Luiz Eduardo Barros Coelho

INSTITUTO FEDERAL DE
EDUCAÇÃO, CIÊNCIA E TECNOLOGIA
RIO GRANDE DO NORTE
Campus Natal - Central

Professor: Sarah Thomaz de Lima Sa
Matéria: Matemática Discreta
Turma: 1 Matutino
Curso: TADS
Período: 2019.1

Natal/RN
06/2019

- **Indução:** técnica de demonstração matemática onde algum parâmetro da proposição a ser mostrada envolve números naturais.

-Seja T uma proposição que queremos provar que é verdadeira para todo valor natutal (n+1)

Ao invés de provar diretamente que T é válida para todos os valores de (n+1), basta provar que as condições 1 e 3 são válidas.

1) Passo base: provar que T é válida para n=1

2) Hipótese de indução: assumimos que T é válida para algum n.

3) Passo indutivo: sabendo que T é válida para n devemos provar que T é válida para n+1.

- **Ilustrações da escada:**

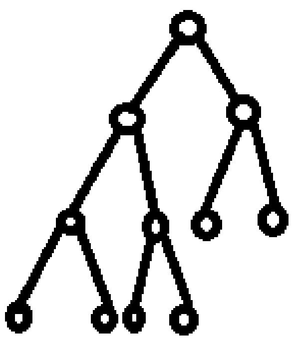
Como saber se eu poderia subir uma escada a´te um andar arbitrário x+1 de uma escada infinitamente alta?

1) Você consegue alcançar o primeiro degrau.

2) Uma vez chegando a um degrau você sempre é capaz de alcançar o próximo.

-Definimos como resolver um caso geral utilizando-se de soluções para instâncias menores de problema.

Ex: Suponha que João casou-se com Arya e teve dois filhos. Chamaremos esses dois filhos de geração 1. Suponha agora que cada um desses filhos teve dois filhos. Então a geração 2 contém quatro descendentes. Imagine que esse processo continua de geração em geração.



Geração	Descendentes
1	2
2	4
3	8

Podemos escrever a seguinte conjectura: 2 geração n possui 2 elevado a n descendetnes.

P(n) = 2 elevado a n

Prova:

Passo base:

Estabelecemos a veridade de P(1)

P(1) = 2

Hipótese de indução:

P(K) = 2 elevado a K

Passo indutivo:

Devemos mostrar que P(K+1) = 2 elevado a (K+1)

Dessa forma:

P(K+1) = 2.P(K)

$= 2.2$ elevado a K
$= 2$ elevado a K+1

Ex: teorema: a soma de n primeiros números naturais é $(n(n+1))/2$

$$1+2+3+...+n = (n(n+1))/2$$

Prova:

Passo base:

$1 = (1(1+1)/2$
$1 = 1$

Hipótese de indução:

Assumimos que o somatório é válido para um determinado n=K
$S(K) = (K(K+1))/2 = 1+2+3+\dots+K$

Passo indutivo:

Devemos mostrar que o somatório é válido para K+1, ou seja
$S(K+1) = ((K+1).(K+1))/2$

-Por definição:

$S(K+1)=\mathbf{1+2+3+...K}+(K+1)$
$S(K+1)=S(K)+(K+1)$
$=(K(K+1))/2 +(K+1)$
$=(K(K+1))/2 +2(K+1)/2$
$=((K+1).(K+2))/2$

Ex: prove que a geração equação a seguir é verdadeira, para qualquer inteiro positivo n.

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

Prova:

Passo base:

$P(1)=1=1^2$
$P(1)=1=1$

Hipótese de indução:

Suponha que P é válido para n=K
$P(K)=1+3+5+...+(2K-1)=K^2$

Passo indutivo:

Devemos provar que P(K+1) é válida:
$P(K+1)=1+3+5+...+(2[K+1]-1)=(K+1)^2$

-Para fazermos a demonstração por indução vamos reescrever o lado esquerdo da equação incluindo a penúltima parcela.

$P(K+1)=\mathbf{1+3+5+...+(2K-1)}+(2[K+1]-1)$
$= K^2+(2(K+1)-1)$
$=K^2+2K+2-1$
$=(K+1)^2$

Ex: Prove que a equação é verdadeira p/ todo n>=1 $1+2+2^2+...+2$ elevado a n = 2 elevado a (n+1) = 1

Prova:

Passo base:

P(1) = 2°+2¹=2 elevado a (n+1) -1
P(1)=1+2=2²-1
P(1)=3=3

Hipótese de indução;

Suponha que P é válida para n=K
P(K)=1+2+2²+...+2 elevado a K=2 elevado a (K+1) -1

Passo indutivo:

Devemos provar que P(K+1) é válida
P(K+1)=1+2+2²+...+2 elevado a (K+1)= 2 elevado a ((K+1)+1)-1
P(K+1)=1+2+2²+...+2 elevado a (K+1)= 2 elevado a (K+2)-1
=1+2+2²+...+2 elevado a K +2 elevado a (K+1)=2 elevado a ((K+1)+1) -1
=2 elevado a (K+1)-1+2 elevado a (K+1)
=2.2 elevado a (K+1)-1
=2 elevado a ((K+1)+1-1

Ex: prove que para qualquer inteiro positivo n, 2 elevado a (2n)-1 é divisível por 3

Prova:

Passo base:

P(1)=2 elevado a (2.1)-1
=4-1=3

Hipótese de indução:

Suponhamos que P é válida para n=K
P(K) é divisível por 3, ou seja, existe um inteiro tal que
2 elevado a (2K)-1=3m
2 elevado a (2K)=3m+1

Passo indutivo:

Devemos provar que P é válida para n=K+1
P(K+1)=2 elevado a (2(K+1))-1 é divisível por 3
=2 elevado a (2K+2)-1
=2 elevado a (2K).2 elevado a (2)-1
=2 elevado a (2).(3m+1)-1
=4.3m+4-1
=3m.4+3
=3(4m+1) que é divisível por

➢ Recursão sobre os naturais:

- **Recursividade:** é a definição de uma subrotina(função ou método) que pode invocar a si mesma.

-Toda recursão é composta por:

- **Caso base:** uma instância do problema que pode ser facilmente solucionada.
- **Chamadas recursivas:** objeto define-se em torno de si próprio, procurando convergir para o caso baixo.

Ex: a soma de uma lista de n elementos pode ser definida a partir da lista da soma de (n-1) elementos.

S(n)=S(n-1)+n
S(n)=1+2+3+...+(n-1)+n

Ex:

f(0)=3
f(n+1)=2.f(n)+3

encontre f(1), f(2), f(3) e f(4)

- **Definindo sequências recursivamente:**

Ex: dê uma definição recursiva de n!
- Precisamos definir f(1)
- Em seguida encontrar uma regra para f(n+1) a partir de f(n)

-Observe que (n+1) é o mesmo que (n+1)*n!

f(n+1)=(n+1)*f(n)
f(1)=1

Ex1: encontre f(5) a partir da definição recursiva, escreva o código em python.

Ex2: os números de Fibonaci f0, f1, f2,… são definidos por:

f0=1
f1=1
fn=fn-1+fn-2
Encontre f2,f3,f4
Escreva a função recursiva em python

Resolução Ex1:

```
def fatorial(n):
    if (n==1):
        return1
    return n*fatorial(n-1)

5*fatorial(4)
5*4*fatorial(3)
5*4*3*fatorial(2)
5*4*3*2*fatorial(1)
5*4*3*2*1
```

Resolução Ex2:

```
def fib(n):
    if(n=0) or (n=1):
        return 1
    return fib(n-1)+fib(n-2)

fib(3)
fib(2)+fib(1)
fib(1)+fib(0)+fib(1)
1+1+1=3
```

➢ Introdução a lógica matemática:

- **Lógica proposicional**
  - **Proposição:** sentença declarativa a qual podemos atribuir um valor lógico V ou F, nunca ambos. Em geral pode ser definida à questão de pertinência de um elemento a um conjunto

Ex:

2+2=5 → Proposição falsa

Brasília é a capital do Brasil → Proposição verdadeira
10>3 → Proposição verdadeira
João é estudante de TADS → Proposição verdadeira

Ex:

Que horas são?
Leia isso cuidadosamente
x+1=3
Não são proposições

- **Variáveis proposicionais:** indicadas pelas letrar p,q,r e s. Seu valor verdade é indicado por V ou F
- **Proposição simples:** não podem ser divididas em proposições menores.

Ex:

q: 5>3	q é V ou q=V
r: Natal é a capital de Alagoas	r é F ou r=F

- **Variáveis compostas:** podem ser subdivididas em proposições menores.

Ex: Q: 10>3 e Natal é a capital de Alagoas

```
|------|    |-----------------------------------|
   q                    r
```

Ex: R: João é magro e alto
s: João é magro
t: João é alto

- **Conectivos lógicos:** utilizados para formar as proposições compostas, são eles:
  1. e: indicado por ^
  2. ou: indicado por v
  3. não: indicado por ¬ ou ~

Ex:

2≤3 p v q
p: 2<3
q: 2=3

10<5<4 equivalente p ^ q
p: 5>10
q: 5<4

-Relembrando tabelas verdades:

p	q	p^q
F	F	F
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Hoje é sexta e está chovendo

Ex: construa a tabela verdade para a seguinte proposição:

(p v q) ^ ¬(p ^ q)

p	q	p v q	¬(p ^ q)	(p v q) ^ ¬(p ^ q)
F	F	F	V	F
F	V	V	V	V
V	F	V	V	V
V	V	V	F	F

- **Proposição Condicional:**

Se p então q: p → q:

p	q	p → q
F	F	V
F	V	V
V	F	F
V	V	V

Se Harysson aprender matemática Discreta então ele vai arranjar um bom emprego

- **Proposição Bicondicional:**

P se e somente se q: p ↔ q

p	q	p ⟷ q
F	F	V
F	V	F
V	F	F
V	V	V

Você pode tomar o avião se e somente se possuir uma passagem

OBS: Prioridades de Operadores:

1. ¬
2. ^
3. v
4. →
5. ↔

- **Traduzindo sentenças do português:**
  - Se você for alto então você pode trocar a lâmpada?

    R: p → q

  - Você pode pular de para quedas se você tem autorização de seus pais ou mais de 19 anos

    R: q v r → p

- **Equivalência lógica:** duas proposições são equivalentes quando possuem a mesma tabela verdade

Ex:

¬(p v q) equivalente a ¬p ^ ¬q

- **Tautologia: T** é uma tautologia quando for sempre verdadeira independente dos valores assumidos

Ex: ¬p v p

- **Contradição:** C é uma contradição quando for sempre falsa independente dos valores assumidos

Ex: q ^ ¬q

-Seja T uma tautologia e C uma contradição:

q v T = T **q v C = q**

q ^ T = q **q ^ C = C**

Lógica dos Predicados:

- **Predicados:** são sentenças que envolvem variáveis

  x>3; x=y+3; x+y=z

  O computador x está sob ataque

-Não são verdadeiras nem falsas enquanto o valor das variáveis não é especificado

x>3: x é maior que 3

x é o sujeito e **maior que três** é o predicado

Ex: Se p(x)=x>3. Qual o valor verdade de P(2) e P(25)?
P(2): 2>3 logo, P(2)=F; P(25): 25>3 logo, P(25)=V

Ex: Q(x,y): x=y+3. Quais os valores verdade de Q(1,2) e Q(3,0)?
Q(1,2): 1=2+3 logo, Q(1,2)=F; Q(3,0): 3=0+3 logo, Q(3,0)=V

- **Vp:** conjunto verdade de P(x)
- **ID:** domínio.
- **P(x):** predicado em D.

OBS: predicados compostos fazem uso de conectivos lógicos ^, v
OBS2: quantificadore lógicos:
1. Existencial / (∃) existe
2. Universal / (∀) para todo

-Quantificadores transformam um predicado em uma proposição

1. **Existencial:**
   ∃xP(x) → Proposição
   ∃xP(x) = V ↔ \Vp diferente de conjunto vazio
   ∃xP(x) = F ↔ \Vp diferente de conjunto vazio

Ex: ID={1,2,3,4,5} P(x) = x^2>x
\Vp = ? = {2,3,4,5}
∃xP(x)=?=V

Ex: Q(x): x>x^2 \Vp = conjunto vazio ∃xQ(x)? = F

2. **Universal:**
   ∀xP(x) → Proposição
   ∀xP(x) = V → \Vp = ID
   ∀xP(x) = F ↔ \Vp diferente de conjunto vazio

Ex: ID={1,2,3,4,5} P(x) = x^2>x \Vp = ?
\Vp=?= {2,3,4,5}
∀xP(x)=?= F

OBS: ∀xP(x) equivale a ∃x¬P(x)

-Se ¬∃xP(x) então ∀x¬P(x)
-Se ¬∀xP(x) então ∃x¬P(x)

- **Quantificadores agrupados:** ocorre quando um quantificador está no escopo do outro.

Ex:
∀x∃y(x+y=0) = V
∀ x ∀y((x>0) ^ (y<0) → xy<0) = V
∃y∀x(x+y=0) = F
∃z∀x∀y(x+y=z) = F

Lista Indução

1. Considere P(n) como a proposição de que $1^2+2^2+...+n^2 = (n.(n+1).(2n+1))/6$

   Passo Base:

   Devemos mostrar que a expressão é válida para n = 1, P(1)

   $P(1) = 1^2+2^2+...+(1)^2 = (1.(2).(3))/6$

   $P(1) = 1 = 6/6$

   $P(1) = 1 = 1$

   Hipótese de indução:

   Assumimos que P(n) é valido para n=k, logo, P(k)

   $P(k) = 1^2+2^2+...+k^2 = (k.(k+1).(2k+1))/6$

   Passo indutivo;

   Devemos provar que P(k+1) é váido

   $P(k+1) = \mathbf{1^2+2^2+...+k^2} + (k+1)^2 = ((k+1).(k+2).(2k+1))/6$

   $P(k+1) = (k.(k+1).(2k+1))/6 + (k+1)^2 = (2k^3+9k^2+13k+6)/6$

   $P(k+1) = (2k^3+3k^2+k)/6 + k^2+2k+1 = (2k^3+9k^2+13k+6)/6$

   $P(k+1) = (2k^3+3k^2+k)/6 + (6k^2+12k+6)/6 = (2k^3+9k^2+13k+6)/6$

   $P(k+1) = (2k^3+3k^2+k + 6k^2+12k+6)/6 = (2k^3+9k^2+13k+6)/6$

   $P(k+1) = (2k^3+9k^2+13k+6)/6 = (2k^3+9k^2+13k+6)/6$

Lista Recursividade, Lógica proporcional e Quantificadores

4. Considere que p e q são proposições: “Nadar na praia em Recife é permitido” e “Foram descobertos tubarões perto da praia.”, respectivamente. Expresse cada uma das proposições como uma sentença em português.

a) **¬q:** Não foram descobertos tubarões perto da praia.
b) **p→ ¬q:** Se nadar na praia de Recife é permitido então não foram descobertos tubarões perto da praia.
c) **p↔ q:** Nadar na praia de Recife é permitido se e somente se não foram descobertos tubarões perto da praia.
d) **p^q:** Nadar na praia de Recife é permitido e foram descobertos tubarões perto da praia.
e) **¬q ↔ p:** Não foram descobertos tubarões perto da praia se somente se nadar na praia de Recife é permitido.
f) **¬p^(pv¬q):** Nadar na praia em Recife não é permitido e nadar na praia de Recife é permitido ou não foram descobertos tubarões perto da praia.

5. O que é necessário para que uma expressão lógica seja uma tautologia? A expressão (p → q) ^ (p → q) → (p → r) é uma tautologia?

R: para que uma expressão seja uma tautologia é necessário que ela seja sempre verdadeira independentemente do valor atribuído. A expressão é sim uma tautologia.

p q r	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)$	$(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r) \rightarrow (p \Rightarrow r)$
F F F	V	V
F F V	V	V
F V F	F	V
F V V	V	V
V F F	F	V
V F V	F	V
V V F	F	V
V V V	V	V

6. O que é necessário para que duas expressões sejam logicamente equivalentes?

R: elas precisam ter o mesmo valor verdade. Ou seja, precisam ter a mesma tabela verdade.