Universidade de Aveiro
Departamento de Matemática

Cálculo II – Agrupamento 1 **2021/2022**

Folha Prática 5

Equações Diferenciais Ordinárias

Exercícios Propostos

1. Verifique se as seguintes funções são solução (em $\mathbb{R}$) das equações diferenciais dadas:

   (a) $y = \operatorname{sen} x - 1 + e^{-\operatorname{sen} x}$ $\qquad \dfrac{dy}{dx} + y \cos x = \dfrac{1}{2} \operatorname{sen}(2x)$;

   (b) $z = \cos x$ $\qquad z'' + z = 0$;

   (c) $y = \cos^2 x$ $\qquad y'' + y = 0$;

   (d) $y = Cx - C^2 \quad (C \in \mathbb{R})$ $\qquad (y')^2 - xy' + y = 0$.

2. Indique uma equação diferencial para a qual a família de curvas indicada constitui um integral geral.

   (a) $y = Cx, \quad C \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais que passam pela origem);

   (b) $y = Ax + B, \quad A, B \in \mathbb{R}$ (retas do plano não verticais);

   (c) $y = e^{Cx}, \quad C \in \mathbb{R}$.

3. Considere a família de curvas sinusoidais definidas por

$$y = A \operatorname{sen}(x + B) \qquad \text{com} \qquad A, B \in \mathbb{R}.$$

   Indique uma EDO de terceira ordem para a qual estas funções constituam uma família de soluções

4. (a) Determine a solução geral da equação diferencial $y'' - \operatorname{sen} x = 0$.

   (b) Mostre que a função definida por $\varphi(x) = 2x - \operatorname{sen} x$ é uma solução particular da EDO da alínea anterior, que satisfaz as condições $\varphi(0) = 0$ e $\varphi'(0) = 1$.

5. Determine a solução geral das seguintes EDOs:

   (a) $y' - \dfrac{1}{(1 + x^2) \operatorname{arctg} x} = 0$;

   (b) $y' - \sqrt{1 - x^2} = 0$;

   (c) $y' - \dfrac{x^4 + x^2 + 1}{x^2 + 1} = 0$.

6. Determine um integral geral para cada uma das seguintes EDOs de variáveis separáveis:

   (a) $x + yy' = 0$;

   (b) $xy' - y = 0$;

   (c) $(t^2 - xt^2)\dfrac{dx}{dt} + x^2 = -tx^2$;

   (d) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0$.

7. Resolva os seguintes problemas de Cauchy:

   (a) $xy' + y = y^2, \quad y(1) = 1/2;$

   (b) $xy + x + y'\sqrt{4 + x^2} = 0, \quad y(0) = 1;$

   (c) $(1 + x^3)y' = x^2 y, \quad y(1) = 2.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

   (a) $(x^2 + y^2)y' = xy;$

   (b) $y'\left(1 - \ln\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{y}{x}\,, \quad x > 0.$

9. Considere a equação diferencial $y' = \dfrac{y}{x}\left(1 + \ln y - \ln x\right), \quad x > 0.$

   (a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

   (b) Determine um integral geral desta EDO.

10. Resolva as seguintes equações diferenciais exatas:

    (a) $(2x + \operatorname{sen} y)\,dx + x\cos y\,dy = 0\,;$

    (b) $(2xy - x - e^y)\,dx = (xe^y + y - x^2)\,dy\,;$

    (c) $\left(\dfrac{y}{x} + 6x\right)dx + (\ln x - 2)\,dy = 0\,.$

11. Resolva a equação $e^x \sec y - \operatorname{tg} y + y' = 0$ sabendo que ela admite um fator integrante da forma $\mu(x, y) = e^{\beta x}\cos y$.

12. Resolva as seguintes equações diferenciais, usando em cada caso o fator integrante indicado:

    (a) $y\,dx + (y^2 - x)\,dy = 0 \qquad [\ \mu(y) = y^{-2}\ ];$

    (b) $(2y - x^3)\,dx + x\,dy = 0 \qquad [\ \mu(x) = x\ ];$

13. Resolva as seguintes equações diferenciais lineares usando fatores integrantes:

    (a) $y' + 2y = \cos x;$

    (b) $x^3 y' - y - 1 = 0;$

    (c) $\dfrac{1}{x}\,y' - \dfrac{1}{x^2 + 1}\,y = \dfrac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}\,, \quad x \neq 0.$

14. Considere a EDO $x^2 y' + 2xy = 1$ em $]0, +\infty[$. Mostre que qualquer solução desta EDO tende para zero quando $x \to +\infty$.

15. Resolva as seguintes equações diferenciais de Bernoulli:

    (a) $xy' + y = y^2 \ln x, \quad x > 0;$

    (b) $y' - \dfrac{y}{2x} = 5x^2 y^5\,, \quad x \neq 0.$

16. Usando o método da variação das constantes, determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' - \dfrac{2y}{x} = x^3$;

    (b) $y' \operatorname{sen} x + y \cos x = \operatorname{sen}^2 x$;

    (c) $y' - \dfrac{x}{x^2+1}\, y = \sqrt{x^2+1}\,, \qquad$ (rever EDO do 13 (c)).

17. Determine a solução geral das seguintes EDOs lineares:

    (a) $y' + y = \operatorname{sen} x$;

    (b) $y'' - y + 2\cos x = 0$;

    (c) $y'' + y' = 2y + 3 - 6x$;

    (d) $y'' - 4y' + 4y = x\,\mathrm{e}^{2x}$;

    (e) $y'' + y' = \mathrm{e}^{-x}$;

    (f) $y'' + 4y = \operatorname{tg}(2x)$;

    (g) $y''' + y' = \operatorname{sen} x$;

    (h) $y'' + 9y = \operatorname{sen} x - \mathrm{e}^{-x}$.

18. Considere o problema de valores iniciais

$$y'' + 4y' + 4y = \cos(2x)\,, \qquad y(\pi) = 0\,, \quad y'(\pi) = 1.$$

    Justifique que este problema possui uma única solução (em $\mathbb{R}$) e determine-a.

19. Resolva o seguinte problema de valor inicial $\begin{cases} y' + y\cos x = \cos x \\ y(0) = 2 \end{cases}$.

20. Determine a solução geral das seguintes equações diferenciais:

    (a) $(1+x^2)y' + 4xy = 0$;

    (b) $y'' + y + 2\operatorname{sen} x = 0$;

    (c) $(1+x^2)y' - y = 0$;

    (d) $y''' + 4y' = \cos x$;

    (e) $y' - 3x^2 y = x^2$;

    (f) $y''' - 3y' + 2y = 12\,\mathrm{e}^{x}$.

21. Resolva a EDO $xy'' - y' = 3x^2$ (Sugestão: Efetue a mudança de variável $z = y'$).

22. Considere a EDO linear homogénea (de coeficientes não constantes)

$$(1-x)y'' + xy' - y = 0\,, \qquad x \in]1, \infty[.$$

    (a) Mostre que $\{x, e^x\}$ forma um sistema fundamental de soluções da equação.

    (b) Obtenha a solução geral da EDO.

    (c) Resolva agora a EDO

$$(1-x)y'' + xy' - y = x^2 - 2x + 2\,, \qquad x \in]1, \infty[,$$

    começando por verificar que ela admite uma solução do tipo $y = \beta x^2$ para certo $\beta \in \mathbb{R}$.

Soluções

1. (a) Sim; (b) Sim; (c) Não; (d) Sim.

2. (a) $xy' - y = 0$; (b) $y'' = 0$; (c) $xy' - y\ \ln(y) = 0$.

3. $y''' + y' = 0$.

4. (a) $y = C_1 x - \operatorname{sen} x + C_2\,, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

5. (a) $y = \ln(\operatorname{arctg} x) + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = \dfrac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \dfrac{1}{2}\operatorname{arcsen} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

   (c) $y = \dfrac{x^3}{3} + \operatorname{arctg} x + C\,, \quad C \in \mathbb{R}$.

6. (a) $x^2 + y^2 = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

   (b) $y = C\,x\,, \quad C \in \mathbb{R}$ (compare com o ex. 2(a));

   (c) $\dfrac{x}{t} = C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}-\frac{1}{t}}\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

   (d) $y = \dfrac{1}{\ln|x^2-1| - C}\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

7. (a) $y = \dfrac{1}{x+1}$; (b) $y = -1 + 2e^{2-\sqrt{4+x^2}}$; (c) $y^3 = 4(1+x^3)$.

8. (a) $\ln|y| - \dfrac{x^2}{2y^2} = C, \quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

   (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Ky}\,, \quad x > 0, \quad K \in \mathbb{R}$.

9. (b) $y = x\,\mathrm{e}^{Cx}, \quad x > 0, \quad C \in \mathbb{R}$.

10. (a) $x^2 + x \operatorname{sen} y = C\,, \quad C \in \mathbb{R}\,$;

    (b) $x^2 + y^2 + 2xe^y - 2yx^2 = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = \dfrac{C - 3x^2}{\ln|x| - 2}\,, \quad C \in \mathbb{R}$.

11. $x + e^{-x}\operatorname{sen} y = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$ (um fator integrante é $\mu(x,y) = e^{-x}\cos y$).

12. (a) $x + y^2 = Cy\,, \quad C \in \mathbb{R}$

    (b) $yx^2 - \dfrac{x^5}{5} = C\,, \quad C \in \mathbb{R}$

13. (a) $y = \dfrac{2}{5}\cos x + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} x + C\,\mathrm{e}^{-2x}\,, \quad C \in \mathbb{R}$;

    (b) $y = -1 + C\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2x^2}}\,, \quad x \neq 0, \quad C \in \mathbb{R}$;

    (c) $y = (C + x)\sqrt{x^2+1}\,, \quad C \in \mathbb{R}$.

14. Comece por verificar que a solução geral possui a forma $y = \dfrac{1}{x} + \dfrac{C}{x^2}\,, \quad C \in \mathbb{R}$.

15. (a) $y = \dfrac{1}{1 + Cx + \ln x}\,, \quad x > 0, \quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

    (b) $y^4 = \dfrac{x^2}{C - 4x^5}\,, \quad C \in \mathbb{R}$ ($y = 0$ é solução singular).

16. (a) $y = \dfrac{x^4}{2} + K\,x^2\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(b) $y = \dfrac{x}{2}\,\mathrm{cosec}x - \dfrac{\cos x}{2} + K\,\mathrm{cosec}x\,, \qquad K \in \mathbb{R}.$

17. (a) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-x} + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{2} - \dfrac{\cos x}{2};$

(b) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x} + \cos x;$

(c) $y = C_1\,\mathrm{e}^{x} + C_2\,\mathrm{e}^{-2x} + 3x;$

(d) $y = \left(C_1 + C_2 x + \dfrac{x^3}{6}\right)\mathrm{e}^{2x};$

(e) $y = C_1 + (C_2 - x)\,\mathrm{e}^{-x};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{sen}\,(2x) + C_2\,\cos(2x) - \dfrac{1}{4}\cos(2x)\,\ln|\sec(2x) + \mathrm{tg}\,(2x)|;$

(g) $y = C_1 + C_2\,\cos x + C_3\,\mathrm{sen}\,x - \dfrac{x}{2}\,\mathrm{sen}\,x;$

(h) $y = C_1\,\mathrm{sen}\,(3x) + C_2\,\cos(3x) + \dfrac{\mathrm{sen}\,x}{8} - \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{10}.$

(C_1, C_2, C_3 são constantes reais arbitrárias).

18. $y = \dfrac{3}{4}(x - \pi)\,\mathrm{e}^{2(\pi - x)} + \dfrac{\mathrm{sen}\,(2x)}{8}.$

19. $y = 1 + \mathrm{e}^{-\mathrm{sen}\,x}\,, \quad x \in \mathbb{R}.$

20. (a) $y = \dfrac{K}{(x^2+1)^2}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(b) $y = C_1\,\cos x + C_2\,\mathrm{sen}\,x + x\,\cos x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(c) $y = C\,\mathrm{e}^{\mathrm{arctg}\,x}\,, \qquad C \in \mathbb{R};$

(d) $y = C_1 + C_2\,\cos(2x) + C_3\,\mathrm{sen}\,(2x) + \dfrac{1}{3}\,\mathrm{sen}\,x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R};$

(e) $y = K\,\mathrm{e}^{x^3} - \dfrac{1}{3}\,, \qquad K \in \mathbb{R};$

(f) $y = C_1\,\mathrm{e}^{-2x} + (C_2 + C_3 x + 2x^2)\,\mathrm{e}^{x}\,, \qquad C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R}.$

21. $y = Cx^2 + x^3 + K\,, \qquad C, K \in \mathbb{R}.$

22. (a) –

(b) $y = C_1 x + C_2 e^x\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

(c) $y = C_1 x + C_2 e^x + x^2\,, \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$

8. Verifique que as seguintes equações diferenciais são homogéneas e determine um seu integral geral.

(a) $(x^2+y^2)y' = xy$;

(b) $y'\left(1-\ln\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}, \quad x>0.$

(a) $y' = \frac{xy}{x^2+y^2}$ $f(x,y)$

$f(\lambda x,\lambda y) = \frac{\lambda x\,\lambda y}{(\lambda x)^2+(\lambda y)^2} = \frac{\lambda^2 xy}{\lambda^2(x^2+y^2)} = \frac{xy}{x^2+y^2} = f(x,y)$

$y = zx \qquad y' = z'x+z$

$z'x+z = \frac{\cancel{x}\,zx}{\cancel{x^2}+z^2x^2}$

$z'x+z = \frac{z}{1+z^2}$

$x\,dz = \left(\frac{z}{z^2+1}-z\right)dx$

$x\,dz = \frac{\cancel{z}-z^3-\cancel{z}}{z^2+1}dx$

$\frac{z^2+1}{z^3}dz = -\frac{1}{x}dx$

$\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^3}\right)dz = -\frac{1}{x}dx$

$\ln|z| + \frac{z^{-2}}{-2} = -\ln|x|+c, \ c\in\mathbb{R}.$

$\ln\left|\frac{y}{x}\right| - \frac{1}{2\left(y/x\right)^2} = -\ln|x|+c, \ c\in\mathbb{R}.$

9. Considere a equação diferencial $y' = \boxed{\frac{y}{x}(1 + \ln y - \ln x)}$, $x > 0$.

(a) Verifique que se trata de uma equação diferencial homogénea.

(b) Determine um integral geral desta EDO.

$$f(x,y) = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

(a)

$$f(\lambda x, \lambda y) = \frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} x}\left(1 + \ln\left(\frac{\cancel{\lambda} y}{\cancel{\lambda} x}\right)\right) = \frac{y}{x}\left(1 + \ln\left(\frac{y}{x}\right)\right) = f(x,y)$$

(b) $y = zx \quad y' = z'x + z$

$$z'x + z = \frac{z\cancel{x}}{\cancel{x}}\left(1 + \ln\left(\frac{z\cancel{x}}{\cancel{x}}\right)\right)$$

$$xz' = z(1 + \ln z) - z$$

$$xz' = z\ln z$$

$$x\,dz = z\ln z\,dx$$

$$\frac{1}{z\ln z}dz = \frac{1}{x}dx$$

$$\ln(\ln z) = \ln x + c$$

$$\ln z = \alpha x$$

$$\ln\frac{y}{x} = \alpha x$$

$$\ln y - \ln x = \alpha x$$

$$\ln y = \ln x + \alpha x$$

$$y = e^{\alpha x} \cdot x, \ \alpha \in \mathbb{N}$$

$$* \quad e^{\ln(\ln z)} = e^{c} \cdot e^{\ln x}$$