1. $S(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} i = \frac{1}{n^2} \times \frac{1+n}{2} \times n = \frac{1+n}{2n}$;

2. $I(P) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i-1) = \frac{1}{n^2} \times \frac{0+n-1}{2} \times n = \frac{n-1}{2n}$;

e portanto,

$$\inf\{S(P) : P \in \mathcal{P}\} = \frac{1}{2} = \sup\{I(P) : P \in \mathcal{P}\}.$$

Logo a função é integrável em $[0,1]$ e $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{2}$.

6.4 Critérios de Integrabilidade

Nesta secção iremos apresentar alguns resultados que nos permitem determinar a integrabilidade de de algumas funções.

Teorema 6.1. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Se f é contínua em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Teorema 6.2. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Se f é limitada em $[a,b]$ e é descontínua apenas num número finito de pontos de $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Teorema 6.3. *Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$. Se f é monótona em $[a,b]$, então f é integrável em $[a,b]$.*

Teorema 6.4. *Sejam f e g funções definidas em $[a,b]$. Se f é integrável em $[a,b]$ e g difere de f apenas num número finito de pontos, então g é integrável em $[a,b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Teorema 6.5. *Se f é integrável em $[a,b]$, então f é limitada em $[a,b]$.*

Exemplo 6.4. A função definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

é integrável em qualquer intervalo fechado que não contenha o 0, mas não é integrável em $[a,0]$ $(a < 0)$ ou $[0,b]$ $(b > 0)$ já que não é limitada nesses intervalos, bem como em nenhum outro intervalo $[a,b]$ tal que $0 \in [a,b]$.

O facto de f ser limitada em $[a,b]$ não garante que f seja integrável em $[a,b]$. Considere-se por exemplo a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 1 & , x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

que é limitada mas não é integrável (confrontar exemplo 6.2).

Exercício 6.5 Estude quanto à integrabilidade, nos respetivos domínios, as seguintes funções:

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}, & x \in [-1,2] \setminus \{0\} \\ 1, & x = 0 \end{cases}$ 2. $g(x) = \begin{cases} e^x, & x \in [1,5] \setminus \mathbb{Z} \\ x^3 + \ln x, & x \in [1,5] \cap \mathbb{Z} \end{cases}$ 3. $h(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1 \\ 3, & 1 \leq x \leq 3 \end{cases}$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sin} x}{x} = 1 = f(0)$ | g tem no máximo 5 descontinuidades | Tem um numero finito de

f é contínua $\Rightarrow$ f é integrável	(número finito) Logo é integrável	descontinuidades (uma). Logo é integrável.

4. $\lim_{x \to 0^+} h(x) = -\infty \Rightarrow$ h não é limitada $\Rightarrow$ h não é integrável	5. $\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} i(x) = +\infty \Rightarrow$ não limitada $\Rightarrow$ não integrável.

4. $h(x) = \begin{cases} \ln|x|, & 0 < x \leq 1 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 5. $i(x) = \begin{cases} \operatorname{tg} x, & x \in [0, \frac{\pi}{2}[\\ 2, & x = \frac{\pi}{2} \\ \operatorname{sen} x + \cos(2x), & x \in]\frac{\pi}{2}, \pi] \end{cases}$

Exercício 6.6 Mostre que $\displaystyle\int_0^1 (x^3 - 6x)dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Exercício 6.7 Seja g a função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & x \neq 1 \\ 2, & x = 1 \end{cases}.$$

A função g é integrável em $[0, 2]$? Em caso afirmativo calcule $\displaystyle\int_0^2 g(x)dx$.

6.5 Propriedades do integral definido

Neste secção iremos apresentar algumas propriedades do integral definido que serão utilizadas para calcular alguns integrais.

Teorema 6.6. *Sejam f e g funções integráveis em $[a, b]$ e $\alpha \in \mathbb{R}$. Então αf e $f + g$ são funções integráveis em $[a, b]$ e*

- $\displaystyle\int_a^b \alpha f(x)dx = \alpha \int_a^b f(x)dx.$
- $\displaystyle\int_a^b \Big(f(x) + g(x)\Big)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$

Teorema 6.7. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Então, f é integrável em qualquer subintervalo de $[a, b]$ e se $c \in]a, b[$, f é integrável em $[a, c]$ e $[c, b]$ e*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Exemplo 6.5. Seja f a função definida em $[-1, 1]$ por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{se} \quad x \in [0, 1] \\ 2 & \text{se} \quad x \in [-1, 0[\end{cases}$$

Então

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} f(x)\,dx + \int_0^1 f(x)\,dx = \int_{-1}^{0} 2\,dx + \int_0^1 x\,dx$$

Teorema 6.8. *Seja f uma função integrável em $[a, b]$. Se $f(x) \geq 0$ para todo o $x \in [a, b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

Exercício 6.6 Mostre que $\int_0^1 (x^3-6x)dx = -\frac{11}{4}$ sabendo que

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n^3}{3}+\frac{n^2}{2}+\frac{n}{6} \quad \text{e} \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$f(x) = x^3 - 6x$ é polinomial e por isso contínua em $\mathbb{R}$. (Logo em $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$). Portanto é integrável e podemos considerar apenas partições regulares.

$$\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$$

$$\int_0^1 (x^3-6x)dx = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{} =$$

$$\Delta = \frac{1-0}{n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} =$$

TPC

$$x_i = x_0 + i\Delta$$

$$= 0 + i\cdot\frac{1}{n} = \frac{i}{n}$$

$$x_i^* = x_i = i/n$$

Na hipótese de f ser integrável em $[a,b]$, será que se pode afirmar que:

1. se $\int_a^b f(x)dx = 0$ então $f(x) = 0$, $\forall x \in [a,b]$?

2. se $\int_a^b f(x)dx \geq 0$ então $f(x) \geq 0$, $\forall x \in [a,b]$?

Exemplo 6.6. Seja $f(x) = x$, $x \in [-1,1]$. Temos que

$$\int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

e a função não é a função nula em $[-1,1]$.

Exemplo 6.7. Seja $f(x) = x$, $x \in [-1,2]$. Temos que

$$\int_{-1}^{2} x\,dx > 0$$

e a função não é positiva em $[-1,2]$.

Teorema 6.9. *Se f é integrável em $[a,b]$ e se existem constantes m, $M \in \mathbb{R}$ tais que,*

$$m \leq f(x) \leq M, \text{ para todo o } x \in [a,b],$$

então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

Exemplo 6.8. Seja $f(x) = \dfrac{1}{1+\sqrt{x^2+1}}$ em $[-5,10]$. Como $\underset{= m}{0} \leq f(x) \leq \underset{= M}{\frac{1}{2}}$, $\forall x \in [-5,10]$, podemos afirmar que

$$0 \leq \int_{-5}^{10} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2} \times 15. \qquad M \times (10-(-5))$$

Teorema 6.10. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$ e se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a,b]$, então*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Exemplo 6.9. Sejam $f(x) = \dfrac{e^x}{x+1}$ e $g(x) = e^x$ definidas em $[1,3]$.

Como $f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [1,3]$, temos

$$\int_1^3 \frac{e^x}{x+1}\,dx \leq \int_1^3 e^x\,dx.$$

Teorema 6.11. *Seja f uma função integrável em $[a,b]$. Então $|f|$ é integrável em $[a,b]$ e*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Exemplo 6.10.

$$\left|\int_0^{\pi} \operatorname{sen} x\,dx\right| \leq \int_0^{\pi} |\operatorname{sen} x|\,dx.$$

Teorema 6.12. *Se f e g são duas funções integráveis em $[a,b]$, então $f \cdot g$ é integrável em $[a,b]$.*

Atenção: No teorema anterior apenas se afirma que o produto de funções integráveis é integrável, mas **não é verdade** que $\cancel{\int_a^b f(x) \cdot g(x)\, dx = \int_a^b f(x)\, dx \cdot \int_a^b g(x)\, dx}$.

Teorema 6.13. ***(Teorema do valor médio para integrais)*** *Se f é uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que,*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b - a).$$

Suponha que $f(x) > 0$, para todo $x \in [a, b]$ e interprete geometricamente o teorema dado.

6.6 Integral indefinido

Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. Para cada $x \in I$, tem-se que f é integrável no intervalo fechado de extremos a e x sendo, portanto, possível definir a seguinte função:

$$\begin{aligned} F \;&:\; I \to \mathbb{R} \\ & x \to F(x) = \int_a^x f(t)dt \end{aligned}$$

Note-se que esta função se anula em $x = a$. Porquê?

Teorema 6.14. *Seja f uma função integrável num intervalo I e $a \in I$. A função definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ é contínua em I.*

Demonstração. Seja $x_0 \in I$ e consideremos que $x_0 < x$ (análogo se $x_0 > x$). Então, como f é integrável em I, existe $\int_a^{x_0} f(t)dt = F(x_0)$. Assim,

$$F(x) - F(x_0) = \int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Como f é integrável em I, f é limitada neste intervalo e consequentemente é limitada em $[x_0, x]$, isto é, existem m e M em $\mathbb{R}$ tais que

$$m \leq f(t) \leq M, \; \forall t \in [x_0, x].$$

Então, pelo teorema 6.9,

$$m(x - x_0) \leq \int_{x_0}^x f(t)dt \leq M(x - x_0).$$

Como $\lim_{x \to x_0} (x - x_0) = 0$, resulta que

$$\lim_{x \to x_0} \big(F(x) - F(x_0)\big) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0),$$

ou seja, F é contínua em x_0 (ponto arbitrário de I). $\square$

Exemplo 6.11. Dada a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por, $f(x) = \ln 2$, seja $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $F(x) = \int_0^x \ln 2\, dt$.

Pelo exercício 6.3 podemos dizer que $F(4) = \int_0^4 \ln 2\, dt = 4 \ln 2$ e $F(-3) = -3 \ln 2$.

Qual o valor de $F(0)$?

Exercício 6.8 Considere a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1[\\ 2, & x \in [1,2[\\ 3, & x \in [2,3] \end{cases}$$

a) Mostre que $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x-1, & x \in [1,2[\\ 3x-3, & x \in [2,3] \end{cases}$

b) Verifique que F é contínua em $[0,3]$.

Observação 6.2. Observe que

$$G(x) = \begin{cases} x, & x \in [0,1[\\ 2x, & x \in [1,2[\\ 3x, & x \in [2,3] \end{cases}$$

não pode ser dado por $G(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)dt$.

6.6.1 Primeiro Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.15. *Seja f uma função contínua num intervalo I e $a \in I$. Se*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

para cada $x \in I$, então F é uma função diferenciável e $F'(x) = f(x)$.

Demonstração. Pelo teorema 6.14, a função F é contínua em I. O Teorema do Valor Médio para Integrais (teorema 6.13) diz-nos que, no intervalo $]x_0, x[$ (supondo $x > x_0$, o caso contrário é análogo), existe c tal que

$$F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)\,dt = f(c)(x - x_0)$$

e, portanto,

$$\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} f(c).$$

Pela continuidade da função f, $\displaystyle\lim_{x\to x_0} f(c) = f(x_0)$. Como $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = F'(x_0)$, resulta que $F'(x_0) = f(x_0)$. $\square$

Corolário 1. *Se f é uma função contínua em I e $a \in I$, então f tem uma primitiva em I que é dada por $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.*

O teorema 6.15 pode ser generalizado usando como extremos funções deriváveis.

Teorema 6.16. *Seja f uma função contínua no intervalo J e H a função definida por*

$$H(x) = \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(t)dt,$$

com g_1 e g_2 definidas em $I \subseteq \mathbb{R}$ tais que $g_1(I) \subseteq J$ e $g_2(I) \subseteq J$.

Se f é contínua em J e g_1 e g_2 são deriváveis em I, então

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x),$$

para todo o $x \in I$.

Demonstração. Comecemos por observar que $H(x) = F(g_2(x)) - F(g_1(x))$ com $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ e portanto,

$$H'(x) = (F(g_2(x)) - F(g_1(x)))' = (F(g_2(x)))' - (F(g_1(x)))'$$

e usando a derivada da função composta podemos afirmar que

$$(F(g_2(x)))' = F'(g_2(x))g_2'(x) \text{ e } (F(g_1(x)))' = F'(g_1(x))g_1'(x)$$

e, finalmente, pelo teorema 6.15, como $F'(x) = f(x)$, temos

$$H'(x) = f(g_2(x))g_2'(x) - f(g_1(x))g_1'(x).$$

□

Exercício 6.9

1. Seja $F(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \operatorname{arcsen} t \, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule $F'(x)$.

2. Determine $k \in \mathbb{R}$ de modo que $F'(1) = 0$, sendo F a função dada por

$F'(u) = e^{-(k \ln u)^2} \times \frac{k}{u}$

$- e^{-(u^2)^2} \times 2u$

$$F(x) = \int_{x^2}^{k \ln x} e^{-t^2} dt.$$

$F'(1) = 0 \Leftrightarrow$

$e^0 \times k - e^{-1} \cdot 2 = 0$

$k = \frac{2}{e}$

3. Seja F a função dada por $F(x) = \int_0^x \underbrace{\left(\int_0^t e^{-u^2} du \right)}_{f(t)} dt$. Calcule $F''(x)$.

4. Seja f uma função real de variável real contínua e positiva em $\mathbb{R}$.
Mostre que a função F dada por

$$F(x) = \int_0^{6x - x^2} f(t)dt$$

admite um só extremo no ponto de abcissa $x = 3$. Classifique esse extremo.

6.6.2 Segundo Teorema Fundamental do Cálculo Integral (T.F.C.I.)

Teorema 6.17. *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e F uma primitiva de f. Então*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Habitualmente escrevemos $[F(x)]_a^b$ ou $F(x)|_a^b$ para denotar $F(b) - F(a)$.

Demonstração. Seja

$$\begin{aligned} G \ : \ & [a, b] \to \mathbb{R} \\ & x \to G(x) = \int_a^x f(t)dt. \end{aligned}$$

Por hipótese, F é uma primitiva de f em $[a, b]$. Do Primeiro T.F.C.I. podemos concluir que G é também uma primitiva de f em $[a, b]$. Logo, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que, para cada $x \in [a, b]$, $G(x) = F(x) + c$ (vimos no capítulo anterior que duas primitivas de uma mesma função apenas diferem de uma constante). Podemos determinar essa constante c. Em particular, para $x = a$, vem $G(a) = F(a) + c$. Como $G(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$ tem-se que $c = -F(a)$.

Exercício 6.9

1. Seja $F(x) = \displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} (x+1)^2 \operatorname{arcsen} t \, dt$ uma função definida em $[0, \frac{\pi}{2}]$. Calcule $F'(x)$.

$$F(u) = (u+1)^2 \underbrace{\int_0^{\sin u} \overbrace{\arcsin t}^{f(t)} \, dt}_{H(u)}$$

$$F'(u) = 2(u+1) H(u) + (u+1)^2 H'(u)$$

$$H'(u) = \arcsin(\sin u) \times \cos u - \arcsin 0 \times 0 =$$

$$= u \cos u$$

Por outro lado $G(b) = F(b) + c$ e, como $G(b) = \displaystyle\int_a^b f(t)dt$ então,

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) = F(b) + c = F(b) - F(a).$$

□

Exemplo 6.12. Vejamos alguns exemplos simples de cálculo do integral definido, usando uma primitiva da função integranda.

1. $\displaystyle\int_{-1}^{0} e^x dx = e^x \,\Big|_{-1}^{0} = e^0 - e^{-1} = 1 - \frac{1}{e}.$
2. $\displaystyle\int_{-e}^{-1} \frac{1}{x} dx = \ln|x| \,\Big|_{-e}^{-1} = \ln 1 - \ln e = -1.$
3. $\displaystyle\int_1^e x \ln x dx = \frac{x^2}{2}\ln x\Big|_1^e - \frac{1}{2}\int_1^e x dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2}\Big|_1^e = \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4}$

Exercício 6.10 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^5 x e^{3x^2+4} dx;$
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2} dx;$
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)} dx.$

6.6.3 Substituição no integral definido

O processo de substituição no integral definido torna-se mais simples do que nas primitivas, já que não será necessário regressar à variável inicial...se a substituição for bem feita!

Exemplo 6.13. Consideremos o integral definido $\displaystyle\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx.$

Podemos calcular uma primitiva da função $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}$ por substituição, usando a mudança de variável dada por $t^2 = x + 1$, com $t > 0$. Neste caso $dx = 2tdt$ e a função a primitivar será:

$$\int \frac{t^2-1}{t} 2t\, dt = \frac{2}{3}t^3 - 2t + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Regressando à variável inicial temos

$$\int \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C,\ C \in \mathbb{R}.$$

Pelo segundo T.F.C.I. (teorema 6.17) vem

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1}\,\Big|_0^3 = \frac{8}{3}.$$

Contudo, podemos fazer a substituição diretamente no integral definido. Atendendo a que $x \in [0,3]$, pela substituição acima referida $t^2 = x + 1$, com $t > 0$, conduz a $t \in [1,2]$ (para $x = 0$ vem $t = 1$ e para $x = 3$ vem $t = 2$). Assim,

$$\int_0^3 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx = \int_1^2 \frac{t^2-1}{t} 2tdt = 2\int_1^2 (t^2-1)dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - t\right)\Big|_1^2 = \frac{8}{3}.$$

6.8 Exercícios do capítulo

Exercício 6.13 Calcule os seguintes integrais definidos:

1. $\displaystyle\int_0^1 e^{-x}\cos(e^{-x})\,dx$
2. $\displaystyle\int_4^9 \frac{dx}{\sqrt{x}-1}$ (Suggestão: Faça a substituição $t=\sqrt{x}$)

Exercício 6.14 Considere a função F definida por

$$F(x)=\int_{x^2}^{k\ln(x)} e^{-t^2}\,dt$$

1. Determine a expressão da derivada de F, $F'(x)$.
2. Determine $k\in\mathbb{R}$ de modo a que $F'(1)=0$.

Exercício 6.15 Considere a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x)=xe^x$.

1. Diga, justificando, se a função f é integrável em qualquer intervalo $[a,b]\subset\mathbb{R}$ com $b>a$.
2. Calcule o valor da área da região limitada do plano situada entre $x=-1$ e $x=1$ e compreendida entre o gráfico de f e o eixo das abcissas.

Exercício 6.16 Considere a função F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} e^{-t^2}\arctan t\,dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Determine $F'(x)$ e o seu domínio.
2. Estude F quanto à existência de extremos locais.

Exercício 6.17 Considere a função F definida por $F(x)=\displaystyle\int_0^{x^2} t\ln(1+e^t)\,dt$, para todo o $x\in\mathbb{R}$.

1. Justifique que F é diferenciável em $\mathbb{R}$ e determine $F'(x)$.
2. Estude F quanto à monotonia e existência de extremos locais.

Exercício 6.18 Exprima, em termos de integrais definidos, a área da região assinalada na figura

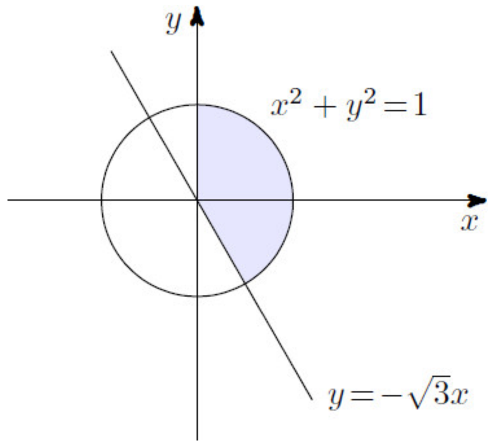


Figura 6.18: Área da região definida no exercício 6.18.

Exercício 6.19 Seja $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq (x-3)^2 \wedge y \geq x - 1 \wedge y \leq 4\}$.

1. Represente geometricamente a região A.
2. Calcule a área da região A.

Exercício 6.20 Determine a área da região de $\mathbb{R}^2$ delimitada pelos gráficos de $f(x) = \sqrt{4 + x^2}$ e $g(x) = x$ e pelas retas de equações $x = -2$ e $x = 2$.

Exercício 6.21 Considere a função F dada por

$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt + \int_0^{\frac{1}{x}} \frac{1}{1+t^2} dt$$

para $x \in [1, +\infty[$. Determine $F(1)$.

Exercício 6.22 Considere a função real de variável real f definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \ln x & \text{se} \quad x > 0 \\ k & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}, \quad \text{onde } k \text{ é um número real.}$$

1. Diga, justificando, para que valores de k a função f é integrável no intervalo $[-1, 1]$.
2. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int x \ln x \, dx$, definidas no intervalo $]0, +\infty[$.
3. Determine o valor da área da região limitada do plano situada entre $x = 1/e$ e $x = e$ e delimitada pelo gráfico de f e pelo eixo das abcissas.

Exercício 6.23 Considere a função definida por $f(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t+t^2} \, dt$. Determine o subconjunto de $\mathbb{R}$ onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima.

Exercício 6.24 Prove que se f é uma função contínua em $\mathbb{R}$ e a é uma constante arbitrária, então

$$\int_0^a f(x) \, dx = \int_0^a f(a-x) \, dx.$$

Soluções dos exercícios

Exercício 6.1 1. $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = \dfrac{125}{216}$; 2. $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_2) = \dfrac{23}{72}$; 3. $S_f(\mathcal{P}', \mathcal{C}') = \dfrac{7}{32}$.

Exercício 6.2 $S_f(\mathcal{P}, \mathcal{C}_1) = -\dfrac{125}{216}$.

Exercício 6.4 $\displaystyle\int_0^3 (2x+1)dx = 12$.

Exercício 6.5

1. f é contínua em $[-1, 2]$, logo, pelo teorema 6.1 é integrável.
2. g e limitada em $[1, 5]$ e descontínua apenas nos inteiros $\{1, 2, 3, 4, 5\}$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
3. h é limitada em $[0, 3]$ e descontínua em $x = 1$, logo, pelo teorema 6.2 é integrável.
4. A função h não é limitada em $[0, 1]$, logo, pelo teorema 6.5 não é integrável neste intervalo.
5. A função i não é limitada em $[0, \pi]$ já que $\displaystyle\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^-} i(x) = +\infty$, logo, pelo teorema 6.5, i não é integrável neste intervalo.

Exercício 6.7 Sim. $\displaystyle\int_0^2 g(x)dx = 2$

Exercício 6.9

1. $F'(x) = 2(x+1)\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen} x} \operatorname{arcsen} t\, dt + (x+1)^2 \cos x\, x$.
2. $k = \dfrac{2}{e}$.
3. $F''(x) = e^{-x^2}$.
4. $x = 3$ é um maximizante de F.

Exercício 6.10

1. $\displaystyle\int_0^5 xe^{3x^2+4}dx = \frac{1}{6}\left(e^{79} - e^4\right)$;
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{1}{1+(2x)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan 4$;
3. $\displaystyle\int_1^3 \frac{1}{x(2x+4)}dx = \frac{1}{4}\ln\frac{18}{10}$.

Exercício 6.11 $A = \displaystyle\int_{\ln 2}^{\ln 5} \frac{1}{1+e^{2x}}\, dx$.

Exercício 6.12 $A = \displaystyle\int_0^1 (x^2 - 2x + 2)\, dx + \int_1^2 (x^2 - 4x + 4)\, dx$.

Exercício 6.13 1. $\operatorname{sen} 1 - \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{e}\right)$; 2. $2(1 + \ln 2)$.

Exercício 6.14 1. $F'(x) = e^{-k^2 \ln^2 x} - 2xe^{-x^4}$; 2. $k = \dfrac{2}{e}$.

Exercício 6.15 1. Sim, porque é uma função contínua em $\mathbb{R}$, logo também o é em qualquer intervalo $[a, b]$. 2. $2 - 2/e$.

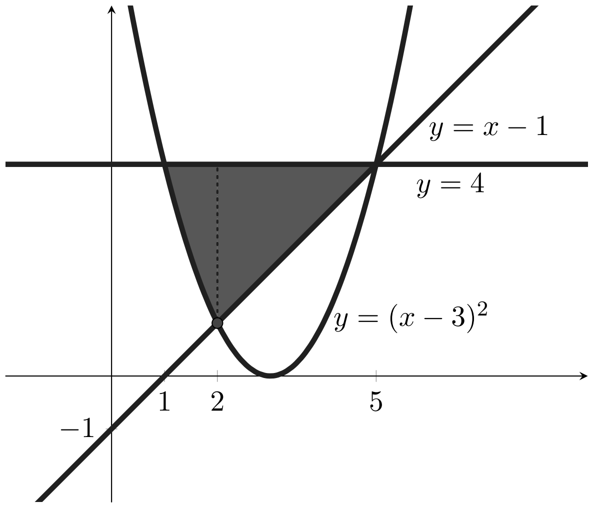
Exercício 6.16 1. $F'(x) = 2xe^{-x^4} \arctan(x^2)$, $x \in \mathbb{R}$; 2. F admite um mínimo absoluto em $x = 0$ sendo $F(0) = 0$. Não tem máximo.

Exercício 6.17 1. $F'(x) = 2x^3 \ln(1 + e^{x^2})$; 2. F tem um mínimo absoluto em $x = 0$ e é zero; é estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, +\infty[$.

Exercício 6.18 $A = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}\,x\,dx + \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{1-x^2}\,dx.$

Exercício 6.19

1.



2. $A = \dfrac{37}{6}$.

Exercício 6.20 $A = \dfrac{32}{3}$.

Exercício 6.21 $A = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercício 6.22 1. Para qualquer valor de k a função é secionalmente contínua (note que $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$), logo integrável em qualquer intervalo de números reais. Em particular, se $k = 0$ a função é contínua. 2. $F(x) = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$, $C \in \mathbb{R}$; 3. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4e^2} + \dfrac{e^2}{4}$.

Exercício 6.23 O gráfico tem a concavidade voltada para cima em $\left]-\infty, -\dfrac{1}{2}\right[$

Exercício 6.24 Se f é contínua em $\mathbb{R}$, então é integrável em qualquer intervalo da forma $[0, a]$, com $a \in \mathbb{R}$. Efetuando a mudança de variável $u = a - x$ ($x = a - u$, $dx = -1 \cdot du$, $x = 0 \Rightarrow u = a$ e $x = a \Rightarrow u = 0$), obtém-se

$$\int_0^a f(a-x)\,dx = \int_a^0 f(u)(-1)du = -\int_a^0 f(u)\,du = \int_0^a f(u)\,du = \int_0^a f(x)\,dx,$$

o que demonstra a propriedade pedida.