MPEI 2023-2024

Geração de números aleatórios

Motivação – Exemplo de necessidade

- Gerar strings em que quer as letras quer o comprimento assumem distribuições mais próximas da realidade

  – Comprimento seguindo uma distribuição Normal
    - com média e variância estimada de um conjunto de textos

  – As letras seguem a distribuição para o Português
    - Que vimos numa aula anterior

Geradores

- Para situações como as do exemplo, necessitamos de gerar, ou simular, vectores de números aleatórios tendo uma determinada distribuição

- Nos primeiros tempos da simulação utilizavam-se métodos mecânicos
  - Ex: moeda, dado
- Mais tarde utilizaram-se propriedades de dispositivos e elementos
  - Exemplos (atuais): decaimento do Césio-137

- Na área da Informática, foram substituídos por algoritmos que se podem implementar em computador, os Geradores de números pseudo-aleatórios
  - São algoritmos determinísticos, pelo que é usual designar os números gerados por "pseudo-aleatórios"

Abordagens principais

- Gerar directamente

- Gerar número “aleatório” de uma distribuição uniforme (contínua) e transformar …
  - Neste caso, torna-se necessário ser capaz de gerar variáveis aleatórias com a distribuição uniforme
    - Em geral distribuída entre 0 e 1
  - É a abordagem comum

Geração de variáveis aleatórias com distribuição uniforme entre 0 e 1

Algoritmos congruenciais

- Os métodos mais comuns para gerar sequência pseudo-aleatórias são os chamados *linear congruential generators - LCG* (algoritmo congruencial linear)

- Este geradores geram uma sequência de números através da fórmula

$$X_{i+1} = (aX_i + c) \quad mod\, m$$

- Com X_0 sendo a "semente" (seed) e *a*, *c*, *m* (todos inteiros positivos) designados de multiplicador, incremento e módulo, respetivamente

- Quando $c = 0$ o algoritmo designa-se por congruencial multiplicativo

Algoritmos congruenciais

- Como X_i pode apenas assumir os valores {0, 1, ..., m-1}, os números

$$U_i = \frac{X_i}{m}$$

são designados por números pseudo-aleatórios

e constituem uma aproximação a uma sequência de variáveis aleatórias uniformemente distribuídas

Processo de cálculo em detalhe

1. Escolher os valores de *a, c* e *m*
2. Escolher a semente X_0 (tal que 1<= X_0 <=*m*)

3. Calcular o próximo número aleatório usando a expressão

$$X_1 = (aX_0 + c)\; mod\; m$$

4. Substituir X_0 por X_1 e voltar ao ponto anterior

Exemplo

- Fazendo *a*=9, *c*=1, *m*=17 e $X_0 = 7$

n	x_n	y=9x$_n$+1	y mod 17	$x_{n+1}/17$
0	X_0=7	9*7+1=64	13	13/17 = 0.7647
1	X_1=13	118	16	16/17 = 0.9412
2	X_2=16	145	9	0.5294
3	X_3=9	82	14	0.8235
4	X_4=14	127	8	0.4706

números ***pseudo-aleatórios*** *inteiros entre* ***0 e 16*** *(=17-1)*

números pseudo-aleatórios inteiros entre 0 e 1

Como escolher os parâmetros ?

- A ciclo de repetição da sequência é no máximo *m*
- Será, portanto, periódica com um período que não excede *m*

- Mas pode ser muito pior
  - Exemplo: *a*=*c*= X_0=3 e *m*=5 gera a sequência {3,2,4,0,3 …} com período 4

- Apenas algumas combinações de parâmetros produzem resultados satisfatórios
  - Exemplo: Usar $m = 2^{31} - 1$ e $a = 7^5$ em computadores de 32 bits

Matlab

- Exemplo: a=c= X_0=3 e m=5   gera a sequência {3,2,4,0,3 ...}

```
function U=lcg(X0,a,c,m, N)
U=zeros(1,N);
U(1)=X0;
for i=2:N
   U(i) =   rem(a*U(i-1)+c, m);
end
```

Outros algoritmos congruenciais

- Uma generalização que se pode fazer do algoritmo congruencial multiplicativo é basear o cálculo do novo valor numa combinação linear das *k* amostras anteriores

- Um exemplo deste tipo baseia-se na sequência de **Fibonacci**

$$x_i = x_{i-1} + x_{i-2},\ \ x_1 = 1, x_0 = 0$$

- Como a utilização directa não dá bons resultados, usa-se

$$x_i = (x_{i-j} + x_{i-k}) \bmod m$$

- Para j=31, k=63, m=2^{64} temos período de 2^{124}

Outros algoritmos congruenciais

- Outra estratégia: combinar os resultados obtidos com dois geradores congruenciais
  - que, com a escolha conveniente dos parâmetros, vai permitir maiores períodos

  - Conhecida por Combined Multiple Recursive Generator

- Na implementação em Matlab consiste em:

$$x_{1,n} = (14033580 x_{1,n-2} - 810728 x_{1,n-3}) \bmod m_1$$
$$x_{2,n} = (527612 x_{2,n-1} - 1370589 x_{2,n-3}) \bmod m_2$$

- Sendo a saída

$$z_n \equiv (x_{1,n} - x_{2,n}) \bmod m_1$$

Outros geradores

- **FSR** – Feedback Shift Register
  - Relacionados com os geradores recursivos anteriores
  - A formula é aplicada a bits
    - Conjuntos de *k* bits representam inteiros
  - A formula é realizada recorrendo a um Shift Register
    - Vetor de bits que pode ser deslocado para a esquerda um bit de cada vez
    - Feita num computador recorrendo aos registos internos e programação em linguagem máquina

- Mersenne Twister
  - Desenvolvido para resolver problemas de uniformidade do FSR
  - Apresenta um período extraordinário de $2^{19937} - 1$
  - Informação em:
    - http://www.math.sci.hiroshima-u.ac.jp/~m-mat/MT/emt.html

Outros geradores

- Outras classes de algoritmos foram propostas para obter períodos mais longos e melhor aproximação à distribuição uniforme

- A biblioteca NAG, por exemplo, inclui vários:

Na prática...

- A maioria das linguagens de computador disponibilizam geradores de números pseudo-aleatórios
  - Em geral o utilizador apenas fornece o valor da "semente"

- Java
  - Classe Random
  - Random rnd = new Random()
  - rnd.nextDouble()

Matlab

- Comando rand()
  - Gera números uniformemente distribuídos no intervalo (0, 1)
    - usando um algoritmo similar aos anteriormente descritos

- rand() utiliza o algoritmo Mersenne twister por defeito
  - Mas permite que se altere, usando rng()

rng

- s=rng

- s =

  struct with fields:

   Type: 'twister'   %% algoritmo por defeito
   Seed: 0
   State: [625×1 uint32]

rng

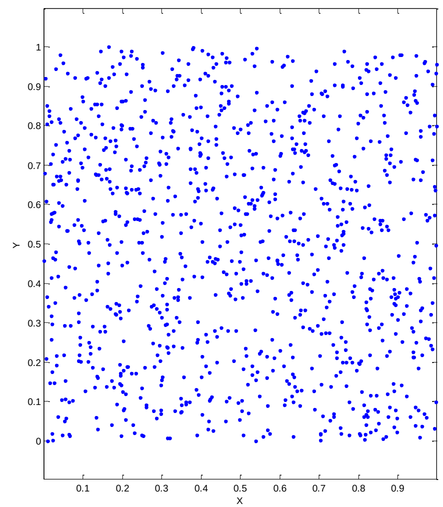
- rng(seed, type)

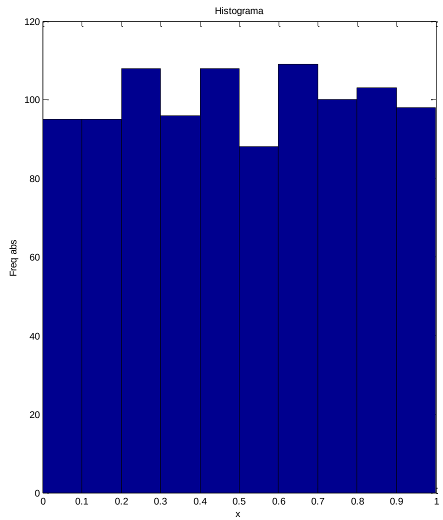
`Type` define o tipo de algoritmo usado e pode ser:

nome	descrição	state
`'twister'`	Mersenne Twister	`625x1 uint32`
`'combRecursive'`	Alg. multiplo recursivo	`12x1 uint32`
`'multFibonacci'`	Alg. Fibonacci multplica-tivo com atraso	`130x1 uint64`
`'v5uniform'`	Gerador uniforme do MATLAB® 5.0	`35x1 double`
`'v5normal'`	Gerador normal do MAT-LAB 5.0	`2x1 double`
`'v4'`	Gerador do MATLAB 4.0	`1 uint=seed`

Demonstração do uso de rand()

```
N=1000
X = rand(1, N);    Y= rand(1,N);
subplot(121), plot(X,Y,'.')
axis equal
xlabel('X')
ylabel('Y')

subplot(122), hist(X)
title('Histograma');
xlabel(‘X')
ylabel('Freq abs');
```





Transformações simples

- Aplicando a **transformação linear** Y=a U + b é simples obter variáveis com distribuição uniforme num intervalo

  ex: Y=2 U + 1 permite intervalo [1, 3]

- A aplicação da transformação linear seguida da conversão para inteiros permite obter, por exemplo, uma simulação de lançamentos de um dado (uma gama de números inteiros)
  - Nas versões a partir da 2008b do Matlab existe a função randi()

Exemplos em Matlab

```
% n resultados do lançamento de um dado
function Y=dado(n)

if nargin==0
   n=1;
end

Y=floor(rand(1,n)*6)+1;        %%  ou randi(6,1,n)
```

dado → 5

dado(10) → 3 1 4 5 6 3 4 3 2 4

Métodos para gerar distribuições não uniformes

- Números aleatórios com outras distribuições podem ser obtidos das sequências com distribuição uniforme através de:
  - Métodos de transformação
  - Métodos de rejeição
  - Procura em tabelas

Método da Transformação (Inversa)

- Para uma v.a. contínua, se a função de distribuição acumulada é $F(x)$ então para uma variável U com distribuição uniforme em (0,1)

$$\mathrm{X} = F^{-1}(U) \text{ tem por função distrib. acum. } F(x)$$

- Este método é apenas eficiente num conjunto pequeno de casos (ex: distribuição exponencial)
- Também não é possível ou é difícil determinar a inversa de muitas distribuições

Demonstração

- $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$ tem por função de distribuição acumulada $F(x)$??

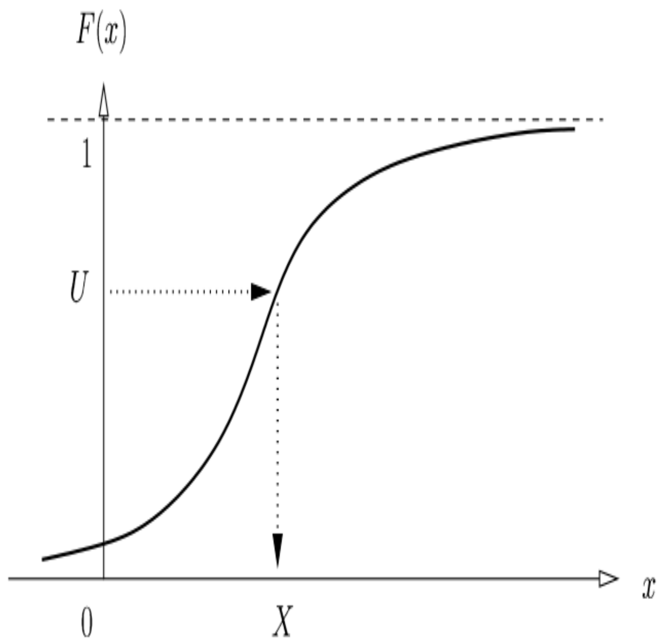
- Por definição $F(x) = P(X \leq x)$

- $P(X \leq x) = P(F^{-1}(U) \leq x)$
- $= P(U \leq F(x))$
- $= F(x)$ porque $P(U \leq a) = a$

Algoritmo

1. Gerar U com distribuição U(0,1)

2. Devolver $\mathrm{X} = F^{-1}(U)$



Exemplo de aplicação – Simulação de uma variável aleatória **exponencial**

- Sendo $F(x) = 1 - e^{-x}$ (exponencial de média 1)
- $F^{-1}(u)$ será o valor de x que verifique

$$1 - e^{-x} = u$$

- ou seja $x = -\log(1 - u)$

- Portanto:

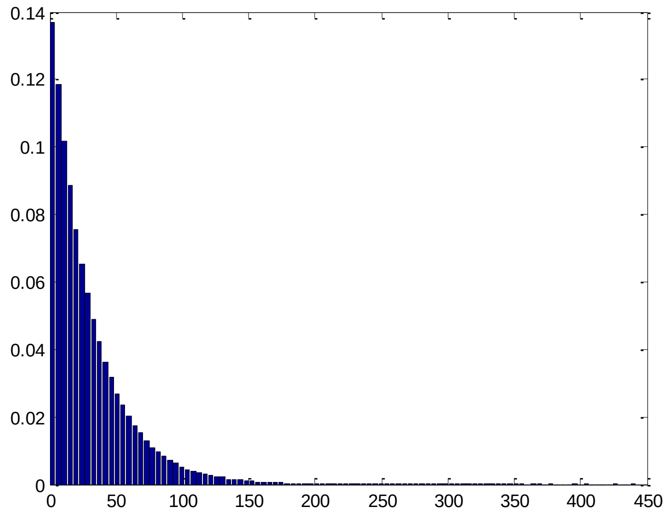
$$F^{-1}(u) = -\log(1 - u)$$

É exponencialmente distribuída com média 1

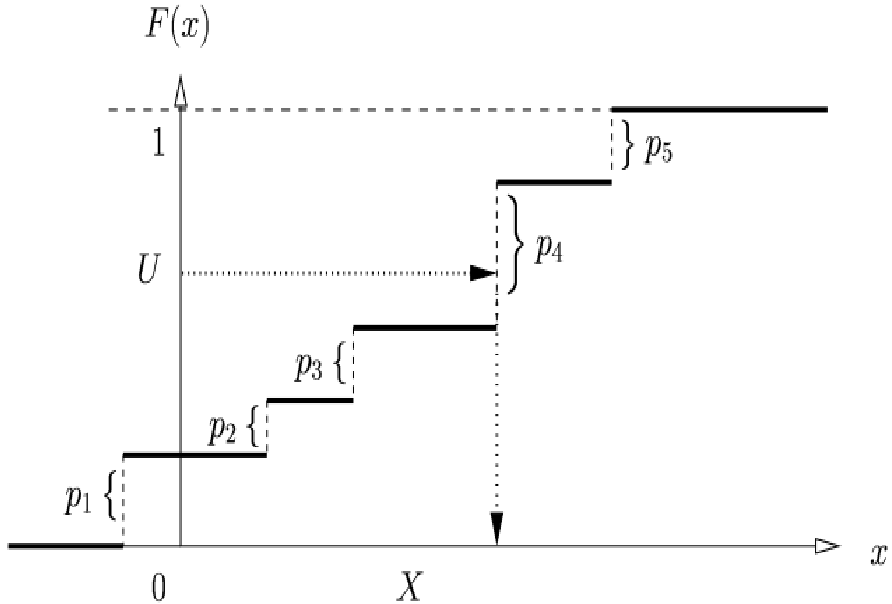
- Como $c\,X$ é exponencial com média c para obter uma exponencial de média c basta usar $-c\log(U)$

Exemplo em Matlab

```
function X=exponencial(m,N)
U=rand(1,N);
X=-m*log(U)

%
N=1e6
X=exponencial(10,N);
[n,xout] = hist(X,100);
bar(xout,n/N)
```



Algoritmo para caso discreto



Usado no crawler

1. Gerar U com distribuição U(0,1) exemplo U=0,7
2. Ir aumentando x e determinar o primeiro para o qual $F(x) \geq U$
3. Devolver esse valor de x

A procura pode ser tornada mais rápida usando técnicas de procura eficientes

Método de procura numa tabela

- Se a função cumulativa for guardada numa tabela, então este algoritmo pode ser visto como uma simples procura numa tabela de

$$i \text{ tal que } F_{i-1} < u \leq F_i$$

- Ou seja:

$$X = \begin{cases} x_1, & \text{if } U < P_1 \\ x_2, & \text{if } P_1 < U < P_1 + P_2 \\ \vdots & \\ x_j, & \text{if } \sum_{1}^{j-1} P_i < U < \sum_{i}^{j} P_i \\ \vdots & \end{cases}$$

Exemplo de aplicação

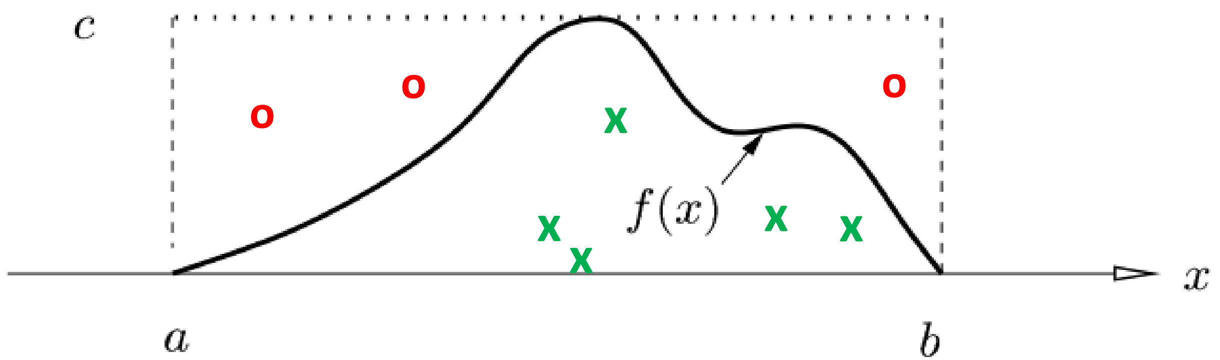
- Gerar pseudo-palavras com as letras assumindo a probabilidade das letras em Português
  - Que já vimos anteriormente

Em Matlab

```
letters='abcde';
% p=[0.0828    0.0084    0.0201    0.0342    0.0792];  % PT real
p=[0.800    0.01    0.01    0.01    0.17];                    % fake
p=p/sum(p);  % só existem para nós 5 letras

X= zeros(1,60);
for j=1:60
        U=rand();
        i = 1 + sum( U > cumsum(p) );
        % out sera valor entre 1 e 5
       %  de acordo com as probabilidades p
        X(j)= letters(i);
end
char(X)
```

Métodos baseados em Rejeição

- Na sua forma mais simples:
  - define-se uma zona que contém todos os valores da função densidade de probabilidade no intervalo em que está definida
  - Geram-se números com distribuição uniforme nessa zona e rejeitam-se os que ficam acima de f(X)

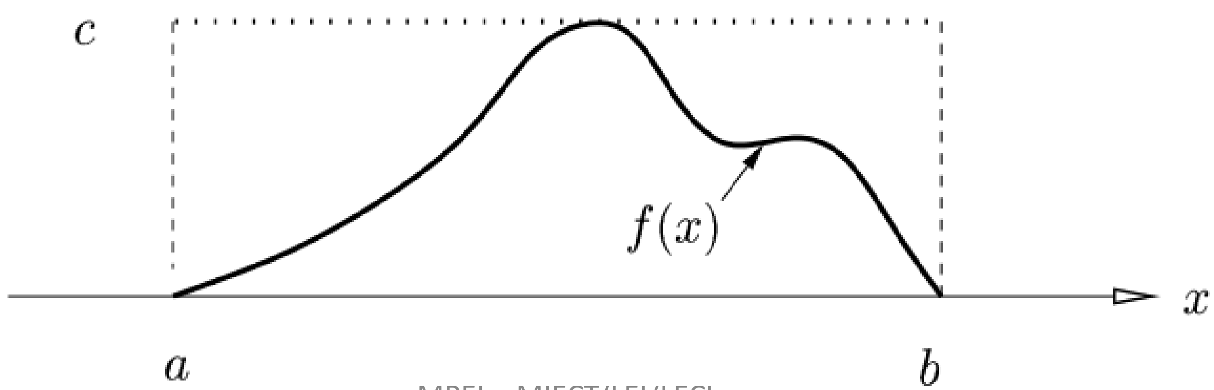


Algoritmo

1. Gerar X com distribuição $U(a,b)$

2. Gerar Y com distribuição $U(0,c)$ independente de X

3. Se $Y \leq f(X)$ devolver $Z = X$; Caso contrário ir para o passo 1

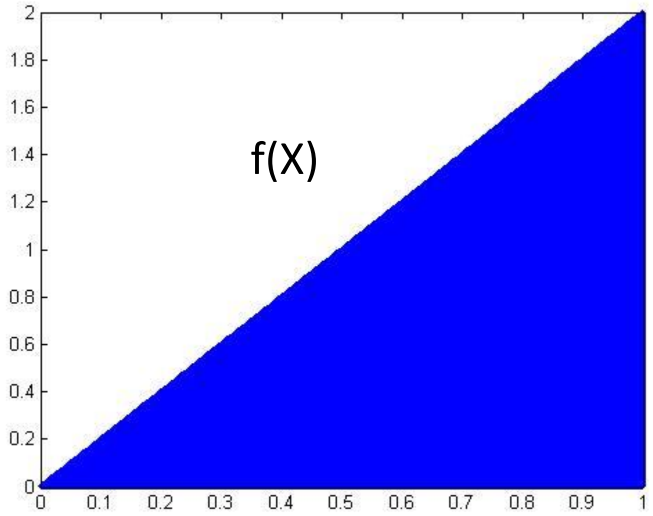


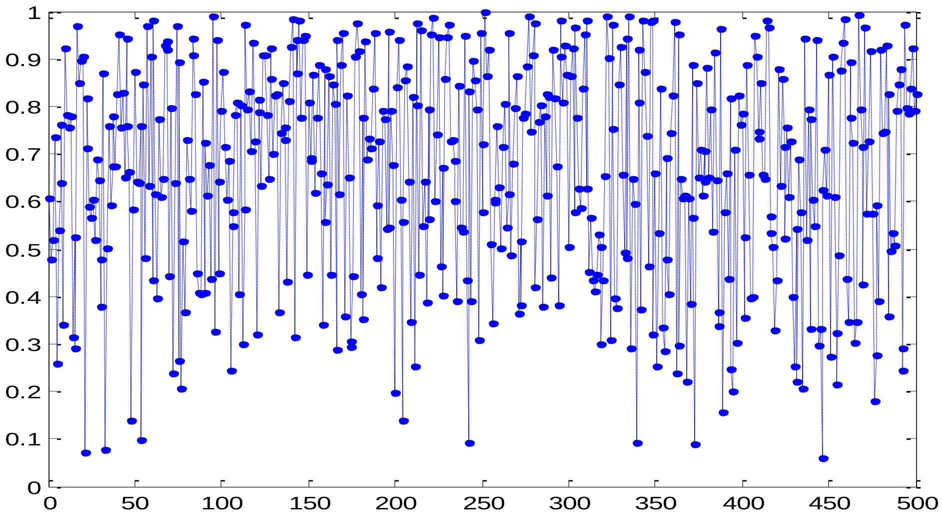
Exemplo

- $f(x) = \begin{cases} 2\,x & 0 \le x \le 1 \\ 0 & outros\ valores \end{cases}$

- Temos de usar c=2 , a=0 e b=1

```
%
N=1e6;
X=rand(1,N);
Y=rand(1,N)*2;

Z=X(Y<=2*X);

%  grafico
Y2= Y(Y<=2*X);
plot(Z,Y2,'.')
```

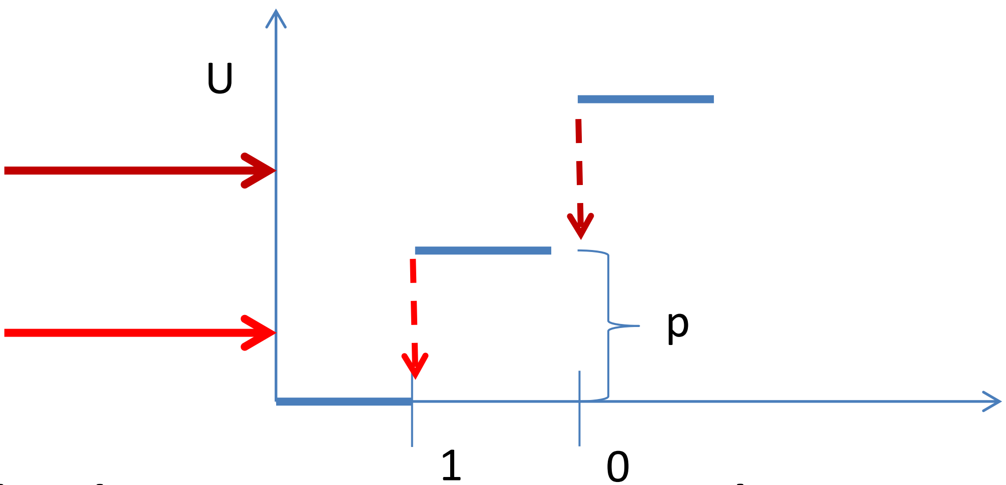




Algoritmos específicos para distribuições discretas mais comuns

Bernoulli

- Aplicando o método da transformação inversa para o caso discreto tem-se



- De onde decorre o seguinte algoritmo:
  1 – Gerar U com distribuição U(0,1)
  2 – Se U<= p X=1; caso contrário X=0

USAM DESDE A PRIMEIRA AULA PRÁTICA

Técnicas especiais - Obter Binomial

- Pode obter-se uma variável aleatória Binomial como a soma de n variáveis de Bernoulli independentes

- $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$ é uma v.a. Binomial com parâmetros *n* e *p* quando X_i é de Bernoulli com parâmetro *p*

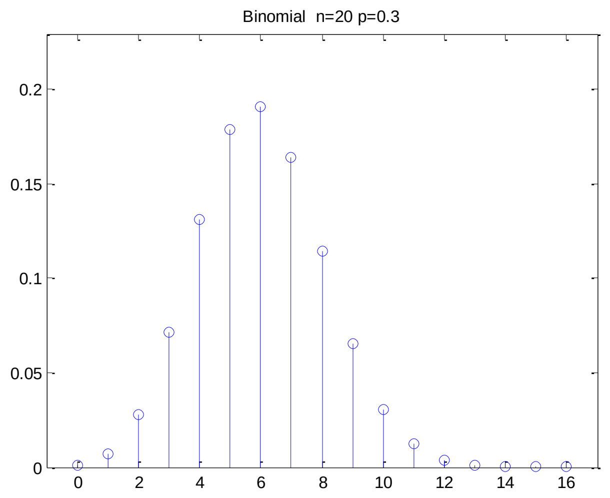
Algoritmo

- Gerar n variáveis independentes e identicamente distribuídas (iid) $X_1, \dots, X_n$ usando distribuição de Bernoulli com parâmetro *p*

- Devolver $X = \sum_{i=1}^{n} X_i$

Exemplo em Matlab - Binomial

```
function X=binomial(n,p, N)
Bern=rand(n,N)<=p;    % n Bernoulli(p)
X=sum(Bern);


% usando
N=1e6;  n=20; p=0.3;
X=binomial(n,p, N);
myhist(X,'Binomial  n=20 p=0.3')
```



Algoritmos específicos para distribuição contínua mais comum

Distrib. Normal – Alg. Box Müller

- Algoritmo de Box e Müller:

1 – Gerar 2 variáveis independentes U_1 e U_2 uniformes em (0,1)

2 – Obter 2 variáveis com distribuição Normal, X e Y, através de:

$$X = (-2\ln U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2)\ ,$$
$$Y = (-2\ln U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2)\ .$$

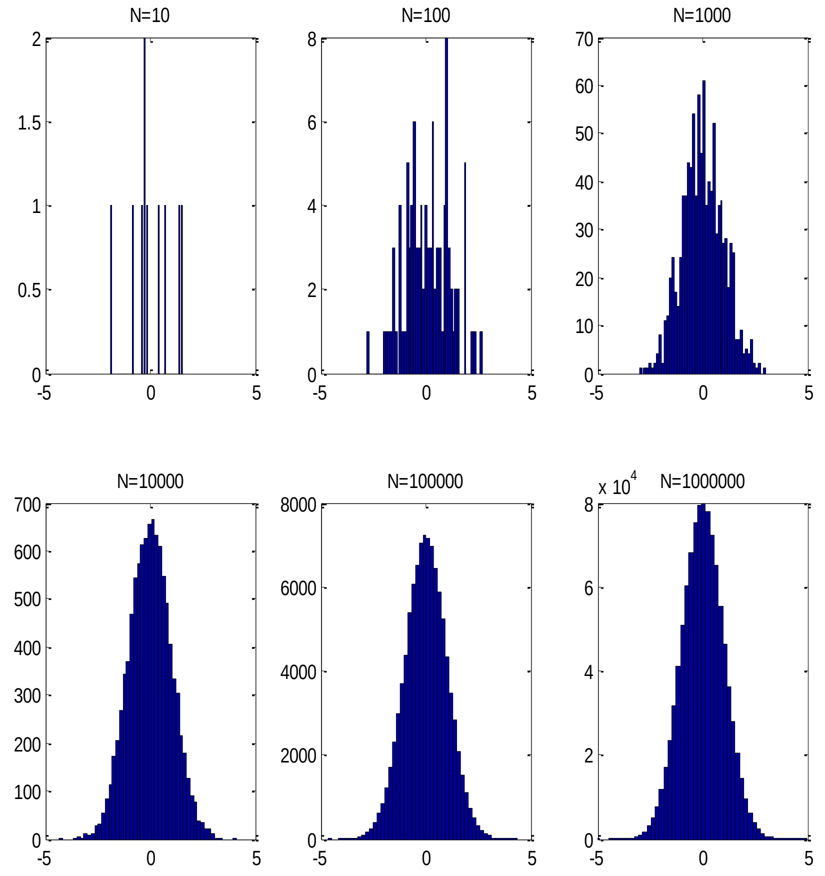
Box Müller em Matlab

```
function[X,Y]=BoxMuller(N)

U1=rand(1,N);    % gerar uma v.a. uniforme
U2=rand(1,N);    % gerar outra v.a. uniforme

X=(-2*log(U1)).^(1/2).* cos(2*pi*U2);
Y=(-2*log(U1)).^(1/2).* sin(2*pi*U2);
```

- Atenção ao uso de .^ e .*

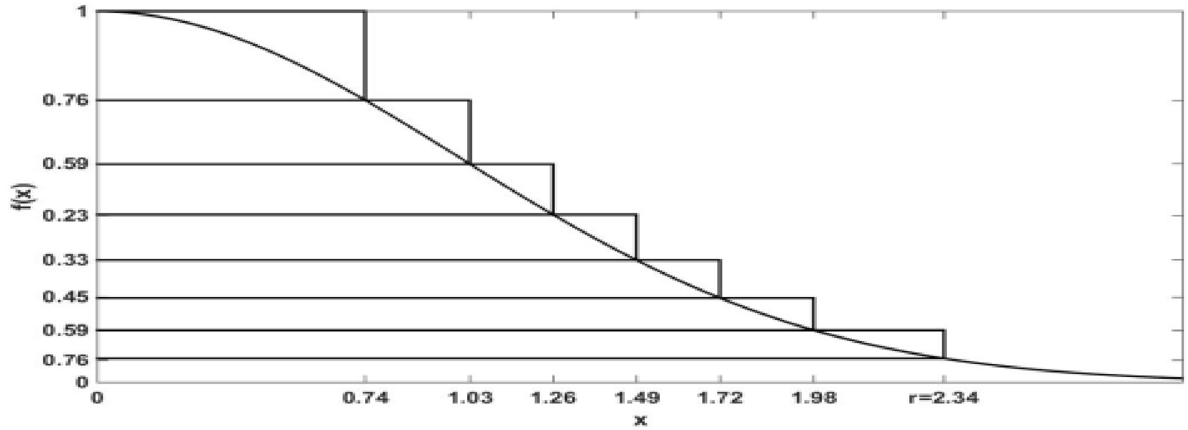
Demonstração em Matlab

```
for i=1:6
    subplot(2,3,i)
    N=10^i;
    [X,Y]=BoxMuller(N);
    hist(X,50)
    title(['N=' num2str(N)]);
    ax=axis;
    ax(1)=-5; ax(2)=5;
    axis(ax)
end
```



Distribuição Normal – Algoritmo Ziggurat

- Desenvolvido por Marsaglia em 2000
- É um **método de rejeição**
- Utiliza a curva $y = f(x) = e^{-x^2/2}$ para $x > 0$
  – Devido a simetria
- Utiliza um conjunto de tiras com a mesma área e geração de números com distrib. Uniforme



  – Figura faz lembra um Zigurate (antiga Mesopotâmia)

Para aprender mais

- Cap. 9 do livro “Métodos Probabilísticos para Engenharia Informática”,
  - F. Vaz e A Teixeira, Edições Sílabo

- [Online] Capítulo “RANDOM NUMBERS, RANDOM VARIABLES AND STOCHASTIC PROCESS GENERATION”
  - http://moodle.technion.ac.il/pluginfile.php/220739/mod_resource/content/0/slava_fall_2010/Random_number_2_.pdf