



Ficha de Exercícios 3 - Parte I

Funções reais de várias variáveis reais (Parte I):

Noções Topológicas em \mathbb{R}^n ; Domínios; Conjuntos de nível; Limites; Continuidade; derivação parcial e derivadas direcionais; diferenciabilidade e plano tangente; Regra da cadeia; Teorema da função implícita

1. Represente geometricamente os seguintes conjuntos:

- (a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2y^2 < 4\}$;
- (b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x - 1)^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 2\}$;
- (c) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy = 0\}$;
- (d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, x + y + z \leq 1\}$.

Caracterize cada um dos conjuntos do ponto de vista topológico (usando a topologia usual em \mathbb{R}^2 e em \mathbb{R}^3).

2. Determine o domínio das seguintes funções:

- (a) $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$;
- (b) $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2}$;
- (c) $f(x, y) = \frac{2 - \sqrt{4 - x^2 - y^2}}{x^2 + y^2}$;
- (d) $f(x, y) = \ln(xy)$;
- (e) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2 - 1) + \sqrt{9 - x^2 - y^2}$;
- (f) $f(x, y, z) = \arcsen \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

3. Determine as curvas/superfícies de nível das seguintes funções:

- (a) $f(x, y) = x - 4y$
- (b) $f(x, y) = x^2 - 4y$
- (c) $f(x, y) = x^2 + y^2$
- (d) $f(x, y) = x^2 - 4y^2$
- (e) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

4. Suponha que $T(x, y) = 40 - x^2 - y^2$ representa uma distribuição de temperatura no plano xOy (admita que x e y são dados em quilómetros e a temperatura T em graus Celsius). Um indivíduo encontra-se na posição $(3, 2)$ e pretende dar um passeio.

Descreva o lugar geométrico dos pontos que ele deverá percorrer se desejar desfrutar sempre da mesma temperatura.

5. Determine, caso existam, os seguintes limites:

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - 4y^4}{2x^2 + 4y^2}$
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,2)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}$
- (c) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + 2y^2) \sin\left(\frac{1}{xy}\right)$
- (d) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2y}{x^2 + 2y^2}$
- (e) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4}{y^4 + (y - x)^2}$

6. Considere f a função de domínio contido em \mathbb{R}^2 tal que $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2}$.
- Determine o domínio de f e diga, justificando, se é um conjunto fechado.
 - Determine as curvas de nível \mathcal{C}_k de f , para $k = 0$ e $k = \frac{1}{2}$, respetivamente. Faça os seus esboços gráficos.
 - Mostre que não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
7. Determine o domínio de continuidade das funções, de domínio \mathbb{R}^2 , definidas por:
- $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{x - y} & \text{se } x \neq y \\ 0 & \text{se } x = y \end{cases}$
 - $f(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } xy = 0 \\ 0 & \text{se } xy \neq 0 \end{cases}$.
8. Calcule as derivadas parciais de primeira ordem da função f dada por
- $$f(x, y, z) = e^x \sin x + \cos(z - 3y).$$
9. Calcule, caso existam, as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções nos pontos P indicados:
- $f(x, y) = \sqrt{xy}$ $[P = (2, 2)]$;
 - $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{4 - x^2 - 2y^2}, & \text{se } x^2 + 2y^2 \neq 4 \\ 0, & \text{se } x^2 + 2y^2 = 4 \end{cases}$ $[P = (2, 0)]$;
 - $f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } (x, y) = (0, 0) \\ x \sin \frac{1}{x^2 + y^2}, & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \end{cases}$ $[P = (0, 0)]$.
10. Determine as derivadas parciais de primeira e de segunda ordens da função
- $$f(x, y) = \ln(x + y) - \ln(x - y).$$
11. Sendo $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$, mostre que $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = 2$.
12. Mostre que a função $f(x, y) = \arctg(y/x)$ verifica a equação
- $$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{equação de Laplace}).$$
13. Considere a função $f(x, y) = \ln x + xy^2$.
- Indique o domínio de f .
 - Determine equações do plano tangente e da reta normal ao gráfico de f no ponto $(1, 2, 4)$.
14. Seja $f(x, y, z) = x \sin(yz)$.
- Determine o gradiente de f .
 - Calcule a derivada direcional de f no ponto $(1, 3, 0)$ segundo o vetor unitário U com a direção e sentido de $V = (1, 2, -1)$.
15. Considere a função f definida por $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.
- Indique o domínio D de f e caracterize-o do ponto de vista topológico.
 - Descreva as curvas de nível da função f .
 - Justifique que f é diferenciável em $(3, 0)$.
 - Escreva a expressão geral das derivadas direcionais de f no ponto $(3, 0)$.
 - Determine a direção e sentido segundo os quais se atinge o valor máximo das derivadas direcionais de f em $(3, 0)$.
16. Determine a reta normal e o plano tangente à superfície cônica
- $$\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3 - z = \sqrt{x^2 + y^2}\}$$
- no ponto $(3, 4, -2)$.

17. Considere a função f dada por $f(x, y, z) = 3xy + z^2$.

- (a) Calcule o gradiente de f num ponto genérico.
- (b) Determine uma equação do plano tangente à superfície de nível 4 de f , no ponto $(1, 1, 1)$.

18. Seja $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x, y, z) = x + y + z - e^{xyz}$.

- (a) Justifique que f é diferenciável em \mathbb{R}^3 .
- (b) Determine a direção e sentido de maior crescimento de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ e calcule a derivada direcional correspondente nesse ponto.
- (c) Determine uma equação cartesiana do plano tangente à superfície de nível 0 de f no ponto $(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

Resolução:

- (a) As derivadas de 1.ª ordem de f em $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 1 - yz e^{xyz}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 1 - xz e^{xyz}, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 1 - xy e^{xyz}$$

que são contínuas em \mathbb{R}^3 , logo, f é diferenciável em \mathbb{R}^3 .

- (b) A direção e sentido de maior crescimento de f em $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ é dada pelo vetor gradiente de f em P :

$$\begin{aligned} \nabla f(P) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{\partial f}{\partial y}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}), \frac{\partial f}{\partial z}(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{4}, 1 - 0, 1 - 0 \right) \\ &= \left(\frac{3}{4}, 1, 1 \right) \end{aligned}$$

A norma deste vetor é $\|\nabla f(P)\| = \frac{\sqrt{41}}{4}$. Seja U o vetor unitário com a direção e sentido de $\nabla f(P)$. A derivada direcional correspondente nesse ponto é dada por

$$D_U f(P) = \nabla f(P) \cdot U = \frac{\sqrt{41}}{4}.$$

- (c) Notar que $\mathcal{S}_0 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z - e^{xyz} = 0\}$ e portanto $P \in \mathcal{S}_0$. Uma vez que $\nabla f(P) \neq (0, 0, 0)$, o plano tangente a \mathcal{S}_0 em $P = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ tem esse vetor como vetor ortogonal. Assim, uma equação desse plano é

$$\left(x - 0, y - \frac{1}{2}, z - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{3}{4}, 1, 1 \right) = 0$$

ou seja, $3x + 4y + 4z - 4 = 0$ é uma equação cartesiana do plano pedido.

19. Determine $\frac{dz}{dt}$ por dois processos distintos:

- (a) $z = \sin(xy)$, onde $x = 3t$ e $y = t^2$.
- (b) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, onde $x = \sin(3t)$ e $y = \cos(3t)$.

20. Seja $z = \sin(x^2 + 2y)$, onde $x(s, t) = s + t$ e $y(s, t) = 2s - t$. Determine $\frac{\partial z}{\partial s}(0, 0)$.

21. Seja $z = xy^2 + \ln(5 + x^2) - e^y$, onde $x(s, t) = s \cdot \cos(t)$ e $y(s, t) = s \cdot \sin(t)$. Determine $\frac{\partial z}{\partial s}(\pi, 0)$ e $\frac{\partial z}{\partial t}(\pi, 0)$.

22. Considere a equação $y^4 - xy^2 + x^3 - 1 = 0$. Mostre que esta equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 1)$ e determine $y'(1)$.
23. Considere a equação $e^x - 2yx + y^4 - y = 1$. Verifique se esta equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(0, 1)$ e, em caso afirmativo, calcule $y'(0)$.

Exercícios de revisão

24. Considere a função $f : D_f \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.
- (a) Determine o domínio de f , D_f .
 - (b) Averigue se existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$.
 - (c) Determine a curva de nível -1 , \mathcal{C}_{-1} , e represente-a geometricamente.

(Teste 1 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

25. Se $u = x^4y + y^2z^3$, onde $x(r, s, t) = rse^t$, $y(r, s, t) = rs^2e^{-t}$ e $z(r, s, t) = r^2s \cdot \sin(t)$, determine o valor de $\frac{\partial u}{\partial s}(1, 1, 0)$.
26. Considere a equação $\ln(xy) - 2x^2 + y + 1 = 0$. Verifique se esta equação define implicitamente y como função de x numa vizinhança do ponto $(1, 1)$ e, em caso afirmativo, calcule $y'(1)$.

Questões de escolha múltipla:

27. Uma equação do plano tangente à superfície de equação $x^2 - 2y^2 + xz^2 = 5$ no ponto $(1, 0, 2)$ é:
- (a) $-3x + 2z + 7 = 0$
 - (b) $3x - 2z + 1 = 0$
 - (c) $3x + 2z - 7 = 0$
 - (d) $3x + 2z - 1 = 0$

(Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

28. Sejam $f(x, y, z) = \sin(xy) + e^z$ e $U = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$. A derivada direcional de f segundo o vetor U no ponto $P = (0, 1, 2)$ é igual a:
- (a) $1 + e^2$
 - (b) $\frac{1 + e^2}{\sqrt{3}}$
 - (c) $1 - e^2$
 - (d) $e^2 - 1$

(Teste 2 de Cálculo II - Agrupamento 3, 2021/2022)

29. Relativamente à função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2+y^2} \sin(-xy^2) & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

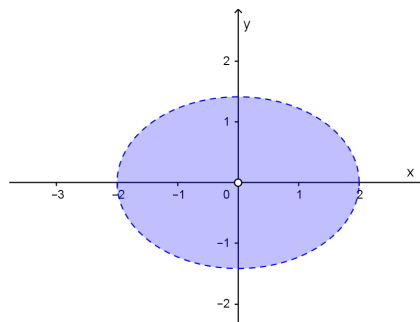
podemos afirmar que:

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = -1$
- (c) f é contínua em \mathbb{R}^2
- (d) não existe $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$

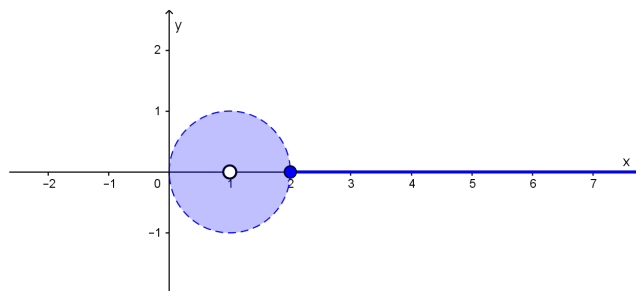
(Exame Final de Cálculo II - Agrupamento 3, 2022/2023)

Soluções

1. (a) É aberto.



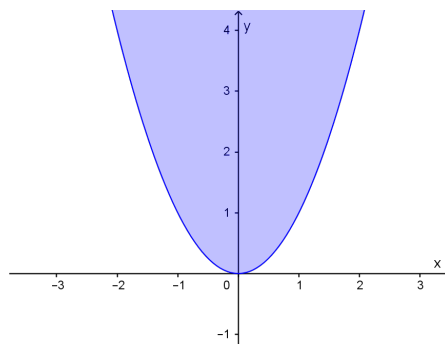
(b) Não é aberto, nem é fechado.



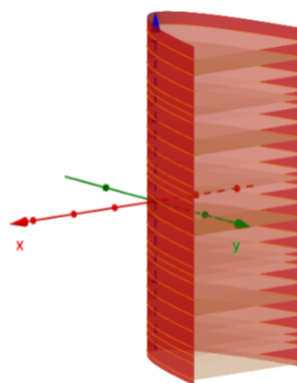
(c) É fechado.

(d) É fechado.

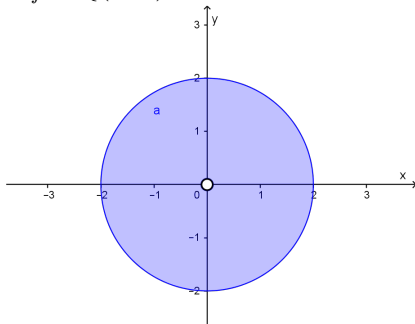
2. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq x^2\}$.



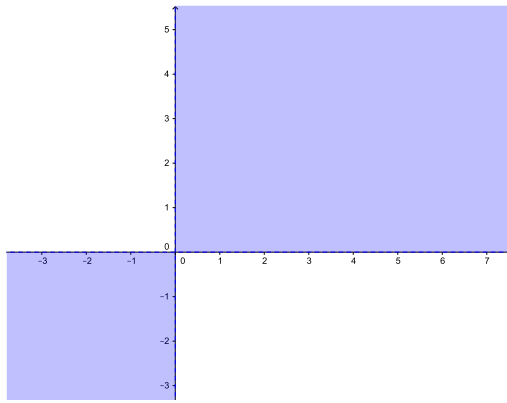
(b) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y \geq x^2\}$. Trata-se de um cilindro parabólico (incluindo os pontos que se situam no seu interior).



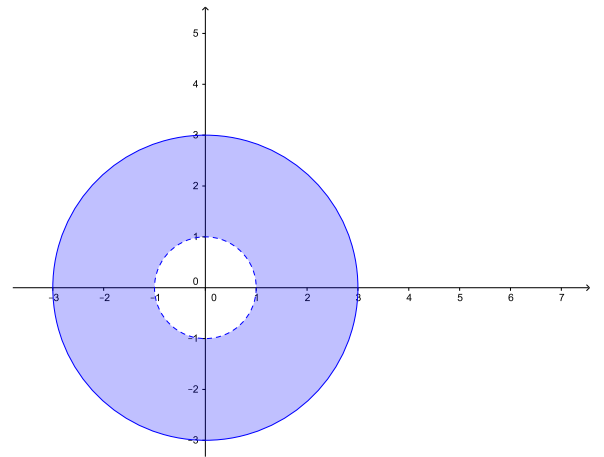
(c) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge (x, y) \neq (0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + y^2 \leq 4\}$.



(d) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy > 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x > 0 \wedge y > 0) \vee (x < 0 \wedge y < 0)\} = (\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+) \cup (\mathbb{R}^- \times \mathbb{R}^-)$.



(e) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 9\}$.



(f) $D_f = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \neq (0, 0) \wedge z^2 \leq x^2 + y^2\}$.

3. (a) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x}{4} - \frac{k}{4}\}$.

Nota: é a reta de declive $\frac{1}{4}$ e com ordenada na origem $-\frac{k}{4}$.

(b) Para $k \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \frac{x^2}{4} - \frac{k}{4}\}$.

Nota: é uma parábola com concavidade voltada para cima e vértice $(0, -\frac{k}{4})$.

(c) $\mathcal{C}_0 = \{(0, 0)\}$. Para $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = k\}$ (nota: é a circunferência de centro $(0, 0)$ e raio \sqrt{k}).

(d) $\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = \pm \frac{x}{2}\}$ (nota: são duas retas que passam na origem e com declives $\frac{1}{2}$ e $-\frac{1}{2}$). Para $k \neq 0$, $\mathcal{C}_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - 4y^2 = k\}$.

(e) $\mathcal{S}_0 = \{(0, 0, 0)\}$. Para cada $k \in \mathbb{R}^+$, $\mathcal{S}_k = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = k\}$ é a superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio \sqrt{k} .

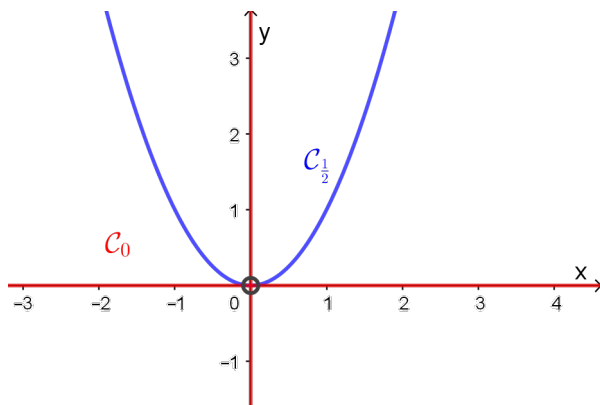
4. $\{(x, y) : T(x, y) = T(3, 2)\} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 13\}$

5.

(a) 0; (b) $\frac{1}{5}$; (c) 0; (d) 0; (e) Não existe.

6. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

(b) $\mathcal{C}_0 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 0 \vee y = 0\} \setminus \{(0, 0)\}$, $\mathcal{C}_{\frac{1}{2}} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\} \setminus \{(0, 0)\}$.



(c) —

7. (a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y\} \cup \{(0, 0)\}$
 (b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : xy \neq 0\} \cup \{(0, 0)\}$

8. Para todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^x(\sin x + \cos x),$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 3 \sin(z - 3y),$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\sin(z - 3y).$$

9. (a) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 2) = \frac{1}{2}; \frac{\partial f}{\partial y}(2, 2) = \frac{1}{2}.$
 (b) $\frac{\partial f}{\partial x}(2, 0) = 0; \frac{\partial f}{\partial y}(2, 0)$ não existe.
 (c) $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ não existe; $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0.$

10. Para $y > -x$ e $x > y$, temos

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{2y}{y^2 - x^2}; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{2x}{x^2 - y^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{4xy}{(x^2 - y^2)^2}; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = -\frac{2(x^2 + y^2)}{(x^2 - y^2)^2}.$$

11. —

12. —

13. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\} = \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}.$

- (b) Plano tangente: $5x + 4y - z - 9 = 0.$

Reta normal:

$$(x, y, z) = (1, 2, 4) + \alpha(5, 4, -1), \alpha \in \mathbb{R} \text{ (equação vetorial) ou}$$

$$\frac{x-1}{5} = \frac{y-2}{4} = 4 - z \quad \text{(equações cartesianas).}$$

14. (a) $\nabla f(x, y, z) = (\sin(yz), xz \cos(yz), xy \cos(yz)).$

$$(b) D_{\frac{1}{\sqrt{6}}(1, 2, -1)}f(1, 3, 0) = -\frac{3}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

15. (a) $D_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 > 0\} = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
 (é aberto e não é fechado).

- (b) As curvas de nível $k \in \mathbb{R}$ de f são $C_k = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = e^k\}$ (circunferências de centro $(0, 0)$).

- (c) Sim, porque tem derivadas parciais de 1.^a ordem contínuas em todo o seu domínio, em particular em $(3, 0)$.

$$(d) D_{(u,v)}f(3, 0) = \frac{2}{3}u, \text{ com } u^2 + v^2 = 1.$$

- (e) Na direção e sentido do vetor $(1, 0)$, (notar que é a direção e sentido do vetor gradiente de f em $(3, 0)$).
16. Reta normal: $(x, y, z) = (3, 4, -2) + \alpha(3, 4, 5)$, $\alpha \in \mathbb{R}$.
Plano tangente: $3x + 4y + 5z - 15 = 0$.
17. (a) $\nabla f(x, y, z) = (3y, 3x, 2z)$.
(b) $3x + 3y + 2z - 8 = 0$.
18. Resolvido
19. (a) $9t^2 \cos(3t^3)$.
(b) 0.
20. 4
21. $\frac{\partial z}{\partial s}(\pi, 0) = \frac{2\pi}{\pi^2 + 5}$ e $\frac{\partial z}{\partial t}(\pi, 0) = -\pi$.
22. -1
23. $\frac{1}{3}$
24. (a) $D_f = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$
(b) Não existe.
(c) $\mathcal{C}_{-1} = \{(x, y) \in D_f : f(x, y) = -1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} : x = 0\}$.
Logo \mathcal{C}_{-1} é o eixo Oy excluindo o ponto $(0, 0)$.
25. 6
26. $\frac{3}{2}$
27. (c)
28. (b)
29. (a)