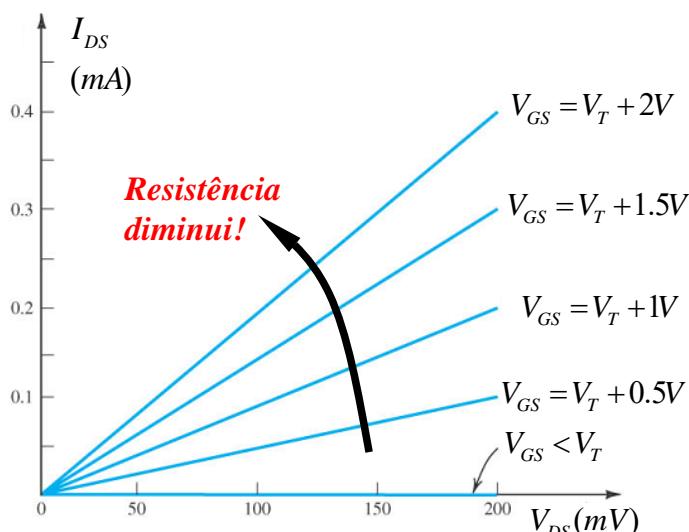


- Quando  $V_{GS}$  ultrapassa a tensão de limiar,  $V_T$ , o campo eléctrico vertical torna-se suficiente para atrair electrões livres das regiões da fonte e do dreno para a região debaixo da porta, criando o canal de inversão que é condutor.

## Funcionamento

- Se  $V_{GS} \geq V_T$  e  $V_{DS}$  pequeno

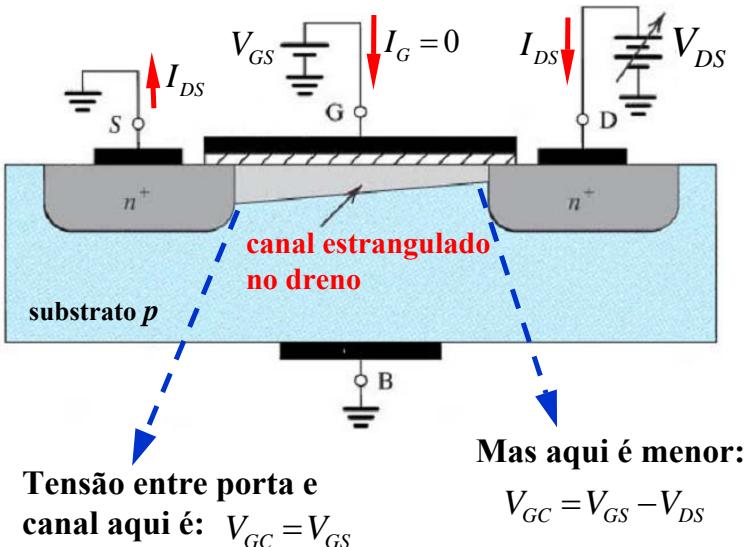
- Declive de  $I_{DS} = f(V_{DS})$  aumenta com  $V_{GS}$ : MOSFET funciona como uma resistência controlada por tensão;



- Nestas condições diz-se que o MOSFET está a funcionar na região linear.

## Funcionamento

O que acontece para  $V_{GS} \geq V_T$  e valores mais elevados de  $V_{DS}$ ?



- O canal tende a afunilar junto ao dreno à medida que aumentamos  $V_{DS}$ ;

- O afunilamento vai corresponder a um aumento da resistência do canal.

Mas aqui é menor:

$$V_{GC} = V_{GS} - V_{DS}$$

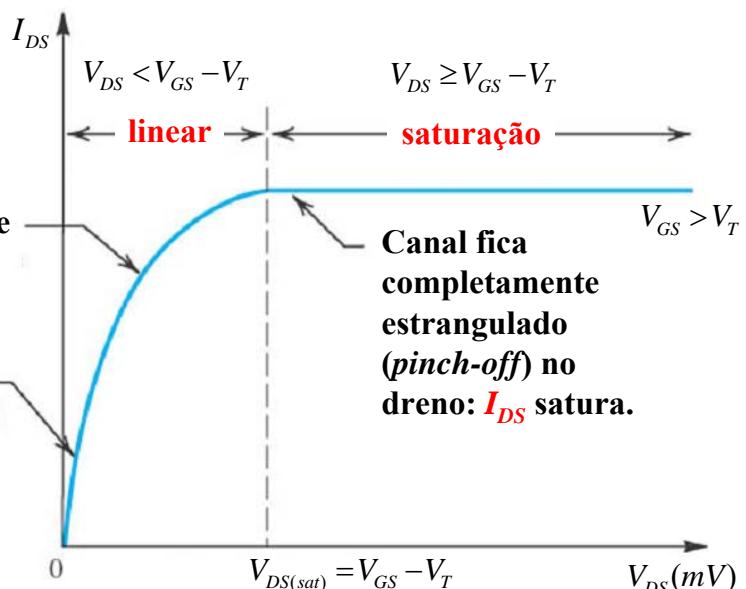
## Funcionamento

Qual é o efeito deste fenómeno na característica corrente-tensão do MOSFET?

Derivada diminui porque a resistência cresce com aumento de  $V_{DS}$

Quase uma recta com declive proporcional a:

$$V_{GS} - V_T$$



## Modelo quadrático e MOSFET de canal *p*

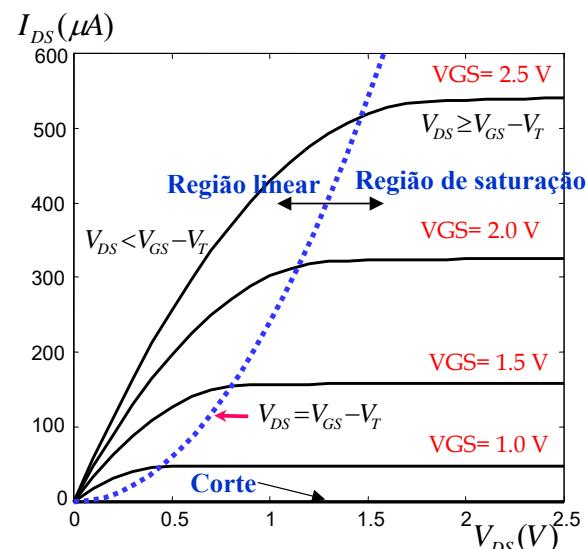
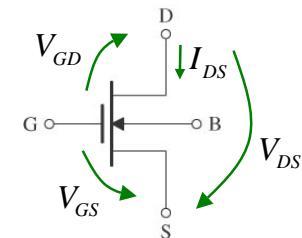
E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-13

### Característica $I_{DS}$ – $V_{DS}$ do MOSFET

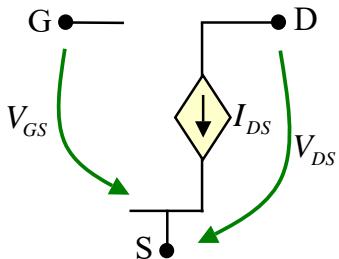
- **Região de operação** depende das tensões  $V_G$ ,  $V_D$  e  $V_S$ :

- **Corte:** Não existe canal de inversão;
- **Linear ou tríodo:** Canal de inversão uniforme; condutância entre dreno e fonte é controlada por  $V_{GS}$ ;
- **Saturação:** Canal estrangulado no dreno; transistor funciona como fonte de corrente controlada por  $V_{GS}$ .



## Modelo quadrático ou de Shockley

$$I_{DS} = \begin{cases} 0 ; V_{GS} < V_T & \text{Corte} \\ k(2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2) ; V_{GS} \geq V_T \text{ e } V_{GD} > V_T & \text{Linear} \\ k(V_{GS} - V_T)^2 ; V_{GS} \geq V_T \text{ e } V_{GD} \leq V_T & \text{Saturação} \end{cases}$$

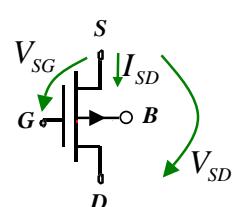
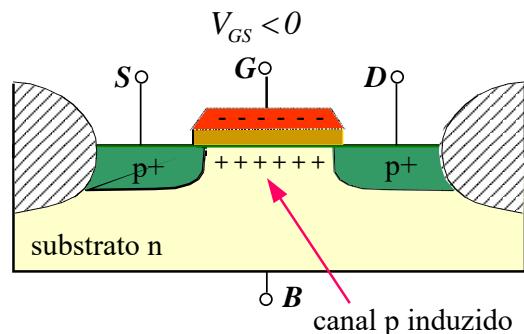


**k** é a transconductância do MOSFET, com dimensões de A/V<sup>2</sup>.

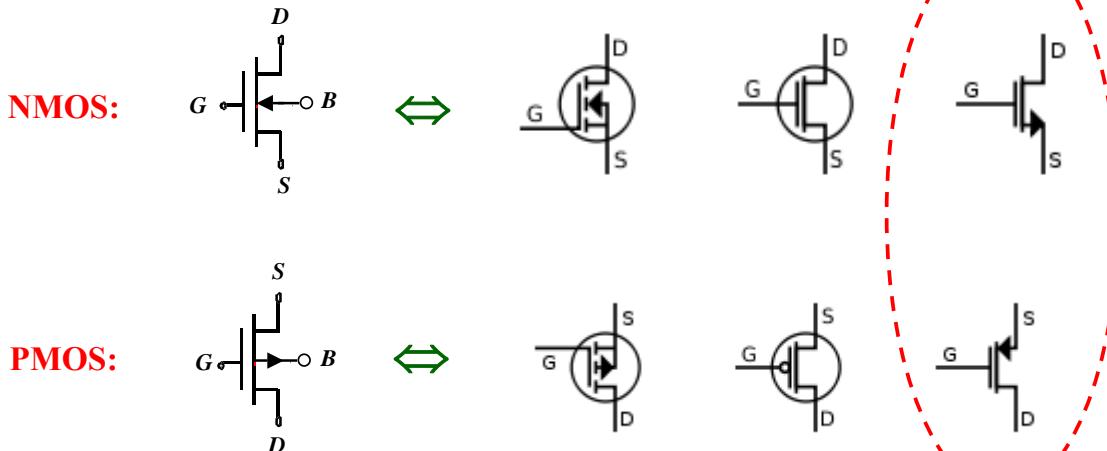
### Modelo de grande sinal do MOSFET

## MOSFET de canal P (PMOS)

- Substrato *n*; fonte e dreno *p*;
- Para induzir um canal é necessário  $V_{GS} < 0$ , logo  $V_T < 0$ ;
- Portadores de corrente são lacunas;
- As expressões do Modelo Quadrático são aplicáveis desde que se considerem todas as tensões e correntes negativas;
- ... mas como é mais cômodo trabalhar com valores positivos, é preferível trocar os índices das tensões e correntes.
- Terminal de substrato ligado à tensão mais positiva.



## Símbolos equivalentes NMOS e PMOS



- Quando o terminal de substrato não é representado, ele é assumido ligado à tensão mais baixa (NMOS) ou à tensão mais alta (PMOS) do circuito.

## Exemplos de cálculo: MOSFETs em DC

## Exemplo 1

Sabendo que  $V_T = 2V$  e  $k = 1mA/V^2$ ,  
calcular  $I_{DS}$  e  $V_D$ .

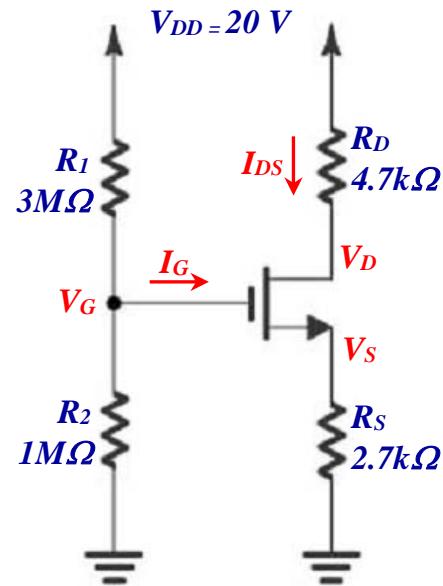
Como  $I_G = 0A$ , a tensão  $V_G$  pode calcular-se  
usando a expressão do divisor de tensão:

$$V_G = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{DD} = \frac{1}{3+1} 20 = 5V$$

Como não sabemos se o transístor está linear ou saturado, vamos admitir, arbitrariamente, que está numa das regiões.

Supúnhamos que o consideramos saturado:

$$I_{DS} = k(V_{GS} - V_T)^2$$



A tensão  $V_G$  também se pode escrever como:

$$V_G = V_{GS} + R_S I_{DS}$$

Substituindo nesta expressão a anterior...

$$V_{GS}^2 + \left( \frac{1}{kR_S} - 2V_T \right) V_{GS} + V_T^2 - \frac{V_G}{kR_S} = 0$$

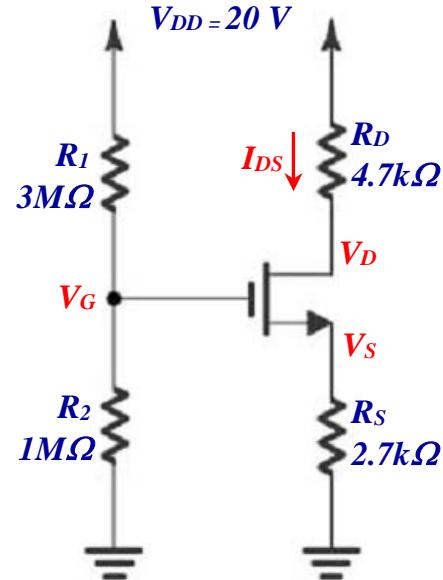
Substituindo valores, obtemos:

$$V_{GS}^2 - 3.63V_{GS} + 2.148 = 0$$

Cujas soluções são:

$$V_{GS} = 2.886V \quad \vee \quad V_{GS} = 0.744V$$

A segunda solução é <  $V_T = 2V$ , logo é descartada



**Usando a primeira solução**

$$I_{DS} = k(V_{GS} - V_T)^2 = 1(2.89 - 2)^2 = 0.79mA$$

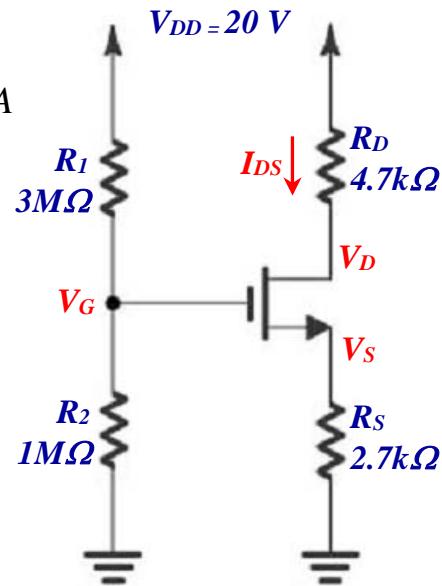
**$V_D$  é dado por**

$$V_D = V_{DD} - R_D I_{DS} = 20 - 4.7(0.79) = 16.3V$$

**Com esta tensão temos**

$$V_{GD} = V_G - V_D = 5 - 16.3 = -11.3V < V_T$$

**O que confirma que o transístor está efectivamente saturado.**

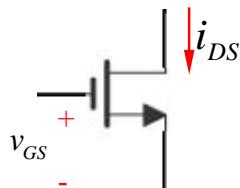


**NOTA:** Se não se confirmasse o estado saturado do transístor, teríamos que refazer os cálculos considerando-o na região linear.

## Modelo de pequeno sinal do MOSFET (transístor como amplificador)

## MOSFET como amplificador

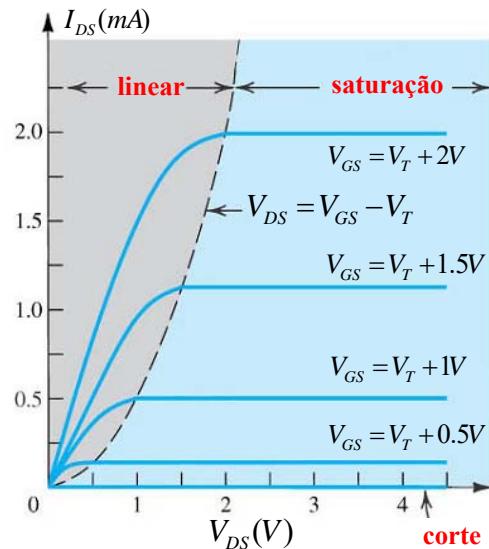
- Na região de saturação  $i_{DS}$  só depende de  $v_{GS}$



$$i_{DS} = k(v_{GS} - V_T)^2$$

- O MOSFET funciona como uma fonte de corrente controlada por tensão...
- ... ou um amplificador de transconductância;
- Esta é pois a região adequada para operar o MOSFET como amplificador.

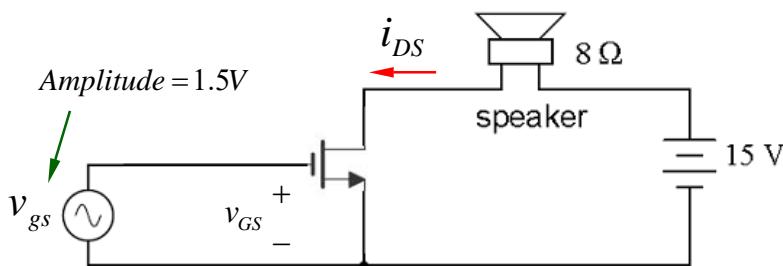
MOSFET



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

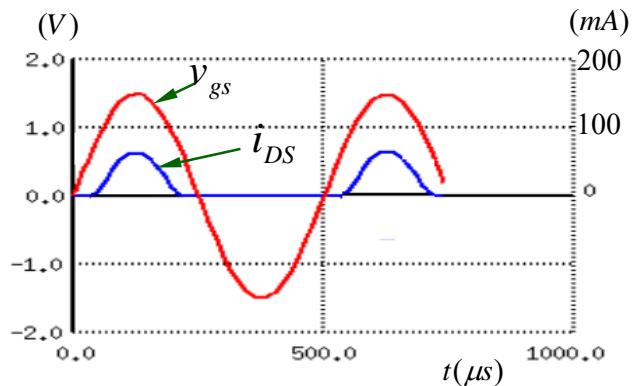
8.1-23

## Exemplo de aplicação: amplificador audio



- ... mas a forma de onda da corrente  $i_{DS}$  não aparece igual à da fonte  $v_{gs}$  !

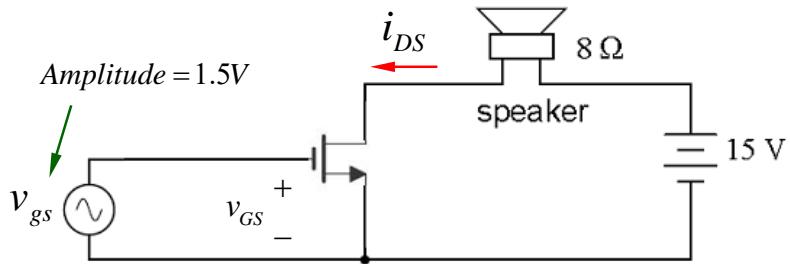
- Porquê?



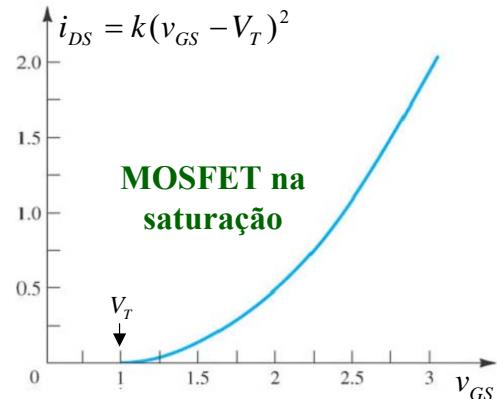
E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-24

## Exemplo de aplicação: amplificador audio



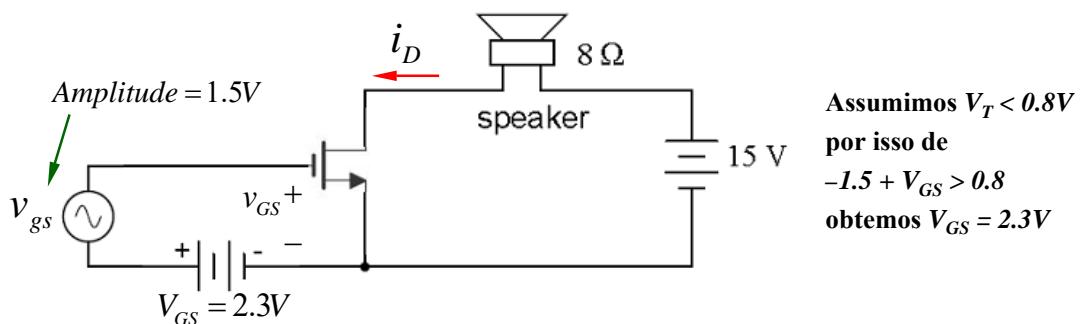
- Para valores de  $v_{GS}$  inferiores a  $V_T$  o transístor corta;
- A solução é **polarizar** o transístor de forma a garantir que  $v_{GS} > V_T$  para todos os valores do sinal de entrada.



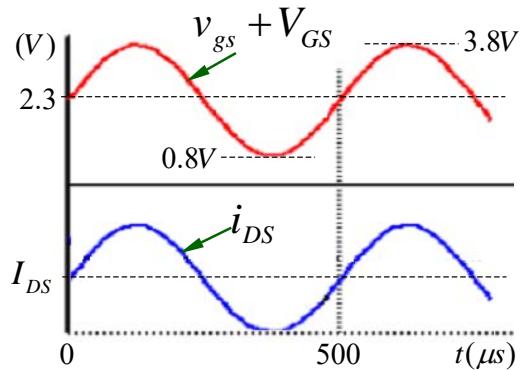
E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-25

## Exemplo de aplicação: amplificador audio



- A polarização garante que o MOSFET conduz para todos os valores de  $v_{gs}$ .
- Forma de onda de  $i_{DS}$  é uma reprodução fiel de  $v_{gs}$ .



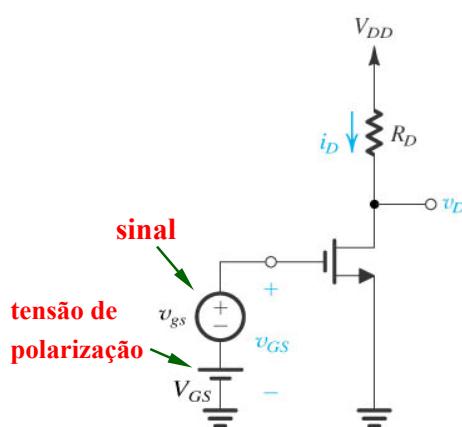
E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.1-26

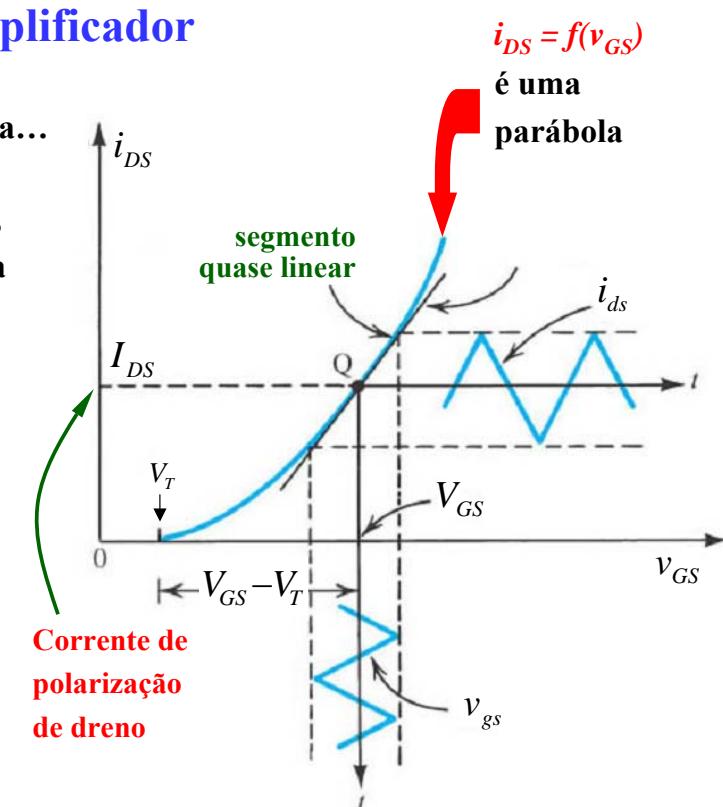
## MOSFET como amplificador

- Desenhado de outra forma...

- Se o sinal  $v_{gs}$  for pequeno, podemos aproximar a curva  $i_{DS} = f(v_{GS})$  por uma recta.

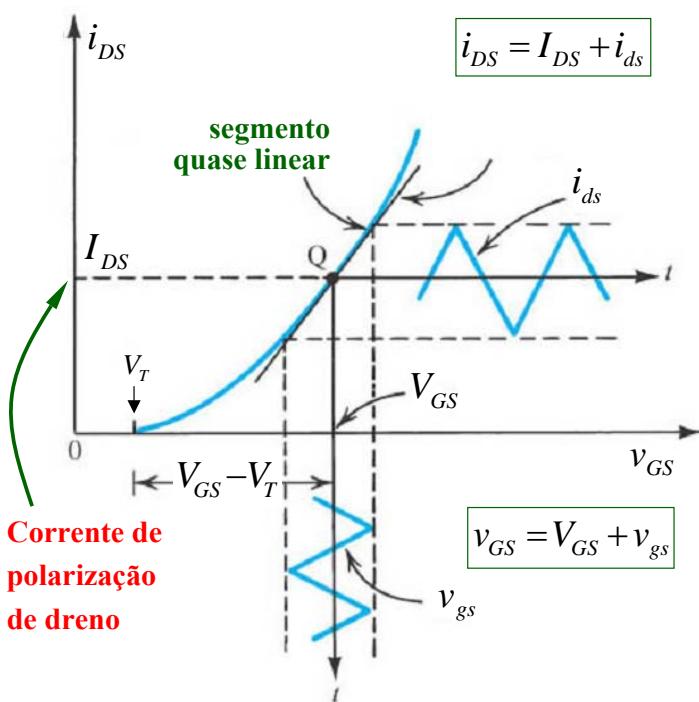


E. Martins, DET Universidade de Aveiro



8.1-27

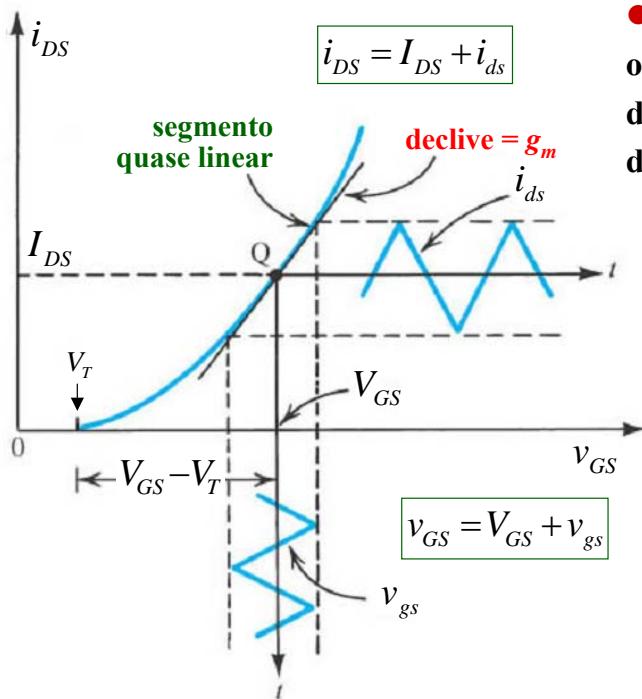
## (Um parêntesis sobre notação...)



Notar que:

- $I_{DS}$  é a corrente DC no dreno;
- $i_{ds}$  é a corrente de sinal no dreno, ou seja corresponde apenas à variação em torno do valor DC;
- $i_{DS}$  é a corrente total no dreno;
- As mesmas considerações são válidas para  $V_{GS}$ ,  $v_{gs}$  e  $v_{GS}$ .

## Aproximação de pequeno sinal



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

- Relação não-linear entre  $i_{DS}$  e  $v_{GS}$  obriga a que o sinal  $v_{gs}$  seja pequeno, de forma a que  $i_{ds}$  seja uma reprodução fiel de  $v_{gs}$ .

- Para que a curva  $i_{DS} / v_{GS}$  possa ser considerada uma recta de declive  $g_m$  no ponto Q é preciso que  $v_{gs} \ll 2(V_{GS} - V_T)$

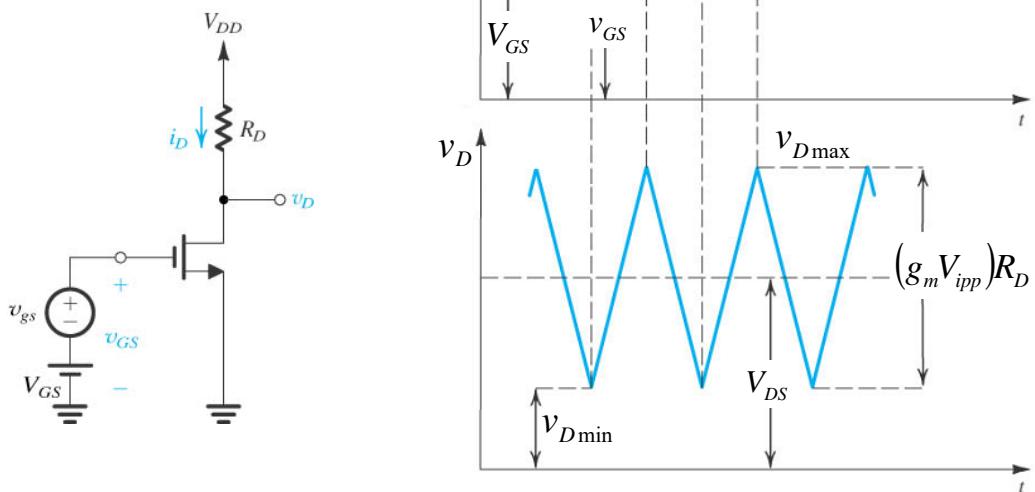
- E assim:

$$i_{ds} = g_m v_{gs}$$

Sendo  $g_m$  a **transconductância** do transístor em A/V.

8.1-29

## Extremos da tensão de saída



- Para que o MOSFET não saia da região de saturação é necessário

que:  $v_{GS \max} - v_{D \min} < V_T$  ou seja  $v_{D \min} > v_{GS \max} - V_T$

- Para que o MOSFET não corte é preciso que:  $v_{D \max} < V_{DD}$

E. Martins, DET Universidade de Aveiro

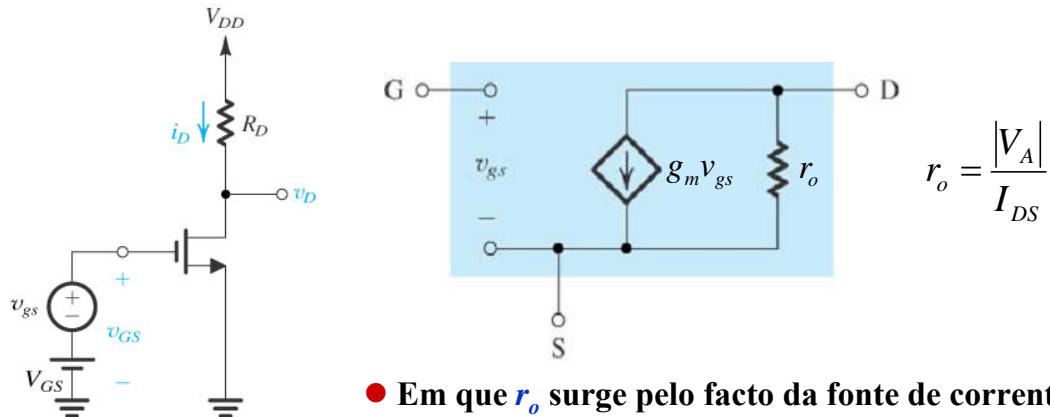
8.1-30

## Modelo de pequeno sinal do MOSFET

● Usando a relação exponencial  $i_{DS} / v_{GS}$  do MOSFET na região de saturação:  $i_{DS} = k(v_{GS} - V_T)^2$

e a aproximação de pequeno sinal:  $v_{gs} \ll 2(V_{GS} - V_T)$

é possível mostrar que  $g_m = 2k(V_{GS} - V_T)$  ou  $g_m = 2\sqrt{kI_{DS}}$



● Em que  $r_o$  surge pelo facto da fonte de corrente não ser, na realidade, ideal ( $V_A$  é uma constante).

## Aplicação do modelo de pequeno sinal

**Na análise de um amplificador com MOSFET **separamos os cálculos da polarização daqueles que dizem respeito ao comportamento com sinal:****

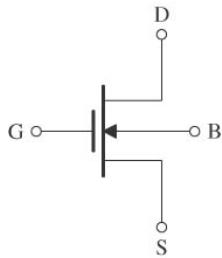
- 1) Determinar as tensões de polarização e a corrente de dreno;
- 2) Calcular os valores dos parâmetros do modelo:  $g_m$  e  $r_o$ .
- 3) Eliminar as fontes de tensão DC, substituindo-as por curto-circuitos (*Princípio da Sobreposição*);
- 4) Substituir o(s) transistor(es) pelo circuito do modelo de pequeno sinal;
- 5) Usar as técnicas adequadas de análise de circuitos para obter *ganho, resistência de entrada, etc.*

# *Sinais e Sistemas Electrónicos*



## *Capítulo 8: O transístor MOS*

**(parte 2)**



Ernesto Martins  
[evm@ua.pt](mailto:evm@ua.pt)  
DETI (gab. 4.2.38)  
Universidade de Aveiro



Sinais e Sistemas Electrónicos – 2021/2022

## **Sumário**

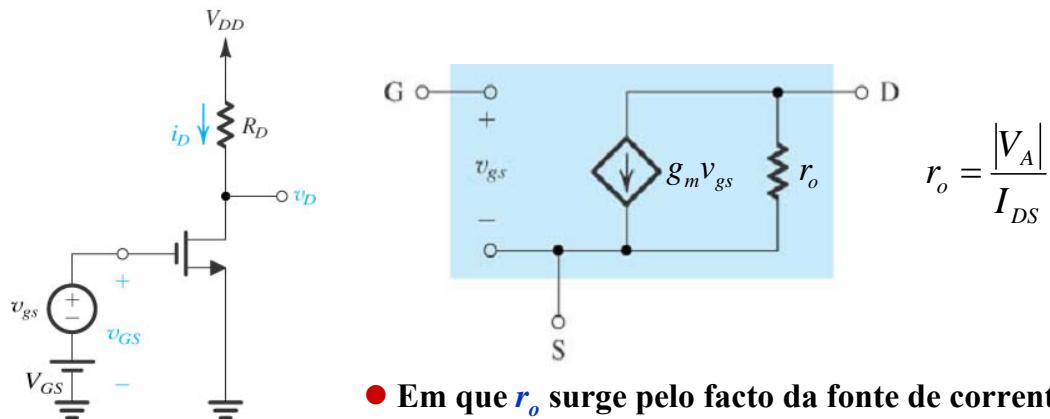
- **MOSFET como amplificador;**
- **MOSFET como interruptor electrónico;**
- **Aplicações do MOSFET como interruptor:**
  - Interruptor de potência;
  - Interruptor analógico;
  - Circuitos digitais;
- **Capacidades intrínsecas do MOSFET.**

## Modelo de pequeno sinal do MOSFET

● Usando a relação exponencial  $i_{DS} / v_{GS}$  do MOSFET na região de saturação:  $i_{DS} = k(v_{GS} - V_T)^2$

e a aproximação de pequeno sinal:  $v_{gs} \ll 2(V_{GS} - V_T)$

é possível mostrar que  $g_m = 2k(V_{GS} - V_T)$  ou  $g_m = 2\sqrt{kI_{DS}}$



● Em que  $r_o$  surge pelo facto da fonte de corrente não ser, na realidade, ideal ( $V_A$  é uma constante).

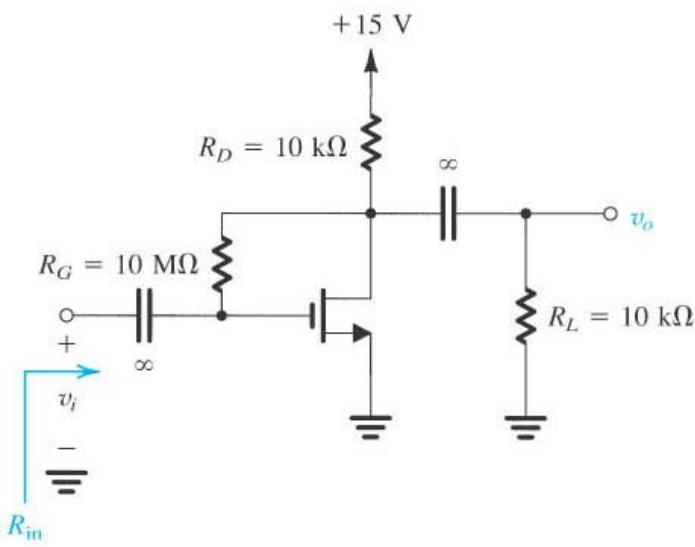
## Aplicação do modelo de pequeno sinal

**Na análise de um amplificador com MOSFET **separamos os cálculos da polarização daqueles que dizem respeito ao comportamento com sinal:****

- 1) Determinar as tensões de polarização e a corrente de dreno;
- 2) Calcular os valores dos parâmetros do modelo:  $g_m$  e  $r_o$ .
- 3) Eliminar as fontes de tensão DC, substituindo-as por curto-circuitos (*Princípio da Sobreposição*);
- 4) Substituir o(s) transistor(es) pelo circuito do modelo de pequeno sinal;
- 5) Usar as técnicas adequadas de análise de circuitos para obter *ganho, resistência de entrada, etc.*

## Exemplo 2

Sabendo que os parâmetros do MOSFET são  $V_T = 1.5V$ ,  $k = 0.125mA/V^2$ , e  $V_A = 50V$  calcular o ganho de tensão,  $A_v \equiv v_o/v_i$ , e a resistência de entrada,  $R_{in}$ , do amplificador.



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-5

### Notar que:

- MOSFET é polarizado pelas resistências  $R_D$  e  $R_G$ ;
- Os condensadores de acoplamento são de capacidade suficientemente elevada para que a sua impedância possa ser considerada nula para as frequências de interesse.
- $R_L$  representa a carga onde o amplificador vai ser ligado;

### Note-se que

como  $I_G = 0$ , então  $V_G = V_D$  ou seja,  $V_{GD} = 0 < V_T$ , pelo que o MOSFET está necessariamente na **região de saturação** como é suposto.

A corrente de dreno é dada por

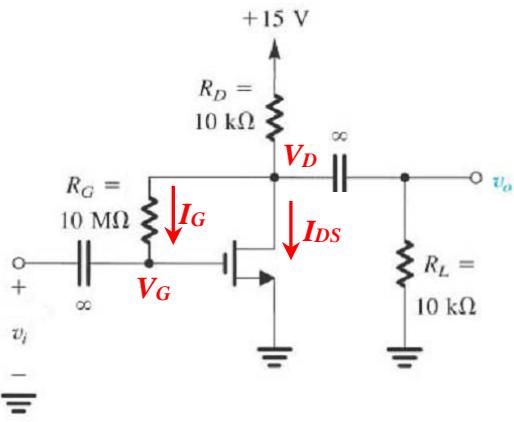
$$I_{DS} = k(V_G - V_T)^2 = 0.125(V_D - 1.5)^2$$

Por outro lado sabemos que

$$V_D = 15 - R_D I_{DS} = 15 - 10 I_{DS}$$

Substituindo  $I_{DS}$  na primeira equação obtém-se:

$$V_D = 4.4V \quad \vee \quad V_D = -2.2V$$



A solução é portanto

$$V_D = 4.4V$$

O correspondente valor de  $I_{DS}$  é:

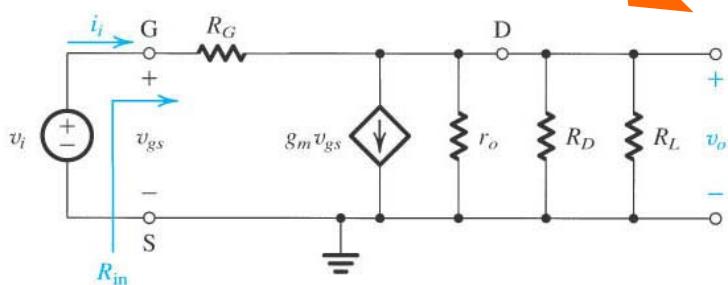
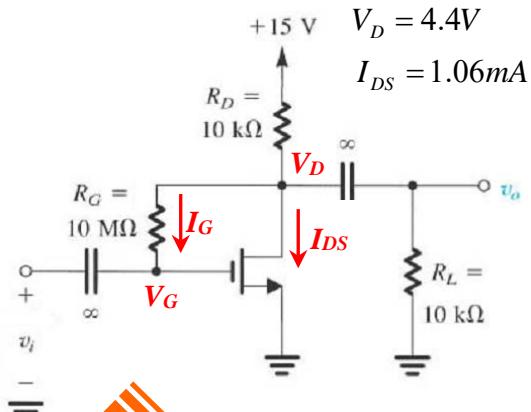
$$I_{DS} = 1.06mA$$

**Com os valores obtidos calculamos os parâmetros do modelo de pequeno sinal**

$$g_m = 2k(V_{GS} - V_T) \\ = 2(0.125)(4.4 - 1.5) = 0.725 \text{ mA/V}$$

$$r_o = \frac{|V_A|}{I_{DS}} = \frac{50}{1.06} = 47 \text{ k}\Omega$$

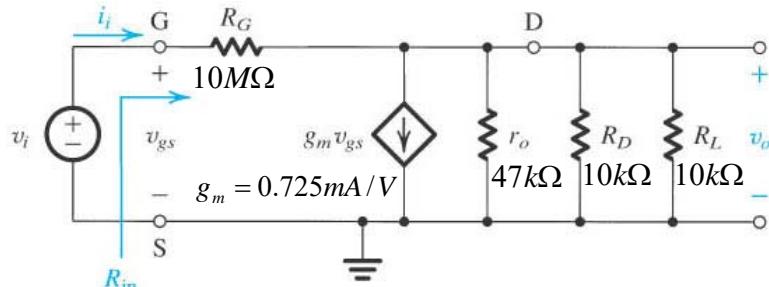
E agora, o modelo de pequeno sinal...



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-7

como  $R_G$  é muito maior que as restantes resistências, podemos ignorar a corrente que a atravessa, pelo que,



$$v_o \approx -g_m v_{gs} (r_o // R_D // R_L) = -0.725 v_i (47 // 10 // 10) = -3.3 v_i$$

$$\text{Portanto o valor de } A_v \text{ é, } A_v \equiv \frac{v_o}{v_i} = -3.3$$

Vejamos agora a resistência de entrada  $R_{in}$ :

$$i_i = \frac{v_i - v_o}{R_G} = \frac{v_i}{R_G} \left( 1 - \frac{v_o}{v_i} \right) = \frac{v_i}{R_G} (1 - A_v)$$

$$R_{in} \text{ é: } R_{in} \equiv \frac{v_i}{i_i} = \frac{R_G}{(1 - A_v)} = \frac{10M}{(1 - (-3.3))} = 2.33M\Omega$$

E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-8

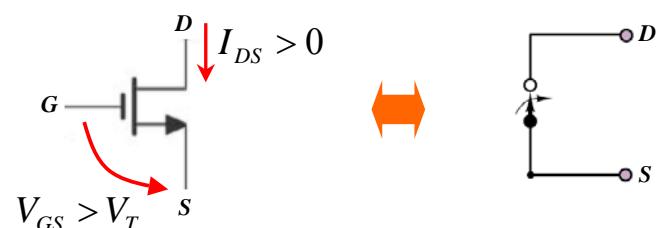
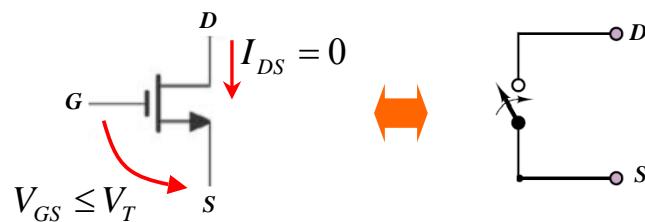
## MOSFET como interruptor

E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-9

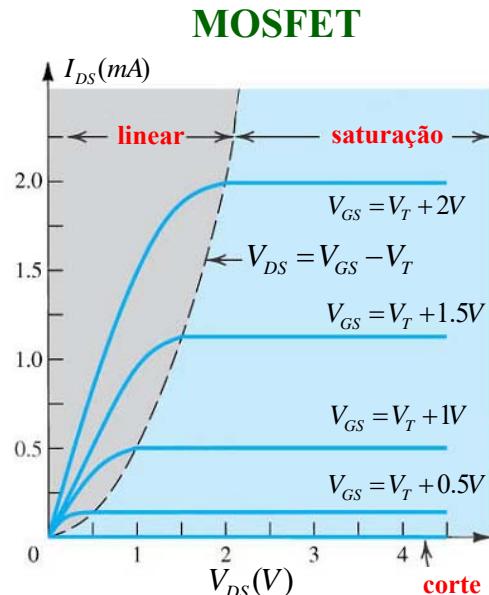
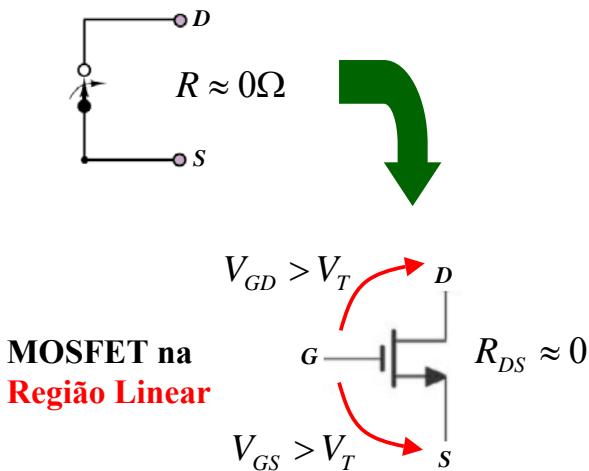
## MOSFET como interruptor

- Neste modo de funcionamento o MOSFET funciona como um interruptor controlado por tensão;



## MOSFET como interruptor

- Na posição de fechado o ‘interruptor’ deve ter a **menor resistência possível**, portanto o MOSFET deve estar a funcionar na **Região Linear**;



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-11

## MOSFET como interruptor

Consideremos um MOSFET que funciona como interruptor para uma resistência de carga,  $R_L = 10K\Omega$   
Admitamos para o MOSFET:  $V_T = 1V$  e  $k = 100\mu A/V^2$

- Para  $V_i < V_T$  o MOSFET fica cortado, pelo que  $I_{DS} = 0$ ;

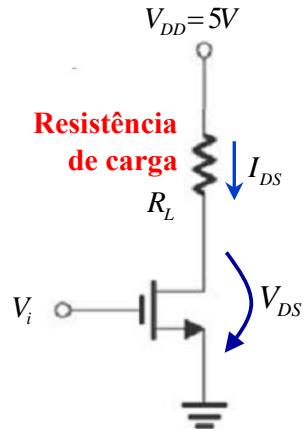
- Se  $V_i = V_{DD}$  o MOSFET conduz. Será que fica na **região linear**?... Vejamos:

$$I_{DS} = k \left[ 2(V_{GS} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2 \right] = k \left[ 2(V_{DD} - V_T)V_{DS} - V_{DS}^2 \right]$$

- Além disso sabemos que:  $V_{DS} = V_{DD} - R_L I_{DS}$

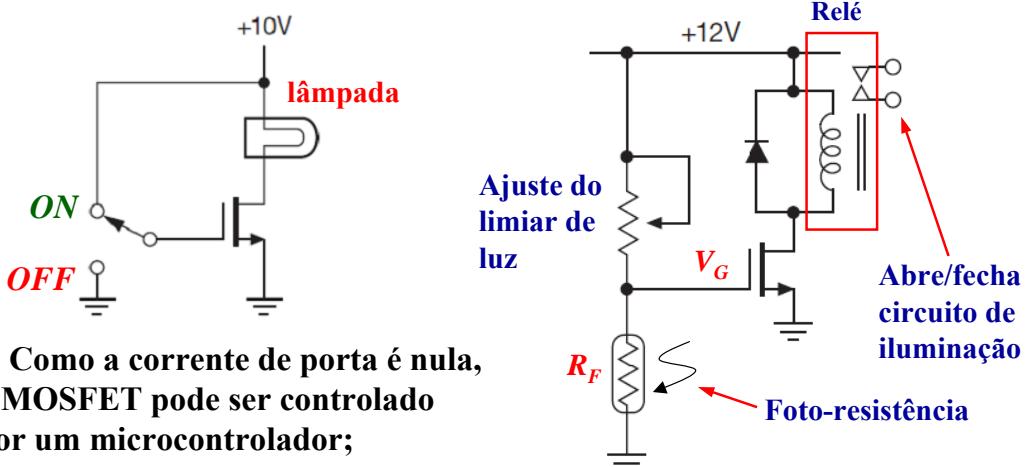
Substituindo aqui a equação de  $I_{DS}$  e resolvendo, obtemos:  $V_{DS} = 0.6V$

- Como  $V_{GD} = V_i - V_{DS} = 4.4V > V_T$  o que **confirma a região linear!**



## Aplicação 1: Interruptor de potência

- Transístor é usado para controlar o estado *on/off* de uma carga

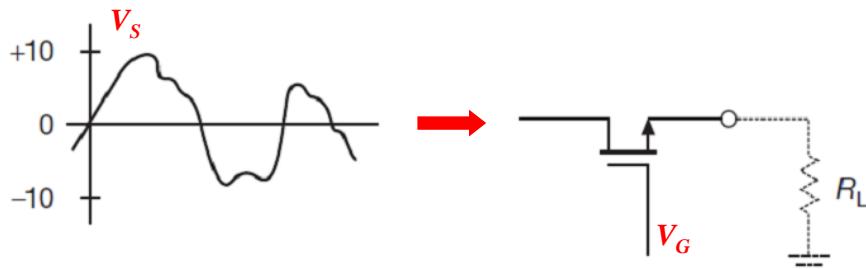


- Como a corrente de porta é nula, o MOSFET pode ser controlado por um microcontrolador;

- Quando anoitece,  $R_F$  aumenta, aumentando  $V_G$ . O transístor conduz, actuando no relé que liga o circuito de iluminação.

## Aplicação 2: Interruptor analógico

- Transístor é usado como um interruptor que bloqueia ou dá passagem a um sinal analógico;



$V_G = -15V$ : sinal  $V_S$  é bloqueado; tensão em  $R_L$  é 0V;  
 $V_G = +15V$ : sinal  $V_S$  passa para  $R_L$ .

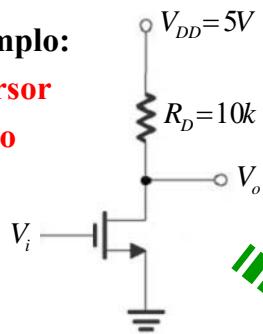
- Tensões de controlo da porta (neste caso, -15 e +15V) devem exceder a gama do sinal analógico  $V_S$  (neste caso, -10 e +10V);
- MOSFET pode ser usado com interruptor bidireccional.

## Aplicação 3: Circuitos digitais

- Transístor é usado também como interruptor mas os sinais são considerados binários (digitais);

**Exemplo:**

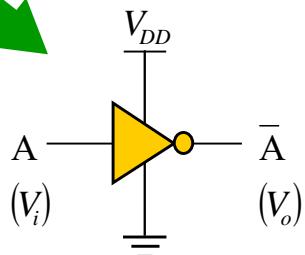
**inversor lógico**



- O circuito funciona como uma **porta lógica NOT** se considerarmos:

- ‘0’ ⇔ Tensão inferior a  $V_T$
- ‘1’ ⇔ Tensão igual a  $V_{DD}$

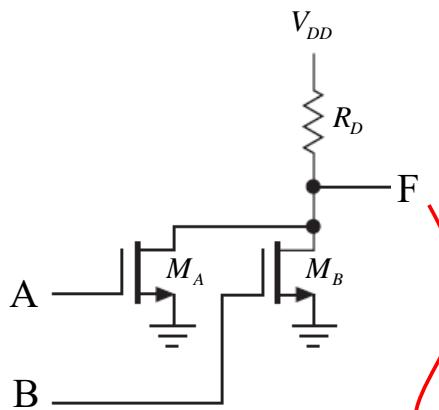
$V_i$	$V_o$
$<V_T$	5V
5V	0.6V



$A$	$\bar{A}$
0	1
1	0

## Aplicação 3: Circuitos digitais

- Porta lógica NOR



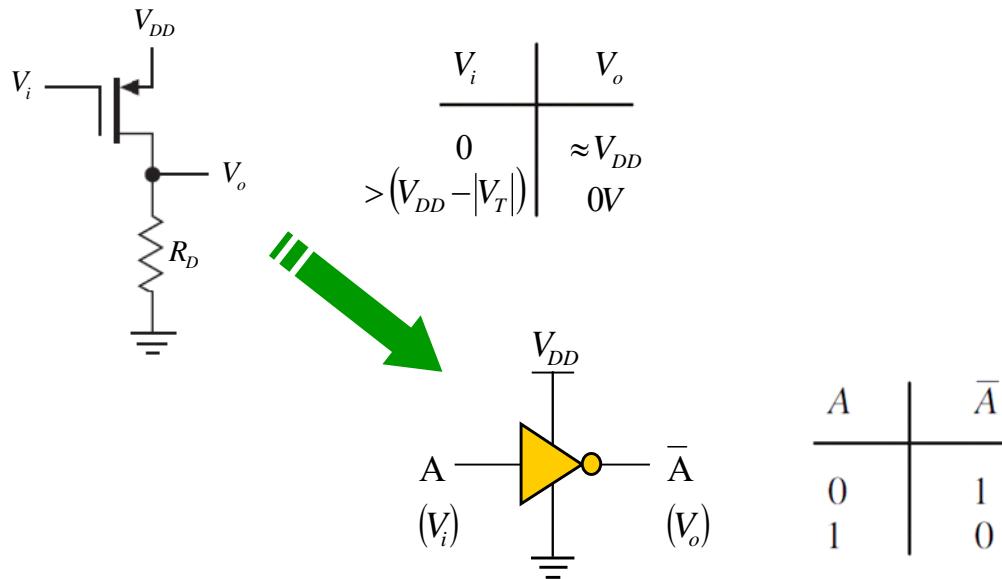
*Tabela de verdade*

A	B	$M_A$	$M_B$	F
0	0	off	off	1
0	1	off	on	0
1	0	on	off	0
1	1	on	on	0

$$F = \overline{A+B}$$

## Aplicação 3: Circuitos digitais

- Inversor (NOT) com transístor PMOS

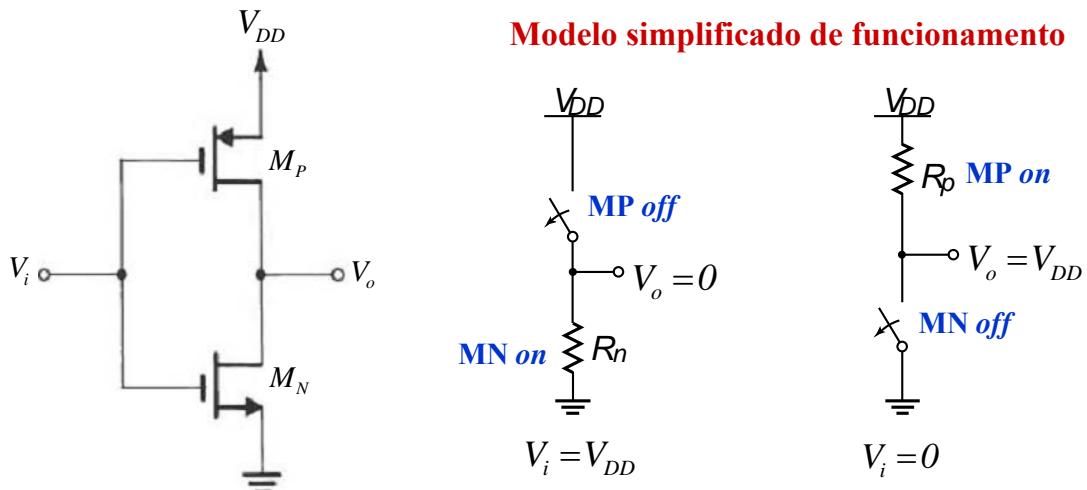


E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-17

## Aplicação 3: Circuitos digitais

- Inversor (NOT) CMOS ou *Complementary MOS*: usa um transístor NMOS e um PMOS;
- Tecnologia dominante em CI's digitais desde meados dos anos 80.



E. Martins, DET Universidade de Aveiro

8.2-18

## Aplicação 3: Circuitos digitais

- Porta lógica NAND em CMOS

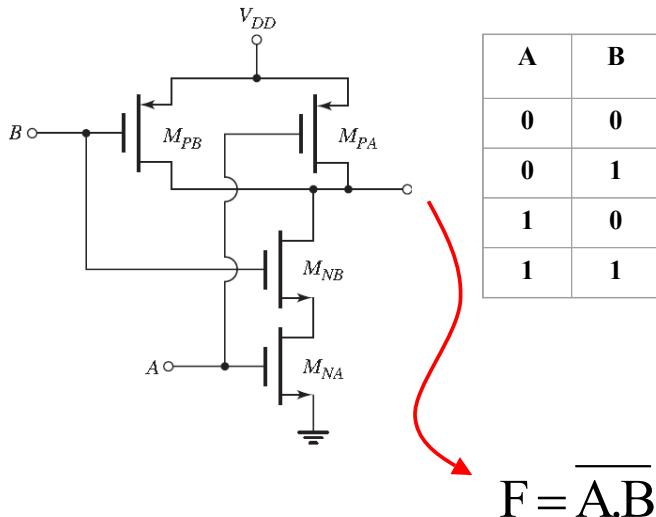
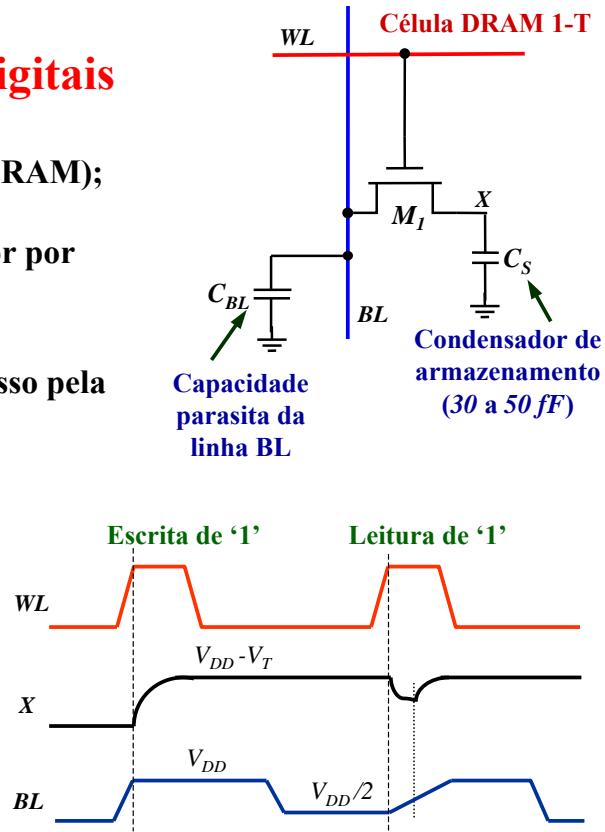


Tabela de verdade

A	B	M <sub>NA</sub>	M <sub>NB</sub>	M <sub>PA</sub>	M <sub>PB</sub>	F
0	0	off	off	on	on	1
0	1	off	on	on	off	1
1	0	on	off	off	on	1
1	1	on	on	off	off	0

## Aplicação 3: Circuitos digitais

- Célula de memória dinâmica (DRAM);
- Um transístor + um condensador por cada bit;
- O valor lógico de cada bit expresso pela tensão em  $C_S$ :
  - $V_{DD} - V_T$  para '1'
  - 0V para '0'
- Na leitura, o sentido da variação da tensão em BL indica o valor lido:
  - $\Delta V_{BL} > 0 \Rightarrow '1'$
  - $\Delta V_{BL} < 0 \Rightarrow '0'$



## Capacidades intrínsecas do MOSFET

E. Martins, DET Universidade de Aveiro

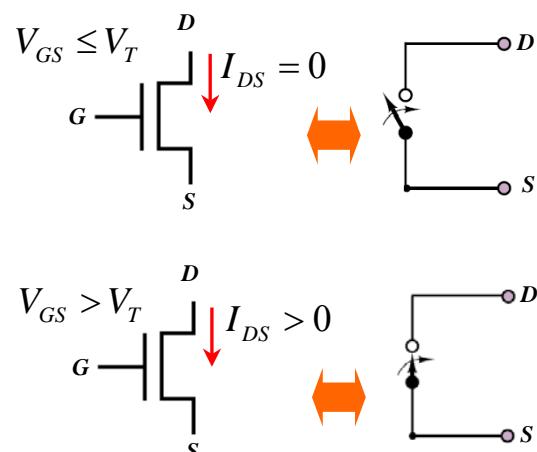
8.2-21

## Capacidades do MOSFET

- Nos circuitos digitais o MOSFET funciona como um interruptor controlado por tensão;

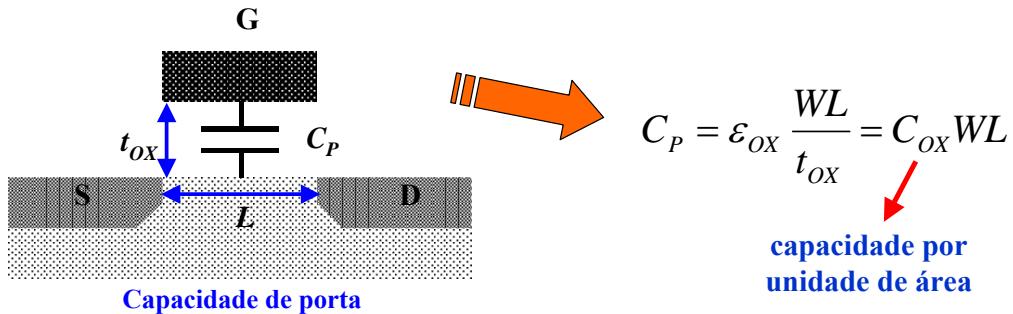
- A **velocidade** com que o “interruptor” liga/desliga depende do tempo necessário para carregar e descarregar as **capacidades...**
  - **de carga;**
  - **intrínsecas** ao dispositivo.

- MOSFET apresenta **2 tipos principais** de capacidades intrínsecas:
  - a do canal de inversão;
  - as das junções *pn* SB e DB.



## Capacidade do canal

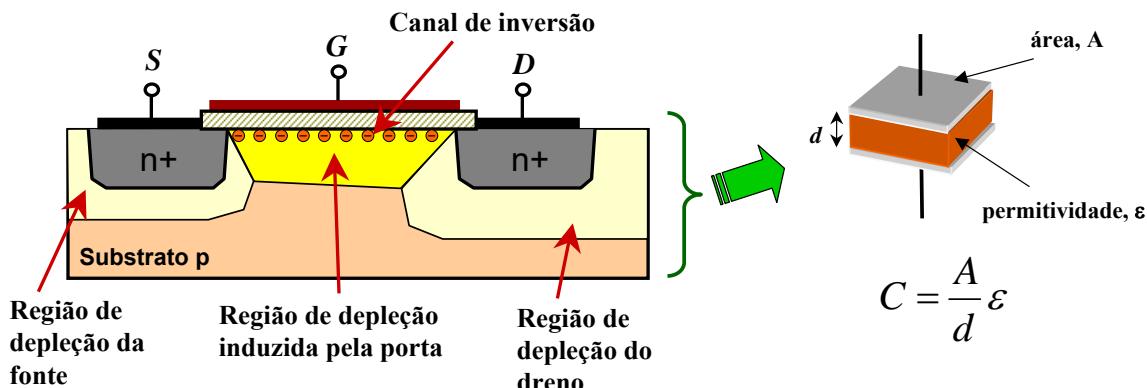
- Estrutura física do MOSFET forma um condensador que é essencial ao funcionamento do dispositivo;



- Responsável pela carga de portadores induzida no canal;
- ... no entanto é um condensador, e como tal precisa de ser carregado e descarregado sempre que a tensão na porta muda – e isso leva tempo!

## Capacidades de depleção das junções SB e DB

- Junções *pn* fonte-substrato (SB) e dreno-substrato (DB) funcionam inversamente polarizadas;



- As regiões de depleção funcionam como o dieléctrico de um condensador altamente não-linear... que também atrasa a comutação do ‘interruptor’.