<table>
<tr><td rowspan="7"></td><td colspan="3">PROFESSOR: Paulo César Linhares da Silva</td></tr>
<tr><td colspan="3">CURSO: CIÊNCIAS DA COMPUTAÇÃO</td></tr>
<tr><td colspan="3">DISCIPLINA: CÁLCULO NUMÉRICO</td></tr>
<tr><td colspan="2">PERÍODO: MANHÃ.
HORÁRIO: 07:00 ÀS 08:40</td><td>DATA: 05/12/2024</td></tr>
<tr><td colspan="2">NOME:</td><td rowspan="3">PONTOS OBTIDOS</td></tr>
<tr><td colspan="2">SEMESTRE SUPLEMENTAR: 2024</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>2ªAVALIAÇÃO DE CÁLCULO NUMÉRICO</td><td>Sistemas Lineares</td><td>NOTA OBTIDA:</td></tr>
<tr><td colspan="3">Cálculo Numérico</td></tr>
</table>

1ª Questão: Implemente a decomposição LU de uma matriz A de ordem n por n baseando-se no método de Crount. Utilize esta decomposição para resolver um sistema linear do tipo $A_{nxn}x_{nx1} = b_{nx1}$.

Observação: No método de Crount, os elementos da diagonal principal da matriz U são todos iguais a 1.

2ª Questão: Implemente usando a linguagem de programação Python o algoritmo a seguir.

ALGORITMO 1: Resolução de um Sistema Triangular Superior

Dado um sistema triangular superior n × n com elementos da diagonal da matriz A não nulos, as variáveis $x_n, x_{n-1}, x_{n-2}, \ldots x_2, x_1$ são assim obtidas:

$x_n = b_n / a_{nn}$

Para k = (n − 1),..., 1

$$\left[\begin{array}{l} s = 0 \\ \text{Para } j = (k+1), \ldots, n \\ s = s + a_{kj}x_j \\ x_k = (b_k - s) / a_{kk} \end{array}\right.$$

3ª Questão: Implemente usando a linguagem de programação Python o algoritmo a seguir.

ALGORITMO 2: Resolução de Ax = b através da Eliminação de Gauss.

Seja o sistema linear $Ax = b$, $A: n \times n$, $x: n \times 1$, $b: n \times 1$.

Supor que o elemento que está na posição a_{kk} é diferente de zero no início da etapa k.

Eliminação

Para $k = 1, \ldots, n-1$

  Para $i = k + 1, \ldots, n$

    $m = \dfrac{a_{ik}}{a_{kk}}$

    $a_{ik} = 0$

    Para $j = k + 1, \ldots n$

    $a_{ij} = a_{ij} - m a_{kj}$

    $b_i = b_i - m b_k$

Resolução do sistema:

$x_n = b_n / a_{nn}$

Para $k = (n - 1), \ldots 2,1$

  $s = 0$

  Para $j = (k + 1), \ldots, n$

  $[s = s + a_{kj} x_j$

  $x_k = (b_k - s) / a_{kk}$

4ª Questão: Implemente o método de Gauss- Jacobi a partir do algoritmo (código em Python) sugerido no SIGAA. Verifique os critérios de convergência e se a solução é apropriada para o sistema.

5ª Questão: Implemente o método de Gauss- Seidel a partir do algoritmo (código em Python) sugerido no SIGAA. Verifique os critérios de convergência e se a solução é apropriada para o sistema.

6ª Questão: Resolva o projeto proposto a seguir.

PROJETO

a) Compare as soluções dos sistemas lineares

$$\begin{cases} x - \qquad\quad y = 1 \\ x - 1.00001\, y = 0 \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x - \qquad\quad y = 1 \\ x - 0.99999\, y = 0 \end{cases}$$

Fatos como este ocorrem quando a matriz A do sistema está próxima de uma matriz singular e então o sistema é *mal condicionado.*

Dizemos que um sistema linear é *bem condicionado* se pequenas mudanças nos coeficientes e/ou nos termos independentes acarretarem pequenas mudanças na solução do sistema. Caso contrário, o sistema é dito mal condicionado.

Embora saibamos que uma matriz A pertence ao conjunto das matrizes não inversíveis se, e somente se, $\det(A) = 0$, o fato de uma matriz A ter $\det(A) \approx 0$ não implica necessariamente que o sistema linear que tem A por matriz de coeficientes seja mal-condicionado.

O *número de condição de A*, $\text{cond}(A) = \|A\|\,\|A^{-1}\|$, onde $\|\cdot\|$ é uma norma de matrizes [14], é uma medida precisa do bom ou mau condicionamento do sistema que tem A por matriz de coeficientes, pois demonstra-se que $\dfrac{1}{\text{cond}(A)} = \min\left\{\dfrac{\|A - B\|}{\|A\|} \text{ tais que B é não inversível}\right\}$.

b) As matrizes de Hilbert, H_n, onde

$h_{ij} = \dfrac{1}{i + j - 1}$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$ são exemplos clássicos de matrizes mal condicionadas.

(*b.1*) – Use pacotes computacionais, que estimam ou calculam cond(A), para verificar que quanto maior for n, mais mal condicionada é H_n.

(*b.2*) – Resolva os sistemas $H_n x = b_n$, $n = 3, 4, 5, \ldots, 10$, onde b_n é o vetor cuja i-ésima componente é

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i + j - 1}$$ Desta forma a solução exata será: $x^* = (1\ 1\ \ldots\ 1)^T$.

(*b.3*) – Analise seus resultados.