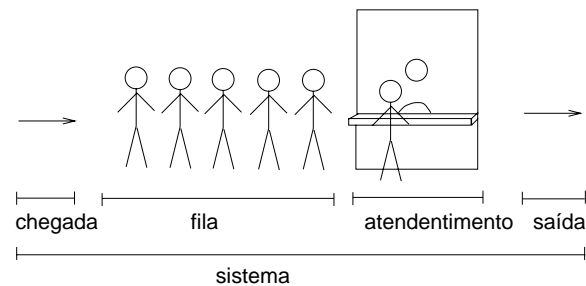


Capítulo 1

Teoria das Filas

1.1 Sistema de 1 Canal e 1 Fila com População Infinita



1.1.1 Características Gerais

As equações do modelo se baseiam nas seguintes características dos processos de chegada e de serviço (atendimento):

- as chegadas se processam segundo uma distribuição de Poisson com média λ chegadas/tempo;
- os tempos de atendimento seguem a distribuição exponencial negativa com média $\frac{1}{\lambda}$, ou seja, o número de atendimentos segue uma distribuição de Poisson com média μ ;
- o atendimento à fila é feito por ordem de chegada, (FIFO, *first in, first out*);
- o número de possíveis clientes é suficientemente grande para que a população seja considerada infinita.

1.1.2 Equações do Modelo

- a) **Probabilidade de haver n clientes no sistema:** distribuição de probabilidades do número de clientes no sistema.

$$P(n) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^n \left(\frac{\mu - \lambda}{\lambda}\right)$$

- b) **Probabilidade de que o número de clientes no sistema seja superior a um certo valor k :**

$$P(n > k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1}$$

- c) **Probabilidade de que o sistema esteja ocioso:** representa a taxa de ociosidade, ou a porcentagem de tempo no qual o sistema está inativo.

$$P(n = 0) = \left(\frac{\mu - \lambda}{\mu}\right)$$

- d) **Probabilidade de que o sistema esteja ocupado:** representa a taxa de ocupação, ou a porcentagem de tempo no qual o sistema está funcionando (ocupado).

$$P(n > 0) = \rho = \frac{\lambda}{\mu}$$

- e) **Número Médio de Clientes no Sistema:** número médio de pessoas na fila e sendo atendidas.

$$NS = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$$

- f) **Número Médio de Clientes na Fila:** número médio de pessoas na fila.

$$NF = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- g) **Tempo Médio de Espera na Fila por Cliente:** tempo médio que um cliente leva esperando até ser atendido.

$$TF = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$$

- h) **Tempo Médio Gasto no Sistema por Cliente:** tempo médio que um cliente ficou no sistema.

$$TS = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

1.2 Exercícios

1) Os clientes chegam a uma loja de conveniência de um posto de gasolina à uma taxa de $\lambda = 40$ clientes/hora, segundo uma distribuição de Poisson. O único caixa da loja pode atendê-los à uma taxa de $\mu = 60$ clientes/hora, segundo uma distribuição de exponencial. Pede-se

1. a taxa de ocupação do funcionário;
2. o comprimento médio da fila;
3. o número médio de clientes no sistema;
4. o tempo médio despendido esperando na fila;
5. tempo médio no sistema.

2) Existe apenas uma máquina copiadora na sala dos alunos da faculdade. Os alunos chegam a uma taxa de $\lambda = 40$ alunos/hora, segundo uma distribuição de Poisson. Uma cópia leva um tempo médio de 40 segundos, ou $\mu = 90$ alunos/hora, segundo uma distribuição exponencial. Pede-se:

1. a taxa de ocupação da máquina;
2. o comprimento médio da fila;
3. o número médio de alunos no sistema;
4. o tempo médio despendido esperando na fila;
5. tempo médio no sistema.

3) Devido a um recente aumento de negócios, o secretário de uma firma de advocacia agora precisa digitar com um editor de textos uma média de 20 cartas por dia, segundo uma distribuição de Poisson. Ele leva aproximadamente 20 minutos para digitar cada carta, segundo uma distribuição exponencial. Supondo que o secretário trabalha 8 horas por dia, pede-se:

1. a taxa de utilização do secretário;

2. o tempo médio de espera para que o secretário digite uma carta;
3. o número médio de cartas no sistema;
4. o número médio de cartas esperando digitação;
5. a probabilidade de que o secretário tenha mais de 5 cartas para digitar.

4) Numa clínica veterinária, vacina-se um cão a cada 3 minutos. Os cães chegam a uma taxa de 1 cão a cada 6 minutos, de acordo com uma distribuição de Poisson. Pede-se:

1. a taxa de utilização da clínica;
2. a taxa de ociosidade da clínica;
3. o tempo médio de espera para um cão ser vacinado;
4. o número médio de cães na clínica;
5. o número médio de cães esperando para serem vacinados;
6. a probabilidade de que a clínica possua mais de 3 cães para vacinar.

5) Uma empresa de elevadores mantém uma equipe de atendimento para consertar elevadores defeituosos que ocorrem uma média de $\lambda = 3$ elevadores por dia. A equipe pode atender a uma média de $\mu = 8$ máquinas por dia. Pede-se:

1. a taxa de utilização da equipe;
2. o tempo médio de espera de um elevador defeituoso;
3. o número de elevadores aguardando reparo num dado momento qualquer;
4. qual a probabilidade de mais de 1 elevador esteja esperando por reparo;
5. qual a probabilidade de mais de 3 elevadores estejam esperando por reparo;

6) Num complexo de 4 salas de cinemas, cada uma das salas com um filme diferente e com horários de início dos filmes alternados para evitar tumulto, existe apenas uma bilheteria capaz de atender 280 clientes por hora. Clientes chegam a uma taxa de 210 clientes por hora. Para determinar a eficiência da atual operação de venda de ingressos, deseja-se examinar algumas características de operação da fila:

1. o número médio de espectadores esperando na fila para comprar um ingresso;
2. a taxa de ocupação da bilheteria;
3. tempo médio de fila de um espectador;
4. qual a probabilidade de mais de 15 pessoas estejam esperando na fila;

7) A estação de colheita no centro-oeste é curta, e os fazendeiros entregam suas cargas de caminhão fechado de soja a um gigantesco silo de armazenagem central em um período de tempo de 2 semanas. Por causa disso, os caminhões carregados com soja esperam para descarregar e retornar ao campo têm de estacionar a uma quadra do silo de armazenagem. O silo central pertence à cooperativa e é do interesse de todos os fazendeiros tornar o processo o mais eficiente possível. O custo da deterioração dos grãos provocada pelos atrasos na descarga e o custo do aluguel dos caminhões e do tempo ocioso dos motoristas são preocupações significativas para os membros da cooperativa. Embora os fazendeiros tenham dificuldade em quantificar o prejuízo em grãos, é fácil estabelecer o custo da espera e da descarga para caminhões e motoristas a R\$18,00 a hora. Durante a temporada de 2 semanas, o silo de armazenagem permanece aberto e funciona 16 horas por dia, 7 dias por semana, podendo descarregar 35 caminhões por

hora. Os caminhões carregados chegam durante todo o dia a uma taxa de 30 caminhões por hora. Para ajudar a cooperativa a tratar o problema de perda de tempo enquanto os caminhões esperam na fila ou descarregam no silo, encontre:

1. o número médio de caminhões no sistema;
2. o tempo médio por caminhão no sistema;
3. a taxa de utilização da área do silo;
4. a probabilidade de mais de 3 caminhões estejam esperando na fila;
5. o custo diário total de os fazendeiros terem seus caminhões presos por causa do processo de descarga;
6. a cooperativa só utiliza intensamente o silo durante 2 semanas por ano. Os fazendeiros estimam que o aumento do silo reduziria os custos de descarga em 50% no ano seguinte. Custaria R\$9.000 para fazer isso fora da temporada da colheita. Valeria a pena a despesa de aumentar a área de armazenagem?

8) Uma loja mantém um bem-sucedido *call-center* no qual um funcionário recebe os pedidos por telefone. Se o funcionário estiver ocupado em um linha, as demais chamadas são transferidas para um atendimento automático que solicita o cliente a esperar. Assim que o funcionário se desocupa, a chamada que estiver esperando há mais tempo é transferida e atendida em primeiro lugar. As chamadas chegam a uma taxa de 12 por hora. O funcionário pode atender a um pedido a cada 4 minutos. O funcionário recebe R\$ 5,00 por hora. A perda de boa vontade e de vendas devido à espera do cliente por atendimento é de R\$ 25,00 por hora. Pedese:

1. qual é o tempo médio que os clientes de catálogo devem esperar para que

suas chamadas sejam transferidas para o funcionário?

2. qual é o número médio de chamadas aguardando a anotação de um pedido?
3. a loja está cogitando a contratação de um segundo funcionário para atender chamadas. A loja pagaria a esse funcionário os mesmos R\$ 5,00 por hora. Ela deve fazer essa contratação? Explique.

9) Numa clínica de beleza, sabe-se que cada cliente esperando custa R\$ 60,00 em vendas perdidas, e que cada atendimento custa R\$ 2,50. Um levantamento estatístico constatou que o número médio de clientes no sistema é de 5 por hora. Pede-se:

1. custo total do sistema por mês, 22 dias úteis de 8 horas cada;
2. se melhorar a taxa de atendimento em 1 unidade a um custo de R\$ 30.000, é vantajoso promovê-lo?
3. taxa de ocupação

10) Numa loja de troca de óleo mediu-se 2 parâmetros para estudar a sua performance: (i) o número médio de clientes na fila igual a 2; (ii) tempo médio gasto por atendimento 12 minutos. São conhecidos os seguintes dados adicionais: (iii) custo unitário por atendimento R\$ 10,00; (iv) custo unitário de permanência no sistema R\$ 60,00. Sabe-se que o custo de ampliação do serviço é de R\$ 900,00 por mês (melhorar o atendimento em uma unidade). A empresa considera a ampliação desde que haja uma economia mensal de 10% superior ao custo de fazer a ampliação. Considere 22 dias por mês, 8 horas por dia. A ampliação deve ser feita?

11) Um banco está tentando determinar qual das opções alugar para o processamento de

cheques. Opção 1 possui uma máquina que processa 1.000 cheques por hora e tem um aluguel de R\$ 10.000,00 por ano. A opção 2 processa 1.600 cheques por hora e tem um aluguel de R\$ 15.000,00 por ano. A jornada de trabalho é de 8 horas por dia, 5 dias por semana, 50 semanas no ano. O banco deve processar atualmente 800 cheques por hora, sendo que o valor médio de um cheque processado é de R\$ 100,00. Assumindo uma taxa de juros de 220% ao ano, determine o custo total do banco, considerando a desvalorização por cheque parado. Qual das opções o banco deve escolher?

12) Num sistema de 1 fila e 1 canal, foram medidos os seguintes dados:

Tempo Gasto no Sistema por Cliente (h)	Probabilidade (%)
0,5	15
0,6	20
0,7	35
0,8	15
0,9	10
1	5

No. de Atendimentos por Hora	Frequência
10	5
11	15
12	30
13	30
14	15
15	5

Pergunta-se:

1. probabilidade de que o número de clientes no sistema seja igual a 2?
2. taxa de ociosidade?
3. número de clientes no sistema?