Programação Linear

Problemas propostos 4 - Exercícios | 11º ANO | Porto Editora | Geometria II

$\boxed{1.}$ **Produção de rádios**

Uma empresa produz dois tipos de rádios:

Modelo A	**Modelo B**
• O Material custa 10 euros;	• O Material custa 15 euros;
• Leva 1 hora a produzir	• Leva meia hora a produzir

No máximo, a companhia dispõe de 20 000 euros para material e 1000 horas para a produção.

Com estas limitações, se a empresa tem 10 euros de lucro para cada rádio do modelo A e 12 euros por cada rádio do tipo do modelo B, quantos rádios de cada modelo deve produzir de modo a obter o **máximo lucro**?

Resolução:

Vamos em primeiro lugar construir uma tabela onde sintetizamos toda a informação:

	Tempo de produção (horas)	Custo (euros)	Lucro (euros)
Modelo A (x)	1	10	10
Modelo B (y)	1/2	15	12
Limitações logísticas	1000	20 000	

Agora vamos definir as ***variáveis de decisão***:

$x =$ Número de rádios do tipo A
$y =$ Número de rádios do tipo B

Em seguida definimos a ***função objectivo:***

$L(x,y) = 10x + 12y$ (lucro)

Agora vamos definir as ***restrições***:

- Lógicas ou implícitas

$x \geq 0$

$y \geq 0$

- Logísticas ou técnicas

$$x + \frac{1}{2}y \leq 1000 \ \text{(limitação relativa ao tempo de produção)}$$

$$10x + 15y \leq 20000 \ \text{(limitação relativa ao custo da matéria prima)}$$

Síntese:

$$Máx.\ L(x,y) = 10x + 12y$$

$$\begin{aligned} sujeito\, a : x &\geq 0 \\ y &\geq 0 \\ x + \frac{1}{2}y &\leq 1000 \\ 10x + 15y &\leq 20000 \end{aligned}$$

O passo seguinte será a representação gráfica das condições para definir a **região admissível**:

$x = 0$

$y = 0$

$condição \quad x + \frac{1}{2}y = 1000\,(tempo)$

$2x + y = 2000 \Leftrightarrow y = -2x + 2000$

Determinar a intersecção com os eixos coordenados:

Eixo dos xx

$x = 0 \rightarrow y = 2000\ ; A(0,2000)$

Eixo dos yy

$y = 0 \rightarrow x = 1000 ; B(1000,0)$

$condição \quad 10x + 15y = 20000\ \ (custo)$

$\Leftrightarrow y = -\frac{10}{15}x + \frac{20000}{15}$

Determinar a intersecção com os eixos coordenados:

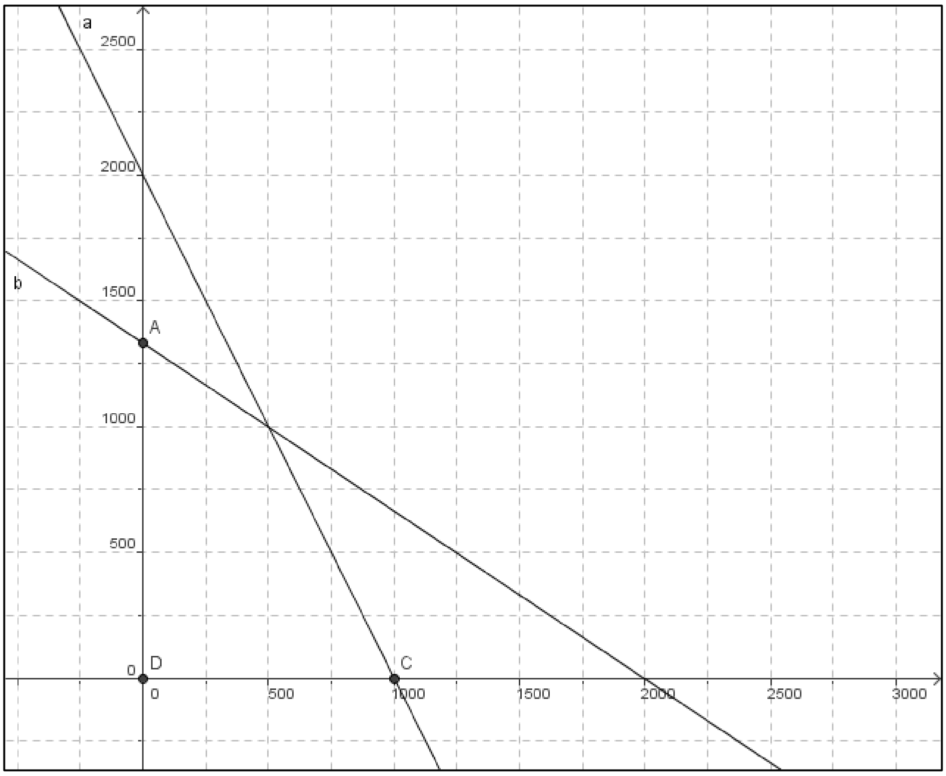
Eixo dos xx

$x = 0 \rightarrow y \approx 1333,3\ ; A(0;1333,3)$

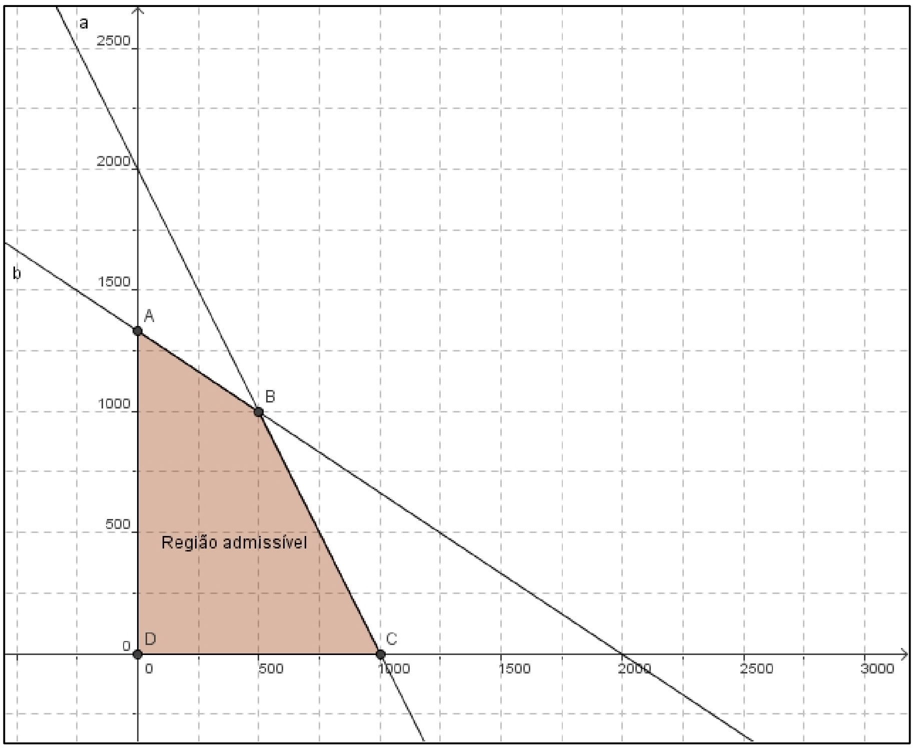
Eixo dos yy

$y = 0 \rightarrow x = 2000 ; B(2000,0)$

Representando agora as condições anteriores, temos:



De seguida vamos construir a região admissível (conjunto das soluções do problema)



Utilizando agora o **teorema fundamental da programação linear** que diz o seguinte:

Seja S a região admissível e $z = ax + by$ *a função objectivo.* ***Se s é limitada, então z, tem máximo ou mínimo em S e cada um destes ocorre pelo menos num dos vértices de S.*** *Se S não é limitada, então o valor máximo ou mínimo de z pode não existir. Se existir ocorre num vértice de S.*

Assim podemos determinar os **vértices da região admissível**:

Pontos $A, B, C\, e\, O$

$A(0;1333,3)$

$C(1000,0)$

Ponto B

Para determinar as coordenadas do ponto B temos que resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases}$$

Resolução pelo método misto (adição ordenada + substituição)

$$\begin{cases} x + \frac{1}{2}y = 1000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y = 2000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\times(-5) \begin{cases} 2x + y = 2000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -10x - 5y = -10000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases}$$

$$Cálculos\ auxiliares$$

$$\begin{array}{r} \cancel{-10x} - 5y = -10000 \\ \cancel{10x} + 15y = 20000 \\ \hline 0x + 10y = 10000 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10y = 10000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1000 \\ 10x + 15y = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1000 \\ 10x + 15 \times 1000 = 20000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1000 \\ 10x = 20000 - 15000 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1000 \\ x = 500 \end{cases}$$

$B = (500,1000)$

Com a calculadora gráfica ou com o Geogebra (por exemplo) podemos confirmar os resultados:

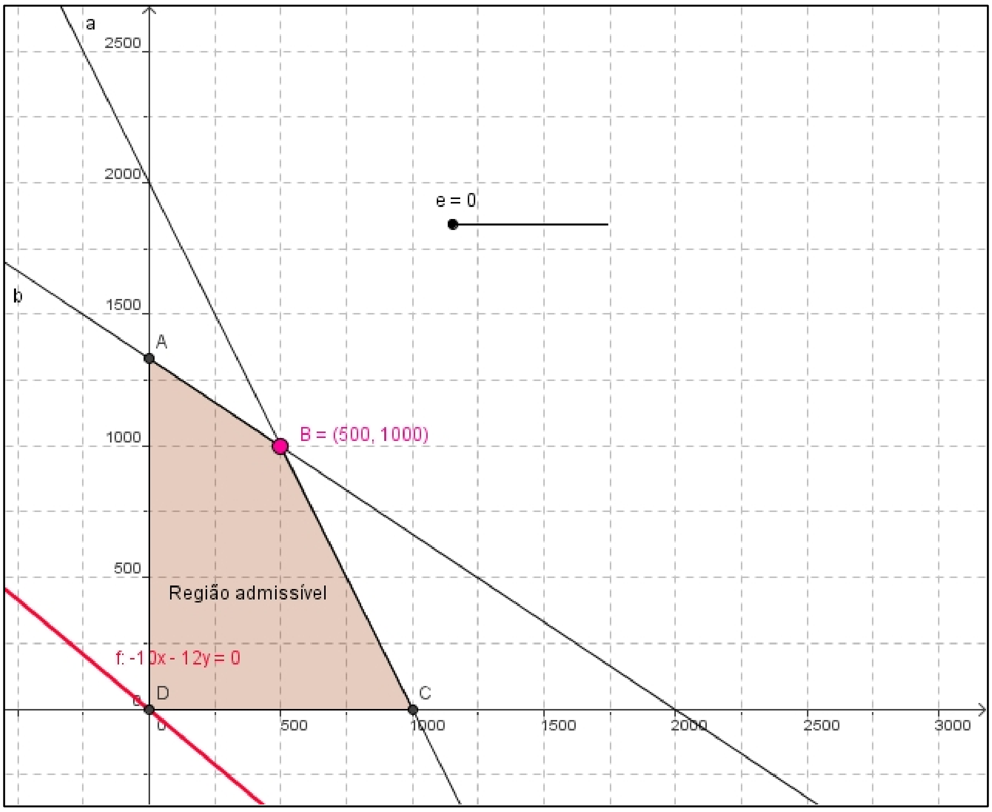
Fazendo agora uma tabela podemos ver que a solução óptima é $B(500,1000)$

x	y	L(x,y)=10x+12y
0	1333,3	16000
1000	0	10000
500	**1000**	**17000 (LUCRO MÁXIMO)**

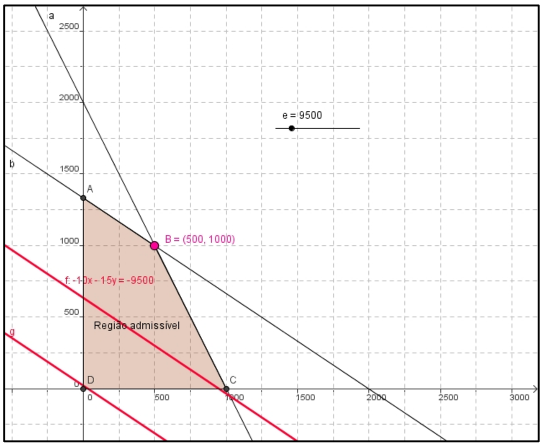
Este resultado pode ser confirmado utilizando a resolução gráfica através de rectas de nível

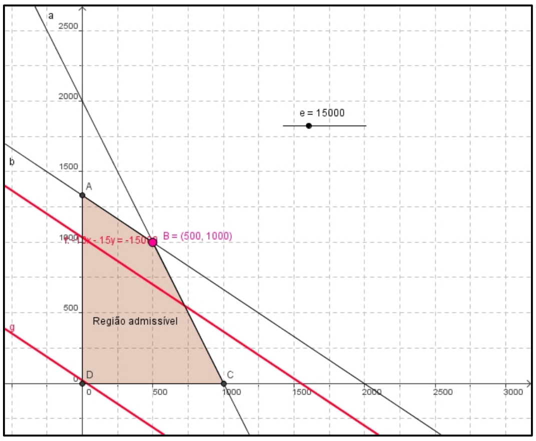
Começamos por representar a recta de nível da família: $10x+12y=k$

Para $k=0$ (lucro=0) , temos:

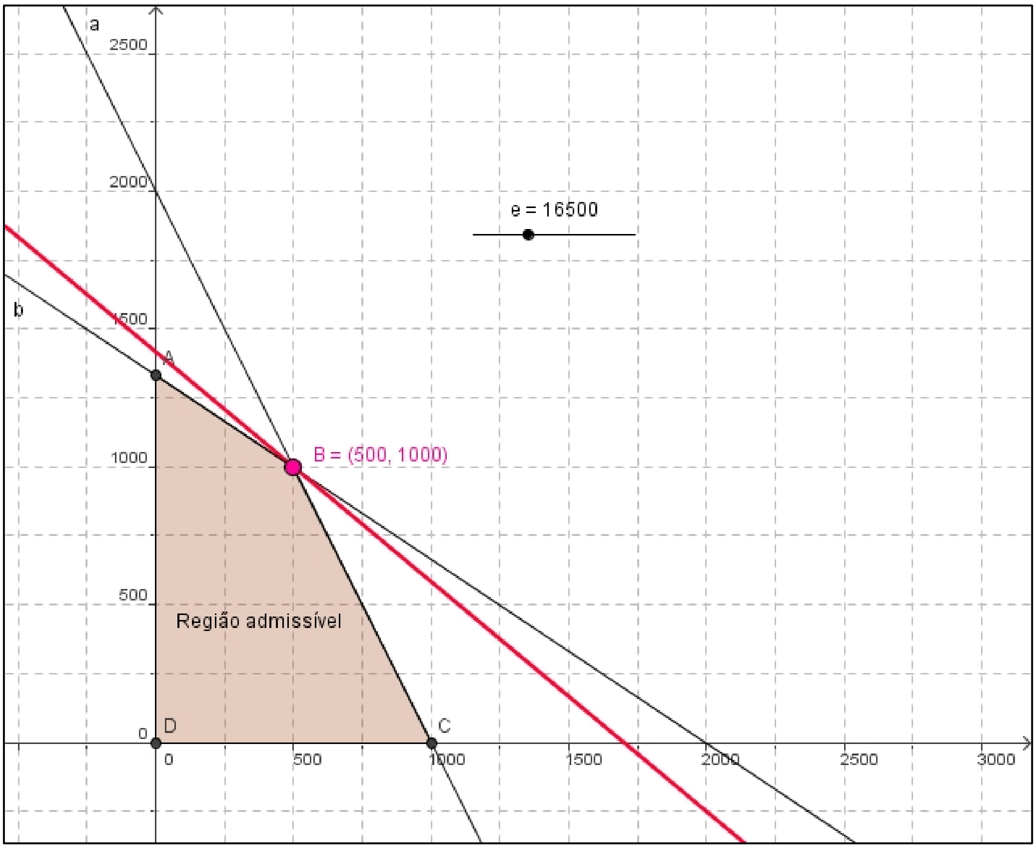


Se agora desenharmos outras rectas de nível (rectas paralelas a anterior, $k > 0$) , vem:





Podemos verificar que a recta que nos interessa é aquela que **tem maior ordenada na origem e toca a região admissível** em pelo menos um ponto, o que acontece com o ponto B. Note-se que esse valor de **k corresponde ao lucro máximo**.



Resposta: A fábrica deve produzir 500 rádios do modelo A e 1000 rádios do modelo B.

$\boxed{3.}$. Medicamentos mais baratos

No mercado estão disponíveis dois medicamentos:

Medicamento A em que uma unidade custa 5 euros e é formada por: • 1 unidade de fibras; • 1 unidade de proteínas; • 3 unidades de vitaminas	**Medicamento B** em que uma unidade custa 8 euros e é formada por: • 4 unidade de fibras; • 1 unidade de proteínas; • 1 unidade de vitaminas	Um doente necessita, por dia, no mínimo de: •7 unidades e fibras; •4 unidades de proteínas •8 unidades de vitaminas

Nestas condições, determine quantas unidades de cada um dos medicamentos devem ser utilizados de modo a **minimizar** o custo do tratamento.

Resolução:

Vamos em primeiro lugar construir uma tabela onde sintetizamos toda a informação:

	Fibras	Proteínas	Vitaminas	Custo (euros)
Medicamento A	1	1	3	5
Medicamento B	4	1	1	8
Limitações	7	4	8	

Agora vamos definir as ***variáveis de decisão***:

$x =$ Número de unidades do Medicamento A
$y =$ Número de unidades do Medicamento B

Em seguida definimos a ***função objectivo:***

$C(x, y) = 5x + 8y$ (custo do tratamento)

Agora vamos definir as ***restrições***:

- Lógicas ou implícitas

$x \geq 0$

$y \geq 0$

- Logísticas ou técnicas

$x + 4y \leq 7$ (limitação relativa às fibras)

$x + y \leq 4$ (limitação relativa às proteínas)

$3x + y \leq 8$ (limitação relativa às vitaminas)

Síntese:

$$Min.\ C(x,y) = 5x + 8y$$
$$sujeito\, a : x \geq 0$$
$$y \geq 0$$
$$x + 4y \leq 7$$
$$x + y \leq 4$$
$$3x + y \leq 8$$

O passo seguinte será a representação gráfica das condições para definir a **região admissível**:

$x = 0$

$y = 0$

$condição \quad x + 4y = 7$

$x + 4y = 7 \Leftrightarrow y = -\dfrac{1}{4}x + \dfrac{7}{4}$

Determinar a intersecção com os eixos coordenados:

Eixo dos xx

$x = 0 \rightarrow y = \dfrac{7}{4}\ ; A\left(0, \dfrac{7}{4}\right)$

Eixo dos yy

$y = 0 \rightarrow x = 7 ; B(7,0)$

$condição \quad x + y = 4$

$x + y = 4 \Leftrightarrow y = -x + 4$

Determinar a intersecção com os eixos coordenados:

Eixo dos xx

$x = 0 \rightarrow y = 4\ ; A(0,4)$

Eixo dos yy

$y = 0 \rightarrow x = 4 ; B(4,0)$

$condição \;\; 3x + 4y = 8$

$3x + 4y = 8 \Leftrightarrow y = -\dfrac{3}{4}x + 2$

Determinar a intersecção com os eixos coordenados:

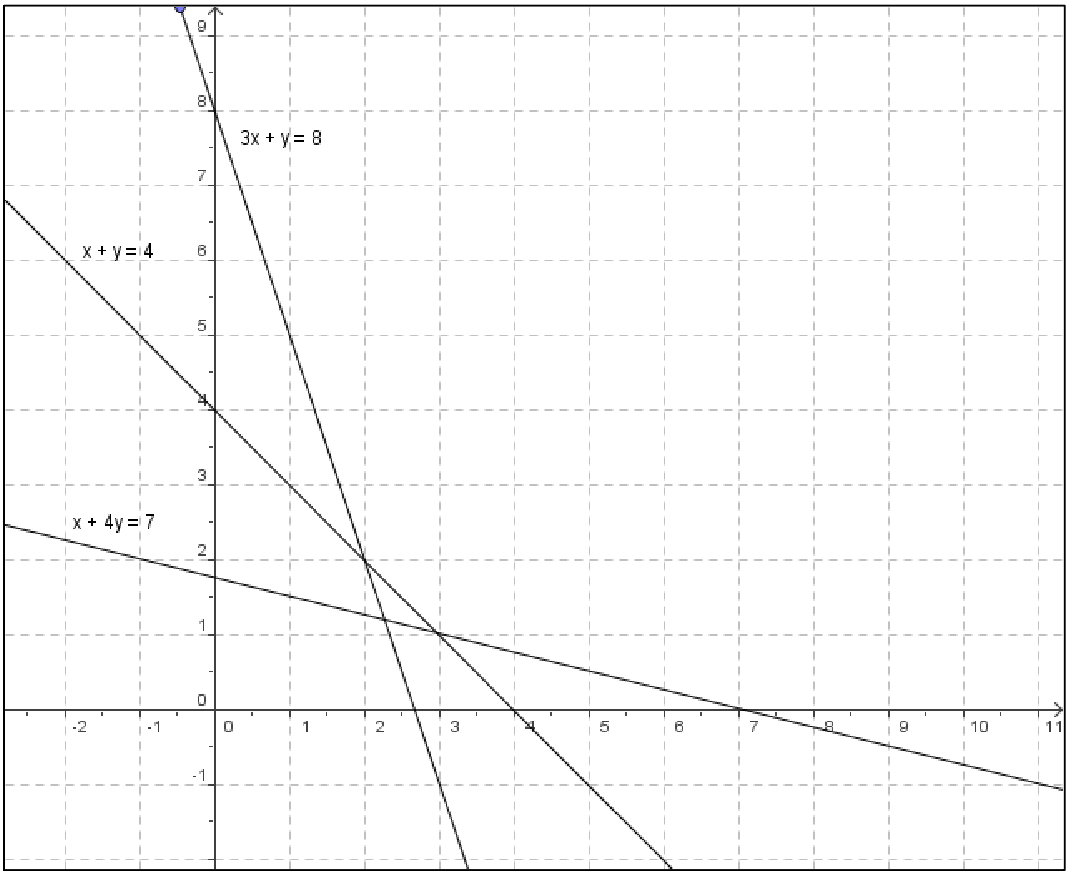
Eixo dos xx

$x = 0 \rightarrow y = 2\,; A(0,2)$

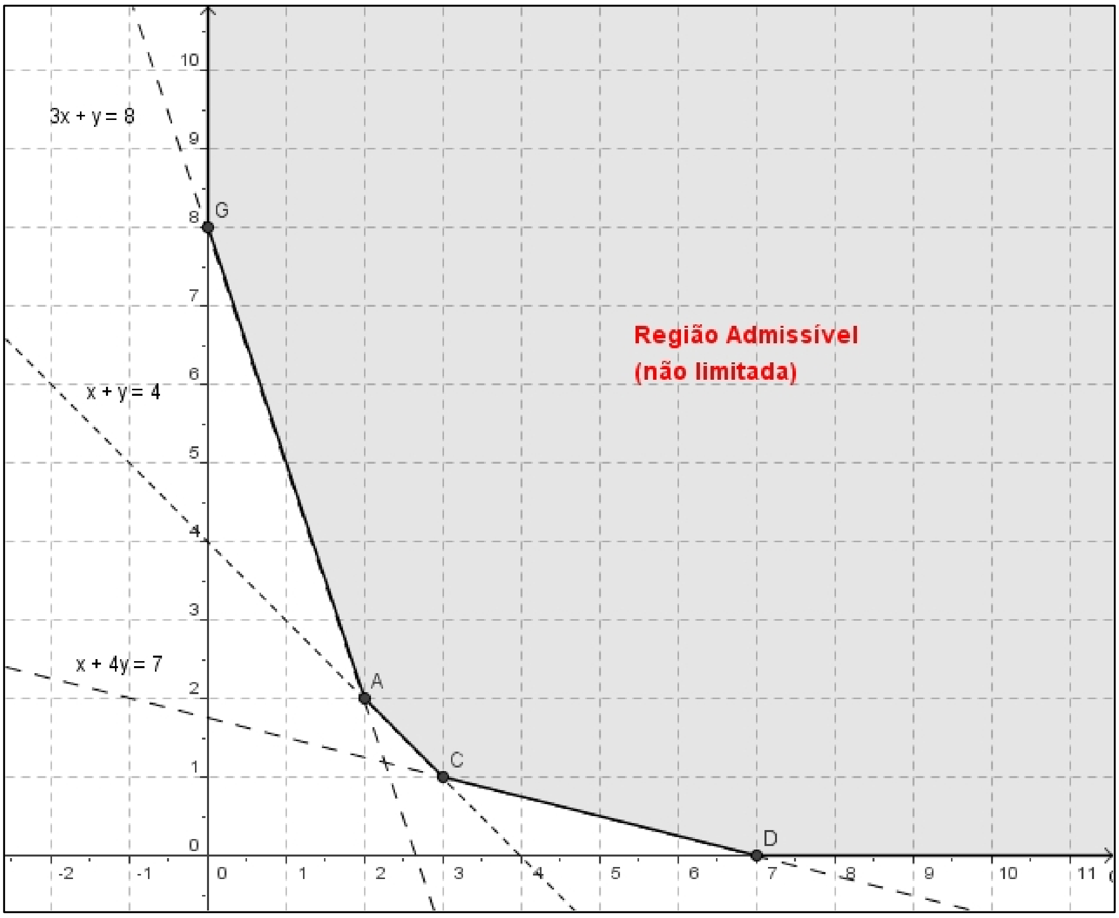
Eixo dos yy

$y = 0 \rightarrow x = 4\,; B\left(4, \dfrac{8}{3}\right)$

Representando agora as condições anteriores, temos:



De seguida vamos construir a região admissível (conjunto das soluções do problemas)



Utilizando agora o **teorema fundamental da programação linear** que diz o seguinte:

Seja S a região admissível e $z = ax + by$ a função objectivo. Se s é limitada, então z, tem máximo ou mínimo em S e cada um destes ocorre pelo menos num dos vértices de S. ***Se S não é limitada, então o valor máximo ou mínimo de z pode não existir. Se existir ocorre num vértice de S.***

Como neste caso queremos minimizar a função objectivo custo do medicamento a solução óptima será encontrada num dos vértices (A,C,D ou G)

Determinação das coordenadas de G

$G(0,8)$

Determinação das coordenadas de D

$D(7,0)$

Determinação das coordenadas de A

Vamos determinar o ponto de intersecção das rectas $3x+y=8$ e $x+y=4$

$$\begin{cases}3x+y=8\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow_{\times(-1)}\begin{cases}3x+y=8\\-x-y=-4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$Cálculos\,auxiliares$$

$$\begin{array}{r}3x\cancel{+y}=8\\\underline{-x\cancel{-y}=-4}\\2x+0y\quad=4\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x+y=8\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3\times2+y=8\\x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=2\\x=2\end{cases}$$

$A(2,2)$

Determinação das coordenadas de C

Vamos determinar o ponto de intersecção das rectas $x+4y=7$ e $x+y=4$

$$\begin{cases}x+4y=7\\x+y=4\end{cases}\Leftrightarrow^{\times(-1)}\begin{cases}x+4y=7\\x+y=-4\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$Cálculos\,auxiliares$$

$$\begin{array}{r}\cancel{-x}-4y=-7\\\underline{\cancel{x}+y=4}\\0x-3y\quad=-3\end{array}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+4y=7\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+4\times1=7\\y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=1\end{cases}$$

$A(3,1)$

Fazendo agora uma tabela podemos ver que a solução óptima é $C(3,1)$

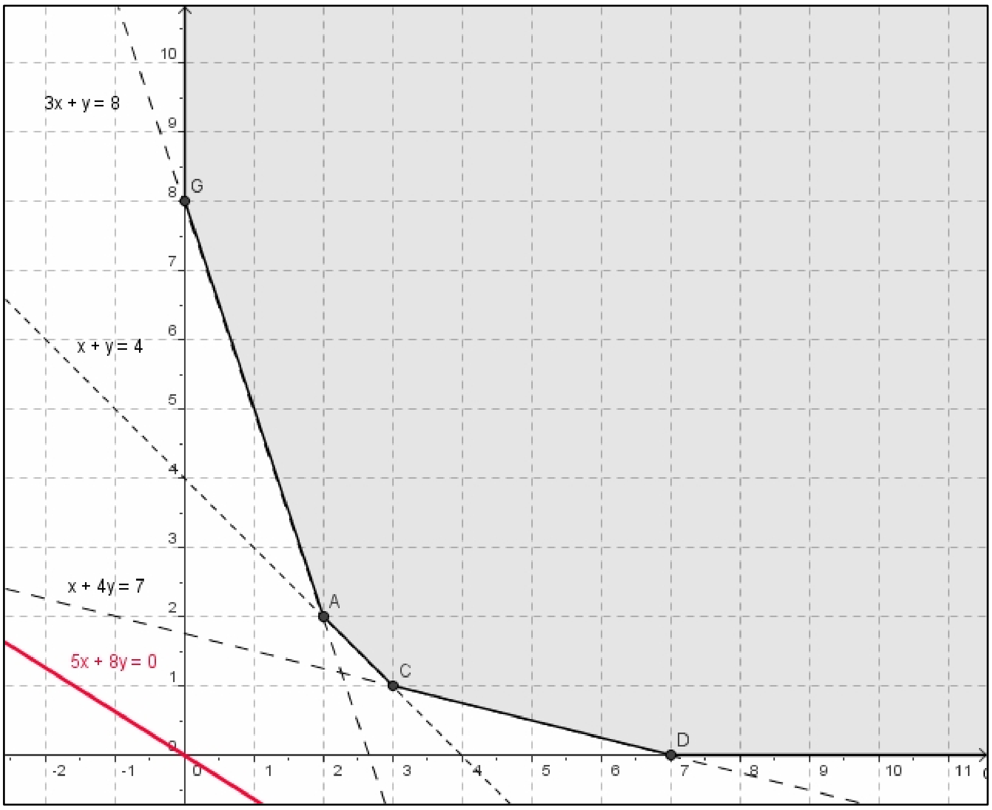
x	y	L(x,y)=5x+8y
0	8	64
7	0	35
2	2	26
3	**1**	**23 (custo mínimo)**

Este resultado pode ser confirmado utilizando a resolução gráfica através de rectas de nível

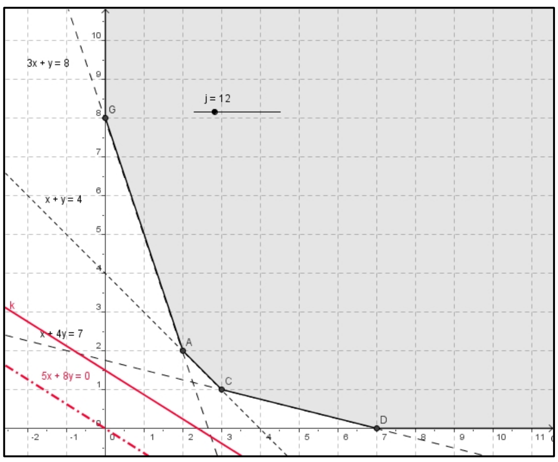
Começamos por representar a recta de nível da família: $5x + 8y = k$

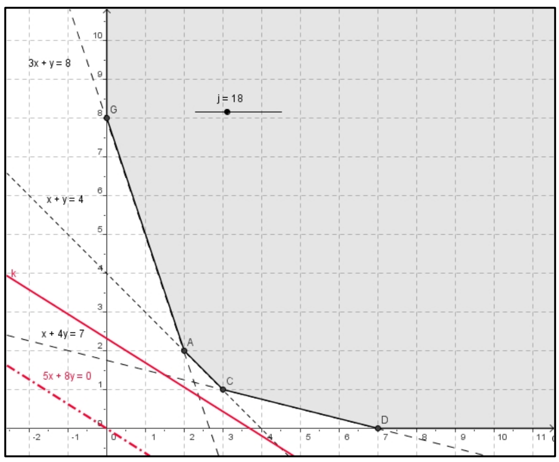
Para $k = 0$, temos:

$$5x + 8y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{5}{8}x$$

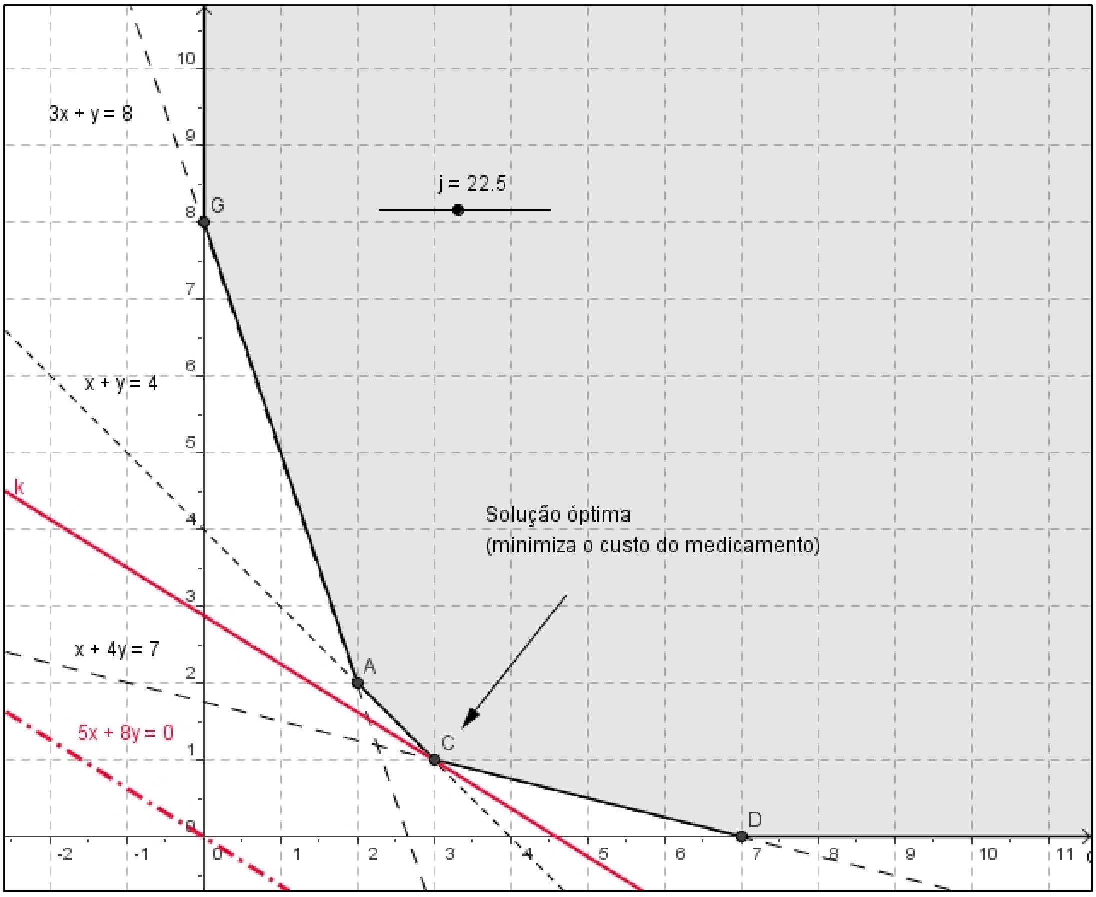


Se agora desenharmos outras rectas de nível (rectas paralelas a anterior, com $k > 0$), vem:





Podemos verificar que a recta que nos interessa é aquela que **tem menor ordenada na origem e toca a região admissível** em pelo menos um ponto, o que acontece com o ponto C. Esse valor **de k corresponde ao custo mínimo.**



Resposta: O custo do medicamento é mínimo se forem utilizados 3 unidades do medicamento A e 1 unidade do medicamento B