6. Cónicas e Quádricas

Isabel Brás[1]

UA, 4/12/2022

ALGA – Agrup. IV 22/23

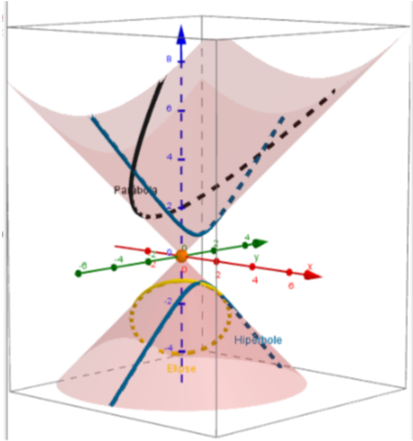
[1]Slides elaborados a partir de versão anterior com contribuição de várias equipas de docentes de ALGA.

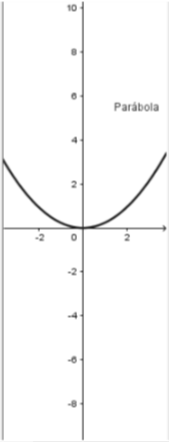
Resumo dos Conteúdos

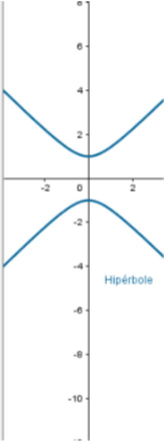
O que é uma cónica?

As cónicas são curvas que resultam da interseção de um plano com um cone.

Tipos de cónicas (não degeneradas): elipse, parábola e hipérbole. ver applet







Equação geral de uma cónica

Uma cónica é um conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfaz a uma equação quadrática do tipo:

$$\alpha\, x^2 + \beta\, y^2 + 2\,\gamma\, x\, y + \delta\, x + \eta\, y + \mu \;=\; 0 \tag{1}$$

onde $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, não simultaneamente nulos, e $\delta, \eta, \mu \in \mathbb{R}$. Esta equação é chamada de equação geral de uma cónica.

Forma matricial da equação geral: A equação (1) é equivalente a

$$\underbrace{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix}}_{X^T} \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \gamma & \beta \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \underbrace{\begin{bmatrix} \delta & \eta \end{bmatrix}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} + \mu \;=\; 0$$

$$\Updownarrow$$

$$X^T A X \;+\; B\, X \;+\; \mu \;=\; 0,$$

com A matriz simétrica 2×2 não nula e B matriz 1×2.

Equações reduzidas:

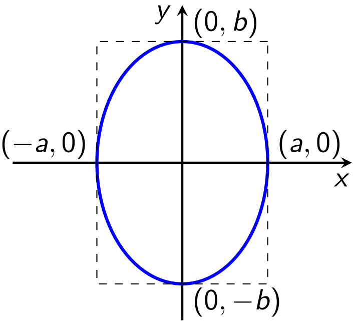
As equações reduzidas das cónicas são equações que descrevem o conjunto de pontos da forma mais simplificada possível. Estas equações podem obter-se de uma equação geral por mudanças de variável, que são mudanças de referencial, traduzindo-se em rotações dos eixos e/ou translações da origem do referencial inicial.

Nos slides seguintes tipificam-se as equações reduzidas possíveis (para as cónicas não degeneradas) e explica-se como obter essas representações a partir de uma equação geral.

Equação reduzida de uma elipse: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$

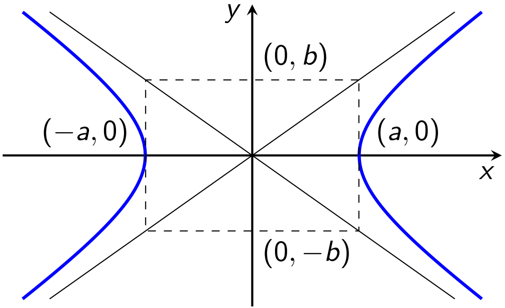
- Esboço gráfico:



- Caso particular: Se $a = b$, tem-se uma circunferência de raio a.

Equação reduzida de uma hipérbole: $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b \in \mathbb{R}^+$

- $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{a^2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{b^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0$$
- Esboço gráfico:

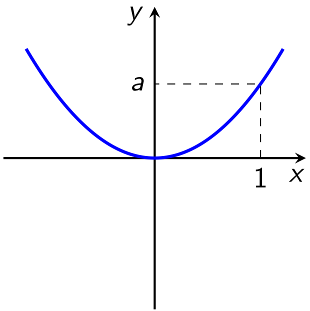


Equação reduzida de uma parábola: $y = ax^2, \quad a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

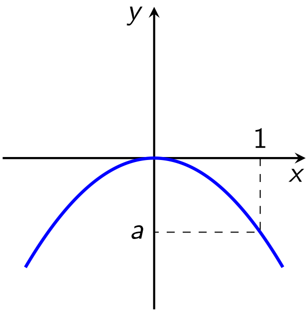
- $y = ax^2 \iff \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0$

- Esboço gráfico:

$a > 0$



$a < 0$



Redução da equação de uma cónica

Recordar que a equação geral de uma cónica é

$$X^T A X + B X + \mu = 0$$

onde A é uma matriz simétrica.

1.º Eliminação do termo cruzado — Diagonalização ortogonal de A:
Caso a matriz A não seja diagonal, isto corresponde à existência na equação de termo em xy. Efetuando uma diagonalização ortogonal de A esse termo cruzado será eliminado, após uma mudança de variável.
Seja P uma matriz ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$

onde os λ_1 e λ_2 são os valores próprios de A.
Considerando $X = P\hat{X}$ na equação da cónica, obtém-se

$$\hat{X}^T P^T A P \hat{X} + B P \hat{X} + \mu = 0$$

Redução da equação de uma cónica (continuação)

Isto é, $\quad \hat{X}^T D\,\hat{X} + \hat{B}\,\hat{X} + \mu = 0\,,\quad$ onde $D = P^T A P$ e $\hat{B} = B\,P$.

Tomando $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e $\hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix}$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} \hat{x} & \hat{y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \hat{\delta} & \hat{\eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix} + \mu = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$\lambda_1\,\hat{x}^2 + \lambda_2\,\hat{y}^2 + \hat{\delta}\hat{x} + \hat{\eta}\hat{y} + \mu = 0,$$

Nota: Se $\det(P) > 0$, esta mudança de variável corresponde a uma rotação dos eixos do referencial.

2.º Eliminação dos termos $\hat{B}\hat{X}$ ou μ, quando possível/desejável:
Usa-se uma mudança de variável do tipo $\tilde{x} = \hat{x} - c$ e $\tilde{y} = \hat{y} - d$, com $(c, d) \in \mathbb{R}^2$ adequadamente escolhido. Esta mudança de variável corresponde a uma translação da origem do referencial.
A técnica para eliminar esses termos será mostrada nos exemplos.

Exemplo 1

$$x^2 + y^2 + 4xy - 2x + 2y - 6 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X + B X - 6 = 0$$

com

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Note que, (ver Exemplo 5 dos slides 5)

$$P^T A P = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad \text{com} \qquad P = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$ uma matriz ortogonal.

Considerando $X = P\,\hat{X}$, obtém-se

$$\hat{X}^T P^T A P \hat{X} + B P \hat{X} = 6.$$

Tomando $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \end{bmatrix}$ e atendendo a que $BP = \begin{bmatrix} 0 & 2\sqrt{2} \end{bmatrix}$, obtém-se

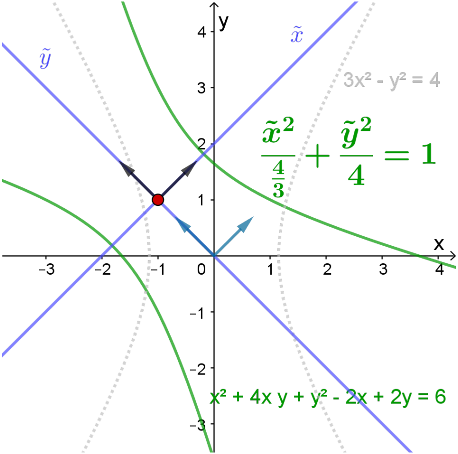
$$3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2\sqrt{2}\hat{y} = 6\,.$$

Exemplo 1 – continuação

$$3\hat{x}^2 - \hat{y}^2 + 2\sqrt{2}\hat{y} = 6$$
$$\Updownarrow$$
$$3\hat{x}^2 - (\hat{y}^2 - 2\sqrt{2}\hat{y} + 2) = 6 - 2$$
$$\Updownarrow$$
$$3\hat{x}^2 - \underbrace{(\hat{y} - \sqrt{2})}_{\tilde{y}}{}^2 = 4$$
$$\tilde{x} = \hat{x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{\tilde{x}^2}{\frac{4}{3}} - \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Esta é a equação reduzida de uma hipérbole.

Ilustração Gráfica:



Nota: A mudança de variável $\tilde{y} = \hat{y} - \sqrt{2}$ corresponde a uma translação, a primeira efetuada, $\hat{X} = P^T X$, corresponde a uma rotação.

Exemplo 2

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 18 = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 18 = 0$$

$$\Updownarrow$$

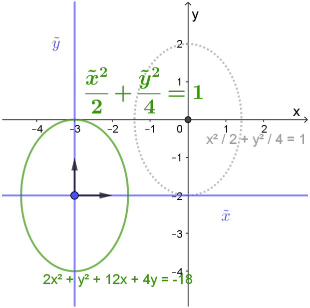
$$2(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + (\underbrace{y+2}_{\tilde{y}})^2 = 4$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\tilde{x}^2}{2} + \frac{\tilde{y}^2}{4} = 1.$$

Esta é a equação reduzida de uma elipse.

Ilustração Gráfica:

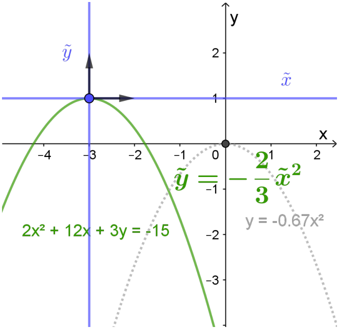


Exemplo 3

$$2x^2 + 12x + 3y + 15 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + 3y + 15 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\,(\underbrace{x+3}_{\tilde{x}})^2 + 3(\underbrace{y-1}_{\tilde{y}}) = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$\tilde{y} = -\tfrac{2}{3}\,\tilde{x}^2.$$

Esta é a equação reduzida de uma parábola.

Ilustração Gráfica:



Exemplos de equações que não correspondem a curvas

Exemplo 4:

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\left(x^2 + 6x + 9\right) - 18 + \left(y^2 + 4y + 4\right) - 4 + 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\left(x+3\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = -2.$$

Esta é a equação de um conjunto vazio.

Exemplo 5:

$$2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 22 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$2\left(x+3\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = 0.$$
$$\Updownarrow$$
$$x = -3 \quad \text{e} \quad y = -2.$$

Esta é a equação de um ponto.

Cónicas degeneradas

Situações degeneradas (nas equações reduzidas) que podem ocorrer:

1. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1 \ \rightarrow$ conjunto vazio;
2. $\frac{x^2}{a^2} = -1 \ \rightarrow$ conjunto vazio;
3. $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0 \ \rightarrow$ um ponto (origem do referencial);
4. $\frac{x^2}{a^2} = 0 \ \rightarrow$ duas retas coincidentes (eixo Oy, $x = 0$);
5. $\frac{x^2}{a^2} = 1 \ \rightarrow$ duas retas estritamente paralelas ($x = \pm a$);
6. $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \ \rightarrow$ duas retas concorrentes ($y = \pm \frac{b}{a} x$).

Equação geral de uma quádrica

Uma quádrica é um conjunto de pontos $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfaz a uma equação quadrática, que na forma matricial é do tipo:

$$X^T A X + B X + \mu = 0, \tag{2}$$

com A matriz simétrica 3×3 não nula, B matriz 1×3 e $\mu \in \mathbb{R}$.

Exemplo:

A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ define uma quádrica. Trata-se de uma esfera centrada em $(0, 0, 0)$ e de raio 2.

A partir da equação geral de uma quádrica podem ser obtidas equações reduzidas por um processo análogo ao levado a cabo para as cónicas:

1. "rotação" dos eixos (diagonalização ortogonal de A) e
2. "translação" dos eixos.

Exemplo:

$$-8x^2 - 8y^2 + 10z^2 + 32xy - 4xz - 4yz - 24 = 0$$
$$\Updownarrow$$
$$X^T A X = 24,$$

com $\quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \quad$ e $\quad A = \begin{bmatrix} -8 & 16 & -2 \\ 16 & -8 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{bmatrix}.$

Continuação do exemplo do slide anterior:

Como os valores próprios de A são 12, 6 e -24, existe P ortogonal tal que

$$P^T A P = D = \begin{bmatrix} 12 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -24 \end{bmatrix}.$$

Considerando $X = P\,\hat{X}$ na equação geral, com $\hat{X} = \begin{bmatrix} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{bmatrix}$, obtém-se

$$\begin{aligned} X^T A X = 24 \iff & \hat{X}^T D \hat{X} = 24 \\ \iff & 12\hat{x}^2 + 6\hat{y}^2 - 24\hat{z}^2 = 24 \\ \iff & \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1 \end{aligned}$$

que é a equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha. Veja a razão da designação no slide seguinte.

Interseções com os eixos coordenados da quádrica $\frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1$:

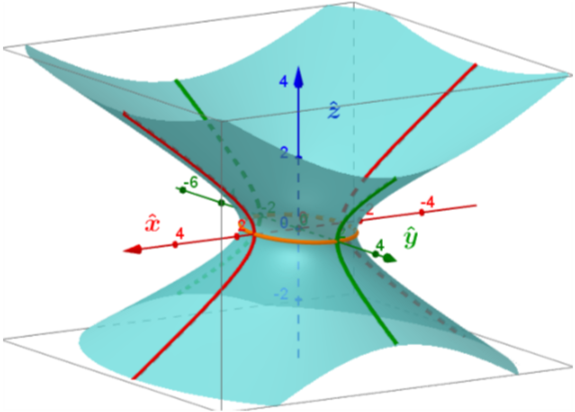
$\hat{x} = 0 \quad \rightarrow \frac{\hat{y}^2}{4} - \hat{z}^2 = 1$ hipérbole no plano $\hat{y}O\hat{z}$

$\hat{y} = 0 \quad \rightarrow \frac{\hat{x}^2}{2} - \hat{z}^2 = 1$ hipérbole no plano $\hat{x}O\hat{z}$

$\hat{z} = 0 \quad \rightarrow \frac{\hat{x}^2}{2} + \frac{\hat{y}^2}{4} = 1$ elipse no plano $\hat{x}O\hat{y}$

Esboço gráfico:

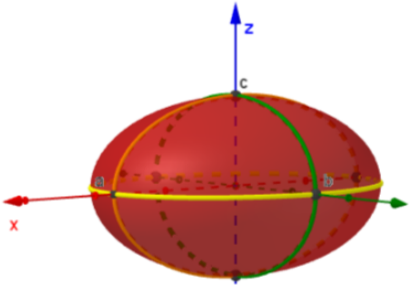
applet



Equação reduzida de um elipsóide:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \; a, b, c \in \mathbb{R}^+$$

- Exercício: Determine secções planas obtidas da interseção da quádrica com os planos coordenados e/ou planos paralelos aos planos coordenados.
  Repita este procedimento para cada uma das quádricas dos slides seguintes.
- Esboço gráfico: applet



Equações reduzidas dos hiperbolóides

Equação reduzida de um hiperbolóide de uma folha:

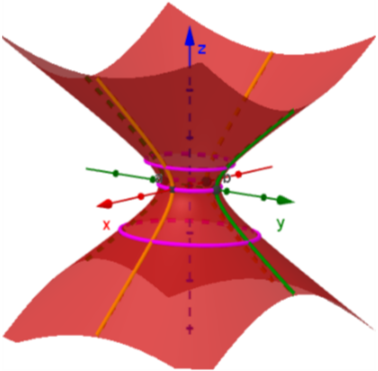
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

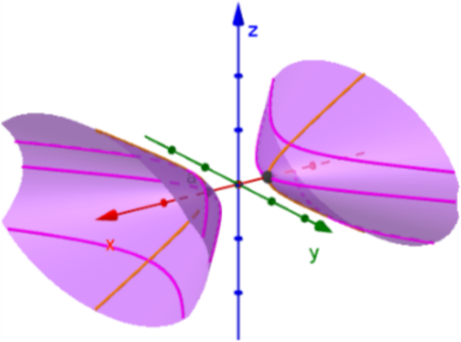
applet

Equação reduzida de um hiperbolóide de duas folhas:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

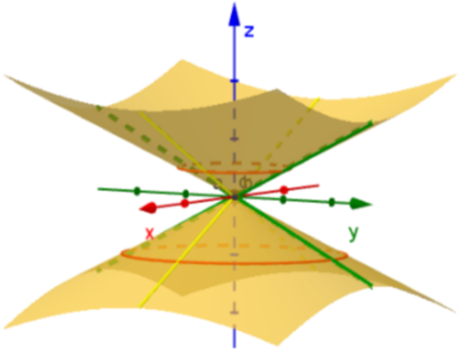
applet





Equação reduzida de um cone:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0, \ a, b, c \in \mathbb{R}^+$$



(hiperbolóide degenerado)

applet

Equações reduzidas dos parabolóides

Equação reduzida de um parabolóide elíptico:

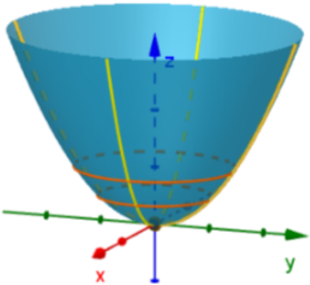
$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}.$$

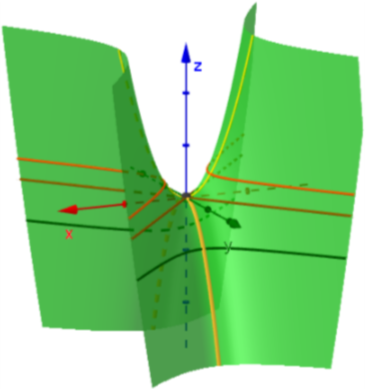
applet

Equação reduzida de um parabolóide hiperbólico:

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}.$$

applet





Equações reduzidas de cilindros

Equação reduzida de um cilindro elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

applet

Equação reduzida de um cilindro hiperbólico:

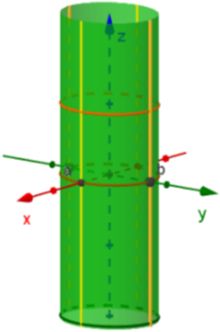
$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

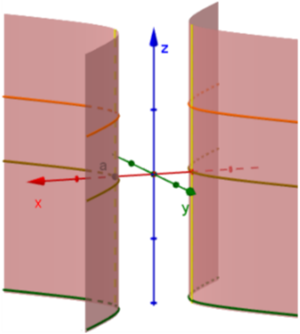
applet

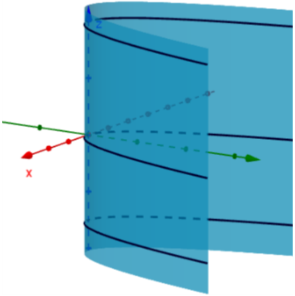
Equação reduzida de um cilindro parabólico:

$$y = ax^2.$$

applet







Anexo 1: Identificação de cónicas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da cónica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal, ou seja, $|A| > 0$

μ e λ_1 têm sinais contrários	elipse
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	um ponto: $(0,0)$

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm sinais contrários, ou seja, $|A| < 0$

$\mu \neq 0$	hipérbole
$\mu = 0$	duas retas concorrentes: $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\, x$

Anexo 2: Identificação de cónicas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da cónica representada pela equação (onde $|A| = 0$)

$$\lambda_1 x^2 + \eta\, y + \mu = 0.$$

Caso 1. $\eta \neq 0 \;\rightarrow\;$ parábola

Caso 2. $\eta = 0$

μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
μ e λ_1 têm sinais contrários	duas retas estritamente paralelas: $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
$\mu = 0$	duas retas coincidentes: $x = 0$ (eixo Oy)

Anexo 3: Identificação de quádricas com 3 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \lambda_3 z^2 + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1, λ_2 e λ_3 têm o mesmo sinal

μ e λ_1 têm sinais contrários	elipsóide
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	ponto $(0,0,0)$

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal que é contrário ao de λ_3

μ e λ_1 têm sinais contrários	hiperbolóide de uma folha
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	hiperbolóide de duas folhas
$\mu = 0$	*cone*

Anexo 4: Identificação de quádricas com 2 valores próprios não nulos

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \lambda_2 y^2 + \eta\, z + \mu = 0.$$

Caso 1. λ_1 e λ_2 têm o mesmo sinal

$\eta \neq 0 \;\rightarrow$ parabolóide elíptico

$\eta = 0 \;\rightarrow$

μ e λ_1 têm sinais contrários	*cilindro elíptico*
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	eixo Oz

Caso 2. λ_1 e λ_2 têm sinal contrário

$\eta \neq 0 \;\rightarrow$ parabolóide hiperbólico

$\eta = 0 \;\rightarrow$

$\mu \neq 0$	*cilindro hiperbólico*
$\mu = 0$	dois planos concorrentes $y = \pm\sqrt{-\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}\; x$ que se intersetam no eixo Oz

Anexo 5: Identificação de quádricas com 1 valor próprio não nulo

Identificação da quádrica representada pela equação

$$\lambda_1 x^2 + \eta\, y + \mu = 0.$$

Caso 1. $\eta \neq 0 \ \rightarrow$ *cilindro parabólico*

Caso 2. $\eta = 0$

μ e λ_1 têm sinais contrários	dois planos estritamente paralelos: $x = \pm\sqrt{-\frac{\mu}{\lambda_1}}$
μ e λ_1 têm o mesmo sinal	conjunto vazio
$\mu = 0$	dois planos coincidentes: $x = 0$ (plano yOz)

Nota: Na equação $\lambda_1 x^2 + \eta y + \nu z + \mu = 0$, o termo em z elimina-se com uma oportuna escolha da base do espaço próprio associado a zero.