Unidade Curricular: Mecânica e Campo Eletromagnético (MCE)
Ano Letivo 2021/22

Trabalho Prático 1 - Movimento de Projéteis
Relatório

Autores:

- João Rodrigo Pinheiro Faria de Andrade, Nº Mecanográfico: 103361
- António Miguel Freitas Costa, Nº Mecanográfico: 102674
- Eduardo José Meneses Alves, Nº Mecanográfico: 104179

Turma: PL3

1. Introdução Teórica

A posição de um projétil e velocidade inicial (com componentes v_0x e v_0y) que se desloca no plano $(x\ ,y)$ é dada por:

$$x = x_0 + v_{0x}tcos\theta_0 \quad (1)$$

$$y = y_0 + v_{0y}tcos\theta_0 - 1/2gt^2 \quad (2)$$

onde g é aceleração da gravidade, t é o tempo, x_0e y_0 são as coordenadas da posição inicial do projétil relativas ao eixo e θ_0é a inclinação do vetor velocidade inicial relativamente ao eixo x . Removendo a variável t das equações 1 e 2, obtém-se uma nova equação para o alcance x em função do ângulo, que permite determinar o ângulo para o qual o alcance é máximo, θ_{max} é dado por:

$$\theta_{max} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2g(y_i-y_f)}{v_0^2}}}\right) \quad (3)$$

Se o valor da altura inicial for igual ao da altura inicial $(y_i = y_f)$, então $tg(\theta_{max}) = 1$, pelo que $\theta_{max} = 45º$.

Pêndulo Balístico:

O pêndulo balístico consiste num massa M suspensa de um fio ou uma barra. Se um projétil de massa $m(m << M)$ for disparado contra a massa M e nela ficar retido, então o conjunto adquire energia cinética, E_c, que, à medida que o pêndulo se move, vai sendo transformada em energia potencial gravítica, E_p. A altura máxima, h , atingida será tal que a energia potencial gravítica máxima é igual à energia cinética inicial, devendo-se isso à conservação da energia mecânica. Considerando v_0a velocidade inicial do projétil e v_2a velocidade do conjunto massa + projétil, logo após a colisão, obtém-se:

$$E_c(inicial) = \frac{1}{2}(m + M)v_2^2 = (m + M)gh = E_p(máx) \quad (4)$$

A conservação de momento linear na colisão implica que:

$$mv_0 = (m + M)v_2 \quad (5)$$

de onde se tira a relação entre a velocidade inicial v_0 e a altura h :

$$v_0 = (\frac{m+M}{m})\sqrt{2gh} \tag{6}$$

2. Sumário

O desenvolvimento deste relatório visa aprofundar o nosso conhecimento sobre os conteúdos relativos à Cinemática, mais especificamente, o Lançamento Oblíquo ou Lançamento de Projéteis. Esperamos, para além disso, aprender as fórmulas do movimento e as relações entre os seus elementos de modo a ganhar uma visão mais intuitiva do tema em questão, tudo isto através da observação e análise do comportamento do projétil durante o seu lançamento.

2.0.1. Parte A

O objetivo desta parte da experiência foi calcular, através de dados obtidos durante o procedimento experimental e fórmulas da cinemática, o valor da velocidade inicial v_0. Que mais tarde será também útil para comparar a um outro método para obter a mesma (Parte C - Pêndulo Balístico).

2.0.2. Parte B

O objetivo principal desta experiência foi observar e analisar como varia o alcance do projétil de acordo com a variação do ângulo de lançamento. Para isso, foram efetuados cálculos (que iremos apresentar mais à frente neste relatório) que permitiram a construção de um gráfico que foi imprescindível para tirarmos as nossas conclusões.

2.0.3. Parte C

Nesta parte final do trabalho, tivemos como objetivo calcular novamente a velocidade inicial, v_0, do projétil (tal como na parte A) por via de um método diferente (pêndulo balístico), para mais tarde poder comparar os dois valores de v_0, através da exatidão mais à frente apresentada.

É também importante referir que, no procedimento experimental, a obtenção do valor da altura foi necessário obter uma nova equação, através de cálculos secundários, que não se encontra no guião disponibilizado.

$$h = l - l \times cos(\alpha) \tag{7}$$

2.1. Objetivos

1. Determinar a velocidade inicial, v_0, do projétil através das equações do movimento (Parte A);

2. Verificar a dependência do alcance com o ângulo de lançamento (Parte B);
3. Determinar a velocidade inicial do projétil, v_0, utilizando o pêndulo balístico (Parte C).

3. Procedimento Experimental

3.1. Parte A - Determinação da velocidade inicial, v_0

Nesta parte da experiência, começou-se por colocar o lançador de projéteis numa posição que conferisse que este estava perfeitamente horizontal, ou seja, com um ângulo de 0º e verificar se todo o sistema de sensores estava ligado. Posteriormente, foi medida a distância, s , entre as células fotoelétricas. Carregou-se o lançador de projéteis na posição de tiro curto - "SHORT RANGE" - e colocou-se a esfera na boca do lançador empurrando-a para o interior, com recurso a um carregador, até se encontrar na posição pretendida. O sistema de controlo foi colocado na posição "TWO GATES", iniciando o sensor clicando START/STOP. Finalmente, puxou-se o fio do disparador verticalmente e registou-se o tempo apresentado no sistema de controlo. Este procedimento foi feito 5 vezes de modo a obtermos 5 medidas. A figura seguinte ilustra a montagem da experiência do procedimento anterior:

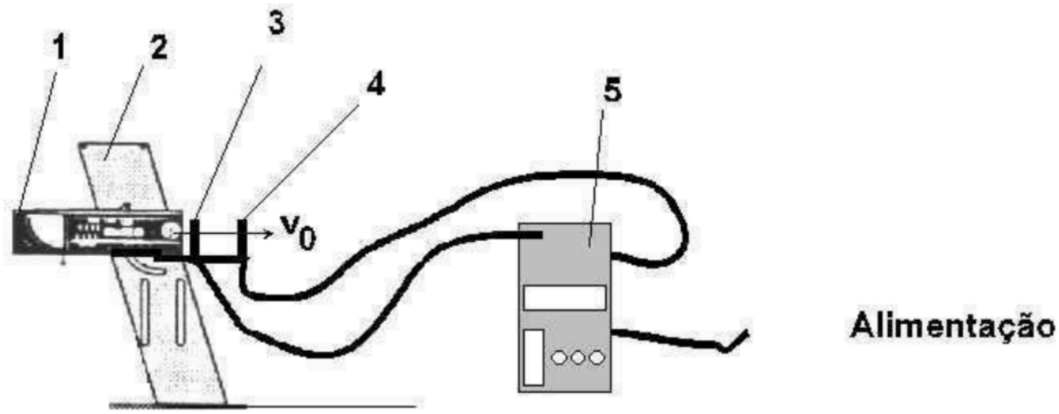

Figura 1. - Esquema da montagem experimental (Experiência A). 1- Lançador de Projéteis. 2- Base para o lançador. 3- Célula fotoelétrica (inicia a contagem do tempo). 4- Célula fotoelétrica (termina a contagem do tempo). 5- Sistema de controlo das células.

3.2. Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Nesta parte da experiência, a esfera começa por ser lançada (com as mesmas condições da parte A) com um ângulo de 30º em relação à horizontal. É colocado um alvo constituído por papel milimétrico (para facilitar a medição da distância) e papel químico a uma certa distância, para que a esfera caísse na sua superfície. Para cada ângulo foram feitos 3 lançamentos. A figura abaixo demonstra esta parte da experiência.

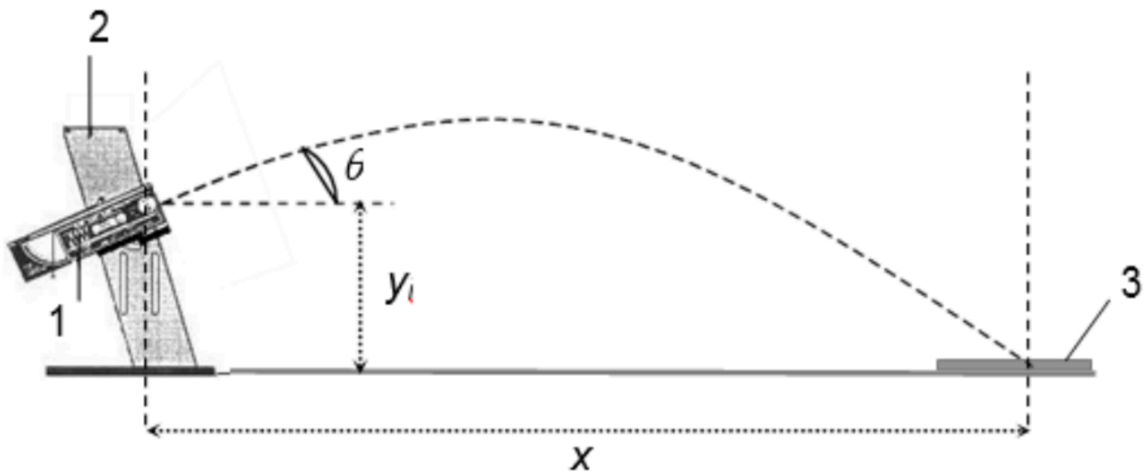

Figura 2. - Esquema da montagem experimental (Experiência B). 1- Lançador de projéteis. 2- Base para o lançador. 3- Alvo

3.3. Parte C - Pêndulo Balístico: Método Alternativo para a determinação da velocidade inicial, v_0

Nesta parte, mediram-se as massas do projétil, m , e do pêndulo, M . A seguir, mediu-se também o comprimento do pêndulo, l . Feito isto, carregou-se o lançador de projéteis na posição de tiro curto, “SHORT RANGE” e foram feitos 5 disparos, medindo-se o ângulo máximo, α, descrito pelo pêndulo em todos estes.

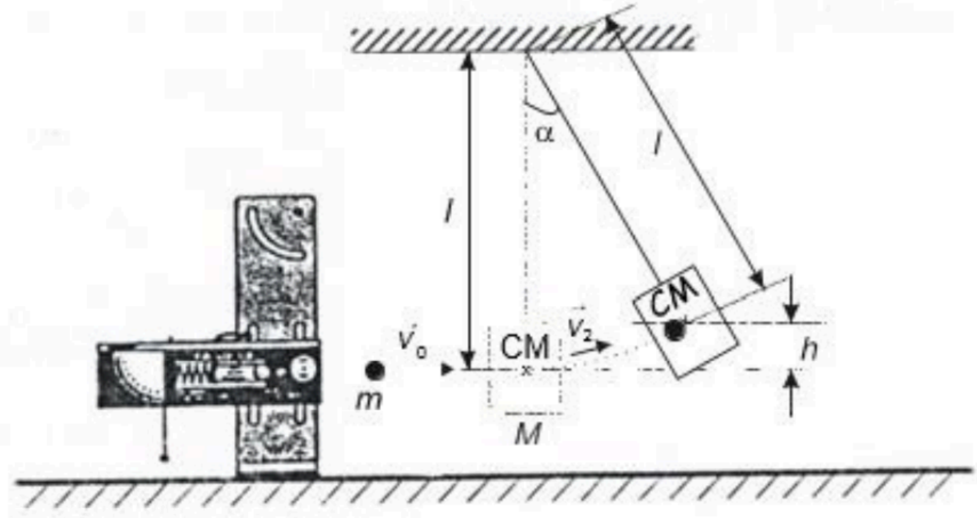

Figura 3. - Esquema da montagem experimental (Parte C) e desenho representativo do movimento do pêndulo.

4. Análise e Tratamento de dados Experimentais

4.1. Apresentação de Dados

4.1.1. Parte A - Determinação da velocidade inicial

Primeiramente, medimos a distância, s , entre as células fotoelétricas, e obtivemos o valor de 0,1156$\pm\ \Delta s$(m). Cujo erro, $\pm\ \Delta s$ foi obtido através da metade da menor divisão da escala do instrumento utilizado, neste caso uma fita métrica, contudo, foi necessário multiplicar esse valor por 2, dado que a medição envolveu duas células. Pelo que obtemos $\pm\ \Delta s\ =\ 0,001$(m).

Posteriormente, através da leitura dos valores obtidos pelo sistema de células obtivemos os seguintes tempos, t , para o ângulo $\theta\ =\ 0º$ (não sendo necessário determinar o erro de θ):

Ângulo, θ(graus)	Tempo, t (s)				
0	0,0422	0,0424	0,0421	0,0422	0,0425

O erro associado ao tempo, t , é dado por $\pm\ \Delta t\ =\ 0,001$ (vindo da menor divisão do instrumento de medida).

4.1.2. Parte B - Dependência do alcance com o ângulo de disparo

Numa fase inicial foram feitas várias medições para a obtenção do alcance, s , para os diferentes ângulos de lançamento, θ, associados. As medidas obtidas foram as seguintes:

Ângulo de Lançamento, θ(graus)	Alcance, s(m)		
30	0,819	0,815	0,813
34	0,820	0,827	0,825
38	0,817	0,821	0,819
40	0,816	0,815	0,816
43	0,801	0,798	0,804

4.1.3. Parte C - Pêndulo Balístico: Método Alternativo para a Determinação da velocidade inicial, v_0

Nesta última parte, começamos por medir a massa do projétil, onde $m = 62,8 \pm 0,1$ (g) e a massa do pêndulo balístico $M = 242,3 \pm 0,1$(g) (erro vindo da menor divisão da escala do instrumento de medida, neste caso a balança). O valor da distância foi obtido medindo desde o suporte do pêndulo até ao centro de massa aproximado da bola $l = 0,309 \pm 0,0005$(m) (erro vindo da metade da menor divisão da escala do instrumento de medida, neste caso a fita métrica)

Após 5 disparos, chegamos aos valores apresentados na tabela seguinte:

Ângulos, θ (graus)
21 $\pm$ 0,25
20,5 $\pm$ 0,25
19 $\pm$ 0,25
20 $\pm$ 0,25
20 $\pm$ 0,25

4.2. Análise de resultados

4.2.1. Parte A - Determinação da velocidade inicial, v_0

Após a recolha dos dados relativos ao tempo, t, calculou-se a média dos mesmos:

$$\overline{X_t} = \frac{t1 + t2 + t3 + t4 + t5}{5} = \frac{0,0422 + 0,0424 + 0,0421 + 0,0422 + 0,0425}{5} = 0,0423 \pm \Delta\overline{X_t}(s)$$

O erro do tempo médio, $\pm\ \Delta\overline{X_t}$, obtêm-se pelo maior desvio, σ, em relação à média:

$$\sigma_1 = |0,0423 - 0,0422| = 0,0001$$
$$\sigma_2 = |0,0423 - 0,0424| = 0,0001$$
$$\sigma_3 = |0,0423 - 0,0421| = 0,0002$$
$$\sigma_4 = |0,0423 - 0,0422| = 0,0001$$
$$\sigma_5 = |0,0423 - 0,0425| = 0,0002$$

Desta forma podemos concluir que o erro da média dos valores do tempo, $\pm\ \Delta\overline{X_t}$, é dado por $\sigma_3 = \sigma_5 = 0,0002(s)$. Logo, o valor final obtido para o tempo médio foi $\overline{X_t} = 0,0423 \pm 0,0002(s)$.

Obtidos todos os dados necessários, passamos para o cálculo da velocidade inicial, v_0:

$$\left\|v_0\right\| = \frac{s}{\overline{X_t}} = \frac{0,116}{0,0423} = 2,73 \pm \Delta v_0 (m/s)$$

O erro associado à velocidade inicial, v_0, foi obtido através da fórmula do limite superior do erro:

$$\Delta v_0 = \left|\frac{\partial v_0}{\partial s}\right|\Delta s + \left|\frac{\partial v_0}{\partial \overline{X_t}}\right|\Delta \overline{X}_t = \left|\frac{1}{0,0423}\right|0,0005 + \left|\frac{0,10}{0,0423^2}\right|0,0002 = 0,03(m/s)$$

Desta forma podemos concluir que o valor da velocidade inicial obtido é dado por $v_0 = 2,73 \pm 0,03(m/s)$.

Precisão:

Erro relativo:

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \times 100 = \left|\frac{0,03}{2,73}\right| \times 100 \approx 1,10\%$$

Valor final da precisão:

$$100 - erro = 100 - 1,10 = 98,90\%$$

Uma vez que obtivemos uma precisão superior a 90% ($98,90\% > 90\%$), podemos considerar o resultado obtido um resultado preciso.

4.2.2. Parte B - Determinação da velocidade inicial, v_0

Após a obtenção de todos os dados necessários da experiência, foi elaborada a média dos alcances, x para cada ângulo θ .

$$\overline{X_1} = \frac{0,819+0,815+0,813}{3} = 0,816 \quad \text{(m)}$$

$$\overline{X_2} = \frac{0,820+0,827+0,825}{3} = 0,824 \quad \text{(m)}$$

$$\overline{X_3} = \frac{0,817+0,821+0,819}{3} = 0,819 \quad \text{(m)}$$

$$\overline{X_4} = \frac{0,816+0,815+0,816}{3} = 0,816 \quad \text{(m)}$$

$$\overline{X_5} = \frac{0,801+0,798+0,804}{3} = 0,801 \quad \text{(m)}$$

Em âmbito a calcular o erro do alcance médio, $\pm \Delta\overline{X}$ obtemos então o segundo maior desvio em comparação com a média:

$$\sigma 1 = |0,816 - 0,813| = 0,003(m)$$

$$\sigma 2 = |0,824 - 0,820| = 0,004(m)$$

$$\sigma 3 = |0,819 - 0,817| = 0,002(m)$$

$$\sigma 4 = |0,816 - 0,815| = 0,001(m)$$

$$\sigma 5 = |0,801 - 0,798| = 0,003(m)$$

Para melhor visualizarmos os dados obtidos, recorremos ao uso de um gráfico, que representa o alcance médio conforme a variação do ângulo.

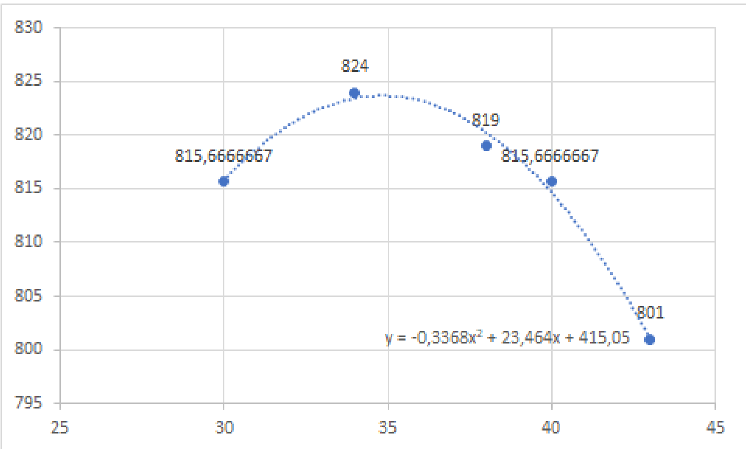

Gráfico 1. - Gráfico relativo aos resultados obtidos durante a Parte B. (os valores encontram-se em graus e mm, no eixo x e y, respectivamente).

Analisando o gráfico, é de notar que o $\theta max = 35 \pm \Delta 1(º)$e é também de notar que o trajeto do alcance médio descreve um comportamento parabólico.

Exatidão:

Para calcular a exatidão é primeiro necessário calcular o valor teórico do ângulo máximo. Para esta tarefa usamos então a fórmula:

$$\theta_{max} = arctg\left(\frac{1}{\sqrt{1+\frac{2\times 9.8(26-0)}{2.73^2}}}\right) \simeq 37º$$

$$100 - \left|\frac{35-37}{35}\right| \times 100\% \approx 94,29\%$$

Como os dados obtidos na exatidão foram superiores a 90% (94,29%), concluímos que foi obtido um resultado exato.

Precisão:

Para calcular a precisão é necessário calcular o erro relativo. Usando a fórmula:

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \times 100 = \left|\frac{1}{35}\right| \times 100 \approx 2,86\%$$

Cálculo do valor final da precisão:

$$100 - erro = 100 - 2,86 = 97,1\%$$

Como o valor obtido é superior a 90% (97,1%), concluímos que os dados obtidos são precisos.

4.2.3. Parte C - Pêndulo Balístico: Método Alternativo para Determinação da velocidade inicial, v_0

Inicialmente calculou-se a média dos ângulos registados:

$$\overline{X_\alpha} = \frac{21+20,5+19+20+20}{5} = 20º\text{(graus)}$$

Como a unidade SI para ângulos é o radiano, convertemos o valor de $\overline{X_\alpha}$ para radianos, pelo que $\overline{X_\alpha} = 0,3491$(rad) (que vamos passar a utilizar como apenas α), assim como o valor mais distante da média também para radianos, $19º = 0,3316$ (rad) (verificar tabela), desta forma podemos calcular o desvio padrão:

$$\sigma = |0,349 - 0,332| = 0,017\text{(s)}$$

Obtivemos, portanto, $\alpha = 0,349 \pm 0,017(rad)$. Após o cálculo destes resultados, utilizamos a fórmula utilizada na introdução teórica para calcularmos a altura h (representada graficamente na Figura 3) através da fórmula (7) da introdução teórica.

Onde $l = 0,309$(m), como visto na apresentação de dados relativos a esta parte e $\alpha = 20º$, como visto anteriormente nesta mesma secção, para este cálculo pode usar-se o ângulo tanto em graus como em radianos, assim:

$$h = 0,309 - 0,309 \times cos(20º) = 0,0186(m)$$

Determinada a altura, foi necessário calcular o erro a ela associado. O erro foi calculado da seguinte forma:

$$\Delta h = \left|\frac{\partial h}{\partial l}\right|\Delta l + \left|\frac{\partial h}{\partial \alpha}\right|\Delta\alpha$$
$$\Leftrightarrow \Delta h = (1 - cos(\alpha))\Delta l + (l \times sin(\alpha))\Delta\alpha$$
$$\Leftrightarrow \Delta h = (1 - cos(20º)) \times 0,0005 + (0,309 \times sin(20º)) \times 0,017$$
$$\Leftrightarrow \Delta h = 0,0051(\text{m})$$

Logo:

$$h = 0,0186 \pm 0,0051(\text{m})$$

Para concluir, falta apenas calcular o valor da velocidade inicial v_0e o erro associado a esta velocidade. Vamos então utilizar uma fórmula e utilizamos os valores $g = 9,8(m/s^2)$, $m = 62,8(g) = 0,0628(Kg)$, $M = 242,3(g) = 0,2423(Kg)$ e, para terminar, $h = 0,0186(m)$, então:

$$v_o = \left(\frac{0,0628+0,2423}{0,0628}\right)\sqrt{2 \times 9.8 \times 0.0115} = 2,93(m/s)$$

Para o cálculo do erro fez-se (através da forma do limite superior do erro):

$$\Delta v_0 = \left|\frac{\partial v_0}{\partial m}\right|\Delta m + \left|\frac{\partial v_0}{\partial M}\right|\Delta M + \left|\frac{\partial v_0}{\partial h}\right|\Delta h$$
$$\Leftrightarrow \Delta v_0 =$$
$$\left|\frac{0,2423\times\sqrt{2\times9,8\times0,0186}}{0,0628^{\ 2}}\right| \times 0,0005 + \left|\frac{\sqrt{2\times9,8\times0,0186}}{0,0628}\right| \times 0,0005 + \left|\frac{\sqrt{9,8}\times(0,0628+0,2423)}{\sqrt{2\times0,0186}\times0,0628}\right| \times 0,0051$$
$$\Leftrightarrow \Delta v_0 = 0,06(m/s)$$

Precisão:

Erro relativo:

$$\left|\frac{\Delta x}{x}\right| \times 100 = \left|\frac{0,06}{2,93}\right| \times 100 \approx 2,05\%$$

Valor final da precisão:

$$100 - erro = 100 - 2,05 = 97,95\%$$

Como obtivemos uma precisão superior a 90% (97,95%), podemos concluir que obtivemos um resultado preciso.

Exatidão:

$$100 - \left(\frac{v_0(parte\ C)}{v_0(parte\ A)}\right) = 100 - \frac{2{,}93}{2{,}73} \approx 98,93\%$$

Como obtivemos uma exatidão superior a 90% (98,93%), podemos dizer que atingimos um resultado exato.

4.3. Conclusão

Por fim, concluímos que a parte A foi uma experiência precisa e de realização simples que não apresentou problemas.

Quanto à experiência B, conclui-se que o alcance é crescente para valores de ângulo 30º a 35º e decrescente entre 35º e 43º. Tendo em conta que o ângulo teórico máximo inicialmente calculado teria sido 37º, o alcance foi registado em função de ângulos próximos desse valor, para um melhor ajuste do gráfico. Contudo, veio-se depois a verificar que o valor teórico do ângulo era 35º (não sabemos a razão deste erro). Ainda assim, com o cálculo da precisão e exatidão conseguimos concluir que a experiência foi precisa e exata. Para uma justificação dos erros existentes admitimos que as principais causas terão sido o facto de o ângulo escolhido ter sido medido através de recurso a observação ocular, a posição do projétil no lançador poder variar, o estado do lançador e a estabilidade do suporte.

Na parte C concluímos uma velocidade inicial superior à da parte A, tal pode ter origem numa medição do comprimento do pêndulo que não tenha sido 100% correta (não contabilizar corretamente onde fica o centro de massa do mesmo). Contudo, conseguimos obter um valor de exatidão acima de 90%.

Finalmente, concluímos que com este trabalho cumprimos todos os nossos objetivos iniciais.

4.3.1. Contribuições dos autores

Na escrita deste relatório todos colaboraram com igual empenho, o que também foi o caso durante as aulas práticas, durante a realização das experiências. Sendo assim, atribuímos uma igual percentagem de colaboração a todos (33,33…%).