

Modelagem Matemática da Dinâmica da Epidemia do COVID-19 na Alemanha

Eduardo Correa Araujo

1 Introdução

Em dezembro de 2019 os primeiros casos de COVID-19 foram confirmados em Wuhan, a sétima maior cidade da China. No início de Janeiro de 2020, o Sars-Cov-2, conhecido como o novo coronavírus, se espalhou para outras regiões da China. No início de 2020, ele começou a se espalhar para outras regiões do mundo, de modo que, em 13 de Março de 2020, o diretor geral da Organização Mundial da Saúde (OMS), declarou que a Europa tinha se tornado o epicentro da pandemia do COVID-19 [3].

O primeiro caso confirmado de COVID-19 na Alemanha foi reportado no final de Janeiro de 2020. Na Alemanha, O Instituto de Robert-Koch (RKI) divulga diariamente relatórios sobre a situação da pandemia no país [1]. Em 1 de Março, mais de 100 casos já haviam sido confirmados. A primeira morte confirmada foi reportada em 9 de março de 2020 [7].

Em 16 de Março, o governo iniciou as primeiras medidas de combate ao espalhamento da doença: Escolas, jardins de infância e universidades foram fechadas. Em 17 de Março, as lojas foram fechadas (exceto as com artigos essenciais, como mercados e farmácias), além da imposição de restrições de viagens. Em 22 de Março, foi implementada uma política de distanciamento social: as pessoas foram avisadas para saírem apenas se necessário e em grupos de no máximo 2 pessoas, caso essas não morassem na mesma casa, além do fechamento de restaurantes e outros provedores de serviço, como cabeleireiros [7, 9].

Em 20 de abril, após uma estabilização do número de casos, houve a reabertura de muitas lojas menores que 800 m^2 e alguns outros serviços. Em 06 de maio, houve um maior número de flexibilizações, todas as lojas podiam reabrir sendo mantido o distanciamento e o uso de máscara, além da permissão da reabertura gradual dos colégios. Caso o número de casos aumentasse consideravelmente, essas medidas poderiam ser revistas e os estabelecimentos teriam que fechar novamente. [9, 4, 2].

Em 15 de junho, foi permitida a entrada de turistas da União Européia e do Reino Unido, Islândia, Noruega, Liechtenstein e Suíça [5]. Em 01 de julho foi liberada a entrada de pessoas oriundas de alguns outros países [8]. No início de agosto, apesar do aumento dos casos, muitas escolas começaram a reabrir na Alemanha [6].

Veja na Tabela 1 um resumo das medidas adotadas na Alemanha.

No relatório publicado no dia 03 de setembro de 2020, pelo Instituto Robert Koch (RKI) sobre a situação da epidemia na Alemanha foi destacado que o número de casos tem estabilizado desde meados de julho e que o valor de R (número médio de pessoas infectadas por um único indivíduo infeccioso [1]) calculado por eles está abaixo de 1, o que é um fator que representa que a epidemia está sobre controle. Nesse relatório foi destacado também que a diferença de mortalidade dentre os casos reportados observada tem sido menor, em função do fato de que, no momento, a maior parte

das infecções está ocorrendo na parcela mais jovem da população. Sendo os principais outbreaks relacionados a viagens e reuniões de famílias [1].

Tabela 1: Medidas Adotadas na Alemanha durante a pandemia do COVID-19

	Medida Adotada	Data
1	Escolas, jardins de infância e universidades foram fechadas.	16 de Março de 2020
2	Fechamento de comércio não essencial e restrições de viagem.	17 de Março de 2020
3	Política de distanciamento social, as pessoas foram avisadas para saírem apenas se necessário e em grupos de no máximo 2 pessoas, caso essas não morassem na mesma casa, mantendo um distanciamento de 1.5 m. Serviços como restaurantes e salões de cabelereiro foram fechados.	22 de Março de 2020
4	Reabertura de lojas menores que $800 m^2$ e serviços. Alguns dias depois foi imposta a obrigatoriedade do uso de máscaras no transporte público e em lojas.	20 de Abril de 2020
5	Maior número de flexibilizações, lojas maiores que $800 m^2$ poderiam reabrir, além da permissão da abertura gradual dos colégios.	06 de Maio de 2020
6	Fim das restrições de viagem para os países da União Européia (UE) e alguns outros países. A partir dessa data foi ocorrendo uma flexibilização dos países que poderiam adentrar na região.	15 de Junho de 2020
7	Reabertura das escolas na Alemanha	01 de Agosto de 2020.

2 Resumo dos Artigos

O artigo [7] apresenta três modelos do tipo SEIR para descrever a dinâmica da doença na Alemanha. Os três modelos possuem algumas diferenças entre si. O diagrama que descreve esse modelo está expresso abaixo.

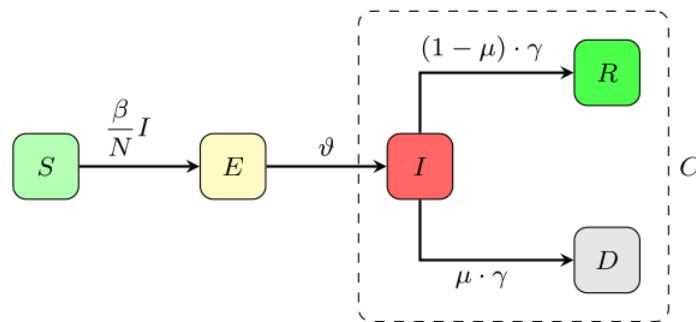


Figura 1: Diagrama representando o modelo SEIR proposto em [7]

No diagrama proposto S representa a classe dos Suscetíveis, E dos Expostos, I dos Infectados, R dos Recuperados e D dos Mortos. Quanto aos parâmetros indicados, β representa a taxa de contágio, ϑ o período de incubação, γ a taxa de recuperação e μ a mortalidade.

Os suscetíveis são os indivíduos da população que ainda não foram infectados. Após serem infectados eles se tornam expostos e com uma taxa ϑ se tornam infecciosos, quando infecciosos eles infectam os suscetíveis a uma taxa β e se tornam recuperados com uma taxa γ , ou mortos com uma taxa de mortalidade μ . O compartimento C representa todos os indivíduos infectados em qualquer estágio, esse compartimento foi criado para auxiliar na comparação dos dados do modelo com os dados reais.

Matematicamente, esse modelo pode ser expresso por:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta SI}{N} & S(t_0) = N - E_0 - I_0 \\ \dot{E} = \frac{\beta SI}{N} & E(t_0) = E_0 \\ \dot{I} = \vartheta E - \gamma I & I(t_0) = I_0 \\ \dot{R} = (1 - \mu) \cdot \gamma I & R(t_0) = 0 \\ \dot{D} = \mu \cdot \gamma I & D(t_0) = 0 \end{cases}$$

O t_0 considerado foi 1º de março, data em que a Alemanha atingia mais de 100 casos confirmados. Como a primeira morte foi reportada em 09 de março, o número de mortos inicial foi assumido como zero. O número de recuperados foi considerado insignificante pelo autor, por essa razão foi considerado nulo.

No modelo acima o valor de β foi considerado contante, porém sabemos que isso não é condizente com a realidade, visto que as medidas de combate ao espalhamento da COVID-19 atuam diminuindo o valor de β . Assim, para incluir essas medidas adotadas pelo governo, o autor propôs um novo modelo, com a taxa de contágio $\beta(t)$ definida em função do tempo como uma função por partes.

Na Alemanha, em 16 de Março as escolas, jardins de infância e universidades foram fechados, e em 22 de março medidas de distanciamento social foram impostas na Alemanha, com o intuito de diminuir o valor do β . Assim, a função $\beta(t)$ é expressa por:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_0 : t < 16 \text{ de Março} \\ \beta_1 : 16 \text{ de Março} < t < 22 \text{ de Março} \\ \beta_2 : t > 22 \text{ de Março} \end{cases}$$

Assim, o novo modelo é expresso por

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta(t)SI}{N} & S(t_0) = N - E_0 - I_0 \\ \dot{E} = \frac{\beta(t)SI}{N} & E(t_0) = E_0 \\ \dot{I} = \vartheta E - \gamma I & I(t_0) = I_0 \\ \dot{R} = (1 - \mu) \cdot \gamma I & R(t_0) = 0 \\ \dot{D} = \mu \cdot \gamma I & D(t_0) = 0 \end{cases}$$

Veja que se $\beta := \beta_0 = \beta_1 = \beta_2$ temos o modelo anterior.

Além disso, segundo o Robert Koch Institute (**Referenciar esse lugar**) há uma diferença de 10 dias entre o início dos sintomas e a entrada em uma unidade de terapia intensiva. Pensando nessa diferença de tempo, o autor propôs um novo modelo incorporando uma diferença de tempo, $\tau = 14$ dias, entre os primeiros sintomas e a morte. Esse termo de retardamento. Sendo o novo modelo expresso por:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta(t)SI}{N} & S(t_0) = N - E_0 - I_0 \\ \dot{E} = \frac{\beta(t)SI}{N} & E(t_0) = E_0 \\ \dot{I} = \vartheta E - \gamma[(1 - \mu)I + \mu I(t - \tau)] & I(t_0) = I_0 \\ \dot{R} = (1 - \mu) \cdot \gamma I & R(t_0) = 0 \\ \dot{D} = \mu \cdot \gamma I(t - \tau) & D(t_0) = 0 \end{cases}$$

Para resolver a equação diferencial com retardo é necessário uma "história" inicial para o compartimento dos infectados. Nos três modelos foram assumidos $\vartheta = 1/2$ e $\gamma = 1/10$, assim, são assumidos fixos e constantes um período de incubação de 2 dias e um período de recuperação de 10 dias.

Os outros parâmetros do modelo são desconhecidos, para determiná-los, será utilizando a seguinte função:

$$J(u) = \int_{t_0}^{T_{Fit}} [\delta(I(t) + R(t)) + D(t) - Y(t)]^2 + \omega_1 [D(t) - Z(t)]^2 dt + \omega_2 \|u\|^2$$

sendo $u = (\beta, \gamma, \mu, E_0, I_0)$, os parâmetros desconhecidos do modelo, $Y(t)$ e $Z(t)$ os casos acumulados e mortes reportadas. Para considerar a incerteza no número de casos acumulados associada a subnotificação, $I(t)$ e $R(t)$ são multiplicados pelo fator δ . O parâmetro T_{Fit} denota o intervalo em que será fitado o modelo, o parâmetro $\omega_2 \|u\|^2$ foi incluído para garantir a convexidade da função de peso, sendo ω_1, ω_2 parâmetros de peso.

3 Modelo Proposto

3.1 Obtenção dos dados

Os dados utilizados nesse trabalho foram retirados da plataforma <https://ourworldindata.org/>. Para capturar os dados foi criado um script em python disponível em https://github.com/eduardocorrearaújo/Avaliaco-es-MM4-/blob/master/Dados_Alemanha.ipynb.

Utilizando os dados disponíveis, foi possível plotar os gráficos abaixo. A Figura 1 representa os casos acumulados na Alemanha, a partir do gráfico fica claro que os casos começaram a se estabilizar, porém continuaram a subir indicando uma segunda onda.

Em comparativo, a Figura 2 representa os óbitos acumulados, a partir do gráfico podemos observar que o número de mortos não aumentaram seguindo o mesmo crescimento do número de casos. Isso indica uma diferença na mortalidade da doença, a qual como dita acima está relacionada com o fato, que de grande parte dos infectados nessa segunda onda fazem parte da parcela mais jovem da população. Esse fator é muito importante para a modelagem do fenômeno.

Casos Acumulados - Alemanha

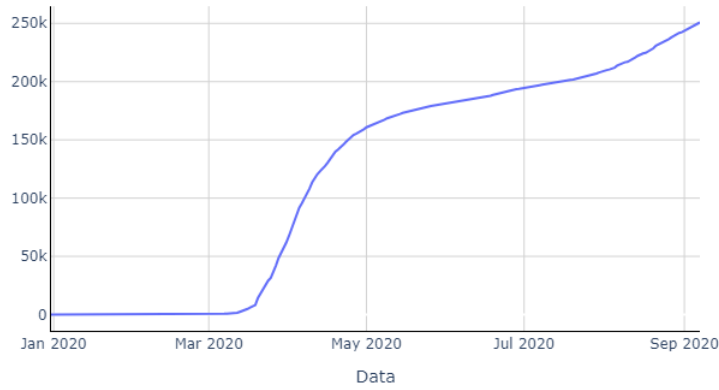


Figura 2: Casos Acumulados na Alemanha

Óbitos Acumulados - Alemanha

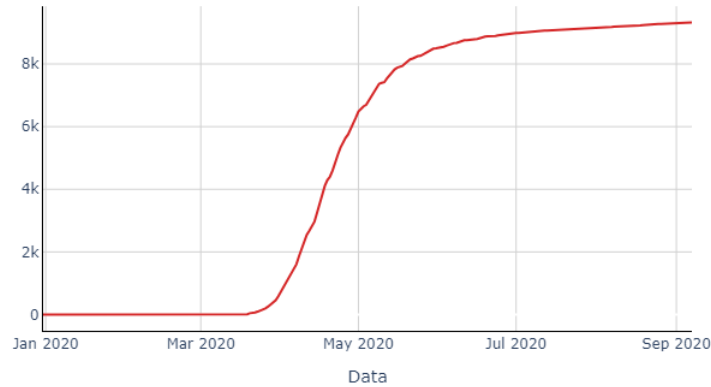


Figura 3: Óbitos Acumulados na Alemanha

3.2 Modelo SEIASRD

Nesse trabalho é apresentado um modelo extendido do tipo SEIR para analisar a dinâmica do espalhamento da COVID-19 na Alemanha.

O modelo adotado divide a população em 7 classes diferentes: S representa os indivíduos suscetíveis que ainda não estão imunizados, E representa os indivíduos expostos, que estão no período de incubação, ou seja, aqueles que foram infectados, mas ainda não estão infectando outros. Passado o período de incubação o modelo assume duas possibilidades distintas: o indivíduo pode ir para Ia que engloba os indivíduos assintomáticos, ou com poucos sintomas que não vão para as estatísticas ou para Is que engloba os indivíduos com sintomas mais graves que são reportados. Após se tornar infectado se o indivíduo for assintomático ele se recupera (Ra) e se for sintomático pode se recuperar (R_s) ou acabar falecendo (D). Veja na Figura 4 o diagrama do modelo e na Tabela 2 o significado de cada um dos parâmetros apresentados no diagrama.

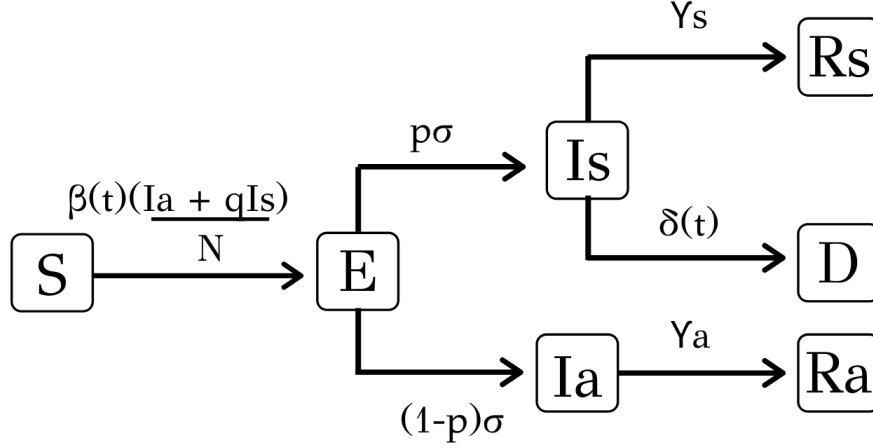


Figura 4: Diagrama do modelo SEIASRD - SEIR extendido

Tabela 2: Parâmetros do modelo

Parâmetro	Significado
$\beta(t)$	Taxa de contágio, no modelo é representada por uma função degrau dependente do tempo.
q	Correção para a infectividade dos indivíduos sintomáticos, isso é feito, em ventura da quarentena dos indivíduos sintomáticos que diminui a sua probabilidade de infectar outras pessoas.
N	População da Alemanha.
σ	$1/\sigma$ representa o tempo de incubação do vírus.
p	Porcentagem dos indivíduos expostos que se tornam assintomáticos.
γ_a	$1/\gamma_a$ representa o tempo de recuperação dos indivíduos assintomáticos.
γ_s	$1/\gamma_s$ representa o tempo de recuperação dos indivíduos sintomáticos.
$\delta(t)$	taxa de mortalidade da doença, que é expressa por uma função degrau dependente do tempo.

Logo, o modelo é definido pelo seguinte sistema de Equações Diferenciais Ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{S} = -\frac{\beta(t)S(Ia + qIs)}{N} \\ \dot{E} = \frac{\beta(t)S(Ia + qIs)}{N} - \sigma E \\ \dot{Ia} = p\sigma E - \gamma_a Ia \\ \dot{Is} = (1-p)\sigma E - \gamma_s Is - \frac{\gamma_s \delta(t) Is}{1 - \delta(t)} \\ \dot{Ra} = \gamma_a Ia \\ \dot{Rs} = \gamma_s Is \\ \dot{D} = \frac{\gamma_s \delta(t) Is}{1 - \delta(t)} \end{cases}$$

Esse modelo possui a propriedade de conservação da massa, sendo assim, $S + E + Ia + Is + Ra + Rs + D = N$, ou seja, a população é sempre constante, o modelo não considera efeitos de imigração, emigração, natalidade e mortalidade (que não sejam decorrentes da doença).

A taxa de contágio, $\beta(t)$ foi considerada variável para incluir no modelo as políticas adotadas em relação a epidemia, assim como feito em [7], as quais estão representas da tabela 1. Assim:

$$\beta(t) = \begin{cases} \beta_0 : t < 16 \text{ de Março} \\ \beta_1 : 16 \text{ de Março} < t < 22 \text{ Março} \\ \beta_2 : 22 \text{ de Março} < t < 20 \text{ de Abril} \\ \beta_3 : 20 \text{ de Abril} < t < 06 \text{ de Maio} \\ \beta_4 : 06 \text{ de Maio} < t < 15 \text{ de Junho} \\ \beta_5 : 15 \text{ de Junho} < t < 01 \text{ de Agosto} \\ \beta_6 : t > 01 \text{ de Agosto} \end{cases}$$

Note que se $\beta_0 = \beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = \beta_4 = \beta_5 = \beta_6$ temos o modelo com β constante.

Para a taxa de mortalidade será considerada uma taxa de mortalidade até o mês de julho e outra após o mês de julho, visto que após esse mês é que temos o maior número de casos sem ter um aumento expressivo do número de mortos.

$$\delta(t) = \begin{cases} \delta_0 : t < 01 \text{ de Julho} \\ \delta_1 : t > 01 \text{ de Julho} \end{cases}$$

Referências

- [1] Institute Robert-Koch, Daily Situation Report. Acessado em: 06-07-2020.
- [2] The Guardian, Germany opens some shops as Merkel warns of second wave of coronavirus. <https://www.theguardian.com/world/2020/apr/20/german-shops-open-angela-merkel-warns-second-wave-coronavirus>. Acessado em: 07-09-2020.
- [3] World health Organization, Timeline: WHO's COVID-19 response. <https://www.who.int/emergencies/diseases/novel-coronavirus-2019/interactive-timeline>. Acessado em: 06-07-2020.
- [4] BBC. Coronavirus: Germany reopens shops as lockdown is relaxed. <https://www.bbc.com/news/world-europe-52557718>. Acessado em: 07-09-2020.
- [5] DW. Coronavirus: Germany to lift travel ban for 29 european countries on june 15. [dw.com/en/coronavirus-germany-to-lift-travel-ban-for-29-european-countries-on-june-15/a-53667506](https://www.dw.com/en/coronavirus-germany-to-lift-travel-ban-for-29-european-countries-on-june-15/a-53667506). Acessado em: 07-09-2020.
- [6] Fortune. Masks, small classes, and outdoor lessons: How 5 countries in europe are reopening schools. <https://fortune.com/2020/08/10/covid-schools-reopening-class-children-coronavirus/>. Acessado em: 07-09-2020.
- [7] T. Goetz and P. Heidrich. Covid-19 disease dynamics in germany: First models and parameter identification. *medRxiv*, 2020.

- [8] schengenvisa.info. Germany lifts entry ban for travellers from 11 third-countries – leaves out algeria, morocco, rwanda serbia. <https://www.schengenvisa.info.com/news/germany-lifts-entry-ban-for-travellers-from-11-third-countries-leaves-out-algeria-morocco>
Acessado em: 07-09-2020.
- [9] T. Wieland. Flatten the curve! modeling sars-cov-2/covid-19 growth in germany on the county level. *medRxiv*, 2020.