PageRank

Como descobrir informação na web?

- **Primeiras tentativas:**
  - Listas criadas por humanos
    Directórios da Web
  - Yahoo, DMOZ, LookSmart

Como descobrir informação na web?

- **Segunda geração: Web Search**
  - **Information Retrieval** :
    Procura de documentos relevantes num conjunto pequeno e de confiança
    - Artigos de jornais, Patentes, etc.

- **MAS:** A Web é gigantesca, cheia de documentos sobre os quais não temos garantias de ser de confiança, cheia de SPAM, etc.

Os primeiros motores de procura

- Baseavam-se em percorrer (crawl) a web e listar os termos (palavras ou outras sequências de caracteres excluindo os espaços) de cada página, num índice invertido

- Um índice invertido/inverso (inverted index) é uma estrutura de dados que torna simples, dado um termo, descobrir (apontar para) todas as páginas em que o termo ocorre.
  - Assunto da área de Information Retrieval

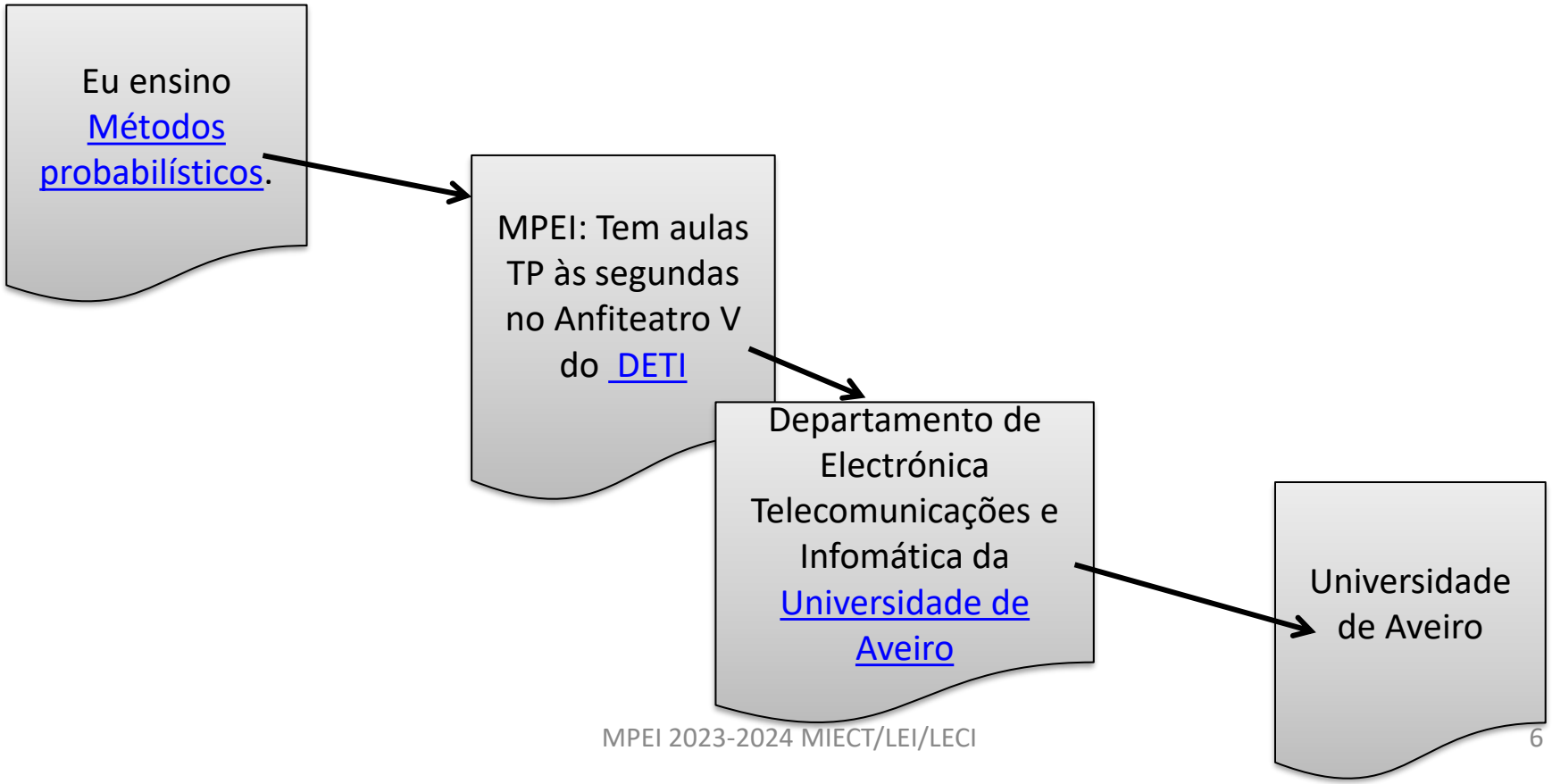
Ataques de spam

- Rapidamente estes primeiros motores de procura foram atacados.

- Sendo **sensíveis às palavras nas páginas**, facilmente os detentores de páginas com menos escrúpulos podiam inflacionar a importância das suas páginas:
  - Adicionando muitas cópias de uma ou várias palavras ao conteúdo da página
    - e tornando essa parte invisível quando mostrada num browser
  - Usando o motor de procura para saber a página mais importante segundo o seu algoritmo e copiando o seu conteúdo para as suas páginas
    - mantendo esta parte invisível no browser

A Web como um Grafo

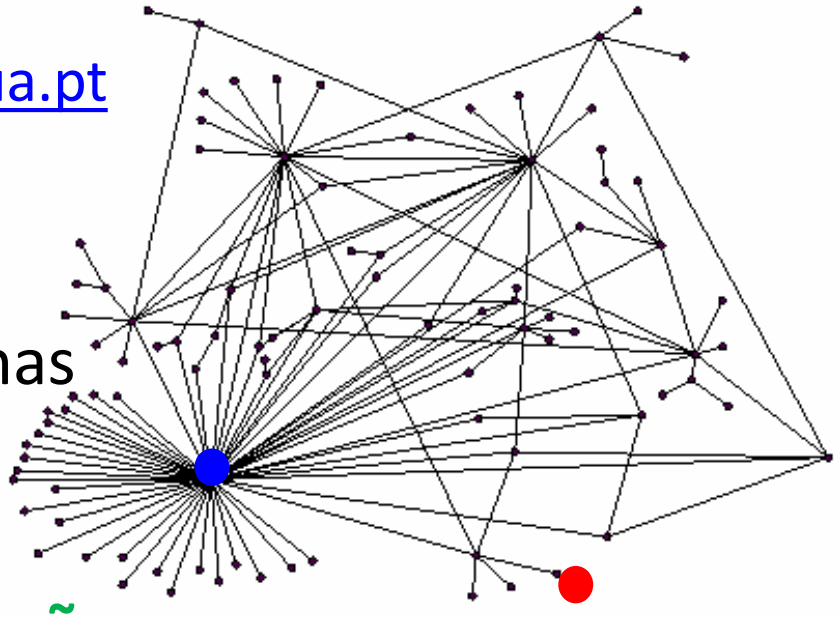
- **Nós /nodos/vértices : Páginas Web**
- **Ligações/arcos: Hyperlinks**



Estrutura do grafo

- **As páginas da web Não são todas igualmente "importantes"**

  www.ze-ninguem.com vs. www.ua.pt



- Existe um grande diversidade nas ligações

- **Ideia: Usar a estrutura das ligações para saber quais as páginas "importantes"**

Contribuição da Google

- Não calcular a relevância das páginas apenas com base no conteúdo

  usar também informação sobre as ligações a essa página

  – Desenvolvendo e patenteando o Pagerank
  – Que começou como um projecto de investigação

Ideia Base - Passeios aleatórios

- Simular onde passeios aleatórios pelas páginas de surfistas aleatórios (*random surfers*), começando numa página aleatória, tendem a passar mais se se escolherem aleatoriamente os links de saída de uma página (em que se encontram)
  - E permitindo que o processo se repita muitas vezes

- As páginas visitadas por muitos passeios (ou surfers) serão "mais importantes" do que páginas raramente visitadas

- O Google dá preferência a páginas mais importante ao decidir quais as páginas a mostrar primeiro em resposta a um *query*
  - Mas obviamente as páginas têm de conter os termos …

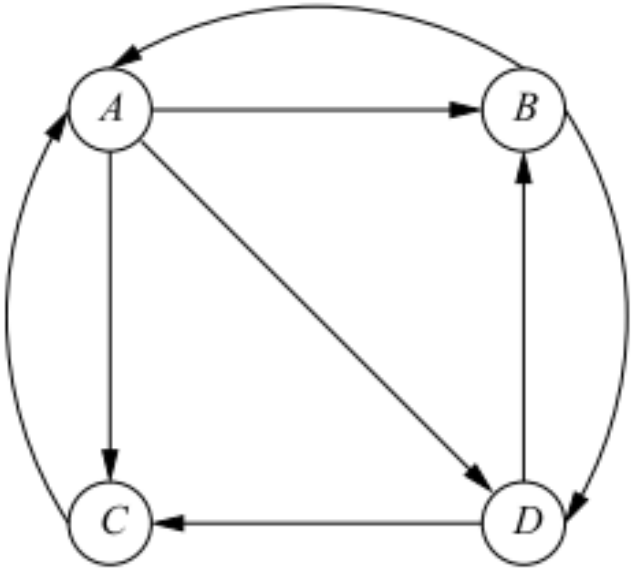
Versão base ‘ideal’

- Consideremos a web como um grafo orientado (*directed*) em que:
  - as páginas são os nodos (ou vértices)
  - existe um arco (ou ligação) da página P_1 para a página P_2 se existe um ou mais links de P_1 para P_2

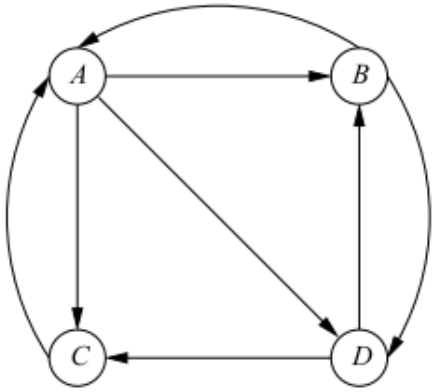
- Exemplo:

- Rede muito pequena:
  apenas 4 páginas

- A página A tem links para as outras 3
- A página B tem ligações apenas para a A e a D;
- A página C tem apenas um link, para a A
- E a página D tem links apenas para B e C



Versão base (cont.)



- Suponhamos que o surfista aleatório começa na página A:
- Existem links para B, C e D, logo o surfista estará de seguida numa dessas 3 páginas, com probabilidade 1/3 [1 a dividir pelo nº de links de saída]
  - E probabilidade zero de estar em A
- O surfista aleatório B terá, no próximo passo, probabilidade 1/2 de estar em A, 1/2 de estar em D e 0 de estar em C

Definição de pagerank

- O PageRank é uma função/algoritmo que atribui um número real a cada página da Web
  - (ou a porção dela que foi processada e as ligações obtidas)
  - Designamos esse número por pagerank
  - Quanto maior é o valor mais "importante" é a página.
- Baseia-se na ideia dos random surfers

- Não existe propriamente um algoritmo fixo, havendo variações do algoritmo
  - Que podem dar valores diferentes de pagerank

pagerank

- O pagerank (r) de uma página P_j é, por **definição**:

$$r(P_j) = \sum_i \frac{r(P_i)}{d_i}$$

- sendo:

  i o índice das páginas que apontam para P_j

  d_i o número de páginas para as quais P_i aponta
  ou seja, número de links de saída

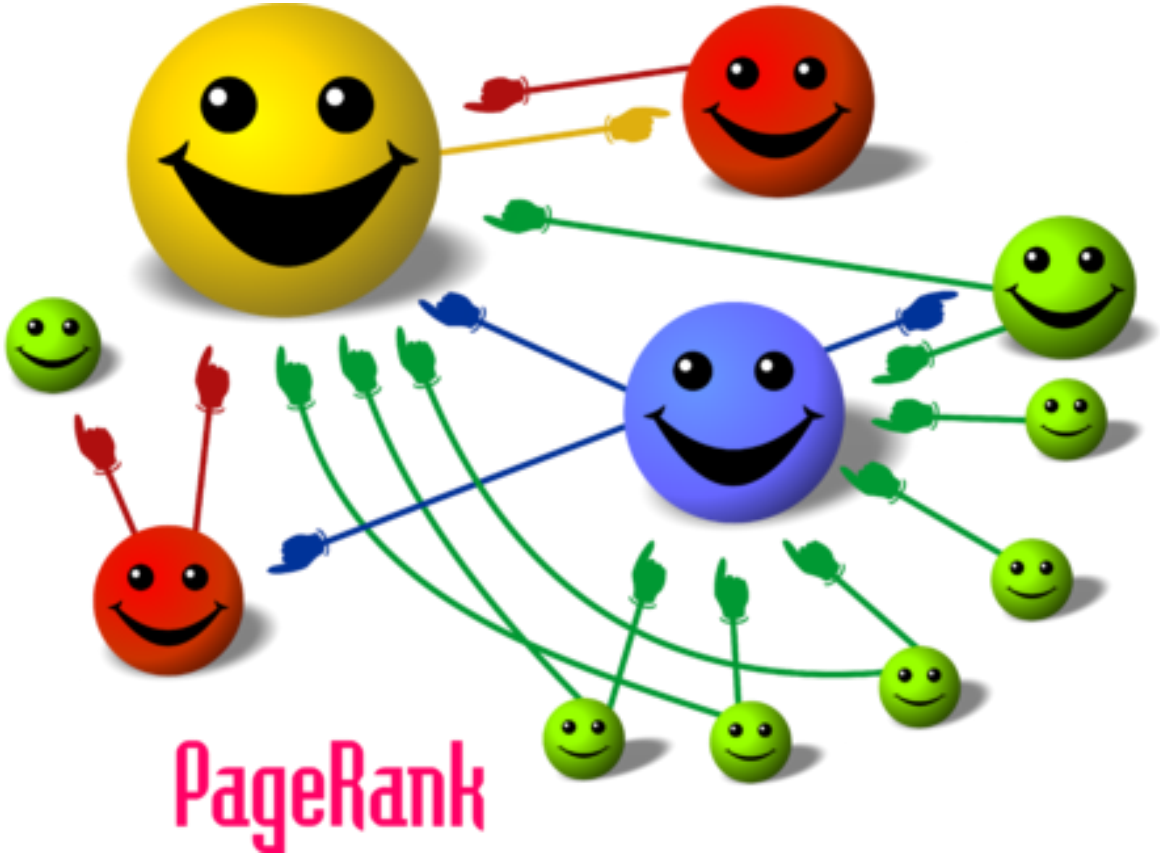
Cálculo do pagerank

- O pagerank de uma página depende do pagerank das páginas que têm links para ela
  - identificadas pelo índice i

- O que sugere um cálculo iterativo

$$r_{k+1}(P_j) = \sum_i \frac{r_k(P_i)}{d_i}$$

- A condição inicial é $r_0(P_i) = 1/n$, com n igual ao número de páginas



- Uma simplificação do sistema do PageRank,
- Cada bola representa uma página e o tamanho de cada uma a sua importância (PageRank).
- Quanto maior a bola, mais valor tem o seu voto:
- Repare que a bola superior vermelha é grande mesmo recebendo só um voto, pois o voto que ela recebe, da bola maior amarela, tem mais valor

DE: https://pt.wikipedia.org/wiki/PageRank.

Forma matricial

- Definindo a matriz de hyperlinks H como

- $$H_{ji} = \begin{cases} \frac{1}{d_i} & , se\ existir\ link\ de\ i\ para\ j \\ 0 & , caso\ contrário \end{cases}$$

- Teremos $r^{(k+1)} = H\, r^{(k)}$

  – Sendo $r^{(k)}$ o vector com *pageranks* na iteração k

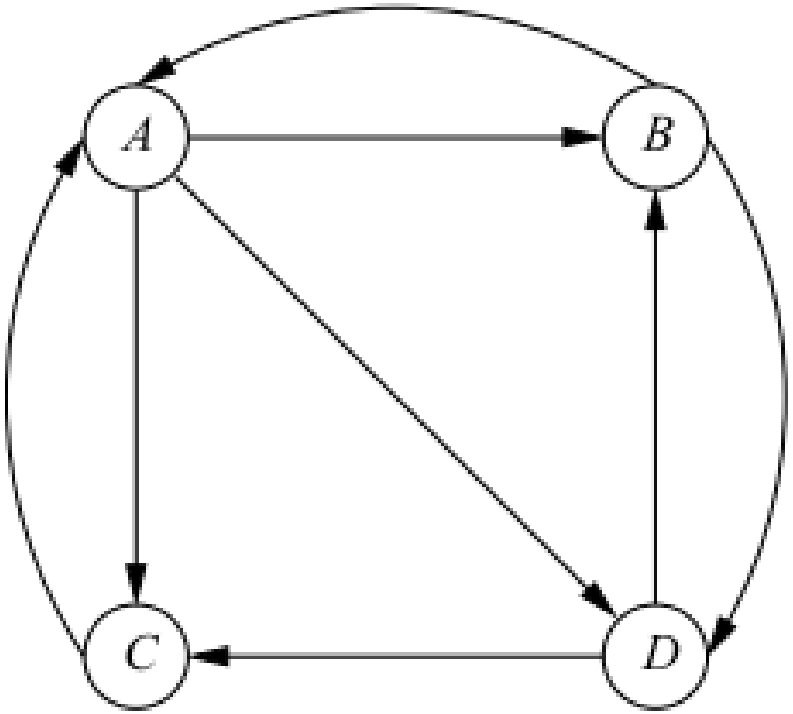
Forma matricial

- A matriz H pode ser interpretada como contendo as probabilidades de transição entre páginas (os estados)

- Em consequência pode aplicar-se o que aprendemos sobre Cadeias de Markov para:
  - calcular probabilidades após múltiplas transições
  - estudar o comportamento quando o número de transições (iterações) tende para infinito
  - etc .

Matriz para o nosso exemplo ?

- Qual será então a matriz H para a nossa mini web ?



Solução

$$\begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

- Acertaram ?

Situação Limite

- Sabemos que a distribuição dos pageranks atingirá um **estado estacionário**,
  em que $r = Hr$

  - Pelo menos em certas condições:
    - O grafo ser fortemente ligado, sendo possível ir de qualquer página para qualquer página
    - Não existirem becos sem saída (*dead ends*)
      - páginas que não têm links de saída

- O limite é atingido quando multiplicando os pageranks por *H* mais uma vez a distribuição de pageranks não se altera

Aplicando ao nosso exemplo

- Aplicando $r^{(k+1)} = H\, r^{(k)}$ sucessivamente
  - e iniciando com 1/n

$$\begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \\ 1/4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 9/24 \\ 5/24 \\ 5/24 \\ 5/24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 15/48 \\ 11/48 \\ 11/48 \\ 11/48 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11/32 \\ 7/32 \\ 7/32 \\ 7/32 \end{bmatrix}, \ldots, \begin{bmatrix} 3/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \\ 2/9 \end{bmatrix}$$

Comentário

- Esta diferença em probabilidade é pequena

- Mas na web real, com biliões de páginas the grande variedade de importância, a verdadeira probabilidade de uma página como www.amazon.com é ordens de magnitude superior à probabilidade de outras páginas, como uma página pessoal

Questões

- **É mesmo assim tão simples ?**
- **Converge sempre?**
- **Converge para o que queremos?**
- **Os resultados são razoáveis?**

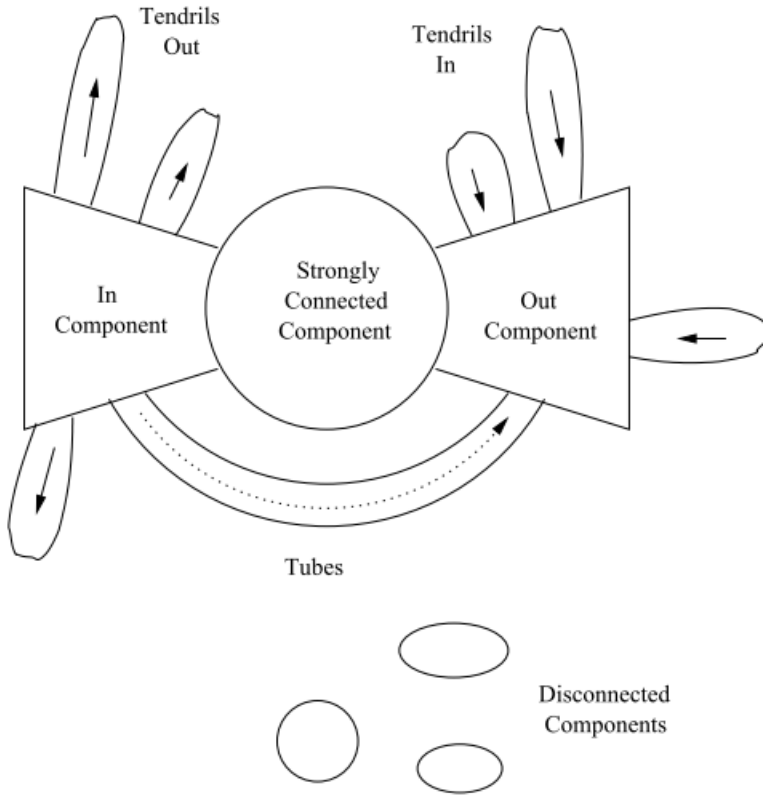
Estrutura da web

- Será a web tão fortemente ligada como o nosso exemplo ?

- Seria bom que fosse…
- Mas, na prática, não é
  - Pelo menos não na sua totalidade

Estrutura da web

- Um estudo antigo da web revelou a estrutura à direita
- Existe uma parte fortemente ligada
  - o Strongly Connected Component-SCC
- Mas também muitas páginas com:
  - Ligações ao SCC mas às quais não é possível chegar a partir do SCC
    - in-component
  - Ligações a partir do SCC mas sem forma de chegar ao SCC
    - out-component
  - Ligações do in-component mas incapazes de aceder a esse componente
  - Etc ..



Isto traz problemas

Temos **dois tipos de problemas** que têm de ser resolvidos

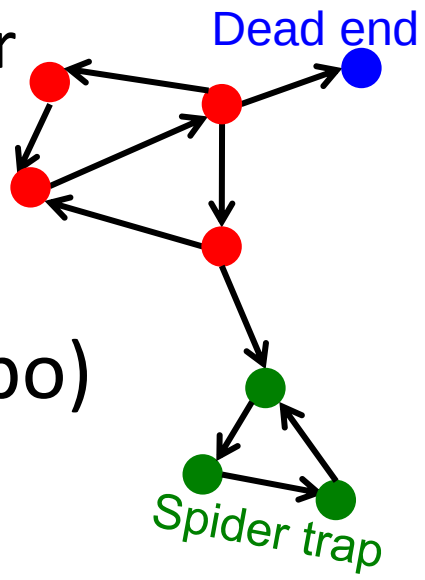
1. Becos sem saída (*dead ends)*

2. Grupos de páginas que têm links de saída mas apenas para esse grupo, impedindo a ida para outras páginas
   - Estas estruturas são chamadas de *spider traps*
     - Porquê ?

A spider is a program run by a search engine to build a summary of a website's content (*content index*). Spiders create a text-based summary of content and an address (URL) for each webpage.

Problemas (continuação)

1. **Dead ends** (sem links de saída)
   - Passeio aleatório não tem para onde ir



2. **Spider traps:**
   (todos os links de saída para o grupo)
   - O passeio aleatório fica "preso" na armadilha (trap)

- Qual o efeito nos pageranks ?

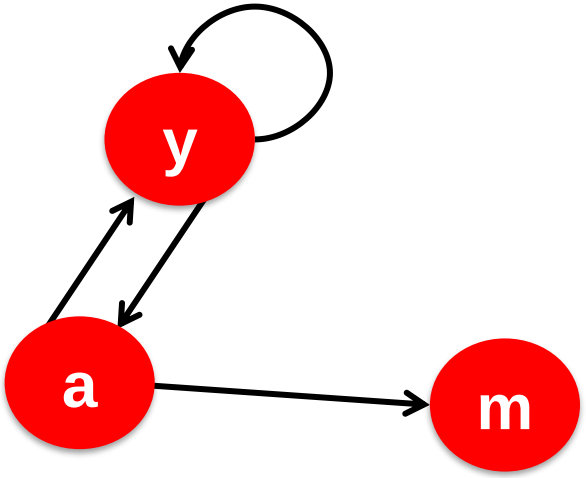
Efeitos dos *Dead ends*

- Neste caso as colunas correspondentes ficam com zeros e a sua soma é zero

- Em consequência a matriz de transição deixa de ser estocástica

- O que implica ?

Dead Ends – Exemplo 2



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	0

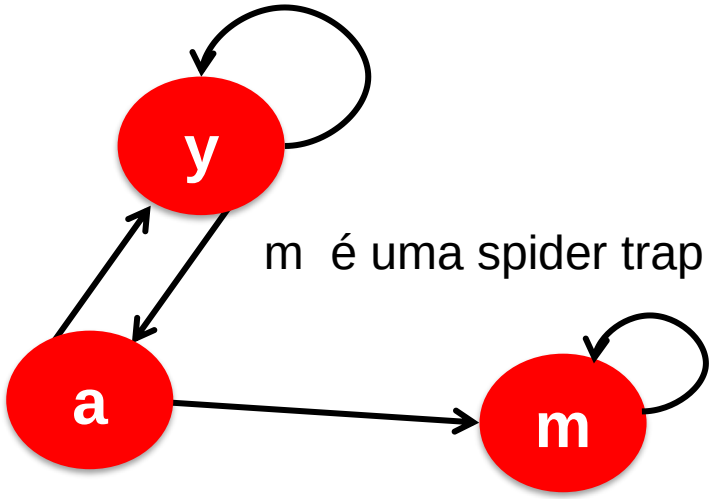
- **Exemplo:**

$$\begin{pmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1/3 & 2/6 & 3/12 & 5/24 & & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 2/12 & 3/24 & \ldots & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 1/12 & 2/24 & & 0 \end{matrix}$$

Iteração 0, 1, 2, …

O PageRank "desaparece" pois a matriz não é estocástica.

Spider Traps – Exemplo 2



	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	1

- **Exemplo:**

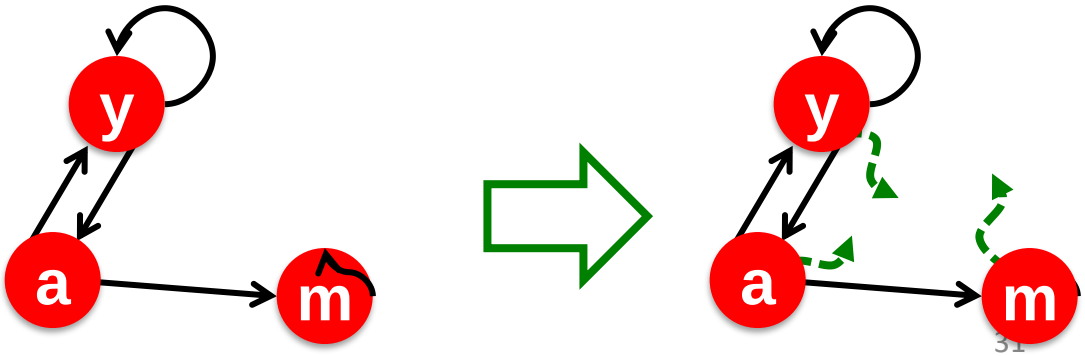
$$\begin{pmatrix} r_y \\ r_a \\ r_m \end{pmatrix} = \begin{matrix} 1/3 & 2/6 & 3/12 & 5/24 & & 0 \\ 1/3 & 1/6 & 2/12 & 3/24 & \ldots & 0 \\ 1/3 & 3/6 & 7/12 & 16/24 & & 1 \end{matrix}$$

Iteração 0, 1, 2, …

O PageRank é todo "apanhado" pelo nó m.

Solução para *spider traps*

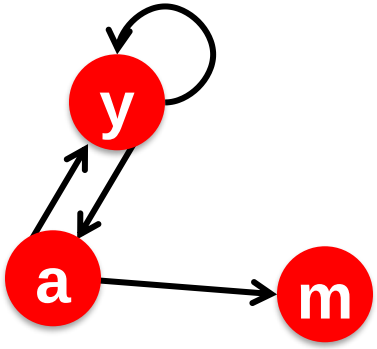
- Em cada passo, **o surfista aleatório ter duas opções**
  - Com probabilidade β:
    - **Seguir um link** aleatoriamente
  - Com probabilidade **1-β**,
    - **Saltar aleatoriamente para uma página qualquer**

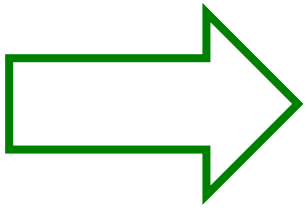


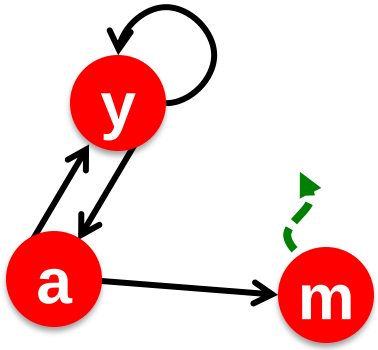
- **O surfista teletransporta-se para fora da *spider trap* ao fim de alguns passos**
- Valores usuais para β : intervalo 0.8 to 0.9

Solução para *dead ends*

- Teletransportar (teleport) sempre
- **Implica ajustar a matriz** por forma a:
  - seguir um link com probabilidade 1/n







	y	a	m
y	½	½	0
a	½	0	0
m	0	½	0

	y	a	m
y	½	½	⅓
a	½	0	⅓
m	0	½	⅓

Os teletransportes resolvem os dead-ends ?

- **SIM**

- **Deixa de haver dead-ends**
  - **Existe sempre para onde ir**
  - **Matriz volta a ser estocástica**

Solução da Google

- **A solução da Google resolve a possibilidade de haver spider traps**
- Em cada passo, **o surfista aleatório tem duas opções**
  - Com probabilidade β:
    - **Seguir um link** aleatoriamente
  - Com probabilidade **1-β**:
    - **Saltar aleatoriamente para uma página qualquer**

- **PageRank equation** [Brin-Page, 98]

$$r_j = \sum_{i \to j} \beta \frac{r_i}{d_i} + (1 - \beta) \frac{1}{N}$$

A Matriz da Google

- **Matriz da Google:**

$$A = \beta\, H + (1-\beta)\left[\frac{1}{N}\right]_{N\times N}$$

[

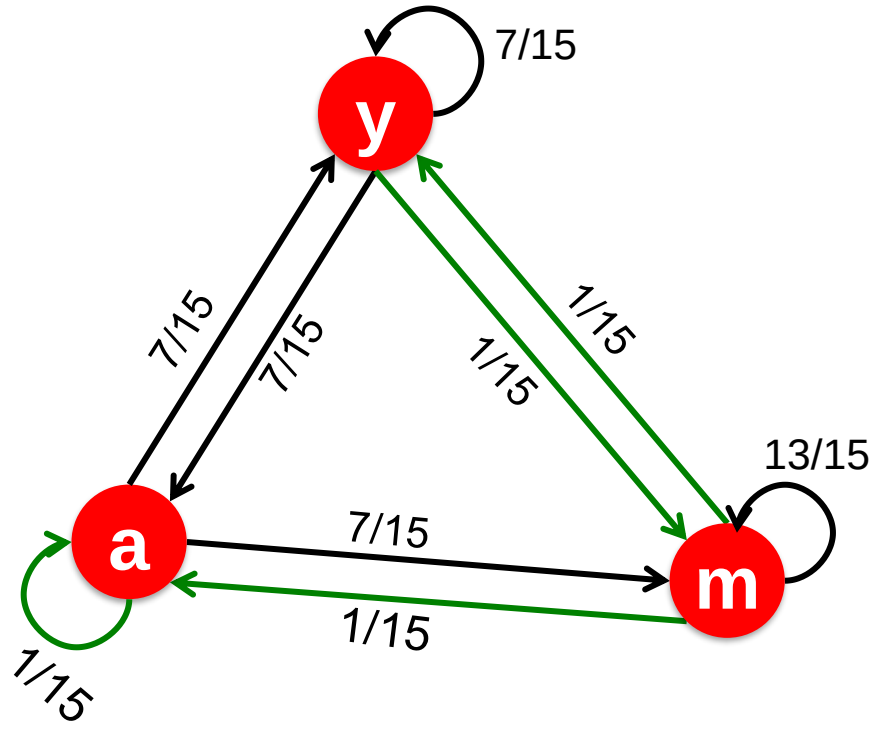
$[1/N]_{NxN}$…matriz N por N com todas entradas iguais a 1/N

- **Temos um problema recursivo: $\boldsymbol{r = A \cdot r}$**

- A que se pode aplicar o método das potências (Power)

- $\boldsymbol{\beta}$**?**
  - Na prática $\beta = 0.8, 0.9$ (5 passos em média para saltar)

Exemplo: Random Teleports ($\beta = 0.8$)



H $[1/N]_{NxN}$

$$0.8 \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 1 \end{bmatrix} + 0.2 \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \\ y \\ a \\ m \end{array} \begin{bmatrix} 7/15 & 7/15 & 1/15 \\ 7/15 & 1/15 & 1/15 \\ 1/15 & 7/15 & 13/15 \end{bmatrix}$$

A

$$\begin{array}{c} y \\ a \\ m \end{array} = \begin{array}{ccccc} 1/3 & 0.33 & 0.24 & 0.26 & \\ 1/3 & 0.20 & 0.20 & 0.18 & \ldots \\ 1/3 & 0.46 & 0.52 & 0.56 & \end{array} \begin{array}{c} 7/33 \\ 5/33 \\ 21/33 \end{array}$$

E na realidade ?

Apenas 2 ou 3 slides para terem uma ideia, pois começa a sair do âmbito de MPEI

Calcular para toda a web …

- **O passo mais importante é a multiplicação**

$$\boldsymbol{r}^{k+1} = \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}^{k}$$

- Fácil se desse para ter tudo em memória: **A**, $\mathbf{r}^{k+1}$, $\mathbf{r}^{k}$

- **Se N =** 10^9 páginas
  - 1 bilião na América, 1000 milhões na Europa
- E considerarmos 4 bytes por entrada

- Temos:
  - 2x 10^9 posições para os 2 vectores (aprox. 8GB)
  - Uma matriz **A** com N^2 elementos
    - Ou seja 10^{18}

Partes da solução …

- **Aproveitar o facto da matriz ser esparsa**
- **Codificá-la com base apenas nas entradas não-nulas**

origem	grau	Nós destino
0	3	1, 5, 7
1	5	17, 64, 113, 117, 245
2	2	13, 23

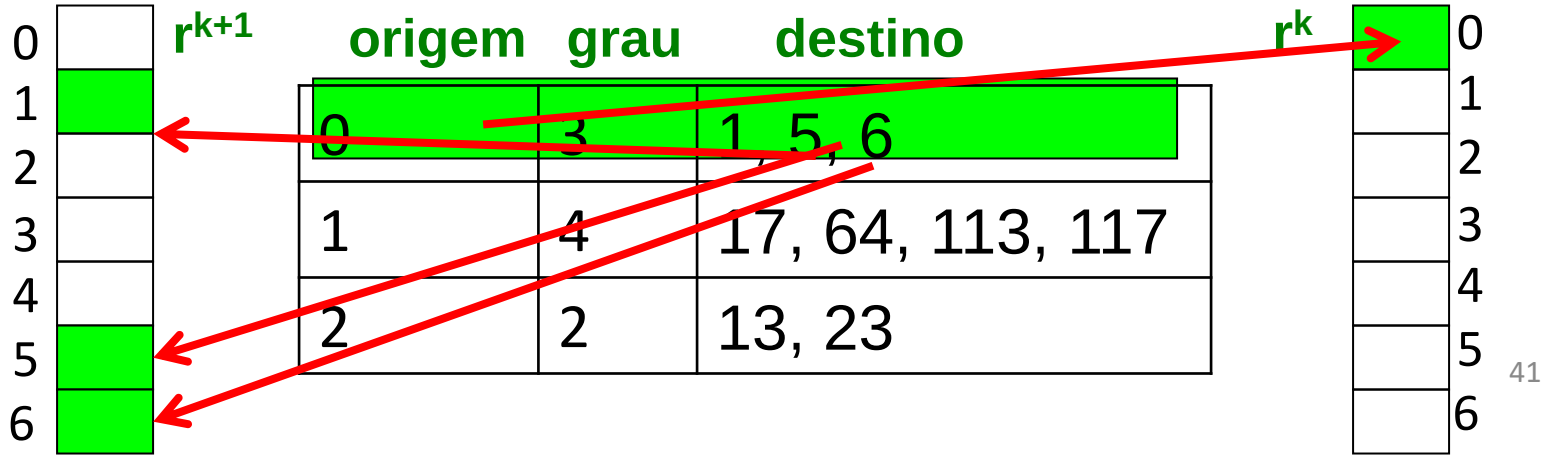
  - Espaço proporcional aproximadamente ao número de links
  - Por exemplo: 10N, or 4*10* 10^9 ≅ 40GB
  - **Contínua a "não caber" em memória mas cabe em disco**

Algoritmo básico: Passo de actualização

- **Assumindo que r^{k+1} cabe em memória**
  - r^k e a matriz no disco
- **1 passo da iteração do método das potências :**

Inicializar todas as entradas de $\mathbf{r^{k+1}}$ com $\mathbf{(1-\beta) / N}$
Para cada página i (com grau d_i):
  Ler para memória: i, d_i, $dest_1, \ldots, dest_{di}$, $r^k(i)$
  Para $\mathbf{j = 1 \ldots d_i}$
    $\mathbf{r^{k+1}(dest_j) \mathrel{+}= \beta\ r^k(i) / d_i}$

Exemplo



Inicializar todas as entradas de $\mathbf{r^{k+1}}$ com $\mathbf{(1-\beta) / N}$

Para cada página ORIGEM $\boldsymbol{i}$ (com grau $\boldsymbol{d_i}$):

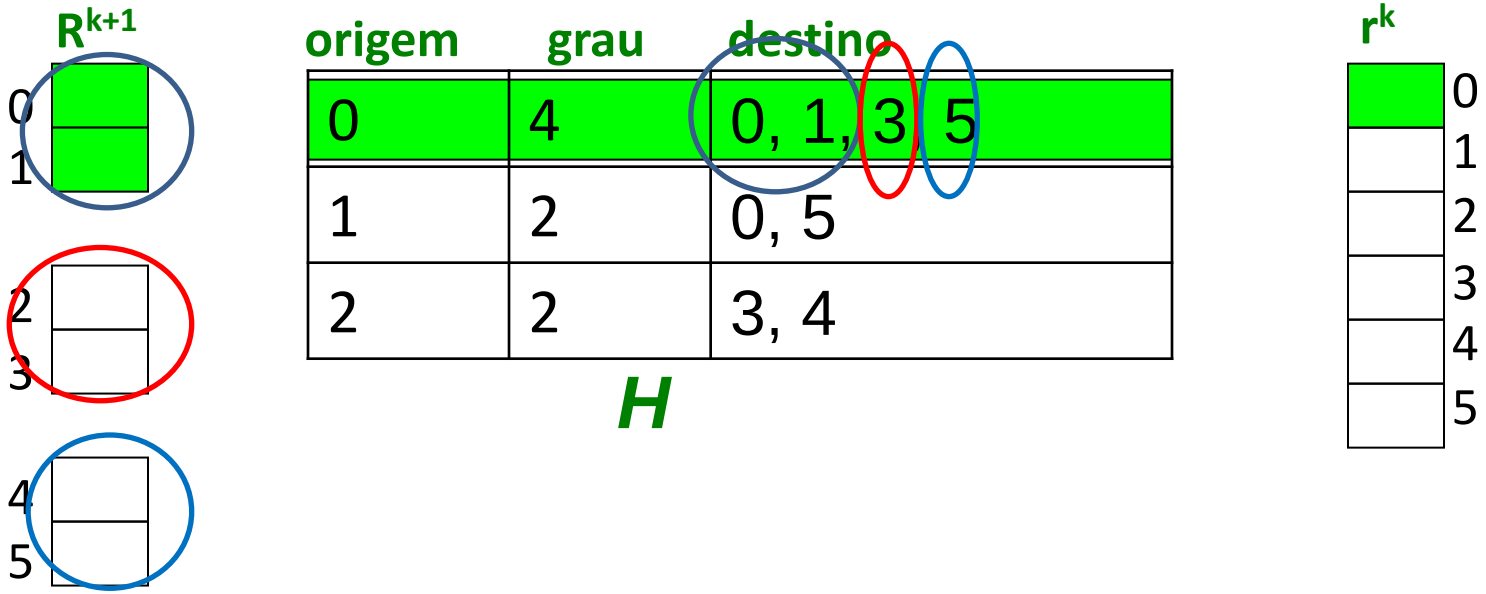
Ler para memória: $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{d_i}$, $\boldsymbol{dest_1, \ldots, dest_{d_i}}$, $\boldsymbol{r^k(i)}$

Para $\mathbf{j = 1 \ldots d_i}$

$\mathbf{r^{k+1}(dest_j) \mathrel{+}= \beta\ r^k(i) / d_i}$

E se nem r^{k+1} cabe em memória ?

- Dividir r^{k+1} em k blocos que caibam em memória
- Processar a Matriz e r^k uma vez para cada bloco



PageRank in Matlab

Aplicação a uma “pequena rede”

- Consideremos apenas um número reduzido de páginas
  - exemplo: N=20 páginas
- Principais passos:
  - Obter informação das páginas e suas ligações
  - Com base nos links obter H
  - Criar a matriz A aplicando o método da Google para evitar dead ends e spider traps
  - Aplicar power method
  - Apresentar resultados

Informação das páginas e suas ligações

- Em casos reais é obtida usando um crawler

- Pode ser simulada facilmente:

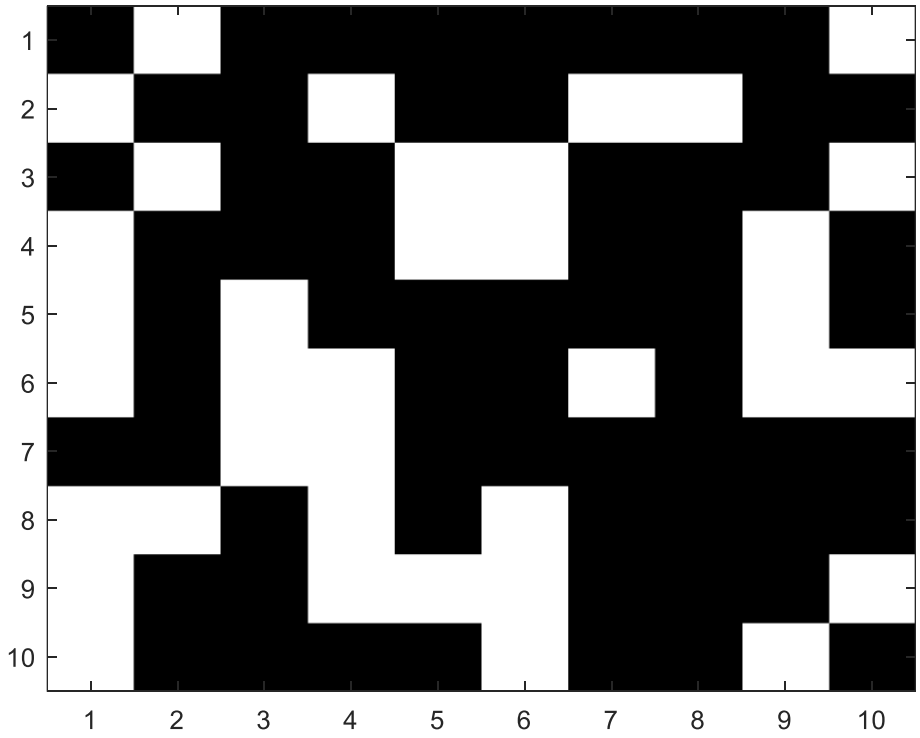
```
N = 5
L = randi([0,1],N,N)   % matriz com ligações (1 = ligação)

for i=1:length(L)
    L(i,i) = 0 % não contam ligações para a própria página
end
```

Resultados exemplificativos

imagesc(L)

colormap(gray)

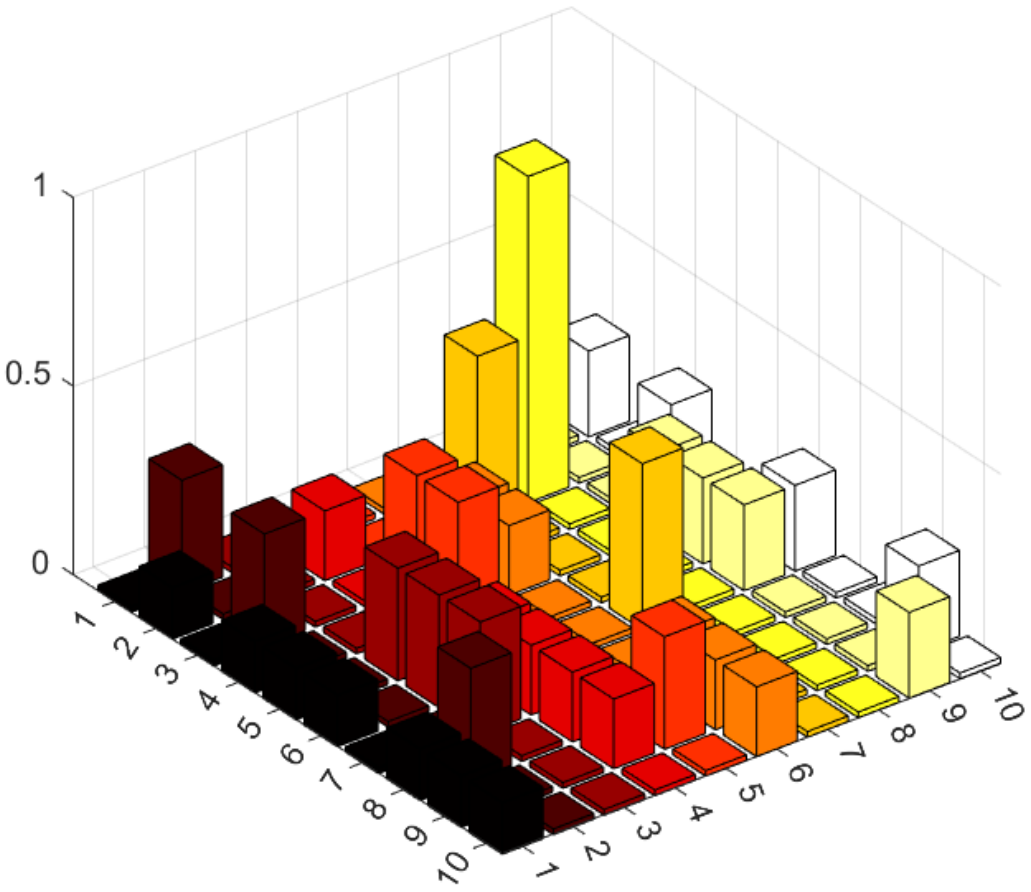


Obter H e A

```
d=sum(full(L));  %  n de ligações (d)
H=H./d

p=0.85
A=p*H+(1-p)*ones(N)/N % matriz da Google
A(isnan(A))=1/N              %  resolver dead ends
```

A



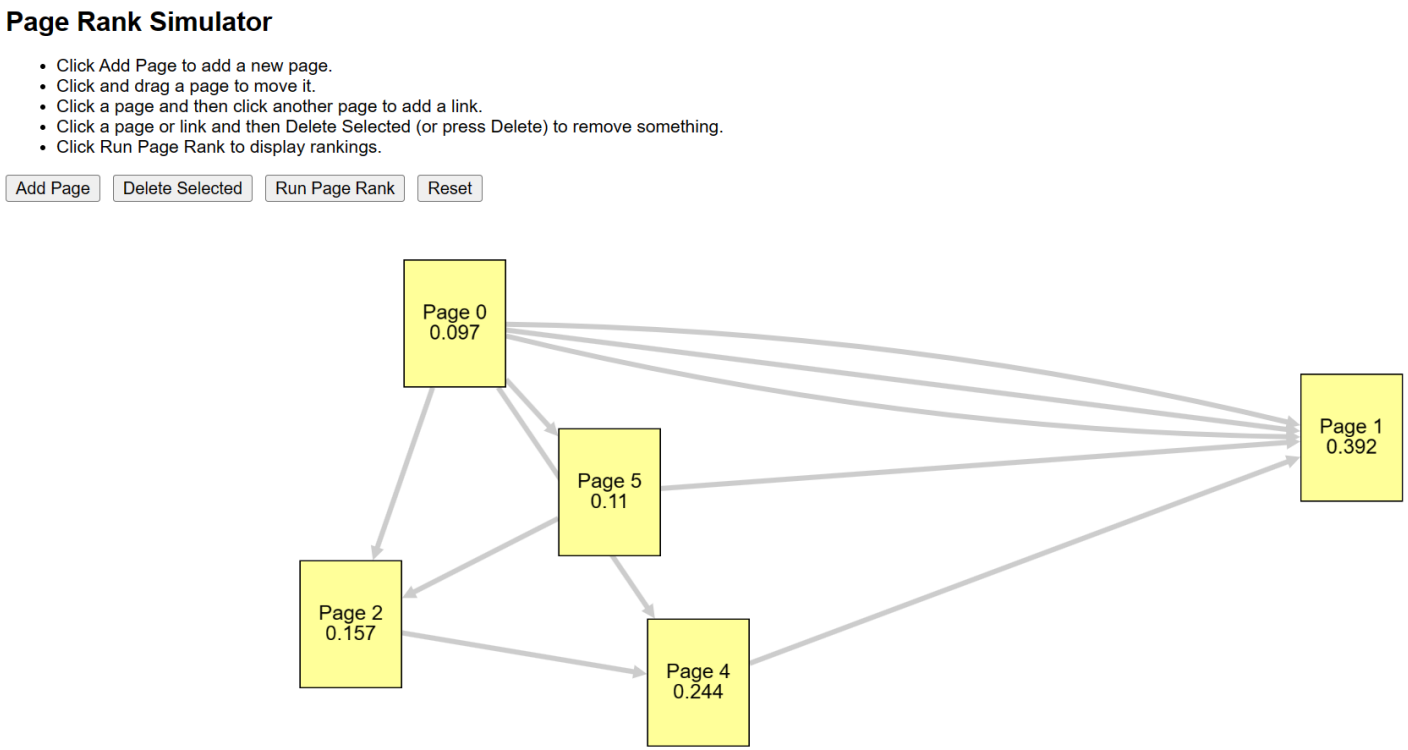
Aplicar “power method”

```
pr0=ones(N,1)/N;

% ----------------------
iter=1;
pr=pr0;
epsilon=1e-3;
while 1
   fprintf(1,'iteração %d\n',iter);
   prold=pr;
   pr=A*pr;
   if  max(abs(pr-prold))<epsilon break ; end
   iter=iter+1;
end

pr
```

“Simulador”



- https://computerscience.chemeketa.edu/cs160Reader/_static/pageRankApp/index.html

Para saber mais

- Use PageRank Algorithm to Rank Websites - MATLAB & Simulink Example (mathworks.com)

- Capítulo *Link Analysis* do livro **Mining of Massive Datasets**
  - Disponível em http://infolab.stanford.edu/~ullman/mmds/book.pdf

- Capítulo *PageRank* do livro **Experiments with MATLAB** de C. Moler
  - e respectivo software
  - pagerank.pdf (mathworks.com)

- Notas do Prof. Paulo Jorge Ferreira "MPEI - pagerank"
  - Disponíveis no elearning

- Artigos dos autores do PageRank e fundadores da Google
  - É uma questão de usar o Google ☺

Nesta apresentação foram usados e/ou adaptados slides da seguinte apresentação:

Analysis of Large Graphs: Link Analysis, PageRank

Mining of Massive Datasets
Jure Leskovec, Anand Rajaraman, Jeff Ullman Stanford University
http://www.mmds.org