

# Departamento de Matemática, Universidade de Aveiro

## Matemática Discreta 2022/23

### Folha 1

1. Indique quais as ocorrências livres e ligadas de cada uma das variáveis das seguintes fórmulas:

- a)  $\exists y P(x, y)$
- b)  $(\forall x (P(x) \rightarrow Q(x))) \rightarrow (\neg(P(x)) \vee Q(y))$
- c)  $\exists x (P(y, z) \wedge \forall y (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$ ;
- d)  $P(a, f(a, b))$ ;
- e)  $\exists x (P(x) \rightarrow \neg Q(x))$ ;
- f)  $\forall x ((P(x) \wedge C(x)) \rightarrow \exists y L(x, y))$ .

NOTA.  $x, y, z, a, b$  são variáveis.

2. Exprima por meio de fórmulas bem formadas as seguintes afirmações:

- a) Todas as aves têm penas.
- b) Todas as crianças são mais novas que os seus pais.
- c) Todos os insectos são mais leves do que algum mamífero.
- d) Nenhum número é menor do que zero.
- e) Zero é menor do que qualquer número.
- f) Alguns números primos não são pares.
- g) Todo o número par é número primo.

3. No que se segue,  $c(x)$ ,  $s(x)$  e  $d(x)$  representam as afirmações « $x$  é uma explicação clara», « $x$  é satisfatória» e « $x$  é uma desculpa», respectivamente. Admita que o universo do discurso para  $x$  é o conjunto de todos os textos em Português. Traduza as seguintes fórmulas bem formadas para linguagem comum:

- a)  $\forall x c(x) \rightarrow s(x)$ ;
- b)  $\exists x d(x) \wedge \neg s(x)$ ;
- c)  $\exists x d(x) \wedge \neg c(x)$ .

4. Seja  $\Pi$  o conjunto dos subconjuntos de pontos de um certo plano. Tomando  $\Pi$  para universo e utilizando apenas os três predicados

$r(x)$  representa « $x$  é uma recta»,

$c(x)$  representa « $x$  é uma circunferência»,

$i(x, y)$  representa «a intersecção de  $x$  e  $y$  é não vazia»,

traduza em lógica de predicados cada uma das afirmações seguintes:

- Toda a recta intersecta alguma circunferência.
  - Alguma recta não intersecta alguma circunferência.
  - Nenhuma recta intersecta todas as circunferências.
5. Escreva as seguintes frases usando lógica de primeira ordem, com recurso aos predicados  $\text{Casa}(x)$  (« $x$  é uma casa»);  $\text{Grande}(x)$  (« $x$  é grande»);  $\text{Cara}(x)$  (« $x$  é cara»);  $\text{Apartamento}(x)$  (« $x$  é um apartamento»);  $\text{PMenor}(x, y)$  («preço de  $x$  é menor do que o preço de  $y$ »).
- Todas as casas grandes são caras.
  - Qualquer apartamento custa menos do que pelo menos uma casa grande.
6. Usando o predicado  $\text{gosta}(x, y)$  ( $x$  «gosta de»  $y$ ), exprima por meio de uma fórmula a afirmação:
- Toda a gente tem alguém que gosta de si;
  - As pessoas de quem todos gostam também gostam de si próprias.
  - Formule a negação da proposição indicada na alínea (a) e escreva uma frase em linguagem comum que traduza essa negação.

7. Obtenha, na forma mais simplificada possível, a negação da seguinte fórmula

$$\forall y \exists x ( (q(x) \rightarrow p(y)) \vee (p(y) \wedge q(x)) ) .$$

8. Considere a fórmula

$$Q : \quad \forall x \exists y ((t(x) \wedge v(y, x)) \rightarrow \neg p(x, y))$$

para uma interpretação com o domínio  $\mathbb{N}$  e onde  $t(x)$  representa « $x > 1$ »,  $v(y, x)$  representa « $y = x + 1$ » e  $p(x, y)$  representa « $x$  divide  $y$ ».

- Diga, justificando, qual o valor lógico de  $Q$ .
  - Qual o valor lógico da fórmula  $(t(x) \wedge v(y, x)) \rightarrow \neg p(x, y)$  para a valoração  $V$  com  $V(x) = 1$  e  $V(y) = 2$ .
9. Considere um universo  $X$  com os objetos  $A$ ,  $B$  e  $C$  (isto é,  $X = \{A, B, C\}$ ) e uma linguagem onde  $\alpha$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  são símbolos de constante,  $f$  é um símbolo de função com um argumento e  $R$  é um símbolo de predicado com dois argumentos. Considere a seguinte interpretação:

**símbolos de constante:**  $\alpha \mapsto A$ ,  $\beta \mapsto A$  e  $\gamma \mapsto B$ ;

**símbolo de função**  $f$ :  $f(A) = B$ ,  $f(B) = C$ ,  $f(C) = C$ .

**símbolo de predicado**  $R$ :  $\{(B, A), (C, B), (C, C)\}$ .

Com esta interpretação, avalie as seguintes fórmulas:

- a)  $R(\alpha, \beta)$ ;
- b)  $\exists x f(x) = \beta$ ;
- c)  $\forall w R(f(w), w)$ .

10. Para cada fórmula seguinte determine, se possível, um modelo e uma interpretação em que a mesma seja não válida:

- a)  $\forall x (P(x, a) \rightarrow \neg Q(x, a))$ , onde  $a$  denota um símbolo de constante;
- b)  $\exists x \exists y ((P(x, y) \wedge \forall z (\neg Q(x, y) \vee P(y, z)))$ .

11. Transforme as seguintes fórmulas na forma normal disjuntiva prenex e na forma normal conjuntiva prenex:

- a)  $(\forall x S(x)) \rightarrow (\exists z P(z))$ ;
- b)  $\neg(\forall x (S(x) \rightarrow P(x)))$ ;
- c)  $\forall x (P(x) \rightarrow (\exists y Q(x, y)))$ ;
- d)  $\exists x (\neg(\exists y P(x, y)) \rightarrow (\exists z (Q(z) \rightarrow R(x))))$ ;
- e)  $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$ .

12. Encontre a forma standard de Skolem das seguintes fórmulas:

- a)  $\neg((\forall x P(x)) \rightarrow (\exists y P(y)))$
- b)  $\neg((\forall x P(x)) \rightarrow (\exists y \forall z Q(y, z)))$
- c)  $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \wedge Q(x, z)) \vee R(x, y, z))$

13. Mostre que o conjunto

$$S = \{P \vee R, \neg Q \vee R, \neg S \vee Q, \neg P \vee S, \neg Q, \neg R\}$$

é inconsistente.

14. Calcule  $E\Theta$  em cada um dos seguintes casos:

- a)  $\Theta = \{a/x, f(z)/y, g(x)/z\}$ ,  $E = P(h(x), z, f(z))$ ;
- b)  $\Theta = \{f(y)/x, a/y\}$ ,  $E = F(a, h(a), x, h(y))$ ;

15. Para cada um dos seguintes conjuntos de fórmulas indique, justificando, se são ou não unificáveis. Em caso afirmativo, encontre um seu unificador mais geral. Tenha em atenção que « $a$ » e « $b$ » denotam símbolos de constantes.

- a)  $\{P(f(x), z), P(y, a)\};$
- b)  $\{P(f(x), x), P(z, a)\};$
- c)  $\{P(a, x, f(g(y))), P(b, h(z, w), f(w))\};$
- d)  $\{S(x, y, z), S(u, g(v, v), v)\};$
- e)  $\{P(x, x), P(y, f(y))\};$
- f)  $\{Q(f(a), g(x)), Q(y, y)\};$
- g)  $\{Q(f(x), y), Q(z, g(w))\}.$

16. Considerando o conjunto de fórmulas bem formadas

$$\{C(x, \text{SenhorAneis}, y), C(\text{Maria}, z, f(t)), C(w, \text{SenhorAneis}, f(\text{MesaAzul}))\}$$

indique se é unificável e, no caso afirmativo, determine o unificador mais geral.

17. Averigüe se as seguintes cláusulas admitem um factor. Em caso afirmativo, determine-o.

- a)  $P(x) \vee P(a) \vee Q(f(x)) \vee Q(f(a));$
- b)  $P(x) \vee P(f(y)) \vee Q(x, y).$

18. Encontre as possíveis resolventes (se existirem) dos seguintes pares de cláusulas:

- a)  $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, b)$  e  $C_2 : P(a) \vee Q(a, b);$
- b)  $C_1 : \neg P(x) \vee Q(x, x)$  e  $C_2 : \neg Q(a, f(a)).$

19. Considere as seguintes fórmulas da lógica de primeira ordem:

$$\mathbf{F1:} \forall x (G(x) \rightarrow \forall y (P(y) \rightarrow L(x, y)))$$

$$\mathbf{F2:} \exists x G(x)$$

$$\mathbf{F3:} \exists x \forall y (P(y) \rightarrow L(x, y))$$

Usando o princípio da resolução mostre que F3 é consequência de F1 e F2.

20. Considere as seguintes afirmações:

- Todo o aluno da Universidade de Aveiro que estuda com afinco passa a Matemática Discreta.
- O João é um aluno da Universidade de Aveiro.
- O João estuda com afinco.

- a) Exprima as afirmações anteriores como fbf's do cálculo de predicados.

- b) Prove, usando o princípio da resolução, que o João passa a Matemática Discreta.
21. Considere as seguintes afirmações, no universo dos animais:
- Os animais com pelos são mamíferos.
  - Os ursos são animais com pelos.
  - Os coelhos são mamíferos.
  - O Winnie é um urso.
  - O Bugsbunny é um coelho.
  - O Sylvester é um animal com pelos.
- a) Represente-as em lógica de primeira ordem.
- b) Usando o Princípio de Resolução, responda às seguintes perguntas:
- (i) O Winnie é mamífero?
  - (ii) Quais são os mamíferos?
  - (iii) Quem é que tem pelos?
22. Considere cada um dos símbolos de predicado  $SH(x)$ ,  $IH(x)$  e  $TSP(x)$  cuja interpretação é a seguinte:
- $SH(x)$  representa « $x$  é um super-herói»;
  - $IH(x)$  representa « $x$  é um infra-herói»;
  - $TSP(x)$  representa « $x$  tem super poderes».
- Vamos admitir que são conhecidos os seguintes factos: **(i)** Os super-heróis têm super poderes; **(ii)** Existe alguém que não tem super poderes; **(iii)** Só existem super-heróis ou infra-heróis.
- a) Explícite os factos (i), (ii) e (iii) com fórmulas bem formadas da lógica de primeira ordem, utilizando os símbolos de predicado acima definidos.
- b) Admitido (i), (ii) e (iii) como factos verdadeiros, aplicando o princípio da resolução, demonstre que existe pelo menos um infra-herói.
23. São conhecidos os seguintes factos:
- Todo e qualquer cavalo é mais rápido do que todo e qualquer galgo;
  - Existe pelo menos um galgo que é mais rápido do que todo e qualquer coelho;
  - Para todos e quaisquer  $x$ ,  $y$  e  $z$ , se  $x$  é mais rápido do que  $y$  e  $y$  é mais rápido do que  $z$ , então  $x$  é mais rápido do que  $z$ .
  - Roger é um coelho;

- Harry é um cavalo.

a) Usando os predicados

- $\text{Cavalo}(x)$  representa « $x$  é um cavalo»;
- $\text{Galgo}(x)$  representa « $x$  é um galgo»;
- $\text{Coelho}(x)$  representa « $x$  é um coelho»;
- $\text{MaisRápido}(x, y)$  representa « $x$  é mais rápido do que  $y$ »;

represente os factos conhecidos na lógica de primeira ordem.

b) Mostre, usando resolução, que Harry é mais rápido do que Roger.

---

## Algumas soluções

**1** a)  $x$  livre,  $y$  ligada

b)  $x$  livre e ligada,  $y$  livre

c)  $x$  ligada,  $y$  livre e ligada,  $z$  livre

d)  $a$  e  $b$  livres

e)  $x$  ligada

f)  $x$  ligada,  $y$  ligada.

**2** a)  $\forall x (\text{ave}(x) \rightarrow \text{tempenas}(x))$

b)  $\forall x \forall y ((\text{criança}(x) \wedge \text{pai}(x, y)) \rightarrow \text{maisnovo}(x, y))$

c)  $\forall x \text{insecto}(x) \rightarrow \exists y (\text{mamifero}(y) \wedge \text{maisleve}(x, y))$

d)  $\forall x (\text{numero}(x) \rightarrow x \geq 0)$

e)  $\forall x (\text{numero}(x) \rightarrow 0 < x)$

f)  $\exists x (\text{primo}(x) \wedge \neg \text{par}(x))$

g)  $\forall x (\text{par}(x) \rightarrow \text{primo}(x))$

**3** a) Todas as explicações claras são satisfatórias;

b) Algumas desculpas não são satisfatórias;

c) Há desculpas que não são explicações claras.

**4** a)  $\forall x (r(x) \rightarrow \exists y (c(y) \wedge i(x, y)))$

b)  $\exists x \exists y ( r(x) \wedge c(y) \wedge \neg i(x, y) )$

c)  $\forall x ( r(x) \rightarrow \exists y ( c(y) \wedge \neg i(x, y) ) )$

**5** a)  $\forall x ((\text{Casa}(x) \wedge \text{Grande}(x)) \rightarrow \text{Cara}(x))$

b)  $\forall x (\text{Apartamento}(x) \rightarrow \exists y (\text{Casa}(y) \wedge \text{Grande}(y) \wedge \text{PMenor}(x, y)))$

**6** a)  $\forall x \exists y \text{gosta}(y, x)$

b)  $\forall x ((\forall y \text{gosta}(y, x)) \rightarrow \text{gosta}(x, x))$

c)  $\exists x \forall y \neg \text{gosta}(y, x)$ ; Existe alguém de quem ninguém gosta.

**7**  $\exists y \forall x \neg (q(x) \rightarrow p(y))$

**8** a) A proposição  $Q$  é *Verdadeira*.

b) Valor lógico da proposição: *Verdadeiro*;

**9** a) Falsa;

b) Falsa;

c) Verdadeira.

**11** a)  $\exists x \exists z (\neg S(x) \vee P(z))$  (ou  $\exists x (\neg S(x) \vee P(x))$ )

b)  $\exists x (S(x) \wedge \neg P(x))$

c)  $\forall x \exists y (\neg P(x) \vee Q(x, y))$

d)  $\exists x \exists y \exists z (P(x, y) \vee \neg Q(z) \vee R(x))$

e)  $\forall x \exists y \exists z ((\neg P(x, y) \vee R(x, y, z)) \wedge (Q(x, z) \vee R(x, y, z)))$ , na forma normal conjuntiva.

**12** a)  $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg P(y)) \equiv \forall z \perp$

b)  $\forall x \forall y (P(x) \wedge \neg Q(y, f(x, y)))$  (ou  $\forall x (P(x) \wedge \neg Q(x, f(x)))$ )

c)  $\forall x ((\neg P(x, f(x)) \vee R(x, f(x), g(x))) \wedge (Q(x, g(x)) \vee R(x, f(x), g(x))))$

**14** Calcule  $E\Theta$  em cada um dos seguintes casos:

a)  $E\Theta = P(h(a), g(x), f(g(x)))$

b)  $E\Theta = F(a, h(a), f(y), h(a))$

**15** a)  $\{f(x)/y, a/z\}$

b)  $\{a/x, f(a)/z\}$

c) Não

d)  $\{u/x, g(v, v)/y, v/z\}$

e) Não.

f) Não.

g)  $\{f(x)/z, g(w)/y\}$

**17** a)  $P(a) \vee Q(f(a))$

b)  $P(f(y)) \vee Q(f(y), y)$

**18** a)  $Q(a, b)$

b) Não existe