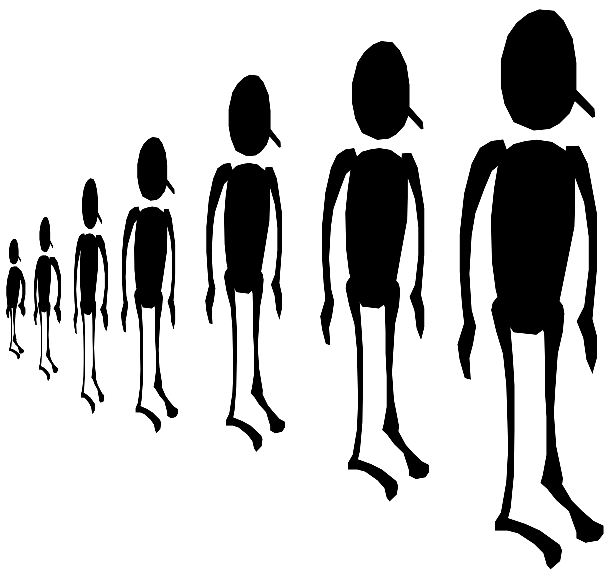
Aplicação da Teoria das Filas à Operação de Transportes



Lâminas preparadas por: S. H. Demarchi

Bibliografia:

Setti, J.R (2002). Tecnologia de Transportes USP, São Carlos

Fogliatti, M.C. e N.M.C. Mattos (2007). Teoria de Filas. Interciência.

Filas

Não são exclusivas da operação de transportes; ocorrem também em:

- Bancos, supermercados, hospitais, etc
- Linhas de produção e montagem

Na operação de transportes:

- Interseções
- Pontos de estrangulamento em rodovias
- Pontos de ocorrência de incidentes
- Praças de pedágio
- Entrada/saída de estacionamentos
- Em sistemas de transporte coletivo...

Elementos de um modelo de filas

- Padrão de chegadas (X), λ
- Padrão de atendimento (Y), μ
- Canais de serviço (c)
- Disciplina da fila
  - FIFO
  - LIFO

Tipos de modelo de filas

Parâmetro	Determinístico	Estocástico
$\lambda = \dfrac{C(t)}{t}$	constante	aleatória
$\mu = \dfrac{A(t)}{t}$	constante	aleatória ou constante

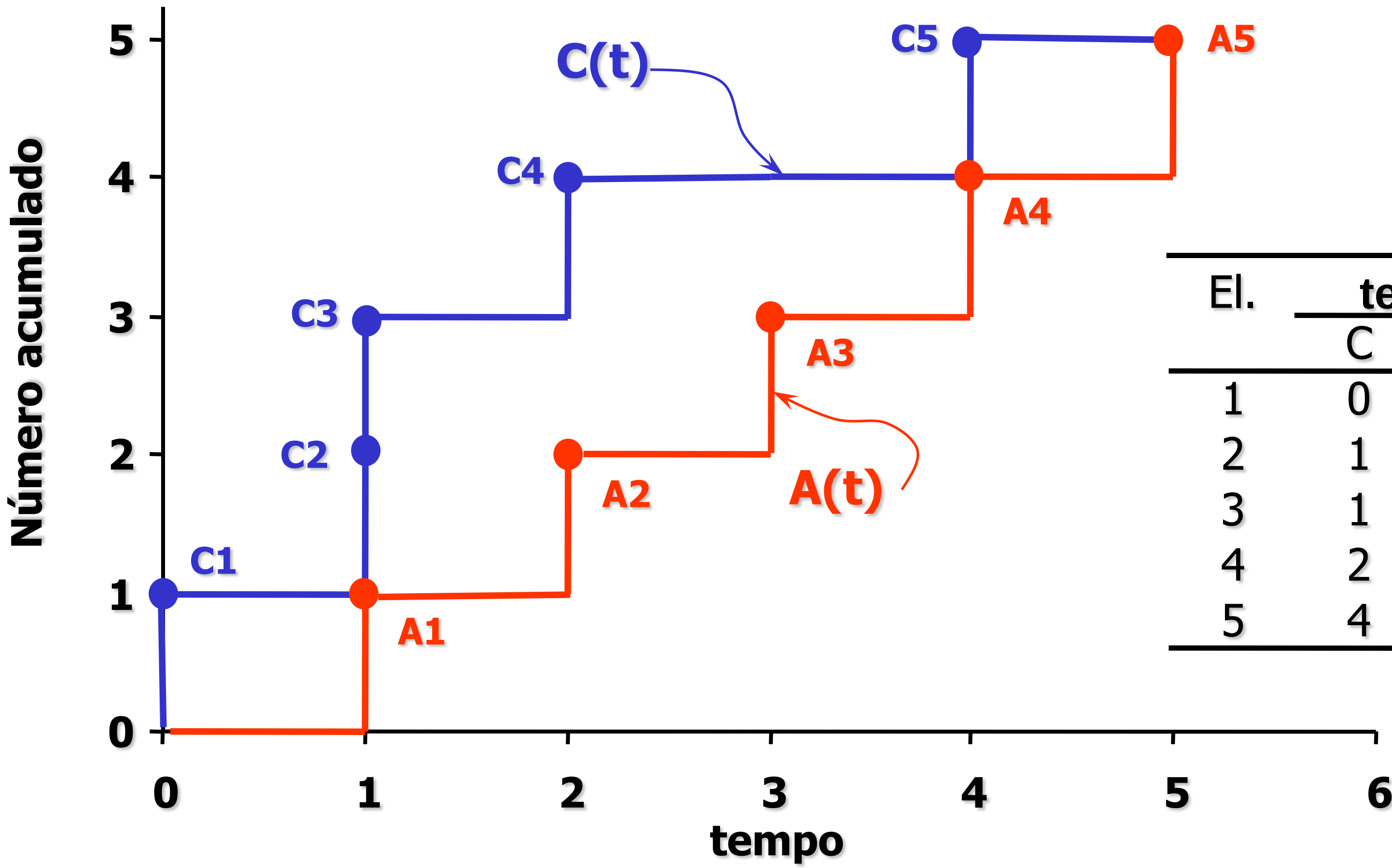
Notação dos modelos de fila

X/Y/c

- X: padrão das chegadas
- Y: padrão de atendimento
- c: número de canais

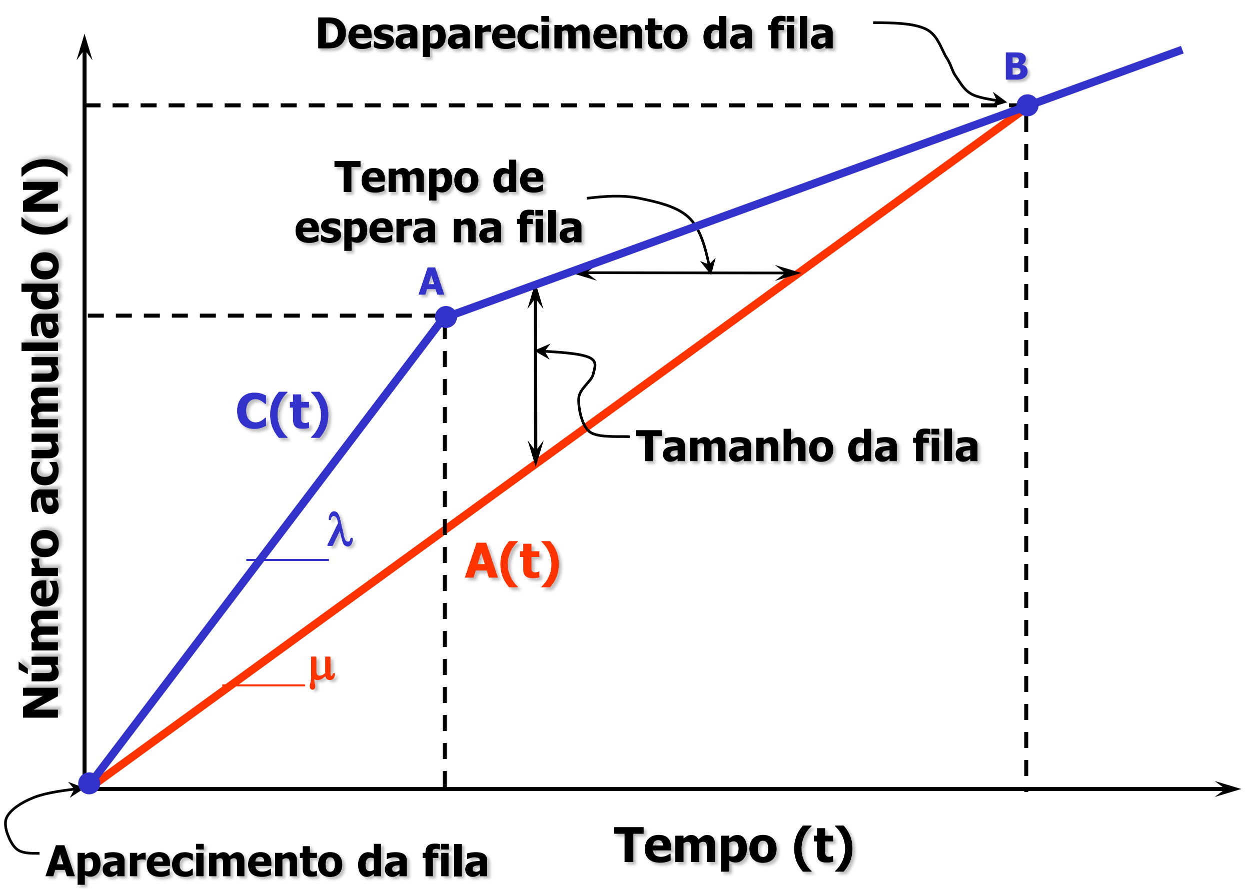
- D/D/1
- M/D/1
- M/M/1
- M/M/k

Representação de uma fila



El.	tempo	
	C	A
1	0	1
2	1	2
3	1	3
4	2	4
5	4	5

Modelo D/D/1


Desaparecimento da fila
B
Tempo de
espera na fila
A
C(t)
Tamanho da fila
λ
A(t)
μ
Número acumulado (N)
Aparecimento da fila
Tempo (t)

Grau de congestionamento (ρ)

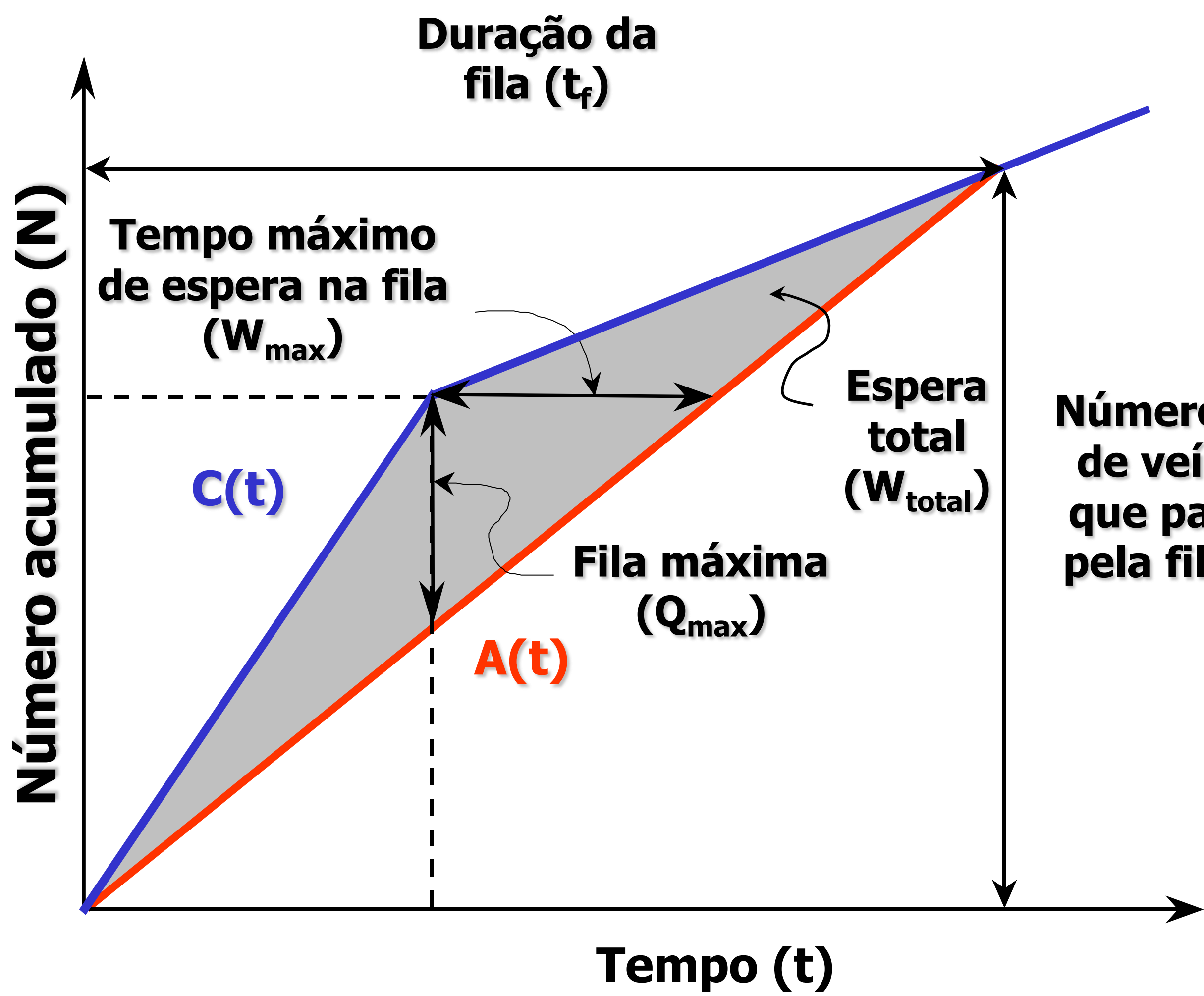
$C(t) = \lambda t$

$A(t) = \mu t$

$\rho = \lambda / \mu$

se $\rho \geq 1$ => sistema supersaturado

Medidas de desempenho - 1



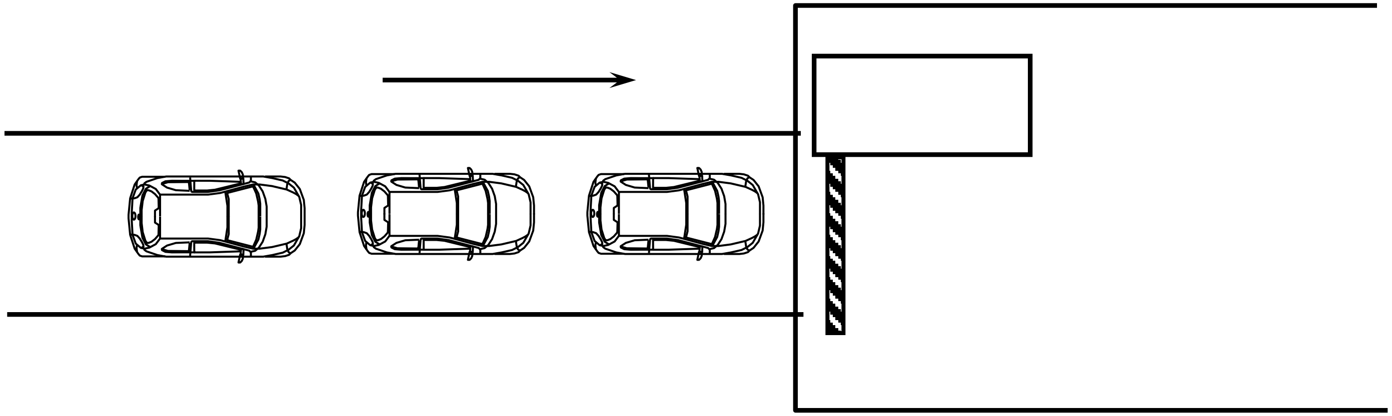
Medidas de desempenho - 2

- Fila máxima Q_{max}
- Tempo máximo de espera W_{max}
- Tempo total de espera W_{total}
- Número de veículos que ficaram em fila N_f
- Duração da fila t_f
- Fila média $\overline{Q} = \dfrac{W_{total}}{t_f}$
- Tempo médio de espera na fila $\overline{W} = \dfrac{W_{total}}{N_f}$

Exercício 1

Um estacionamento na região central de uma cidade consegue atender um veículo a cada 15 s. No instante que ele abre até 20 minutos após o início de funcionamento, os veículos chegam a uma taxa constante de 480 veíc/h. Após 20 minutos da abertura, a taxa cai para 120 veíc/h, mantendo constante por toda manhã. Utilizando um modelo de filas D/D/1, desenhe o gráfico com o número acumulado de chegadas e atendimento e determine as medidas de desempenho do sistema de filas.

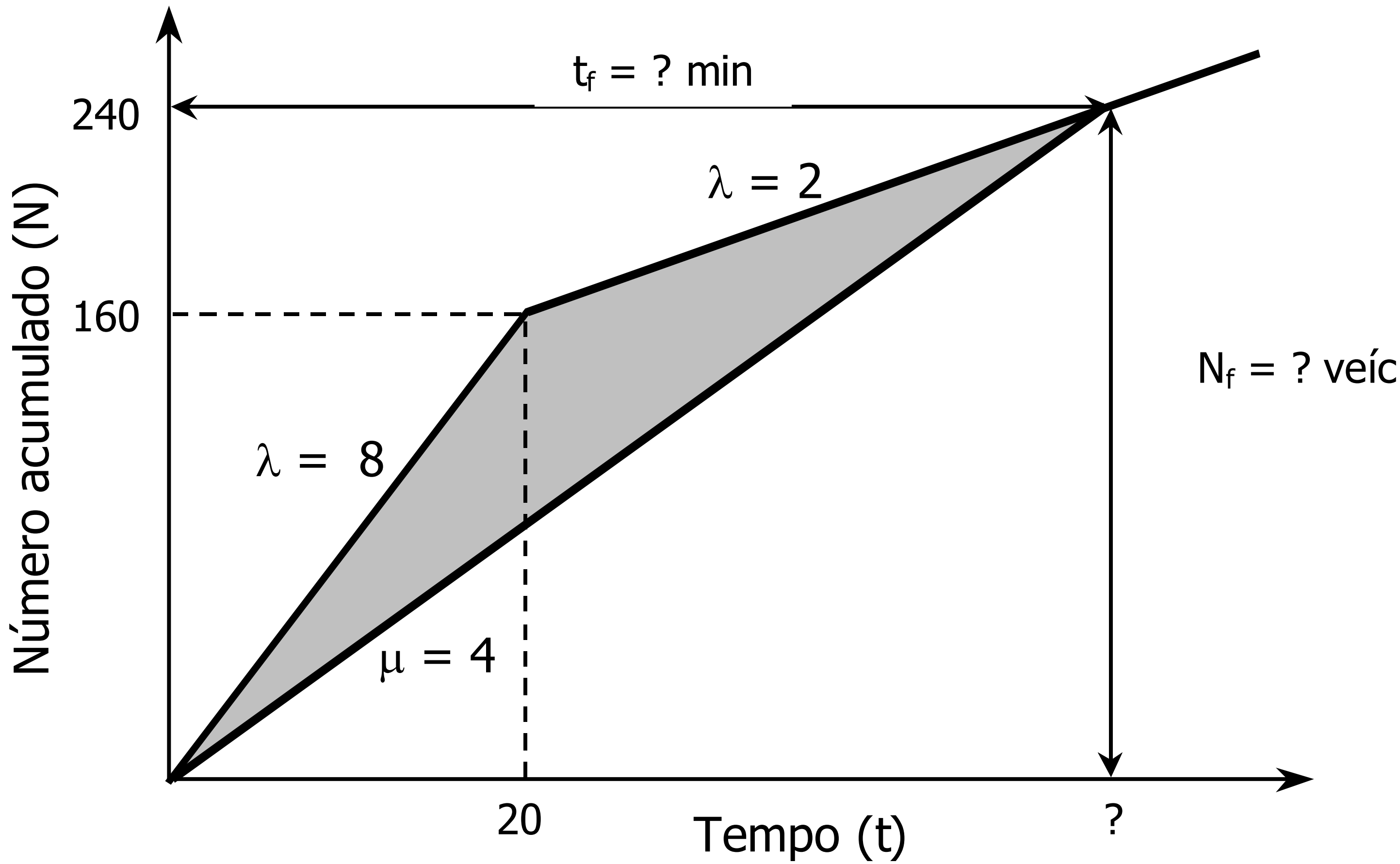
Estacionamento



- t < 20 min : λ = 480 veic/h
- t > 20 min : λ = 120 veic/h
- tempo atendimento : 15 s/veic

Solução do exercício 1

- $0 \leq t \leq 20$ min, taxa de chegada = 480 veic/h = 8 veic/min
- qdo. t = 20 min, chegaram 20 x 8 = 160 veíc
- t > 20 min, taxa de chegada = 120 veic/h = 2 veíc/min.
- Taxa de atendimento = 60 (s/min) / (15 s/veic) = 4 veic/min.
- Com as taxas de chegada e de atendimento => gráfico

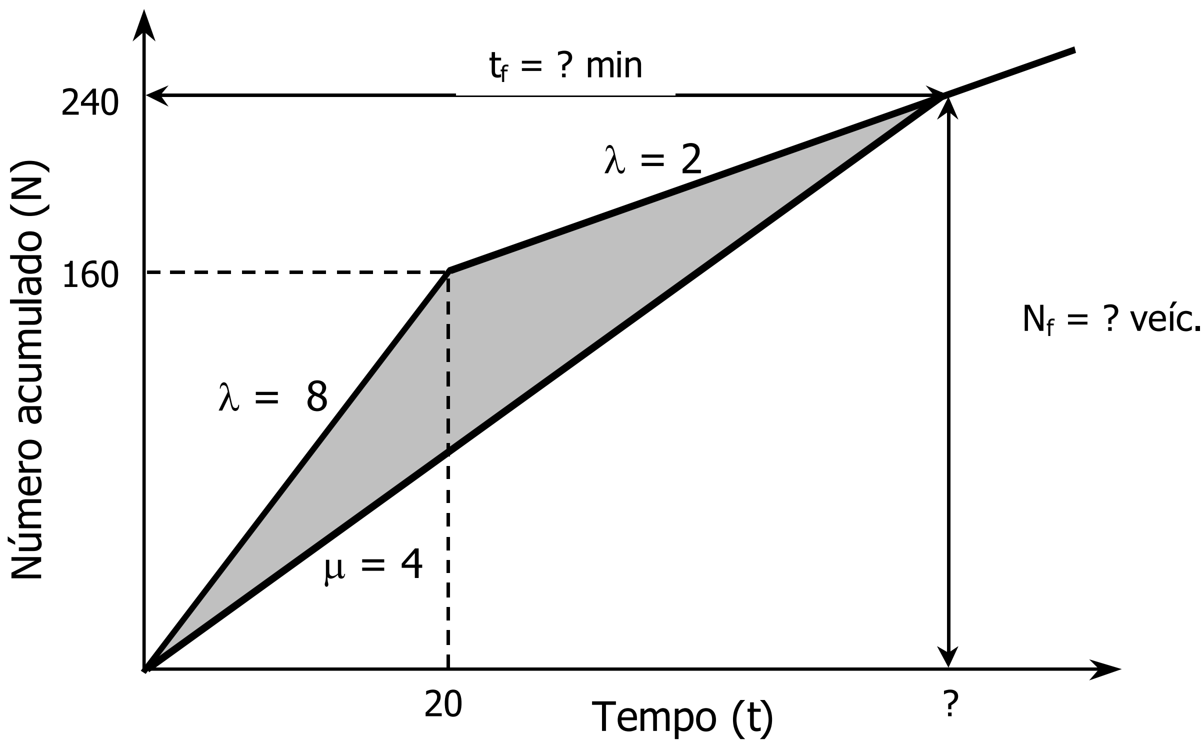


t_f = ? min
240
160
Número acumulado (N)
λ = 2
λ = 8
μ = 4
N_f = ? veíc.
20
?
Tempo (t)

Duração da fila (ver gráfico) ou via analítica:

$$160 + 2 \times \left(t_f - 20\right) = 4 \times t_f$$

$$t_f = \frac{160 - 40}{2} = \frac{120}{2} = 60\,\text{min}$$



O número de veículos que ficaram em fila:

$$N_f = 160 + (60 - 20) \times 2 = 240 \text{ veíc}$$

O tempo máximo de espera ocorre para o 160º veículo:

$$W_{\max} = \frac{160}{4} - \frac{160}{8} = 20 \text{ min}$$

A fila máxima ocorre em t = 20 min:

$$Q_{\max} = 160 - 4 \times 20 = 80 \text{ veíc}$$

O tempo total de espera = área entre as curvas de chegada e de atendimento:

$$W_{total} = \frac{80 \times 20}{2} + \frac{80 \times 40}{2} = 2400 \quad \text{veíc.min}$$

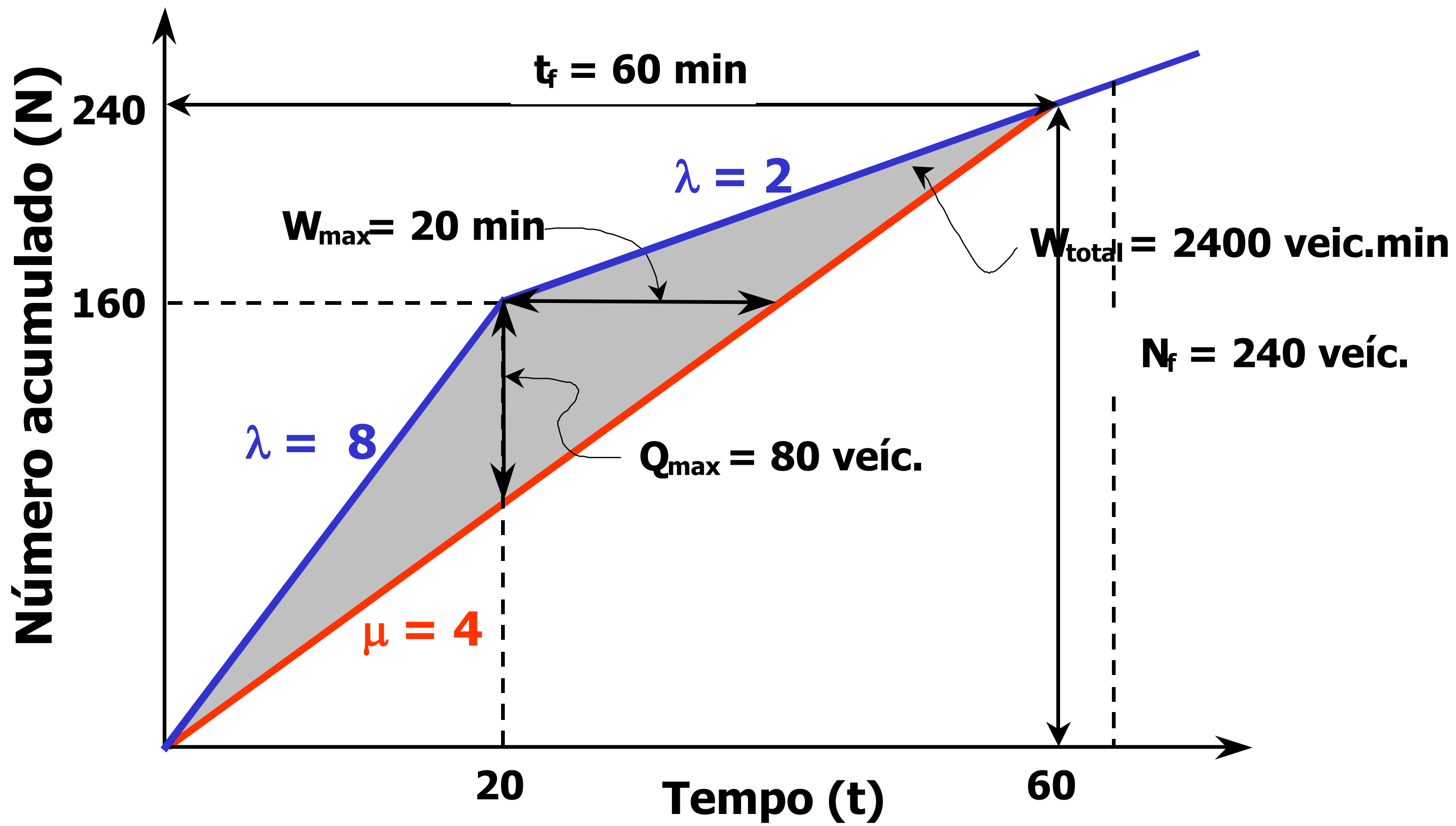
O tempo médio de espera na fila = tempo total de espera / no. de veíc ficaram fila:

$$\overline{W} = \frac{2400}{240} = 10 \quad \text{min}$$

A fila média = tempo total de espera / duração da fila:

$$\overline{Q} = \frac{2400}{60} = 40 \quad \text{veíc}$$

Solução

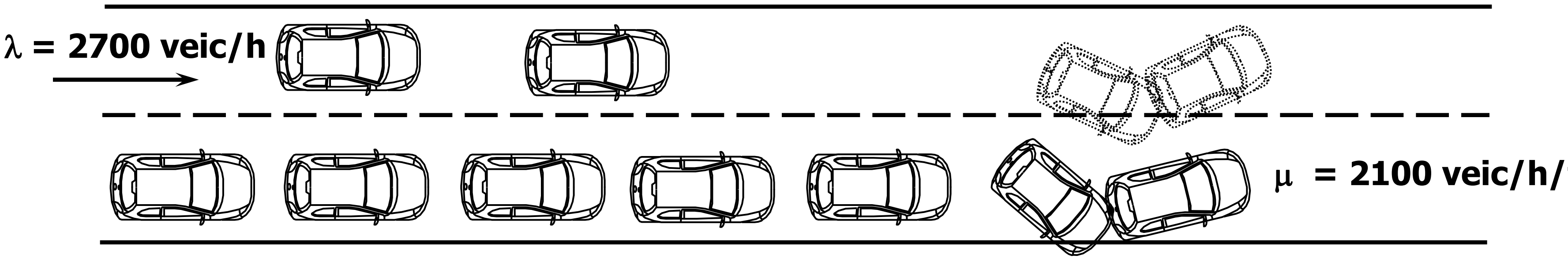


t_f = 60 min
240
160
Número acumulado (N)
λ = 2
W_{max}= 20 min
W_{total} = 2400 veic.min
N_f = 240 veíc.
λ = 8
Q_{max} = 80 veíc.
μ = 4
20
Tempo (t)
60

Exercício 2

Uma rodovia com 2 faixas de tráfego por sentido apresenta, no pico da manhã, uma taxa de fluxo de 2700 veíc/h no sentido de maior movimento. Num dado instante, ocorre um acidente que bloqueia completamente as duas faixas. 12 minutos após o acidente, uma das faixas é liberada para o tráfego e somente 30 minutos após o acidente ter ocorrido a pista é completamente liberada ao tráfego. Se a capacidade de cada faixa de tráfego é 2100 veíc/h/faixa, determine o gráfico de número acumulado de chegadas e atendimentos (supondo um modelo de filas D/D/1), calculando as medidas de desempenho da fila que forma em função do acidente.

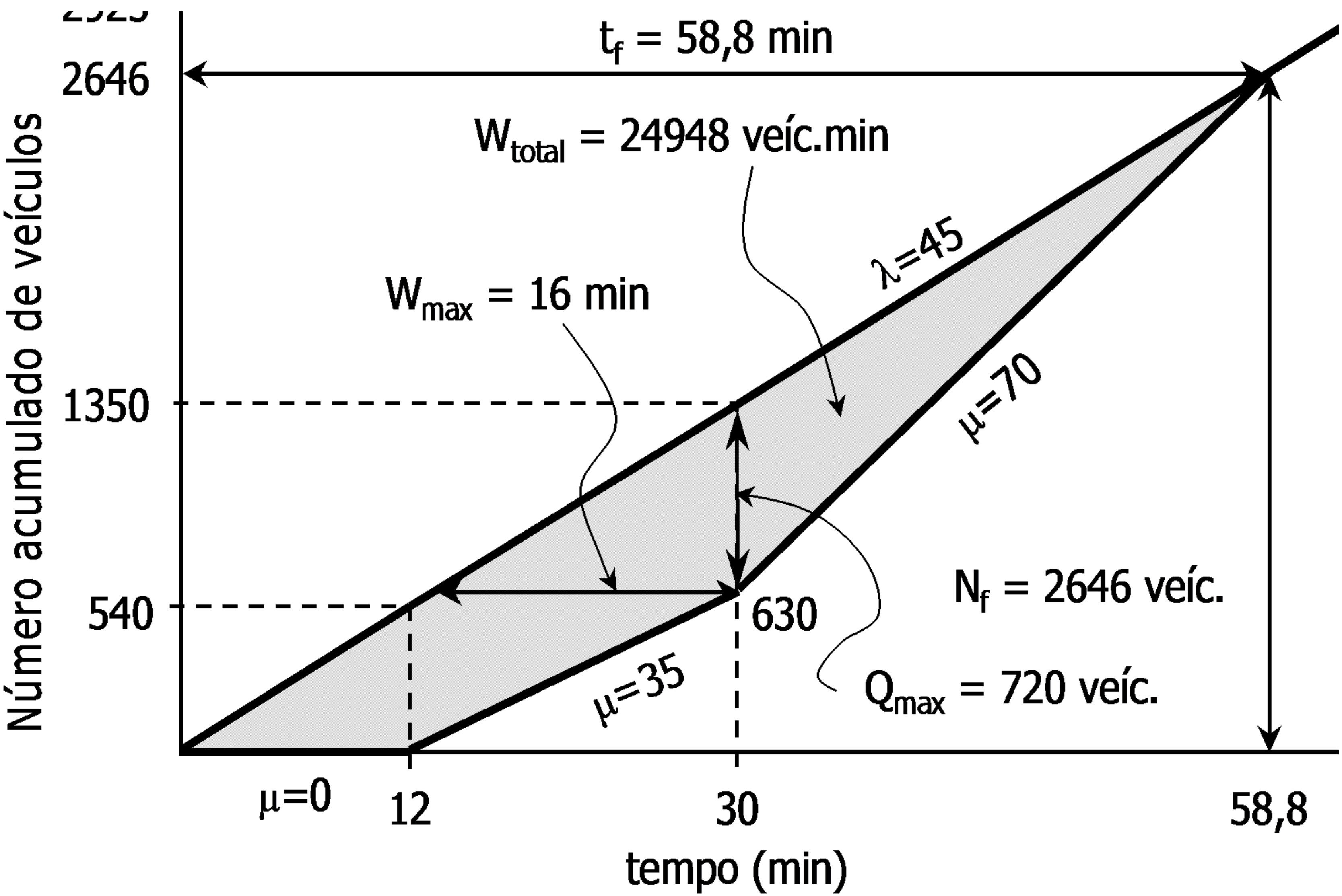
Incidente na corrente de tráfego



- t = 0 min : ocorrência do incidente
- t = 12 min : liberação da faixa esquerda
- t = 30 min : liberação da faixa direita
- t > 30 min : fluxo volta ao normal

Solução do exercício 2

- Taxa de chegadas = 2700 veic/h = 45 veic/min
- t = 12 min, chegam 12 x 45 = 540 veíc
- t = 30 min, chegam 30 x 45 = 1350 veíc
- $0 \leq t \leq 12$ min, a taxa de atendimento é zero
- $12 \leq t \leq 30$ min, só uma faixa liberada => 2100 veíc/h ou 35 veíc/min.
- aos 30 min, são atendidos (30-12) x 35 = 630 veículos
- aos 30 min, a pista é completamente liberada => taxa atendimento = 70 veíc/min (2x35)
- Com as taxas de chegada e de atendimento => gráfico



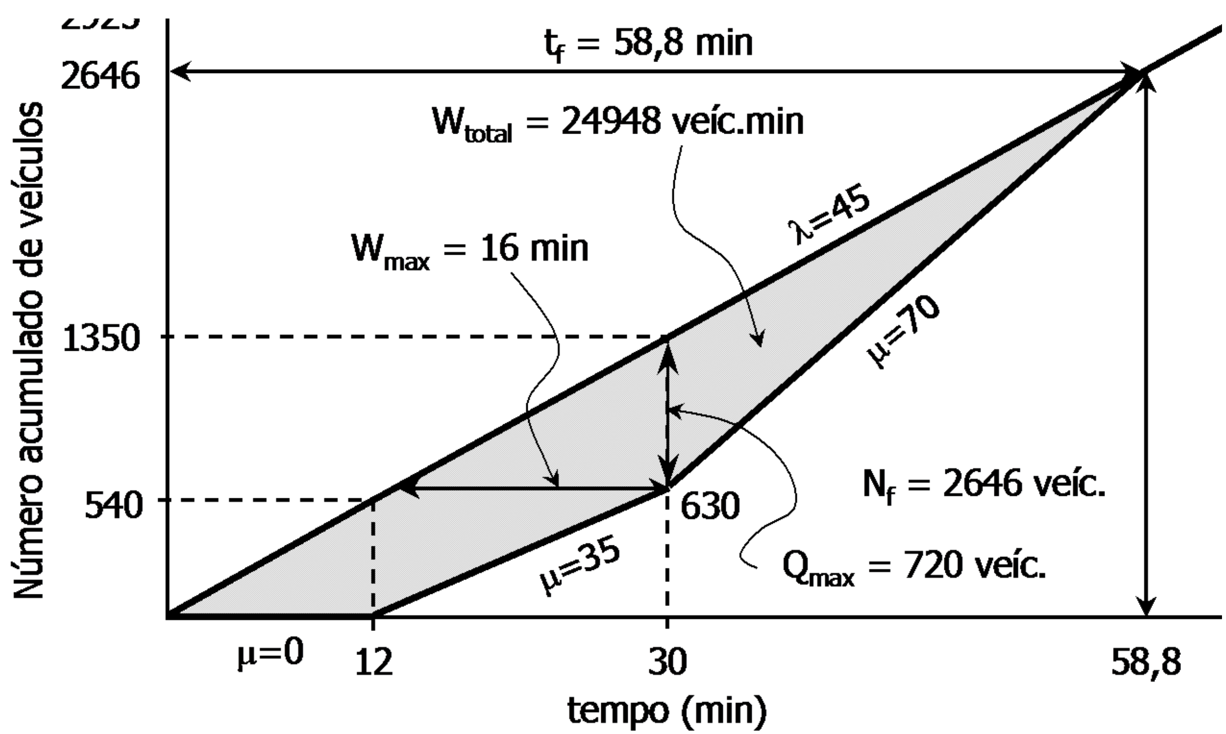
2646
1350
540
Número acumulado de veículos
t_f = 58,8 min
W_{total} = 24948 veíc.min
λ=45
W_{max} = 16 min
μ=70
630
N_f = 2646 veíc.
μ=35
Q_{max} = 720 veíc.
μ=0
12
30
58,8
tempo (min)

Duração da fila (ver gráfico) ou via analítica:

$$45 \times t_f = 0 + 35 \times (30 - 12) + 70 \times (t_f - 30)$$

$$45 \times t_f = 630 + 70 \times t_f - 2100$$

$$t_f = \frac{1470}{25} = 58{,}8\,\text{min}$$



O número de veículos que ficaram em fila:

$$N_f = 45 \times 58{,}8 = 2646 \quad \text{veículos}$$

O tempo máximo de espera ocorre para o 630º veículo:

$$W_{\max} = 12 + \left(\frac{630}{35} - \frac{630}{45}\right) = 16 \quad \text{min}$$

A fila máxima ocorre em t = 30 min:

$$Q_{\max} = 1350 - 630 = 720 \quad \text{veículos}$$

O tempo total de espera = área entre as curvas de chegada e de atendimento:

$$W_{total} = \frac{1350 \times 30}{2} - \frac{630 \times 18}{2} + \frac{720 \times 28{,}8}{2} = 24948 \text{ veíc.min}$$

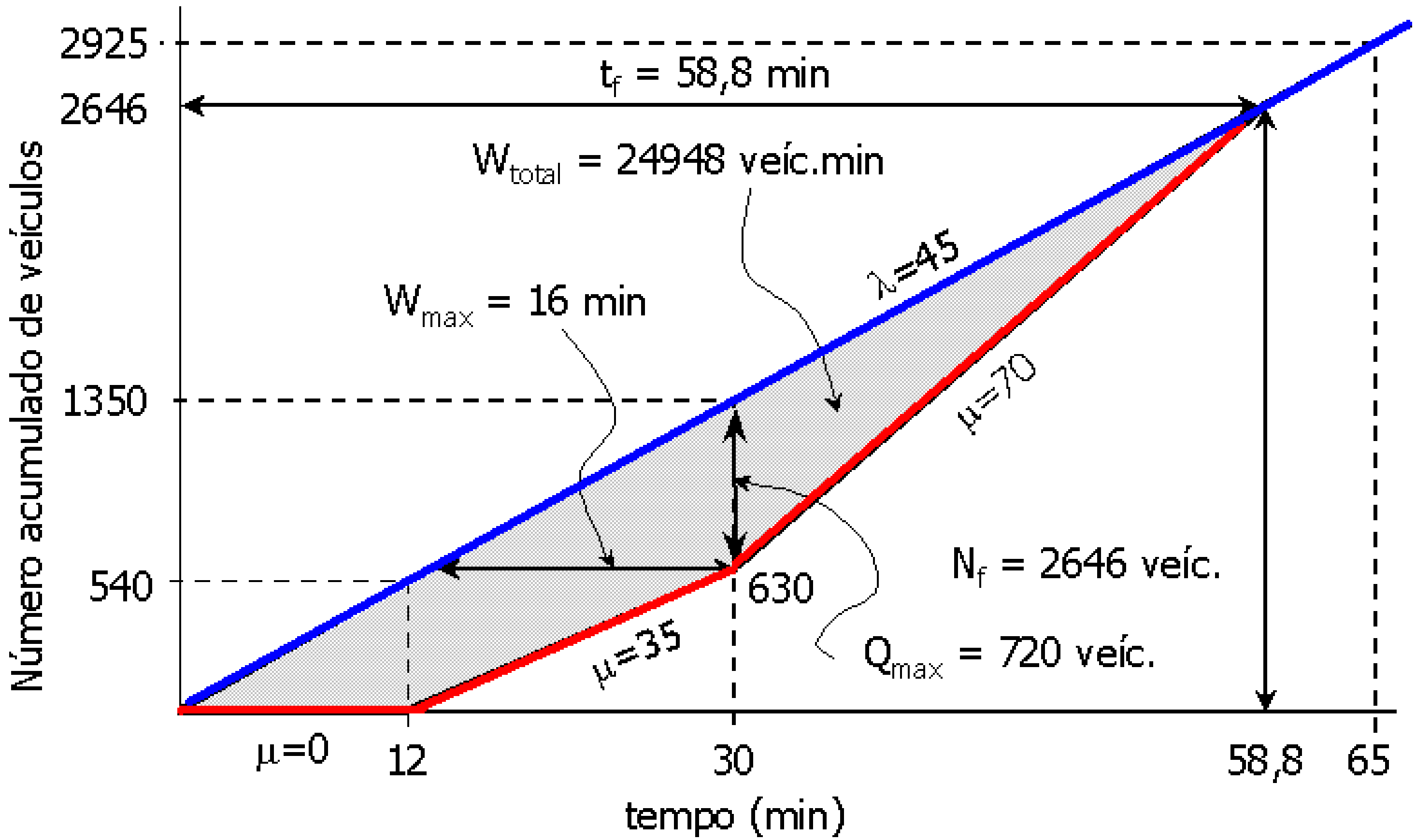
O tempo médio de espera na fila = tempo total de espera / no. de veíc ficaram fila:

$$\overline{W} = \frac{24948}{2646} = 9{,}4 \text{ min}$$

A fila média = tempo total de espera / duração da fila:

$$\overline{Q} = \frac{24948}{58{,}8} = 424 \text{ veículos}$$

Solução



2925
2646
1350
540
Número acumulado de veículos
t_f = 58,8 min
W_{total} = 24948 veíc.min
λ=45
W_{max} = 16 min
μ=70
630
N_f = 2646 veíc.
μ=35
Q_{max} = 720 veíc.
μ=0
12
30
58,8
65
tempo (min)

Modelo M/D/1

Representação gráfica é complicada

Fila média

$$\overline{Q} = \frac{2\,\rho - \rho^2}{2\,(1-\rho)}$$

Tempo médio de espera na fila

$$\overline{W} = \frac{\rho}{2\,\mu\,(1-\rho)}$$

Tempo médio no sistema (fila + atendimento)

$$\overline{t} = \overline{W} + 1/\,\mu = \frac{2 - \rho}{2\,\mu\,(1-\rho)}$$

Modelo M/M/1

Fila média

$$\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

Tempo médio de espera na fila

$$\overline{W} = \frac{\rho}{(\mu - \lambda)}$$

Tempo médio no sistema (fila + atendimento)

$$\overline{t} = \frac{1}{\mu - \lambda}$$

Probabilidade de esperar mais que t na fila

$$P(W>t) = \rho\, e^{-(\mu - \lambda)\, t}$$

Modelo M/M/1

Probabilidade de ter n usuários no sistema (fila + atendimento)

$$P_n = \rho^n (1 - \rho)$$

Probabilidade do sistema estar vazio (fila + atendimento)

$$P_0 = 1 - \rho$$

Probabilidade de haver pelo menos n usuários no sistema (fila + atendimento)

$$P(N \geq n) = \rho^n$$

Exercício 3

Em uma praça de pedágio, os veículos chegam a uma das cabines a uma taxa média de 2 veic/min. O operador atende veículos a uma taxa média de um carro a cada 20 segundos.

Determine as medidas de desempenho do sistema supondo que:

1. as chegadas são poissonianas e o tempo de atendimento é exponencialmente distribuído.
2. as chegadas seguem uma distribuição de Poisson e o tempo de atendimento é constante
3. discuta as diferenças entre as 2 situações.

Solução do exercício 3

1. Modelo M/M/1

Grau de congestionamento

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\ \text{veic/min}}{3\,\text{veic/min}} = 0{,}67$$

Fila média

$$\overline{Q} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}44}{0{,}33} = 1{,}33\,\text{veic}$$

Tempo médio de espera na fila

$$\overline{W} = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)} = \frac{2}{3(3-2)} = 0{,}67\,\text{min/veic}$$

Tempo médio no sistema (fila + atendimento)

$$\bar{t} = \frac{1}{\mu-\lambda} = \frac{1}{3-2} = 1\,\text{min/veic}$$

2. Modelo M/D/1

Grau de congestionamento

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{2\ \text{veic/min}}{3\,\text{veic/min}} = 0{,}67$$

Fila média

$$\overline{Q} = \frac{2\rho - \rho^2}{2(1-\rho)} = \frac{2.0{,}67 - 0{,}67^2}{2(1-0{,}67)} = \frac{1{,}34 - 0{,}45}{0{,}66} = 1{,}35\,\text{veic}$$

Tempo médio de espera na fila

$$\overline{W} = \frac{\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{0{,}67}{2.3(1-0{,}67)} = 0{,}34\,\text{min/veic}$$

Tempo médio no sistema (fila + atendimento)

$$\bar{t} = \frac{2-\rho}{2\mu(1-\rho)} = \frac{1{,}33}{2.3(1-0{,}67)} = 0{,}67\ \text{min/veic}$$

3. A aleatoriedade no atendimento torna o desempenho do sistema pior que no caso dos tempos constantes de atendimento

Exercício 4

Durante o período de pico da manhã (6:00 – 8:30), um trecho de 500 m de uma rodovia de pista dupla, com duas faixas de tráfego por sentido, apresenta um volume de tráfego de 3120 veíc/h, constante por todo o período de pico. Exatamente às 6:30, um acidente ocorre obstruindo as duas faixas por 4 min e uma das faixas por mais 26 minutos, que é somente liberada às 7:00. Considerando que a capacidade da rodovia é de 2250 veíc/h/faixa, pede-se:

a) desenhe o gráfico de chegadas e atendimentos acumulados

b) determine o instante de término do congestionamento

c) determine a espera total no período de congestionamento, a fila média e a espera média

d) determine a espera máxima e a fila máxima, indicando-as no gráfico