Universidade Federal de Santa Catarina

Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Modelagem Dinâmica de Conversores Estáticos

Resolução da Tarefa 3

Data: 30/05/2022 a 01/06/2022

Discente: Eduardo Eller Behr

Tarefa 3

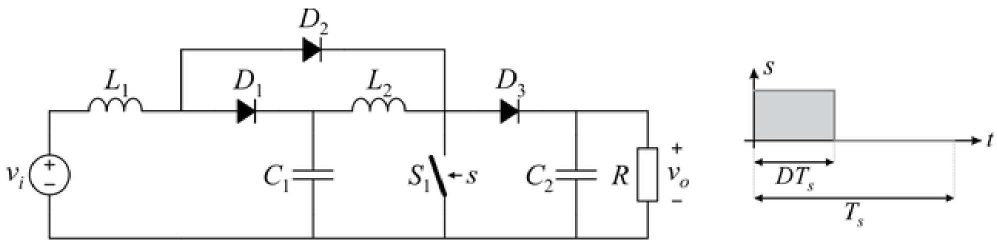
Para o conversor boost quadrático ilustrado abaixo, pede-se:

I) O modelo médio de grandes sinais utilizando "PWM switch modeling";

II) O modelo médio de pequenos sinais;

III) A função de transferência que relaciona a tensão de saída com a razão cíclica.

Valide os modelos por simulações.



I) Modelo médio de grandes sinais utilizando "PWM Switch Modeling"

Para realizar a modelagem média PWM das chaves é necessário sintetizar todas as etapas de operações do circuito considerado ao longo de um período de comutação.

As tabelas abaixo indicam tensões e correntes de cada semicondutor em ambas as etapas:

Chave S_1 fechada

Primeira etapa	Tensão	Corrente
D_1	$-v_{C1}$	0
D_2	0	i_{L1}
D_3	$-v_o$	0
S_1	0	$i_{L1} + i_{L2}$

Chave S_1 aberta

Segunda etapa	Tensão	Corrente
D_1	0	i_{L1}
D_2	$v_{C1} - v_o$	0
D_3	0	i_{L2}
S_1	v_o	0

Optou-se por modelar os semicondutores como fontes dependentes de acordo com a tabela da segunda etapa de operação. Como as grandezas se alternam entre 0 e uma combinação linear dos valores médios das variáveis de estado, as fontes controladas serão definidas com esses mesmos valores ponderados pela razão cíclica considerada $(1-d)$, ou seja:

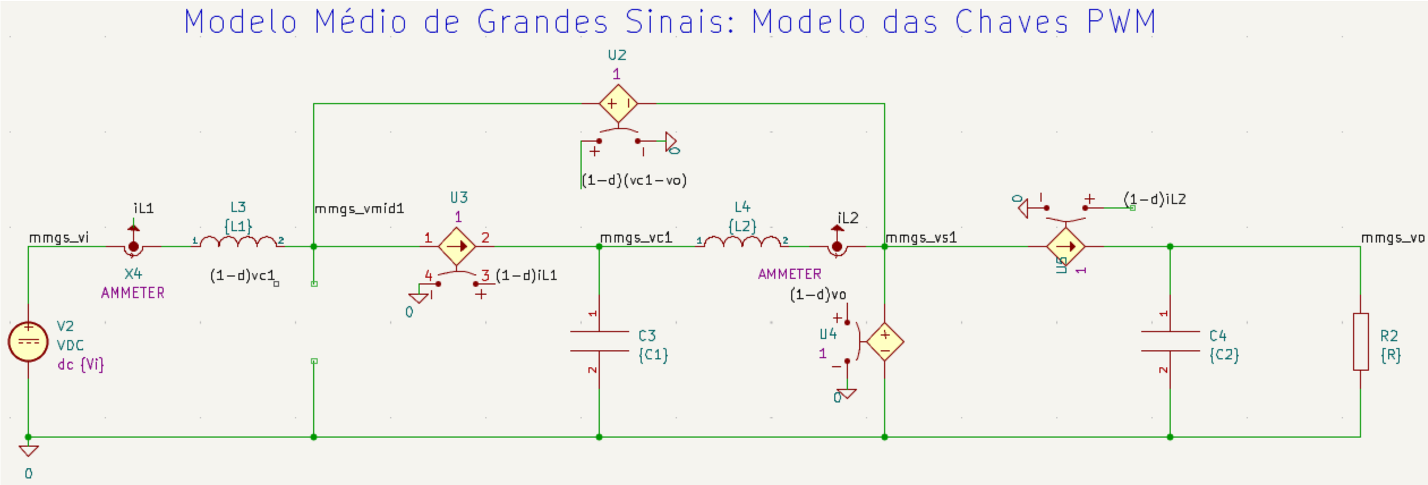
$$i_{D_1} = (1-d)i_{L1}$$

$$v_{D_2} = (1-d)(v_{C1} - v_o)$$

$$i_{D_3} = (1-d)i_{L2}$$

$$v_{S_1} = (1-d)v_o$$

O diagrama elétrico equivalente resultante está ilustrado na figura abaixo.



II) Modelo Médio de Pequenos Sinais

Para obter o modelo de pequenos sinais, foi efetuada a modelagem de espaço de estados diretamente, já que será necessário deduzir a função de transferência posteriormente. Se fosse utilizado o modelo das chaves PWM, seria necessário resolver o circuito equivalente, que resultaria no mesmo.

Analisando as etapas de operação novamente, obtem-se as seguintes equações diferenciais de estados:

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = v_i - (1-d)v_{C1}$$

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = v_{C1} - (1-d)v_o$$

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = -i_{L2} + (1-d)i_{L1}$$

$$C_2 \frac{dv_o}{dt} = -\frac{v_o}{R} + (1-d)i_{L2}$$

Após linearizá-las pelo método dos desvios pequenos, considerar que as variáveis minúsculas se referem a pequenos desvios:

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} = -(1-D)v_{C1} + dV_{C1}$$

$$L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = v_{C1} - (1-D)v_o + dV_o$$

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = -i_{L2} + (1-D)i_{L1} - dI_{L1}$$

$$C_2 \frac{dv_o}{dt} = (1-D)i_{L2} - dI_{L2} - \frac{v_o}{R}$$

Aplicando a trasnformada de Laplace em todos os termos:

$$sL_1 i_{L1} = -(1-D)v_{C1} + dV_{C1}$$

$$sL_2 i_{L2} = v_{C1} - (1-D)v_o + dV_o$$

$$sC_1 v_{C1} = -i_{L2} + (1-D)i_{L1} - dI_{L1}$$

$$sC_2 v_o = (1-D)i_{L2} - dI_{L2} - \frac{v_o}{R}$$

III) Solução analítica da Função de transferência $\frac{v(s)}{d(s)}$

Devido à complexidade do sistema de equações simbólicas, optou-se por encontrar a forma fechada da função de transferência com auxílio da biblioteca `sympy` em Python.

Importações

In [ ]:
```
from matplotlib import pyplot as plt
import control as ctl
import numpy as np
import sympy as sp
```

Definição dos símbolos e equações

In [ ]:
```
s                              = sp.symbols("s")
L1, L2, C1, C2, R              = sp.symbols("L_1, L_2, C_1, C_2, R")
IL1, IL2, VC1, Vo, D           = sp.symbols("I_{L1}, I_{L2}, V_{C1}, V_o, D")
iL1, iL2, vC1, vo, d           = sp.symbols("i_{L1}, i_{L2}, v_{C1}, v_o, d")

eq1 = sp.Eq(s*L1*iL1,                        -vC1*(1-D)              +d*VC1)
eq2 = sp.Eq(s*L2*iL2,                         vC1       -vo*(1-D)   +d*Vo)
eq3 = sp.Eq(s*C1*vC1,   iL1*(1-D)  -iL2                              -d*IL1)
eq4 = sp.Eq(s*C2*vo,               iL2*(1-D)            -vo/R       -d*IL2)
display(eq1, eq2, eq3, eq4)
```

$$L_1 i_{L1} s = V_{C1} d - v_{C1} \cdot (1 - D)$$

$$L_2 i_{L2} s = V_o d - v_o \, (1 - D) + v_{C1}$$

$$C_1 s v_{C1} = -I_{L1} d + i_{L1} \cdot (1 - D) - i_{L2}$$

$$C_2 s v_o = -I_{L2} d + i_{L2} \cdot (1 - D) - \frac{v_o}{R}$$

Manipulações algébricas de isolação e substituição de variáveis

In [ ]:
```
# Isolar iL1 na equação 1
iL1_isol = sp.solve(eq1, iL1)[0]

# Substituir iL1 na equação 3
eq3_subs = eq3.subs(iL1, iL1_isol)
# Isolar vC1 na equação 3
vC1_isol = sp.solve(eq3_subs, vC1)[0]

# Substituir vC1 na equação 2
eq2_subs = eq2.subs(vC1, vC1_isol)
# Isolar iL2 na equação 2
iL2_isol = sp.solve(eq2_subs, iL2)[0]

# Substituir iL2 na equação 4
eq4_subs = eq4.subs(iL2, iL2_isol)
# Isolar vo na equação 4
vo_isol = sp.solve(eq4_subs, vo)[0]
```

Solução analítica

O resultado da resolução simbólica justifica a preocupação em se resolver o sistema manualmente, como mostrado abaixo.

In [ ]:
```python
# A função de transferência vo/d é obtida dividindo a expressão por d
tf = vo_isol/d
# Agregar os termos multiplicados pelas mesmas potências de s
tf = tf.collect(s)
print("vo(s)/d(s) = "); display(tf)
```

```
vo(s)/d(s) =
```

$$\frac{R\left(-C_1 I_{L2} L_1 L_2 s^3 + D^2 V_{C1} - D V_o (D-1)^2 - 2 D V_{C1} + V_o (D-1)^2 + V_{C1} + s^2\left(-C_1 D L_1 V_o + C_1 L_1 V_o\right) + s\left(D I_{L1} L_1 - I_{L1} L_1 - I_{L2} L_1 - I_{L2} L_2 (D-1)^2\right)\right)}{C_1 C_2 L_1 L_2 R s^4 + C_1 L_1 L_2 s^3 + D^2 R (D-1)^2 - 2 D R (D-1)^2 + R (D-1)^2 + s^2\left(C_1 D^2 L_1 R - 2 C_1 D L_1 R + C_1 L_1 R + C_2 L_1 R + C_2 L_2 R (D-1)^2\right) + s\left(L_1 + L_2 (D-1)^2\right)}$$

Solução numérica

Substituindo valores arbitrários previamente testados em simulação de modelo comutado:

In [ ]:
```python
tf_subs = tf.subs(R, 50).subs(L1, 1e-3).subs(L2, 100e-6).subs(C1, 2e-6).subs(C2, 20e-6)\
            .subs(D, 0.55).subs(Vo, 235).subs(IL1, 23.2).subs(IL2, 10.5).subs(VC1, 105.6)
tf_subs
```

Out[ ]:

$$\frac{50\left(-2.1 \cdot 10^{-12} s^3 + 2.115 \cdot 10^{-7} s^2 - 0.021152625 s + 42.798375\right)}{2.0 \cdot 10^{-16} s^4 + 2.0 \cdot 10^{-13} s^3 + 1.0405 \cdot 10^{-6} s^2 + 0.00102025 s + 2.0503125}$$

Conversão de objeto simbólico da biblioteca sympy para objeto "Função de Transferência" da biblioteca `control`

In [ ]:
```python
numerator, denominator = tf_subs.as_numer_denom()
num, den = sp.Poly(numerator).all_coeffs(), sp.Poly(denominator).all_coeffs()

for i, _n in enumerate(num):
    num[i] = float(num[i])

for i, _d in enumerate(den):
    den[i] = float(den[i])

tf_ctl = ctl.TransferFunction(num, den)
tf_ctl
```

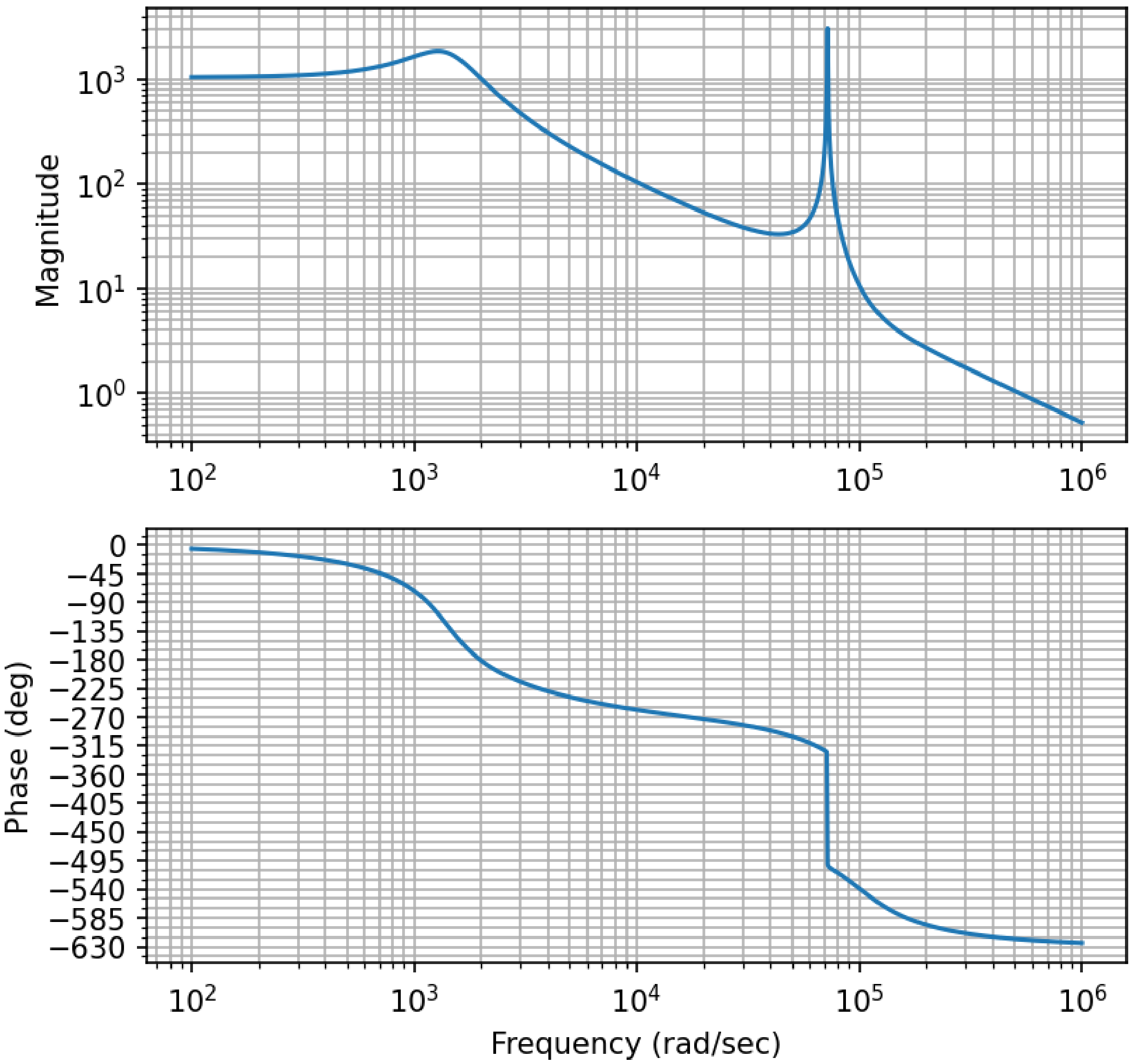
Out[ ]:

$$\frac{-1.05 \times 10^{-10} s^3 + 1.057 \times 10^{-5} s^2 - 1.058 s + 2140}{2 \times 10^{-16} s^4 + 2 \times 10^{-13} s^3 + 1.041 \times 10^{-6} s^2 + 0.00102 s + 2.05}$$

Análise gráfica no domínio da frequência

Com auxílio do diagrama de bode, pode-se ter uma noção do comportamento do sistema modelado.

In [ ]:
```
plt.figure(dpi=150, figsize=(6,6))
ctl.bode_plot(tf_ctl);
```



Análise gráfica no domínio do tempo

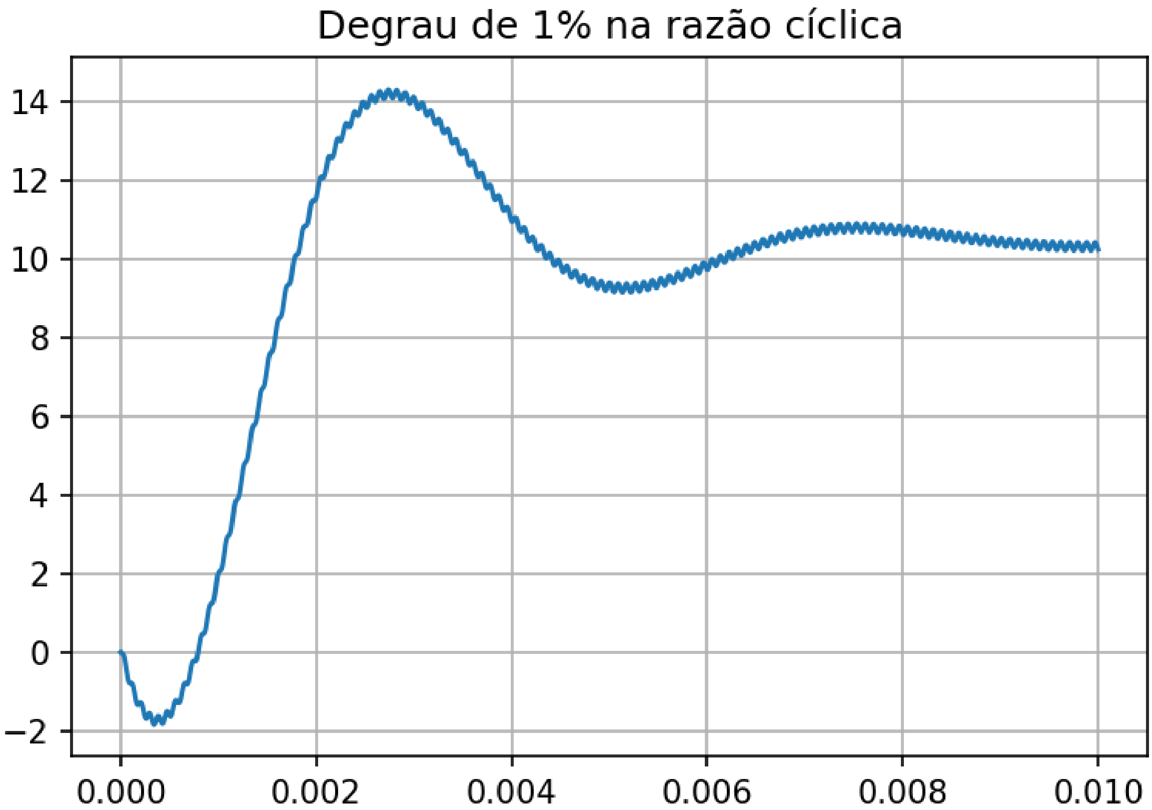
Similarmente, a resposta ao degrau de razão cíclica de 1% fornece uma boa base de comparação do modelo linear com o comutado.

In [ ]:
```
plt.figure(dpi=150)

t=np.linspace(0,10e-3, 1000)
# x=np.ones(t.shape)/100

_, x = ctl.step_response(tf_ctl,T=t, X0=0 );
plt.plot(t,x/100); plt.grid(True);
plt.title("Degrau de 1% na razão cíclica");
```

```
/home/eduardo/.local/lib/python3.8/site-packages/scipy/sparse/linalg/_matfuncs.py:708: LinAlgWar
ning: Ill-conditioned matrix (rcond=6.09441e-21): result may not be accurate.
  return solve(Q, P)
```



IV) Simulações para validação

Para fins de comparação, foram simulados os seguintes modelos em Ngspice com captura de esquemático e geração de gráficos do KiCad:

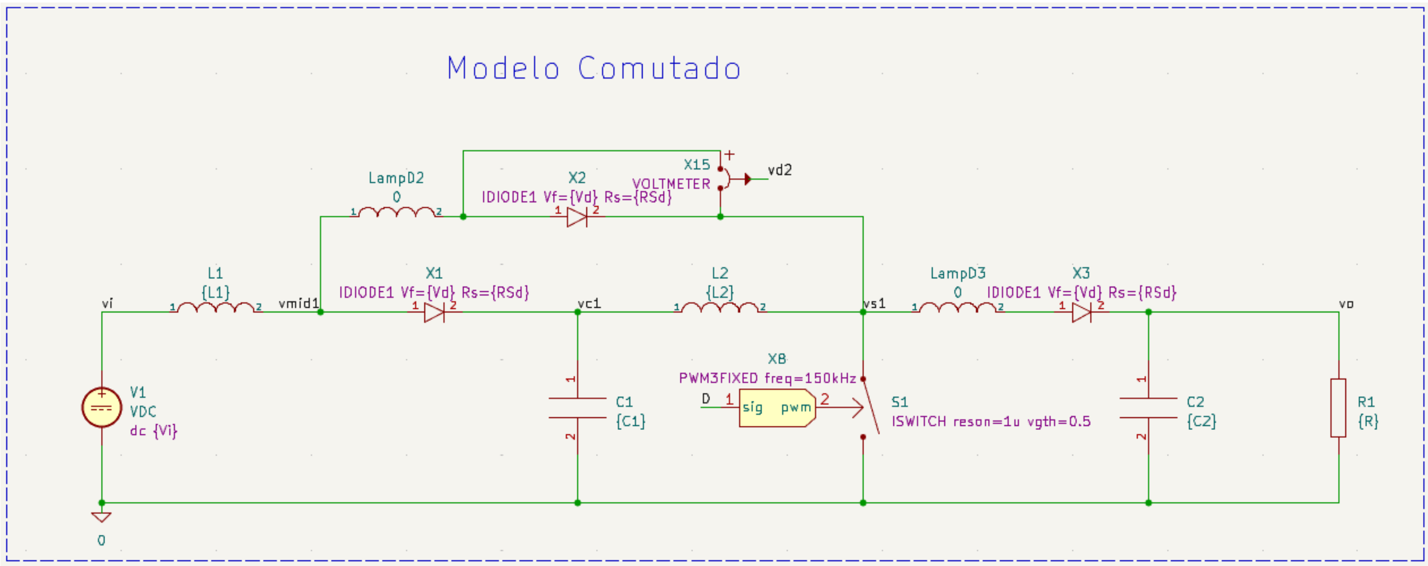
1. Circuito comutado
2. Médio de grandes sinais com circuito equivalente (PWM Switch Modelling)
3. Médio de grandes sinais (equações diferenciais de estados)

Os parâmetros de circuito considerados em todo o desenvolvimento estão listados abaixo:

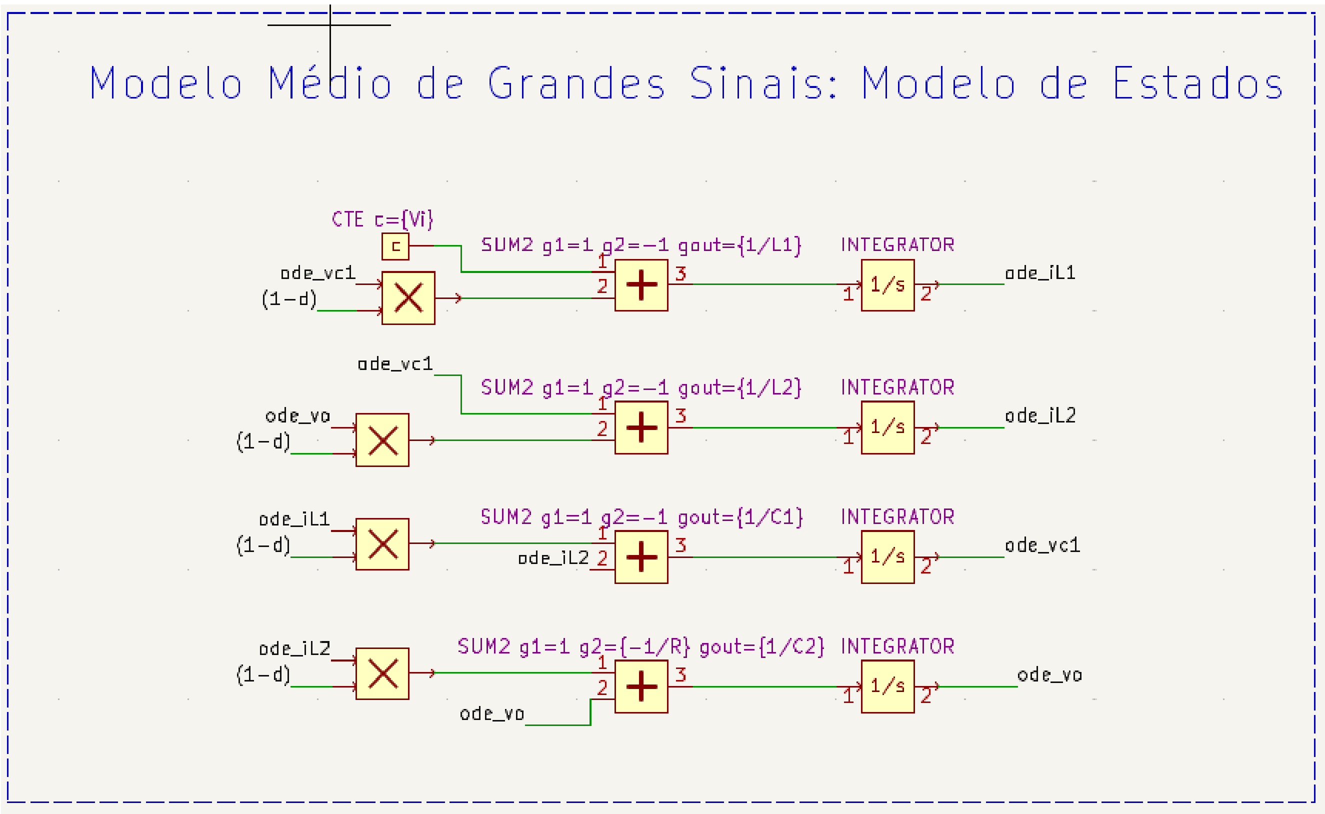
```
.tran 100ns 30ms uic    ; Simulação transiente até 30ms de passo 100ns com condições iniciais zeradas

.param Vi=48V           ; Tensão de entrada
.param RSd=1u           ; Resistência série nos diodos
.param Vd=0             ; Queda de tensão nos diodos
.param L1=1000uH
.param L2=100uH
.param C1=2uF
.param C2=20uF
.param R=50
```

Abaixo está ilustrado o modelo comutado:



Em seguida, o modelo de equações diferenciais de estados:



A figura abaixo ilustra o resultado do degrau de $d = 0.55$ para $d = 0.56$ aos $15ms$ da análise transiente.

Observação: os modelos 2 e 3 se sobrepõem totalmente, impossibilitando distinção mútua.