# Guiões de Cálculo I - Agrupamento 2

## Guião 4

### Integral Impróprio

Paula Oliveira

2021/22

Universidade de Aveiro

# Conteúdo

# Capítulo 7

# Integral impróprio

A definição de integral de Riemann de uma função $f$ num intervalo $I$ exige que o intervalo $I$ seja fechado e limitado e que a função $f$ seja limitada nesse intervalo.

Vamos agora estender o conceito de integral a intervalos ilimitados, a intervalos que não são fechados e a funções ilimitadas no intervalo de integração. A este tipo de integral dá-se a designação de **integral impróprio**.

O que poderá significar

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \int_0^2 \frac{1}{x^2}\,dx, \qquad \text{ou} \qquad \int_0^2 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx\ ?$$

Seja $F$ a função definida por $F(t) = \displaystyle\int_1^t \frac{1}{x^2}\,dx$, $t \in [1, +\infty[$. Sabe-se que $F(t) = 1 - \dfrac{1}{t}$ e que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} F(t) = 1$. Este limite denota-se por $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$ e podemos escrever

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = 1.$$

Em termos geométricos podemos interpretar este integral como sendo a área da região (ilimitada) sob a curva de equação $y = \dfrac{1}{x^2}$, acima do eixo $Ox$ e à direita da reta $x = 1$.

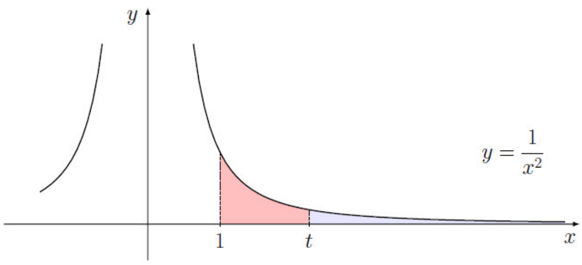


**Figura 7.1:** Representação do integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx$.

## 7.1 Integrais impróprios de primeira espécie

Em primeiro lugar, vamos considerar os casos em que o intervalo de integração é fechado e ilimitado e em que a função está definida em todos os pontos desse intervalo. Um integral nestas condições diz-se **impróprio de $1^{\underline{a}}$ espécie**.

**Definição 7.1.** *Sejam $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo $[a, t]$ com $t \geq a$ e $F$ a função definida em $[a, +\infty[$ por*

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx.$$

*Se existir em $\mathbb{R}$ o $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)$ diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente e escreve-se*

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to+\infty} F(t).$$

*Se o limite não existir em $\mathbb{R}$ o integral impróprio diz-se divergente.*

A definição 7.1 estende-se a intervalos $]-\infty, b]$ e a $\mathbb{R}$.

**Definição 7.2.** *Sejam $f : ]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo $[t, b]$ com $t \leq b$ e $F$ a função definida em $]-\infty, b]$ por*

$$F(t) = \int_t^b f(x)\, dx.$$

*Se existir em $\mathbb{R}$ o $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t)$ diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ é convergente e escreve-se*

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty} F(t).$$

*Se o limite não existir em $\mathbb{R}$ o integral impróprio diz-se divergente.*

**Definição 7.3.** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ integrável em qualquer intervalo $[t, a]$, com $t \leq a$, e em qualquer intervalo $[a, s]$, com $s \geq a$. Sejam ainda $F$ e $G$ as funções definidas respetivamente por*

$$F(t) = \int_t^a f(x)\, dx,\ t \in ]-\infty, a] \quad e \quad G(s) = \int_a^s f(x)\, dx,\ s \in [a, +\infty[$$

*Se existirem em $\mathbb{R}$ os limites $\lim\limits_{t\to-\infty} F(t)$ e $\lim\limits_{s\to+\infty} G(s)$ diz-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$ é convergente e escreve-se*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{t\to-\infty} F(t) + \lim_{s\to+\infty} G(s).$$

*Se **um dos limites** não existir em $\mathbb{R}$ o integral impróprio diz-se divergente.*

**Observação 7.1.** Repare-se que se houver convergência num intervalo ilimitado, essa convergência mantém-se em qualquer seu subintervalo, contudo, o valor do integral impróprio poderá ser diferente.

- Seja $f : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ integrável em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Se $c \geq a$, então os integrais impróprios $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(x)\, dx$ são da mesma natureza.
- Seja $f : ]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ integrável em $[t, b]$, para todo o $t \leq b$. Se $c \leq b$, então os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(x)\, dx$ são da mesma natureza.
- O estudo de um integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx$, com $f$ integrável em todo o intervalo limitado e fechado, não depende do ponto $a \in \mathbb{R}$ que se escolhe para estudar os integrais impróprios $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\, dx$.

**Exemplo 7.1.** Considere-se o integral impróprio $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$. Uma vez que

$$\lim_{t\to+\infty} \underbrace{\int_1^t \frac{1}{x^3}\,dx}_{F(t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$$

podemos concluir que o integral impróprio é convergente e

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \frac{1}{2}.$$

Consideremos agora o integral impróprio $\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx$. Este integral é também convergente, contudo,

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx \neq \int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx,$$

já que,

$$\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,dx = \lim_{t\to+\infty} \underbrace{\int_3^t \frac{1}{x^3}\,dx}_{G(t)} = \lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{2t^2}+\frac{1}{18}\right) = \frac{1}{18}$$

**Exemplo 7.2.** Atendendo a que o limite $\lim_{t\to+\infty}\int_0^t \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-\cos t+1)$ não existe, podemos concluir que o integral impróprio $\int_0^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ é divergente. Mais ainda, podemos também concluir que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx$ é divergente.

**Exercício 7.1** Verifique que existe $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^t \operatorname{sen} x\,dx$ e conclua que $\int_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{sen} x\,dx \neq \lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^t \operatorname{sen} x\,dx$.

Sendo $f$ uma função integrável em qualquer intervalo $[-a,a]$ com $a>0$, ao limite $\lim_{t\to+\infty}\int_{-t}^t f(x)\,dx$ dá-se a designação de **valor principal de Cauchy** da função $f$.

Repare-se que este limite pode existir e no entanto o integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ ser divergente como acontece no caso do exercício 7.1.

**Exercício resolvido 7.1.** Estude a natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^{1} \frac{x}{x^2+4}\,dx$.

**Resolução do exercício 7.1.** Repare-se que

$$\lim_{t\to-\infty}\int_t^1 \frac{x}{x^2+4}\,dx = \lim_{t\to-\infty} \frac{1}{2}\ln(x^2+4)\Big|_t^1 = -\infty.$$

Logo, o integral impróprio é divergente.

**Exercício resolvido 7.2.** Estude a natureza do integral impróprio $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$.

**Resolução do exercício 7.2.** Calculando o limite

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{-x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}(-e^{-t}+e^0) = 1,$$

conclui-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-|x|}\,dx$ é convergente e

$$\int_0^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = 1.$$

Calculando agora o limite

$$\lim_{z\to-\infty}\int_z^0 e^x\,dx = \lim_{z\to-\infty}(e^0 - e^z) = 1$$

pode afirmar-se que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx$ é convergente e

$$\int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx = 1.$$

Logo,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = \int_{-\infty}^{0} e^{-|x|}\,dx + \int_0^{+\infty} e^{-|x|}\,dx = 1 + 1 = 2$$

e o integral impróprio é convergente.

**Exercício 7.2** Estude a natureza dos integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx$ 2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} 2^x\,dx$ 3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-2t}\,dt$ 4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-t}\,dt,$ $(\alpha < 1)$.

**Exercício 7.3** Verifique que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\cos(\alpha t)\,dt = \frac{1}{1+\alpha^2}$ onde $\alpha \in \mathbb{R}$.

**Proposição 7.1.** *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f$ a função definida em $[1,+\infty[$ por $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.*

- *Se $\alpha > 1$ o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ converge e*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

- *Se $\alpha \leq 1$ o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ diverge.*

*Demonstração.* Comecemos por considerar $\alpha = 1$. Nesse caso

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}\int_1^t \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to+\infty}[\ln x]_1^t = \lim_{t\to+\infty}\ln t = +\infty,$$

e portanto o integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

Seja agora $\alpha \neq 1$. Então

$$\int_1^t \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^t = -\frac{1}{t^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Se $\alpha < 1$,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t^{\alpha-1}(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1}\right) = +\infty$$

e o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é divergente.

Se $\alpha > 1$,

$$\lim_{t\to+\infty}\left(-\frac{1}{t^{\alpha-1}(\alpha-1)}+\frac{1}{\alpha-1}\right)=0+\frac{1}{\alpha-1}=\frac{1}{\alpha-1}$$

e o integral impróprio $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é convergente, sendo

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx=\frac{1}{\alpha-1}.$$

□

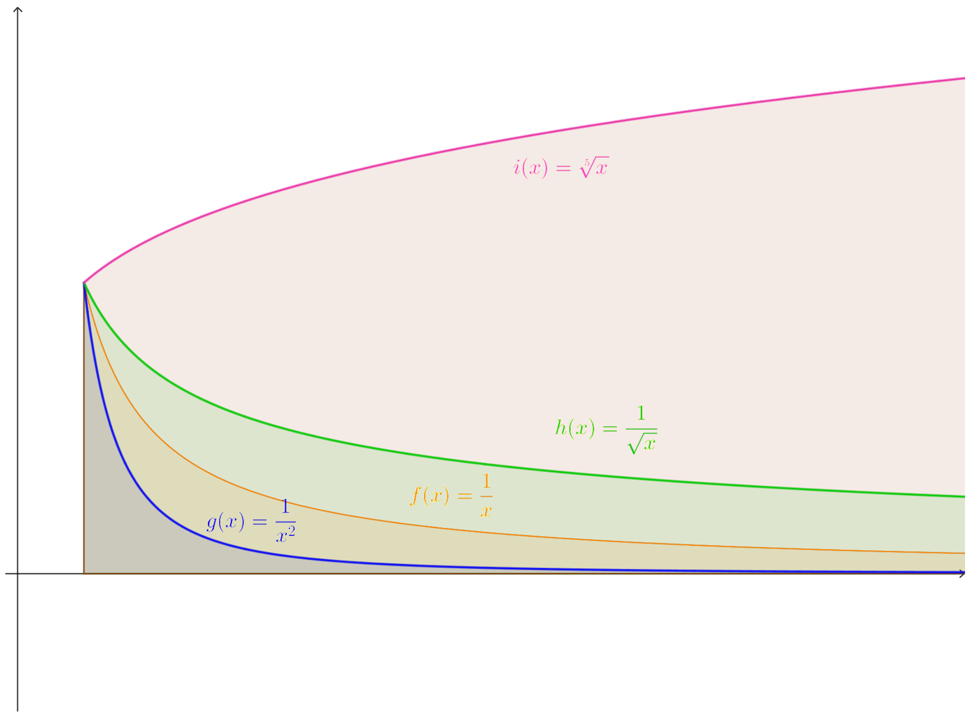


**Figura 7.2:** Esboço das regiões compreendidas entre o eixo das abcissas e o gráfico das funções $f(x)=\frac{1}{x^\alpha}$ com $\alpha=2$, $\alpha=1$, $\alpha=\frac{1}{2}$ e $\alpha=-\frac{1}{5}$.

**Exercício 7.4** Estudar, em função do parâmetro $\alpha\in\mathbb{R}$, a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx$.

Os resultados da proposição 7.1 e do exercício 7.4 são muito úteis para determinar a convergência ou divergência de outros integrais impróprios como veremos adiante.

## 7.2 Integrais impróprios de segunda espécie

Nesta secção vamos considerar os casos em que o intervalo de integração é limitado e em que a função é ilimitada nesse intervalo. Um integral nestas condições diz-se **impróprio de 2ª espécie**.

**Definição 7.4.** *Sejam $f:]a,b]$[1] $\to\mathbb{R}$ ilimitada numa vizinhança de $a$, integrável em $[t,b]$ para todo o $t\in]a,b]$ e $F:]a,b]\to\mathbb{R}$ definida por*

$$F(t)=\int_t^b f(x)\,dx.$$

[1]É irrelevante o facto de a função estar ou não definida em $x=a$.

*Se existe (em $\mathbb{R}$) o* $\lim_{t\to a^+} F(t)$ *diz-se que o integral impróprio* $\int_a^b f(x)\,dx$ *é convergente e escreve-se*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} F(t).$$

*Caso contrário, o integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *diz-se divergente.*

A definição anterior generaliza-se aos casos em que

- $f : [a,b[\to \mathbb{R}$ é integrável em $[a,t]$ para todo o $t \in [a,b[$, mas ilimitada numa vizinhança de $b$. Nesse caso o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se convergente e

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \underbrace{\int_a^t f(x)\,dx}_{F(t)}$$

  desde que este limite exista em $\mathbb{R}$. Caso o limite não exista em $\mathbb{R}$ o integral impróprio $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se divergente.

- $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ (eventualmente podemos ter $f : [a,b]\setminus\{c\} \to \mathbb{R}$ ) é ilimitada numa vizinhança de $c \in ]a,b[$, mas integrável em qualquer intervalo $[a,t]$ com $a \le t < c$ e em qualquer intervalo $[z,b]$ com $c < z \le b$. O integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se convergente se e só se os integrais $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ forem ambos convergentes e neste caso escreve-se

  $$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

  Se um dos integrais $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ for divergente, $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se divergente.

No caso de $f : ]a,b[\to \mathbb{R}$ ser ilimitada numa vizinhança de $a$ e numa vizinhança de $b$ mas integrável em qualquer intervalo fechado $[z,t]$ com $a < z \le t < b$ e para algum $c \in ]a,b[$, os integrais impróprios $\int_a^c f(x)\,dx$ e $\int_c^b f(x)\,dx$ são convergentes, define-se

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

e diz-se que $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente; caso um dos integrais $\int_a^c f(x)\,dx$ ou $\int_c^b f(x)\,dx$ seja divergente, o integral $\int_a^b f(x)\,dx$ diz-se divergente.

Se $f$ for ilimitada numa vizinhança de $a$, numa vizinhança de $b$ e numa vizinhança de $c \in ]a,b[$, o que se pode dizer sobre

$$\int_a^b f(x)\,dx?$$

**Exemplo 7.3.** Considere-se o integral $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$.

Trata-se de um integral impróprio de 2ª espécie, já que $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} \ln t = -\infty$ e portanto a função é ilimitada em $]0,1]$.

Define-se a função $F : ]0,1] \to \mathbb{R}$ por $\displaystyle F(t) = \int_t^1 \ln x\,dx = t - t\ln t - 1$.

Estudando o limite $\displaystyle\lim_{t\to 0^+} F(t)$, podemos determinar a natureza do integral impróprio. Como,

$$\lim_{t\to 0^+} F(t) = \lim_{t\to 0^+} (t - t\ln t - 1) = -1,$$

o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ converge e

$$\int_0^1 \ln x\,dx = -1.$$

**Exercício resolvido 7.3.** Classifique e determine a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$.

**Resolução do exercício 7.3.** Repare-se que a função $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ é ilimitada numa vizinhança de $c = 0$. Assim, devemos considerar dois integrais impróprios

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx.$$

Definem-se as funções

$$F(t) = \int_{-1}^t \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\ t \in [-1,0[ \quad \text{e} \quad G(s) = \int_s^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx,\ s \in ]0,1]$$

Como $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2} + C$, $C \in \mathbb{R}$, temos

$$F(t) = \frac{3}{2}\sqrt[3]{t^2} - \frac{3}{2},\ t \in [-1,0[ \quad \text{e} \quad G(s) = \frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{s^2},\ s \in ]0,1].$$

Calculando agora os limites

$$\lim_{t\to 0^-} F(t) = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \lim_{s\to 0^+} G(s) = \frac{3}{2},$$

pode afirmar-se que os integrais $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ e $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ convergem e

$$\int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = -\frac{3}{2} \quad \text{e} \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \frac{3}{2}.$$

Pode então concluir-se que o integral $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx$ converge e

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\,dx = 0.$$

**Proposição 7.2.** *Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f$ a função definida em $]0,1]$ por $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.*

- *Se $\alpha < 1$ o integral impróprio* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge e*

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}$$

- *Se $\alpha \leq 1$ o integral impróprio* $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *diverge.*

*Demonstração.* Comecemos por considerar $\alpha = 1$. Nesse caso

$$\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{x}\,dx = \lim_{t\to 0^+} [\ln x]_t^1 = -\lim_{t\to 0^+} \ln t = +\infty,$$

e portanto o integral $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x}\,dx$ é divergente.

Seja agora $\alpha \neq 1$. Então

$$\int_t^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_t^1 = \frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{t^{\alpha-1}(1-\alpha)}.$$

Se $\alpha < 1$,

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{t^{\alpha-1}(1-\alpha)}\right) = \frac{1}{1-\alpha}$$

e o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é convergente, sendo

$$\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{1-\alpha}.$$

Se $\alpha > 1$,

$$\lim_{t\to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{1}{t^{\alpha-1}(1-\alpha)}+\right) = +\infty$$

e o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ é divergente. □

**Exercício 7.5** Classifique e determine a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x}\,dx;$
2. $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x(x-1)(x+1)}\,dx.$

## 7.3 Integrais impróprios de terceira espécie

Integrais de funções definidas num intervalo ilimitado $I$ e ilimitadas em pelo menos alguma vizinhança de um ponto desse intervalo, dizem-se **integrais impróprios de 3ª espécie**

Para fazer o seu estudo devemos subdividir o intervalo $I$ por forma a obter integrais impróprios de 1ª e 2ª espécie e estudar a natureza de cada um deles. Basta que um dos integrais impróprios de 1ª ou de 2ª espécie seja divergente para que o integral impróprio de 3ª espécie seja divergente. Para que haja convergência é necessário (e suficiente) que todos os integrais obtidos na decomposição sejam convergentes.

**Exercício resolvido 7.4.** Mostre que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$

**Resolução do exercício 7.4.** A função $f(x) = \dfrac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ é ilimitada numa vizinhança de $x = 0$ e o intervalo $]0, +\infty[$ é ilimitado, portanto consideram-se os integrais impróprios

$$\int_0^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx,$$

sendo $a$ um qualquer número real positivo.

Definem-se as funções $F(t) = \displaystyle\int_t^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ com $t \in ]0, a]$ e $G(s) = \displaystyle\int_a^s \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ com $s \in [a, +\infty[$. Como

$$\int \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2e^{-\sqrt{x}} + C,\ C \in \mathbb{R},$$

tem-se

$$F(t) = -2e^{-\sqrt{a}} + 2e^{-\sqrt{t}},\ t \in ]0, a] \quad \text{e} \quad G(s) = -2e^{-\sqrt{s}} + 2e^{-\sqrt{a}},\ s \in [a, +\infty[.$$

Calculando agora os limites

$$\lim_{t \to 0^+} F(t) = -2e^{-\sqrt{a}} + 2 \quad \text{e} \quad \lim_{s \to +\infty} G(s) = 2e^{-\sqrt{a}},$$

conclui-se que os integrais impróprios $\displaystyle\int_0^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx$, são convergentes com

$$\int_0^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = -2e^{-\sqrt{a}} + 2 \quad \text{e} \quad \int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2e^{-\sqrt{a}}.$$

Então,

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^a \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx + \int_a^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

**Exemplo 7.4.** Considere-se a função $f(x) = \dfrac{\ln|x|}{x}$ definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Como estudar

$$\int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln|x|}{x}\,dx? \tag{7.1}$$

Podemos considerar os integrais impróprios:

$$\int_{-1}^{0} \frac{\ln|x|}{x}\,dx, \quad \int_0^1 \frac{\ln|x|}{x}\,dx \quad \text{e} \quad \int_1^{+\infty} \frac{\ln|x|}{x}\,dx$$

Se os três integrais forem convergentes o integral impróprio (7.1) também o é; contudo, se um deles for divergente o integral (7.1) é divergente.

Vamos estudar a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln|x|}{x}\,dx$:

$$\lim_{t \to 0^-} \underbrace{\int_{-1}^{t} \frac{\ln|x|}{x}\,dx}_{F(t)} = \lim_{t \to 0^-} \left( \frac{1}{2} \ln^2|x| \Big|_{-1}^{t} \right) = +\infty$$

Logo $\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\ln|x|}{x}\,dx$ é divergente e, consequentemente, $\displaystyle\int_{-1}^{+\infty} \frac{\ln|x|}{x}\,dx$ é divergente.

**Exercício 7.6** Estude, em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, os seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}}\,dx$.

Os resultados deste exercício são muito úteis na prática para determinar a convergência ou divergência de outros integrais impróprios como mais à frente se verá.

**Exercício 7.7** Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx$;
2. $\displaystyle\int_{-1}^{2} \frac{1}{4-x^2}\,dx$;
3. $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{|x|}\,dx$;
4. $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x\,dx$;
5. $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx$;
6. $\displaystyle\int_{0}^{3} \frac{1}{(x-1)(x-2)}\,dx$.

**Observação 7.2.** Nos integrais impróprios de $2^{\underline{a}}$ espécie exige-se que a função seja ilimitada. Contudo, se a função for limitada mas não definida num dos extremos do intervalo, pode considerar-se um outro tipo de *integrais impróprios.*

Seja $f : ]a,b] \to \mathbb{R}$ uma função integrável em qualquer intervalo $[t,b]$ com $t \in ]a,b]$ e limitada em $]a,b]$. Tem-se que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to a^+} \int_t^b f(x)\,dx,$$

pois este integral é sempre convergente. Analogamente se formula para funções do tipo $f : [a,b[ \to \mathbb{R}$.

**Exemplo 7.5.** O integral $\displaystyle\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx$ é convergente.

Basta observar que a função

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{se} \quad x = 0 \end{cases}$$

é contínua em $[0,1]$ e portanto integrável neste intervalo. Como $g$ difere de $f$ apenas num ponto (neste caso $x=0$),

$$\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Repare-se que

$$\lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{\operatorname{sen} x}{x}\,dx = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

**Exercício 7.8** Calcule $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2} e^{-\frac{1}{x}}\,dx$.

## 7.4 Propriedades do integral impróprio

**Teorema 7.1.** *Sejam $f$ e $g$ duas funções definidas em $[a,+\infty[$ e integráveis em $[a,t]$ para todo o $t \geq a$.*

*Se os integrais impróprios $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ forem* ***convergentes*** *então, quaisquer que sejam $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx$ é convergente e*

$$\int_a^{+\infty} (\alpha f(x) + \beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^{+\infty} f(x)\,dx + \beta \int_a^{+\infty} g(x)\,dx.$$

**Observação 7.3.** Se **apenas um dos integrais** $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ ou $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ for divergente então $\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))\,dx$ é divergente; contudo, se ambos forem divergentes nada se pode concluir sem analisar o integral $\int_a^{+\infty} (f(x)+g(x))\,dx$.

**Exemplo 7.6.** Consideremos os integrais impróprios divergentes $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} -\frac{1}{x}\,dx$. O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right) dx = \int_1^{+\infty} 0\,dx = 0$ é convergente.

Consideremos agora os integrais impróprios divergentes $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\,dx$ e $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$. O integral impróprio $\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx$ é divergente.

**Observação 7.4.** Se $\alpha \neq 0$, $\int_a^{+\infty} \alpha g(x)\,dx$ e $\alpha \int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ são da mesma natureza (ambos convergentes ou ambos divergentes).

As propriedades apresentadas no teorema 7.1 podem ser estabelecidas para os demais tipos de integrais impróprios com as devidas adaptações. Apresentamos apenas um dos casos de integral impróprio de 2ª espécie.

**Teorema 7.2.** *Sejam $f$ e $g$ duas funções definidas em $[a,b[$ e integráveis em $[a,t]$ para todo o $a \leq t < b$.*

*Se os integrais impróprios $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$ forem **convergentes** então, quaisquer que sejam $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, o integral impróprio $\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx$ é convergente e*

$$\int_a^b (\alpha f(x)+\beta g(x))\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx.$$

## 7.5 Critérios de convergência para integrais impróprios

Frequentemente a determinação de uma primitiva ou o cálculo de limites são processos morosos e alguns difíceis, daí que quando se pretende estudar apenas a convergência ou divergência de um integral impróprio se recorra a critérios específicos.

### 7.5.1 Critério de comparação

Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \widetilde{\mathbb{R}}$[2] com $b > a$ e $f, g : [a,b[\to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a,t]$ para todo o $t$ tal que $a < t < b$.

Se existe $c \in ]a,b[$ tal que $0 \leq f(x) \leq g(x), \forall x \in ]c,b[$ e

(i) se $\int_a^b g(x)\,dx$ converge, então, $\int_a^b f(x)\,dx$ é convergente;

(ii) se $\int_a^b f(x)\,dx$ diverge, então, $\int_a^b g(x)\,dx$ é divergente.

[2] Poderemos ter integrais impróprios de 1ª espécie, quando $b = +\infty$.

$f, g : [a, +\infty[ \longrightarrow \mathbb{R}$ contínuas

Se $0 \leq f(x) \leq g(x)$, $\forall x \in [c, +\infty[$ $(c \geq a)$ então

(i) Se $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ converge então $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ converge

(ii) Se $\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ diverge então $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ diverge.

Este critério aplica-se a integrais impróprios de 1ª espécie, quando $b = +\infty$ ou a integrais impróprios de 2ª espécie onde a função $f$ é ilimitada numa vizinhança de $b \in \mathbb{R}$.

De modo análogo, estabelece-se o critério de comparação para outros integrais impróprios de $1^{\underline{a}}$ e de $2^{\underline{a}}$ espécie.

**Observação 7.5.** Deve ter-se em atenção o facto de não se poder aplicar o critério de comparação entre integrais impróprios de espécies diferentes ou impróprios em pontos distintos.

**Exemplo 7.7.** $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx$ é convergente?

Uma vez que,

- para cada $x \geq 1$, $\quad 0 \leq \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) \leq \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} \qquad \Big(\forall x \geq 0, \quad \operatorname{sen} x \leq x\Big)$
- $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\, dx$ é convergente (Proposição 7.1),

podemos concluir, pelo critério de comparação, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x^{\frac{3}{2}}}\right) dx$ é convergente.

**Exercício resolvido 7.5.** Mostre que o integral $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx$ converge.

**Resolução do exercício 7.5.** Atendendo às seguintes desigualdades

$$0 \leq \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5} \leq \frac{1}{(x+1)^5} \leq \frac{1}{x^5}, \qquad \forall x \geq 1$$

e ao facto de que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^5}\, dx$ é convergente (Proposição 7.1) pode concluir-se que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx$ é convergente. Como $\displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx$ é o integral de uma função contínua em $[0,1]$ logo existe (não é um integral impróprio), pode afirmar-se que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx = \int_0^1 \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx + \int_1^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx$$

é um integral convergente.

**Exercício 7.9** O integral $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ converge?

### 7.5.2 Corolário do Critério de comparação

O critério de comparação enunciado em 7.5.1 pode ser usado sob a forma de limite.

**Proposição 7.3.** ***(Critério do Limite)*** *Sejam $f, g : [a, +\infty[ \to \mathbb{R}$ integráveis em $[a, t]$, para todo o $t \geq a$. Suponhamos que, para cada $x \in [a, +\infty[$,*

$$f(x) \geq 0 \quad \text{ e } \quad g(x) > 0$$

*e seja $L = \displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{g(x)}$.*

*(i) Se* $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, então os integrais impróprios* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *são da mesma natureza.*

*(ii) Se* $L = 0$ *e* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *é convergente, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é convergente.*

*(iii) Se* $L = +\infty$ *e* $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,dx$ *é divergente, então* $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ *é divergente.*

**Observação 7.6.** De modo análogo, estabelece-se o critério do limite para integrais de $1^{\underline{a}}$ espécie impróprios no limite inferior de integração. Com as devidas alterações, também se pode enunciar o critério do limite para integrais impróprios de $2^{\underline{a}}$ espécie.

Exemplifica-se o critério do limite para um integral de $2^{\underline{a}}$ espécie em que o problema se situa no extremo inferior de um intervalo $]a, b]$, com $a,\, b \in \mathbb{R}$.

**Proposição 7.4.** ***(Critério do Limite)*** *Sejam* $f, g : ]a, b] \to \mathbb{R}$ *integráveis em* $[t, b]$*, para todo o* $t$ *que satisfaz* $a < t \leq b$*. Suponhamos que, para cada* $x \in ]a, b]$*,*

$$f(x) \geq 0 \qquad e \qquad g(x) > 0$$

*e seja* $L = \displaystyle\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)}$.

*(i) Se* $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, então os integrais impróprios* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ *e* $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ *são da mesma natureza.*

*(ii) Se* $L = 0$ *e* $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ *é convergente, então* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ *é convergente.*

*(iii) Se* $L = +\infty$ *e* $\displaystyle\int_a^{b} g(x)\,dx$ *é divergente, então* $\displaystyle\int_a^{b} f(x)\,dx$ *é divergente.*

Assim como no caso do critério de comparação, deve ter-se em atenção o facto de não se poder aplicar o critério do limite entre integrais impróprios de espécies diferentes ou impróprios em pontos distintos.

**Exemplo 7.8.** Considere-se o integral impróprio de $1^{\underline{a}}$ espécie $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx$.

Observe-se que

$$f(x) = \operatorname{sen} \frac{1}{x} \geq 0, \quad \forall x \geq 1 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{t \to 0^+} \frac{\operatorname{sen} t}{t} = 1$$

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\, dx$ é divergente pode afirmar-se, por (i) da proposição 7.3, que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \operatorname{sen} \frac{1}{x}\, dx$ é divergente.

**Exercício resolvido 7.6.** Determine a natureza do integral impróprio de $2^{\underline{a}}$ espécie $\displaystyle\int_1^{2} \frac{x}{(x-1)(x+2)}\, dx$.

**Resolução do exercício 7.6.** Só poderemos comparar integrais impróprios da mesma espécie e no mesmo ponto. Assim, consideremos o integral impróprio de $2^{\underline{a}}$ espécie $\displaystyle\int_1^{2} \frac{1}{x-1}\, dx$, que é divergente, já que, sendo $F(t) = \displaystyle\int_t^{2} \frac{1}{x-1}\, dx = -\ln|t-1|$, se tem

$$\lim_{t \to 1^+} F(t) = +\infty.$$

No intervalo $]1,2]$, as funções $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ e $g(x)=\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}$ são ambas positivas e estamos em condições de poder aplicar o critério do limite:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{\dfrac{x}{(x-1)(x+2)}}{\dfrac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x+2}=\frac{1}{3}.$$

Sendo este limite um número real, podemos afirmar, por (i) do critério 7.4, que os integrais impróprios $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ e $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx$ têm a mesma natureza. Como $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x-1}\,dx$ é divergente, também o integral $\displaystyle\int_1^2 \frac{x}{(x-1)(x+2)}\,dx$ é divergente.

**Exercício 7.10** Estude, utilizando o critério de comparação ou critério do limite, a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx;$
2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\pi}{1-\sqrt{x}}\,dx;$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2x}{e^{2x}-1}\,dx;$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{5x^2-3}{x^8+x-1}\,dx;$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{x^2}\,dx;$
6. $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{-x^5}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

## 7.6 Convergência absoluta

Um integral impróprio $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$, com $a,b\in\widetilde{\mathbb{R}}$, diz-se **absolutamente convergente** quando o integral impróprio do módulo da função integranda, $\displaystyle\int_a^b \big|f(x)\big|\,dx$, for convergente.

**Teorema 7.3.** *Seja $f:[a,+\infty[\to\mathbb{R}$ integrável em $[a,t]$ para todo o $t\geq a$. Se o integral impróprio $\displaystyle\int_a^{+\infty} \big|f(x)\big|\,dx$ for convergente então $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ é também convergente.*

**Observação 7.7.** Podemos enunciar um resultado análogo a esta proposição para integrais de 1ª espécie impróprios no limite inferior de integração. Com as devidas alterações também se pode enunciar esta proposição para integrais impróprios de 2ª espécie.

Resumindo, **todo o integral impróprio absolutamente convergente é convergente**.

**Exemplo 7.9.** O integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ é absolutamente convergente. Repare-se que

$$\left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right|\leq\frac{1}{x^2},\quad \forall x\leq -1$$

e que o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{1}{x^2}\,dx$ é convergente. Então, pelo Critério de Comparação, o integral impróprio $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \left|\frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\right|\,dx$ converge e, portanto, $\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}\,dx$ também converge (absolutamente).

**Exercício 7.11** Estude a natureza dos seguintes integrais impróprios:

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\cos x}{\sqrt{x}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^5+2x}}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-2x}\operatorname{sen}\sqrt{x}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{xe^{-x}}{\sqrt{x^2+x+1}}\,dx$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(3x)}{x^2+2}\,dx$
6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}\,dx$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$
8. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{x^3+1}{x^2(x^2+1)}\,dx$
9. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{x^{\frac{5}{2}}}\,dx$
10. $\displaystyle\int_5^{+\infty} \frac{1}{x\ln^3 x}\,dx$
11. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}\,dx$
12. $\displaystyle\int_{-3}^{3} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\,dx$
13. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{-1}{x^3+1}\,dx.$

**Exercício 7.12** Seja $f(x) = \begin{cases} m & \text{se } |x| \leq 2 \\ 0 & \text{se } |x| > 2 \end{cases}$. Determine $m \in \mathbb{R}$ de modo a que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$

**Exercício 7.13** Mostre que o integral impróprio $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x}}\,dx$ é convergente e tem valor igual a 2.

**Exercício 7.14** Sejam $\alpha > 0$ e $f$ uma função real positiva e contínua no intervalo $[0,1]$. Estude a natureza do seguinte integral impróprio em função do parâmetro $\alpha$.

$$\int_0^1 \frac{f(x)}{x^\alpha}\,dx.$$

**Exercício 7.15** Estude a natureza do integral impróprio seguinte, indicando o seu valor em caso de convergência:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1+x}{1+x^2}\,dx.$$

**Exercício 7.16** Considere a função de domínio $\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{\arctan(2x)}{1+4x^2}.$$

1. Determine a família de primitivas $\displaystyle\int f(x)\,dx.$
2. Estude a natureza do integral impróprio $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$, indicando o seu valor em caso de convergência.

## Soluções dos exercícios

**Exercício 7.2**

1. Converge e $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{1+x^2}\,dx = 2\pi$.
2. Diverge.
3. Converge e $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} te^{-2t}\,dt = \frac{1}{4}$.
4. Converge e $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{\alpha t}e^{-t}\,dt = \frac{1}{1-\alpha}$, $(\alpha < 1)$.

**Exercício 7.4** Diverge se $\alpha \geq 0$ e converge se $\alpha < 0$ sendo neste caso $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} e^{\alpha x}\,dx = -\frac{1}{\alpha}$.

**Exercício 7.5**

1. Diverge;
2. Diverge.

**Exercício 7.6**

1. Diverge qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$;
2. Se $\alpha \leq 0$ o integral diverge, se $\alpha > 0$ o integral converge e $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{e^{\alpha x}}\,dx = \frac{1}{\alpha}$.

**Exercício 7.7**

1. Converge e $\displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{1}{\sqrt{4-x^2}}\,dx = \pi$;
2. Diverge;
3. Diverge;
4. Diverge;
5. Converge e $\displaystyle\int_{0}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{e^x-1}}\,dx = \pi$;
6. Diverge.

**Exercício 7.8** $e^{-1}$.

**Exercício 7.9** Diverge.

**Exercício 7.10**

1. Converge;
2. Diverge;
3. Converge;
4. Converge;
5. Diverge;
6. Converge.

**Exercício 7.11**

1. Converge absolutamente;
2. Converge absolutamente;
3. Converge absolutamente;
4. Converge absolutamente;
5. Converge absolutamente;
6. Converge absolutamente;
7. Converge absolutamente;
8. Diverge;
9. Converge absolutamente;
10. Converge absolutamente;
11. Diverge;
12. Converge absolutamente;
13. Converge absolutamente.

**Exercício 7.12** $m = \frac{1}{4}$.

**Exercício 7.14** O integral converge se $\alpha < 1$ e diverge se $\alpha \geq 1$.

**Exercício 7.15** Divergente.

**Exercício 7.16**

1. $\frac{\arctan^2(2x)}{4} + C$, com $C \in \mathbb{R}$.
2. Converge e o seu valor é $\frac{\pi^2}{16}$.

**Exercício 7.2** Estude

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{2}{1+x^2}}_{f(x)} dx = 2 \times \pi$

- $\int_0^{+\infty} \frac{2}{1+x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \int_0^t \frac{2}{1+x^2} dx =$

$= \lim_{t \to +\infty} \left[ 2 \arctan x \right]_0^t = \lim_{t \to +\infty} 2 \arctan t = \pi$

- $\int_{-\infty}^{0} \frac{2}{1+x^2} dx = \lim_{t \to +\infty} \left[ 2 \arctan t \right]_t^0 =$

$= \lim_{t \to +\infty} -2 \arctan t = \pi$

Obs. $f$ é par. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = 2 \int_0^{+\infty} f(x)\, dx$

4. $\int_0^{+\infty} e^{\alpha t} e^{-t}\, dt, = \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)t}\, dt$

$\underline{\alpha = 1}$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{0t}\, dt = \int_0^{+\infty} 1\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} 1\, dt =$

$= \lim_{u \to +\infty} \left[ t \right]_0^u = \lim_{u \to +\infty} u = +\infty$

$\underline{\alpha \neq 1}$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)t}\, dt = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} e^{(\alpha-1)t}\, dt =$

$= \lim_{u \to +\infty} \left[ \frac{e^{(\alpha-1)t}}{\alpha-1} \right]_0^u = \lim_{u \to +\infty} \frac{1}{\alpha-1} \left( e^{(\alpha-1)u} - 1 \right)$

Se $\alpha - 1 < 0$ o resultado é $\frac{1}{\alpha-1} \times (-1) = \frac{1}{1-\alpha}$

Se $\alpha - 1 > 0$ diverge.

$\therefore$ Se $\alpha < 1$ $\quad \int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)t}\, dt = \frac{1}{1-\alpha}$

Se $\alpha \geq 1$ diverge.

**Proposição 7.1.** *Seja* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $f$ *a função definida em* $[1, +\infty[$ *por* $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$.

- *Se* $\alpha > 1$ *o integral impróprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *converge e*

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx = \frac{1}{\alpha - 1}$$

- *Se* $\alpha \leq 1$ *o integral impróprio* $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,dx = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,dx$ *diverge.*

**Exercício 7.9** O integral $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\, dx$ converge?

$$\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}}\, dx$$

Se $x \geq 3$ então $\ln x > \ln e = 1$, logo,

$$\frac{\ln x}{x^{1/2}} > \frac{1}{x^{1/2}} \text{ para } x \geq 3.$$

Como $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$ diverge $\left(\alpha = \frac{1}{2} \leq 1\right)$

$\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{1}{x^{1/2}}\, dx$ diverge. Como

$\displaystyle\frac{\ln x}{x^{1/2}} \geq \frac{1}{x^{1/2}}$ para $x \geq 3$, pelo critério

de comparação $\displaystyle\int_3^{+\infty} \frac{\ln x}{x^{1/2}}\, dx$ diverge.

**Exercício resolvido 7.5.** Mostre que o integral $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx$ converge.

$$\frac{e^{-x^2}}{\underbrace{(x+1)^5}_{\geq 1}} \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$$

Como $\int_0^{+\infty} e^{-x}\, dx$ converge, pelo C.C.,

$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-x^2}}{(x+1)^5}\, dx$ converge.