Equações Diferenciais Ordinárias

baseado no texto de Alexandre Almeida, Cálculo II, fev. 2018, pp. 51–92, e versões anteriores de slides de Cálculo II

Isabel Brás

Universidade de Aveiro

2023/2024

Resumo dos Conteúdos

Equações Diferenciais, o que são?

Equações que envolvem uma função e as suas derivadas e/ou a variável que é o argumento dessa função.
Estas equações aparecem frequentemente quando se pretende modelar matematicamente fenómenos reais, em especial, naqueles de evolução temporal.

Exemplos:

1. Taxa de variação de temperatura de um objeto:

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - T_m),$$

$T(t) \rightarrow$ temperatura do objeto,
$T_m \rightarrow$ temperatura do meio ambiente, $k \rightarrow$ constante positiva.

Exemplos (cont.):

2. Movimento harmónico de uma mola:

$$m\,\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

$m \rightarrow$ massa do objeto colocado na extremidade da mola vertical;
$x(t) \rightarrow$ deslocamento a partir da posição (inicial) de equilíbrio da mola;
$k > 0 \rightarrow$ constante de mola; Ver figura

3. Lei de Kirchhoff aplicada a uma malha constituída por uma bobine em série com uma resistência:

$$L\frac{dI}{dt} + RI = E(t),$$

onde L e R são constantes (indutância e resistência, respetivamente), $I(t)$ a intensidade de corrente e $E(t)$ a tensão da fonte de energia.

Equação diferencial ordinária

Definição:

Chama-se equação diferencial ordinária (EDO) de ordem n ($n \in \mathbb{N}$), a uma equação do tipo

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \qquad \text{(EDO)}$$

onde y é função (real) de x.

Terminologia associada:

y é designada por variável dependente;
x é designada por variável independente;
Uma EDO diz-se estar na forma normal quando se apresenta na forma

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Notação alternativa: No slide anterior $y^{(n)}$ denota a derivada de ordem n da função y. Em alternativa, podemos usar a notação $\frac{d^n y}{dx^n}$ e (re)escrever a EDO na forma

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \ldots, \frac{d^n y}{dx^n}\right) = 0.$$

Exemplos :

1. $$-y' + x^3 - 1 = 0$$

   é uma equação diferencial de ordem 1, onde x é a variável independente e y a variável dependente;

2. $$3t\,\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} = \cos(t)$$

   é uma equação diferencial de ordem 2, onde t é a variável independente e x a variável dependente;

Solução de uma EDO

Definição

Chama-se solução da equação diferencial

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0\,,$$

num intervalo I, a toda a função $\varphi : I \to \mathbb{R}$, com derivadas finitas até à ordem n, tal que

$$F\left(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\right) = 0\,, \qquad \forall x \in I.$$

Exemplo:

$\varphi_1(x) = \text{ sen } x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \text{ sen } x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) de

$$y'' + y = 0$$

Identifique outras!

Mais terminologia associada a uma EDO de ordem n

Integral Geral: Família de soluções que se obtêm por técnicas de integração adequadas, que é definida, em geral, usando n constantes arbitrárias;
o processo de obtenção dessa família de soluções é usualmente designado por integração(ou resolução) da EDO.

Integral Particular (ou solução particular): Solução que faz parte do integral geral;

Solução Singular: Solução que não se obtém a partir do integral geral;

Solução Geral: Conjunto de todas as soluções.

Exemplo: $(y')^2 - 4y = 0.$

- Determinação de um integral geral:

$$\begin{aligned} (y')^2 - 4y &= 0 \\ (y')^2 &= 4y \end{aligned} \qquad \Bigg| \qquad \begin{aligned} y' &= 2\sqrt{y}, \quad y \geq 0 \\ y'(y)^{-\frac{1}{2}} &= 2, \quad y > 0 \end{aligned}$$

integrando em ordem a x,

$$\int y'(y)^{-\frac{1}{2}}\, dx = \int 2\, dx,\ y > 0\,,$$

determinando as primitivas e simplificando, obtem-se o seguinte integral geral: $y = (x + C)^2$, onde $C \in \mathbb{R}$;

- Notar que $y = 0$ é também solução da EDO, mas não pertence ao integral geral obtido, esta solução é uma solução singular da EDO (em relação ao referido integral geral).
- Tomando no integral geral C=0 e C=1, obtem-se duas soluções particulares: $y = x^2$ e $y = (x + 1)^2$, respetivamente.

Problema de valores iniciais

Definição:

Chama-se problema de valores iniciais (PVI) (ou problema de Cauchy) a todo o problema que consiste em encontrar a solução (ou soluções) de uma dada equação diferencial satisfazendo certas condições (ditas condições iniciais) num mesmo ponto:

$$\begin{cases} F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \\ y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1, \quad \ldots \ , \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_{n-1}. \end{cases}$$

Exemplo:

$y = -\frac{x^3}{6} + 1$ é solução do PVI

$$\begin{cases} y'' + x = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

Verifique!

Existência e Unicidade de Solução para um PVI

- Nem todo o PVI admite solução;
- Caso exista solução para o PVI, esta pode não ser única;
- É possível provar que um PVI de primeira ordem na forma normal, *i.e.*, do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f satisfaça determinadas condições (*Teorema de Cauchy-Picard*). Não estudamos aqui este resultado, mas trataremos um caso particular a propósito das EDO lineares (mais à frente).

Exemplo 4.2 As equações diferenciais (4.2) e

$$y'' - y' + x^3 - 1 = 0$$

são ambas de segunda ordem. Repare-se nos diferentes papéis desempenhados pela variável x nas duas equações!

Definição 4.2 (solução de uma EDO)
Chama-se ***solução da equação diferencial*** (4.11)*, num intervalo* I[11]*, a toda a função* $\varphi : I \to \mathbb{R}$ *com derivadas finitas até à ordem* n *e tal que*

$$F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) = 0\,, \qquad \forall x \in I.$$

Exemplo 4.3 As funções $\varphi_1(x) = \operatorname{sen} x$ e $\varphi_2(x) = \cos x - \operatorname{sen} x$ são duas soluções (em $\mathbb{R}$) da equação diferencial $y'' + y = 0$.

Observação 4.2 No Exemplo 4.3 temos duas soluções explícitas da equação indicada. No entanto, em geral, uma EDO poderá ter soluções na forma implícita. É o caso da relação $ye^y = x$, a qual define implicitamente[12] uma solução da equação diferencial

$$y'\left(1 - \ln\frac{y}{x}\right) = \frac{y}{x}\,, \qquad x > 0.$$

Resolver (ou integrar) uma equação diferencial significa determinar o conjunto das suas soluções. Usando conhecimentos de integração de Cálculo I podemos determinar as soluções de algumas equações diferenciais simples, como é caso da equação (escrita na forma normal)

$$y' = f(x)$$

[11] Na prática, muitas vezes não fazemos referência ao intervalo onde estamos a considerar a equação, desde que tal não seja realmente usado e daí não surjam ambiguidades.

[12] É possível mostrar que $ye^y = x$ define, de facto, y como função de x para $x, y > 0$ e que tal função $y = y(x)$ é mesmo diferenciável. Os alunos que irão frequentar Cálculo III terão oportunidade de estudar funções definidas implicitamente.

Exemplo 4.6 A equação diferencial (4.2) pode ser escrita na forma:

$$x''(t) + \omega^2 x(t) = 0\,, \qquad \omega^2 = k/m.$$

Mais tarde veremos que qualquer solução desta equação é do tipo

$$x(t) = C_1 \operatorname{sen}(\omega t) + C_2 \cos(\omega t), \qquad \text{com} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Atendendo ao contexto do problema, o aparecimento das funções seno e cosseno na solução geral da equação não é surpreendente, uma vez que a mola tem um comportamento oscilatório em torno do seu ponto de equilíbrio.

Mais adiante vamos ver como determinar um integral geral (ou mesmo a solução geral) de alguns tipos de equações diferenciais. Não iremos aprofundar o estudo de soluções singulares[13].

Exemplo 4.7 Considere-se a EDO de primeira ordem (em $\mathbb{R}$)

$$(y')^2 - 4y = 0.$$

Um integral geral desta equação é dado por $y = (x + C)^2$, onde C é uma constante real arbitrária.
A função definida por $y = x^2$ é uma solução particular daquela equação, enquanto que $y = 0$ é uma solução singular. [Porquê?]

Exemplo 4.8 As famílias de funções $y = x + C$ e $y = -x + C$ ($C \in \mathbb{R}$) constituem dois integrais gerais para a EDO de primeira ordem $(y')^2 = 1$. Repare-se que cada solução particular de um é uma solução singular relativamente ao outro. [Verifique!]

Em muitas aplicações mais importante do que determinar um integral geral para a equação diferencial envolvida é encontrar a(s) solução(ões) particular(es) que satisfaz(em) determinadas condições previamente fixadas.

[13]Do ponto de vista geométrico, uma tal solução poderá corresponder a uma curva tangente a todas as curvas do integral geral (veja-se o caso da curva $y = 0$ no Exemplo 4.7).

Exemplo 4.10 Retomando o Exemplo 4.7 vemos que $y = x^2$ e $y = 0$ são duas soluções do problema de Cauchy

$$\begin{cases} (y')^2 - 4y = 0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

Exemplo 4.11 O PVI

$$\begin{cases} |y'| + |y| = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

não tem solução, uma vez que a equação diferencial $|y'| + |y| = 0$ tem apenas a solução $y = 0$.

Os exemplos anteriores sugerem, por um lado, que nem todo o PVI admite solução e, por outro, que a existir solução esta poderá não ser única. Do ponto de vista de aplicações, é importante conhecer condições que garantam a existência e unicidade de solução. É possível provar que um problema de Cauchy de primeira ordem na forma normal, i.e., do tipo

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

(com x_0, y_0 dados) admite uma e uma só solução (definida num intervalo centrado em x_0), desde que a função f seja suficientemente "regular"[14]. Apesar da existência de um tal resultado (de natureza local) para funções f "gerais", iremos apenas detalhar o caso em que a equação envolvida é "linear". Voltaremos a esta questão mais adiante quando tratarmos especificamente este tipo de equações.

Um dos objetivos principais deste capítulo é apresentar métodos de resolução que permitem obter a solução analítica[15] de alguns tipos de equações

[14]Este resultado é conhecido pelo *Teorema de Cauchy-Picard* e pressupõe que a função f seja contínua num conjunto aberto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ e satisfaça a condição

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq M\,|y_1 - y_2|$$

onde $M > 0$ é uma constante independente de $(x, y_1), (x, y_2) \in D$.

[15]Em alguns casos a procura de soluções poderá ser feita do ponto de vista geométrico através de "campos de inclinações". Para resolver uma equação da forma $y' = f(x, y)$,

é dada (implicitamente) por

$$y^2 + \operatorname{sen} y = 2x^3 + \pi^2 - 2.$$

Exemplo 4.15 Consideremos o seguinte problema de aplicação da chamada *Lei do Arrefecimento de Newton* (cf. Secção 4.1):

Uma esfera de cobre é aquecida a uma temperatura de 100°C. A esfera é então colocada num recipiente com água em que esta é mantida a uma temperatura constante de 30°C. Determine a forma como varia a temperatura (T) da esfera ao longo do tempo (t).

Recordando a equação (4.1), temos neste caso $T_m = 30$. Como a temperatura no instante inicial é de 100°C, a resolução do problema anterior passa pela resolução do problema de Cauchy

$$\begin{cases} \dfrac{dT}{dt} = -k(T-30) \\ T(0) = 100 \end{cases} \tag{4.19}$$

onde a constante (de arrefecimento) $k > 0$ pode ser determinada a partir dos dados fornecidos. Ora, a equação diferencial envolvida é de variáveis separáveis, visto ser equivalente à equação

$$\frac{dT}{T-30} = -k\,dt\,, \qquad T \neq 30.$$

Por integração de ambos os membros obtemos o integral geral

$$T = C\,e^{-kt} + 30,$$

onde C é uma constante real não nula [Verifique!]. Repare-se, no entanto, que a função constante $T = 30$, inicialmente excluída, é igualmente solução da equação diferencial em (4.19) e poderá obter-se do integral geral considerando $C = 0$.

Usando a condição inicial $T(0) = 100$, chegamos à solução (particular) do problema

$$T = 70\,e^{-kt} + 30\,, \quad t \geq 0.$$

Observe-se que a constante de arrefecimento k poderia ser calculada a partir de informação adicional. Por exemplo, se a temperatura da esfera fosse de 70°C ao fim de 3 minutos, o seu valor seria $k = \frac{1}{3}\ln(\frac{7}{4}) \simeq 0,1865$.

4.3.2 EDOs homogéneas

A equação diferencial (4.16) diz-se *homogénea* se f for uma *função homogénea de grau zero*[19], i.e.

$$f(\lambda x, \lambda y) = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in D, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \text{tais que} \quad (\lambda x, \lambda y) \in D.$$

Neste caso temos $f(x, y) = f(1, y/x)$ $(x \neq 0)$ [Porquê?], pelo que uma equação homogénea pode sempre escrever-se na forma

$$\boxed{y' = g(y/x)} \tag{4.20}$$

em que g é uma função de uma variável apenas. Por sua vez, esta equação pode ser reduzida a uma equação de variáveis separáveis através de uma mudança de variável adequada. De facto, efetuando a substituição de variável (dependente) $y = zx$, a equação (4.20) fica na forma

$$z + xz' = g(z),$$

a qual é uma equação de variáveis separáveis em x e z [Porquê?]. Para determinar um integral geral desta última equação usamos a técnica de resolução discutida anteriormente para este tipo de equações. Um integral geral da equação homogénea inicial obtém-se então a partir deste último tendo em conta a substituição inversa $z = y/x$.

Exemplo 4.16 Vamos resolver a equação $x^2\,dy = (x^2 + xy + y^2)\,dx$. Esta pode escrever-se na forma

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2} = 1 + \frac{y}{x} + \left(\frac{y}{x}\right)^2, \qquad x \neq 0,$$

logo a equação diferencial dada é homogénea. Através da substituição $y = zx$, obtemos a equação de variáveis separáveis

$$\frac{1}{1+z^2}\,z' = \frac{1}{x},$$

[19]Uma função real f definida num subconjunto $D \subseteq \mathbb{R}^2$ é homogénea de grau $m \geq 0$ se

$$f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^m f(x, y)$$

para todos $(x, y) \in D$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tais que $(\lambda x, \lambda y) \in D$.

que admite o integral geral

$$\operatorname{arctg} z = \ln|x| + C\,, \qquad C \in \mathbb{R}. \qquad \text{[Verifique!]}$$

Por conseguinte, um integral geral da equação homogénea dada tem a forma

$$\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = \ln|x| + C\,, \qquad \text{i.e.} \qquad y = x\operatorname{tg}\left(\ln|x| + C\right)\,, \qquad C \in \mathbb{R}.$$

Observação 4.4 As equações diferenciais da forma

$$y' = h\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right), \tag{4.21}$$

em que h é uma função de uma variável real e a_1, a_2, b_1, b_2 são constantes reais, transformam-se em equações já conhecidas através de uma mudança de variável(eis) adequada(s):

- se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, então a equação já é de variáveis separáveis, ou então uma das substituções $z = a_1x + b_1y$ ou $z = a_2x + b_2y$ converte-a numa equação desse tipo;

- se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$, então existem constantes α e β tais que a substituição de variáveis dada pela translação

  $$x = u + \alpha \qquad \text{e} \qquad y = z + \beta$$

  transforma a equação (4.21) numa equação homogénea nas variáveis u (independente) e z (dependente), daí dizer-se, neste caso, que (4.21) é uma EDO *redutível a uma equação homogénea.* O par (α, β) é a solução do sistema[20]

  $$\begin{cases} a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0 \\ a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0. \end{cases}$$

Sugestão: Como aplicação resolva a equação diferencial $y' = \dfrac{x+y+4}{x-y-6}$.

[20] Trata-se de um sistema possível e determinado (uma vez que $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$), o qual pode ser resolvido pelo método de substituição (já conhecido do Ensino Básico/Secundário), ou então através da chamada *regra de Cramer* (conhecida pelos alunos que frequentaram ALGA).

$$x^2\,dy = (x^2 + xy + y^2)\,dx$$

$$y' = \frac{x^2 + xy + y^2}{x^2}$$ omogenea

$y = zx$

$$x\frac{dz}{dx} = z^2+1 \longrightarrow \text{ mult. per } \frac{1}{x(z^2+1)}$$

$$\frac{1}{z^2+1}\,dz = \frac{1}{x}\,dx$$

$$\operatorname{arctg} z = \ln|x| + c$$

$$z = \operatorname{tg}(\ln|x| + c)$$

Voltiamo a x e $y = zx$, ponendo $z = y/x$

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\ln|x| + c), \; c \in \mathbb{R}.$$

$$y(x) = x\operatorname{tg}(\ln|x| + c), \; c \in \mathbb{R}$$

Voltando a x e y, ponendo $u = x-1$ e $z = y+5$

viene $$\operatorname{arctg}\left(\frac{y+5}{x-1}\right) - \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{(y+5)^2}{(x-1)^2}\right) = \ln|x-1| + c,$$
$c \in \mathbb{R}$.