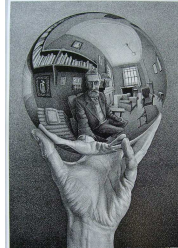


Pesquisa Operacional

Capítulo 5

Dualidade



Hand with Reflecting Sphere, 1935
M. C. Escher

Prof. Wanderley de Souza Alencar, MSc.

Capítulo 5: Dualidade

5. PAUTA

1. Introdução à Dualidade
2. Definição do Problema *Dual*
3. Exemplos de pares de problemas *Primal/Dual*

Prof. Wanderley de Souza Alencar

2

Capítulo 5: Dualidade

5. PAUTA

4. Algoritmo *Dual* para o *Simplex*
5. Propriedades Importantes *Primal / Dual*
6. Exercícios do Capítulo

Prof. Wanderley de Souza Alencar

3

Capítulo 5: Dualidade

5. PAUTA

7. Saiba Mais...

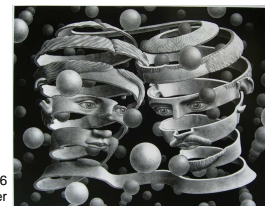
Prof. Wanderley de Souza Alencar

4

Capítulo 5: Dualidade

5.1

Introdução à Dualidade



Bind Union, 1956
M. C. Escher

Prof. Wanderley de Souza Alencar

5

Capítulo 5: Dualidade

5.1. Introdução à Dualidade

Descobrimos natureza, em diversas situações, entes *antípodos*.
Por exemplo: nos conceitos de *matéria* e *antimatéria*.



Prof. Wanderley de Souza Alencar

6

Capítulo 5: Dualidade

5.1. Introdução à Dualidade

Na matemática não é diferente...

Um modelo de PPL tem seu *antípoda*:
o *modelo dual* do PPL.



Prof. Wanderley de Souza Alencar

7

Capítulo 5: Dualidade

5.1. Introdução à Dualidade

- Ao concebermos um modelo de programação matemática sob a forma de um PPL teremos, também, um outro modelo correspondente que recebe o nome de *modelo dual*.



Prof. Wanderley de Souza Alencar

8

Capítulo 5: Dualidade

5.1. Introdução à Dualidade

- Ao primeiro modelo denomina-se, por convenção, de *modelo primal*.
- Os nomes *primal* e *dual* são apenas "pontos de vista" de observação dos modelos, ou seja:

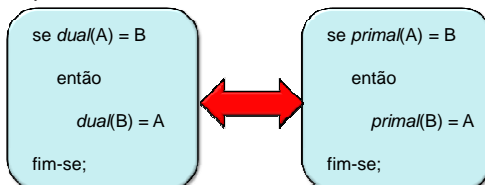
Prof. Wanderley de Souza Alencar

9

Capítulo 5: Dualidade

5.1. Introdução à Dualidade

Sejam A e B dois modelos de PPL:



Prof. Wanderley de Souza Alencar

10

Capítulo 5: Dualidade

5.1. Introdução à Dualidade

- O emprego do conceito de *dualidade* é útil na resolução de diversos PPLs, o que justifica seu estudo.



Como gerar o
modelo DUAL de
um certo *modelo*
PRIMAL ?

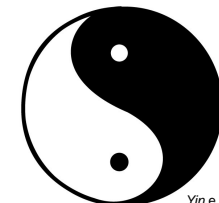
Prof. Wanderley de Souza Alencar

11

Capítulo 5: Dualidade

5.2

Definição do Problema Dual



Yin e Yang

Prof. Wanderley de Souza Alencar

12

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- A expressão geral de um PPL pode ser assim descrita:

Prof. Wanderley de Souza Alencar

13

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\
 \text{sujeito a} \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

14

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Para obter o *modelo dual* correspondente, deve-se aplicar a seguinte sequência de ações...

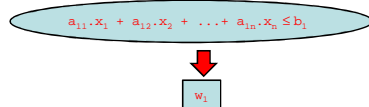
Prof. Wanderley de Souza Alencar

15

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- 1º Passo:** Cada...
- restrição* no modelo primal se transforma numa *variável* no modelo *dual*



Prof. Wanderley de Souza Alencar

16

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

$$\begin{aligned}
 \max \quad & z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\
 \text{sujeito a} \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \quad \leftarrow w_1 \\
 & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \quad \leftarrow w_2 \\
 & \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\
 & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \quad \leftarrow w_m \\
 & x_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)
 \end{aligned}$$

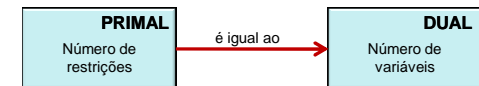
Prof. Wanderley de Souza Alencar

17

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Por consequência...



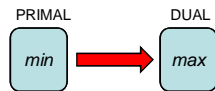
Prof. Wanderley de Souza Alencar

18

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **2º Passo:** A função objetivo é transformada...
- de *min* para *max*



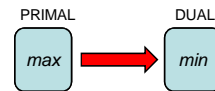
Prof. Wanderley de Souza Alencar

19

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **2º Passo:** A função objetivo é transformada...
- de *max* para *min*



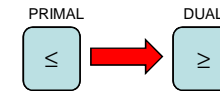
Prof. Wanderley de Souza Alencar

20

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **3º Passo:** Uma *restrição*...
- de \leq se transforma numa de \geq (de acordo com o sinal da variável correspondente a ela)



Prof. Wanderley de Souza Alencar

21

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **4º Passo:** Os *termos independentes (TI)*...
- se transformam nos *coeficientes* da função objetivo

$$\begin{aligned} \max \quad & z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \dots + c_n \cdot x_n \\ \text{sujeito a} \quad & a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \dots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ & a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \dots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ & \vdots \\ & a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \dots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\ & x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n) \end{aligned}$$



Prof. Wanderley de Souza Alencar

22

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **5º Passo:** A *matriz das restrições* ...
- é a transposta da matriz das restrições do modelo primal

PRIMAL			DUAL		
-1	3	5	-1	-2	4
-2	0	9	3	0	-7
4	-7	8	5	9	8



Prof. Wanderley de Souza Alencar

23

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Finalmente, realizando-se todas as ações, obtém-se:

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

$$\begin{array}{ll} \max z = [c_1 \ c_2 \ c_3 \dots c_n] & \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] \\ \text{as} & \\ A \cdot \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] \leq \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{array} \right] & \\ x \geq 0 & \end{array}$$

The diagram shows a linear programming problem with the following components and dimension annotations:

- Objective function: $\max z = c \cdot x$
- Constraint matrix: A (labeled "Matriz $m \times n$ ")
- Right-hand side vector: b (labeled "Vetor $1 \times n$ ")
- Decision variable vector: x (labeled "Vetor $n \times 1$ ")
- Non-negativity constraint: $x \geq 0$ (labeled "Vetor $m \times 1$ ")

The dimension annotations are as follows:

- c is a row vector of size $1 \times n$.
- x is a column vector of size $n \times 1$.
- A is a matrix of size $m \times n$.
- b is a row vector of size $1 \times n$.
- x is a column vector of size $n \times 1$.
- $x \geq 0$ is a constraint on the $n \times 1$ vector x .

 $x \geq 0$

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

-
- The diagram shows a linear programming problem with the following components and dimension annotations:
- Objective function: $\min y = w \cdot b$. The vector w is annotated with a yellow box labeled "x m". The vector b is annotated with a yellow box labeled " Vetor m x 1".
 - Constraint: $w \cdot A \geq c$. The matrix A is annotated with a yellow box labeled " Matriz m x n". The vector c is annotated with a yellow box labeled " Vetor 1 x n".
 - Non-negativity constraint: $w \geq 0$.

$$\min_{\text{sa}} y = [w_1 \ w_2 \ w_3 \dots \ w_m] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \\ \vdots \\ w_m \end{bmatrix} \cdot A \geq [c_1 \ c_2 \ c_3 \dots \ c_n] \\ w > 0$$

30

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

	PPL Max	PPL Min	
Restrições	\geq	≤ 0	Variáveis
	\leq	≥ 0	
	$=$	irrestritas	
Variáveis	≥ 0	\geq	Restrições
	≤ 0	\leq	
	irrestritas	$=$	

Prof. Wanderley de Souza Alencar

31

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Caso 1:**

PRIMAL

$$\begin{array}{ll} \max z = c.x \\ \text{sa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A.x \leq b \\ x \geq 0 \end{array}$$

DUAL

$$\begin{array}{ll} \min y = w.b \\ \text{sa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} w.A \geq c \\ w \geq 0 \end{array}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

32

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*



Exemplo 01

Prof. Wanderley de Souza Alencar

33

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Exemplo 01:**

PRIMAL

$$\begin{array}{ll} \max z = 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 \leq -1 \\ -x_1 + x_2 \leq 0 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{array}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

34

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Exemplo 01:**

DUAL

$$\begin{array}{ll} \min y = -w_1 + 0w_2 \\ \text{sa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} w_1 - w_2 \geq 3 \\ -w_1 + w_2 \geq 4 \\ w_1 \geq 0; w_2 \geq 0 \end{array}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

35

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Caso 2:**

PRIMAL

$$\begin{array}{ll} \max z = c.x \\ \text{sa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} A.x = b \\ x \geq 0 \end{array}$$

DUAL

$$\begin{array}{ll} \min y = w.b \\ \text{sa} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} w.A \geq c \\ w \text{ é irrestrita} \end{array}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

36

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

Exemplo 02

Prof. Wanderley de Souza Alencar

37

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Exemplo 02:

PRIMAL

$$\begin{aligned} \max z &= 3x_1 + 4x_2 \\ \text{sa} \\ x_1 - x_2 &= 7 \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

38

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Exemplo 02:

DUAL

$$\begin{aligned} \min y &= 7w_1 \\ \text{sa} \\ w_1 &\geq 3 \\ -w_1 &\geq 4 \\ w_1 &\text{ irrestrita} \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

39

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Caso 3:

PRIMAL

$$\begin{aligned} \max z &= c \cdot x \\ \text{sa} \\ A \cdot x &\geq b \\ x &\geq 0 \end{aligned}$$

DUAL

$$\begin{aligned} \min y &= w \cdot b \\ \text{sa} \\ w \cdot A &\geq c \\ w &\leq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

40

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

Exemplo 03

Prof. Wanderley de Souza Alencar

41

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Exemplo 03:

PRIMAL

$$\begin{aligned} \max z &= 8x_1 + 7x_2 \\ \text{sa} \\ 2x_1 + x_2 &\geq 5 \\ x_1 + 2x_2 &\geq 3 \\ x_1 &\geq 0; x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

42

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **Exemplo 03:**

DUAL

$$\begin{aligned} \min y &= 5w_1 + 3w_2 \\ \text{sa} \\ 2w_1 + w_2 &\geq 8 \\ w_1 + 2w_2 &\geq 7 \\ w_1 &\leq 0; w_2 \leq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

43

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- **Caso 4:** Reunião dos casos anteriores quanto às restrições envolvidas:

- \geq com $=$
- \leq com $=$
- \leq com \geq

Prof. Wanderley de Souza Alencar

44

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- O mais importante *teorema* da área é denominado...
 - Teorema Fundamental da Dualidade (TFD) ou
 - Teorema da Existência

Prof. Wanderley de Souza Alencar

45

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- O TFD garante que sendo **P** um modelo de PPL e **D** seu corresponde *dual*, uma das afirmações a seguir é válida:
 - 1ª) Ambos PPLs possuem soluções ótimas x^* e w^* , com:
 - $c \cdot x^* = w^* \cdot b$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

46

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- O TFD garante que sendo **P** um modelo de PPL e **D** seu corresponde *dual*, uma das afirmações a seguir é válida:
 - 2ª) Se a função objetivo de um for *ilimitada*, então o outro problema será *infactível*.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

47

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- O TFD garante que sendo **P** um modelo de PPL e **D** seu corresponde *dual*, uma das afirmações a seguir é válida:
 - 3ª) Ambos são *infactíveis*.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

48

Capítulo 5: Dualidade

5.2. Definição do Problema *Dual*

- Resumindo o TFD, tem-se que...

P / D	Ótimo	\Leftrightarrow	D / P	Ótimo
P / D	Ilimitado	\Rightarrow	D / P	Infactível
P / D	Infactível	\Rightarrow	D / P	Ilimitado ou Infactível
P / D	Infactível	\Leftrightarrow	D / P	Ilimitado na forma homogênea

Prof. Wanderley de Souza Alencar

49

Capítulo 5: Dualidade

5.3

Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*



Mito de Narciso

Prof. Wanderley de Souza Alencar

50

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 04

Prof. Wanderley de Souza Alencar

51

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 04: Considere o modelo de PPL a seguir:

$$\begin{aligned}
 \max z &= 1.x_1 + 3.x_2 \\
 \text{sujeito a} \\
 1.x_1 - 3.x_2 &\leq 4 \\
 -1.x_1 + 1.x_2 &\leq 3 \\
 x_1, x_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

52

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*



Prof. Wanderley de Souza Alencar

53

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 04: Obtendo o seu *dual* pelas regras temos...

$$\begin{aligned}
 \min y &= 4.w_1 + 3.w_2 \\
 \text{sujeito a} \\
 1.w_1 - 1.w_2 &\geq 1 \\
 -3.w_1 + 1.w_2 &\geq 3 \\
 w_1, w_2 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

54

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

Qual deles é *mais fácil* para resolução *manual*?



Prof. Wanderley de Souza Alencar

55

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

- O *primal* pois...
- possui apenas restrições de \leq e, assim, ...
- permite-nos aplicar o *Método Simplex* imediatamente.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

56

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

- Já o *dual* não é conveniente, pois ...
- possui restrições de \geq , o que exige a introdução de variáveis artificiais e, em seguida, ...
- a aplicação dos métodos do *Big-M* ou *Duas Fases*.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

57

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

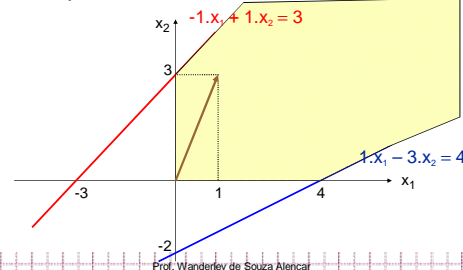
- Resolvendo, *graficamente*, o primal ...

Prof. Wanderley de Souza Alencar

58

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*



Prof. Wanderley de Souza Alencar

59

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

- *Primal*: tem solução ilimitada, pois tenderá ao $+\infty$.



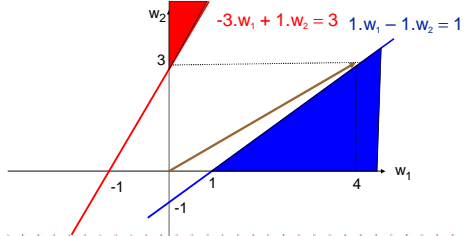
E o *dual*, como será?

Prof. Wanderley de Souza Alencar

60

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*



Prof. Wanderley de Souza Alencar

61

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

- *Dual*: é infactível (neste caso)

Prof. Wanderley de Souza Alencar

62

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

- Vamos utilizar o LINDO para obter a solução do *primal*...
 - e em seguida do *dual*...

Prof. Wanderley de Souza Alencar

63

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

UNBOUNDED VARIABLES ARE:

X1
SLK 2
X2
SLK 4
SLK 5

OBJECTIVE FUNCTION VALUE

1) 0.9999990E+08

primal

Prof. Wanderley de Souza Alencar

64

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	99999904.000000	2.000000
X2	3.000000	0.000000

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	13.000000	-2.000000
3)	0.000000	-1.000000
4)	0.000000	-1.000000
5)	3.000000	-1.000000

NO. ITERATIONS=	1
-----------------	---

primal

Prof. Wanderley de Souza Alencar

65

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

MENSAGEM DE ERRO - N. 54

dual

NO FEASIBLE SOLUTION AT STEP 0.
SUM OF INFEASIBILITIES 4.000000000
VIOLATED ROWS HAVE NEGATIVE SLACK, OR
(EQUALITY ROWS) NONZERO SLACKS.
ROWS CONTRIBUTING TO INFEASIBILITY HAVE A
NONZERO DUAL PRICE.
USE "DEBUG" COMMAND FOR MORE INFORMATION.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

66

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 05

Prof. Wanderley de Souza Alencar

67

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 05: Considere o PPL

$$\max z = 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3$$

sujeito a

$$1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 \leq 6$$

$$1.x_1 + 4.x_2 - 1.x_3 \leq 4$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

68

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 05: Obtendo o seu *dual* pelas regras temos...

$$\min y = 6.w_1 + 4.w_2$$

sujeito a

$$1.w_1 + 1.w_2 \geq 2$$

$$1.w_1 + 4.w_2 \geq 1$$

$$2.w_1 - 1.w_2 \geq -1$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

69

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

primal

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	8.666667	
VARIABLE VALUE REDUCED COST		
X1	4.666667	0.000000
X2	0.000000	6.000000
X3	0.666667	0.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

70

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

primal

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	0.333333
3)	0.000000	1.666667
4)	4.666667	0.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	0.666667	0.000000
NO. ITERATIONS= 2		

Prof. Wanderley de Souza Alencar

71

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

dual

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	8.666667	
VARIABLE VALUE REDUCED COST		
W1	0.333333	0.000000
W2	1.666667	0.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

72

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

dual

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4		
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-4.666667
3)	6.000000	0.000000
4)	0.000000	-0.666667
5)	0.333333	0.000000
6)	1.666667	0.000000
NO. ITERATIONS= 4		

Prof. Wanderley de Souza Alencar

73

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 06

Prof. Wanderley de Souza Alencar

74

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 06: Considere o PPL a seguir. Explicite o seu dual.

$$\max z = 6.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3$$

sujeito a

$$1.x_1 - 1.x_2 + 7.x_3 \leq 4$$

$$2.x_1 + 3.x_2 + 1.x_3 \leq 5$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

75

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 06: RESOLUÇÃO

Prof. Wanderley de Souza Alencar

76

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Dual:

$$\min y = 4.w_1 + 5.w_2$$

sujeito a

$$1.w_1 + 2.w_2 \geq 6$$

$$-1.w_1 + 3.w_2 \geq 2$$

$$7.w_1 + 1.w_2 \geq 1$$

$$w_1, w_2 \geq 0$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

77

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

primal

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	15.00000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	2.500000	0.000000
X2	0.000000	7.000000
X3	0.000000	2.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

78

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	1.500000	0.000000
3)	0.000000	3.000000
4)	2.500000	0.000000
5)	0.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 1

primal

Prof. Wanderley de Souza Alencar

79

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 4		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	15.0000	
VARIABLE VALUE REDUCED COST		
W1	0.000000	1.500000
W2	3.000000	0.000000

dual

Prof. Wanderley de Souza Alencar

80

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-2.500000
3)	7.000000	0.000000
4)	2.000000	0.000000
5)	0.000000	0.000000
6)	3.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 4

dual

Prof. Wanderley de Souza Alencar

81

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 07

Prof. Wanderley de Souza Alencar

82

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 07: Considere o PPL a seguir. Explicite o seu dual.

$$\max z = 1.x_1 - 1.x_2$$

sujeito a

$$\begin{aligned} -2.x_1 + 1.x_2 &\leq 2 \\ 1.x_1 - 2.x_2 &\leq 1 \\ 1.x_1 + 1.x_2 &= 4 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

83

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 07: **RESOLUÇÃO**

Prof. Wanderley de Souza Alencar

84

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Dual:

$$\begin{aligned} \min y &= 2.w_1 + 1.w_2 + 4.w_3 \\ \text{sujeito a} \\ -2.w_1 + 1.w_2 + 1.w_3 &\geq 1 \\ 1.w_1 - 2.w_2 + 1.w_3 &\geq -1 \\ w_1 \geq 0; w_2 \geq 0; w_3 &\text{ irrestrita} \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

85

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Dual: (multiplicando a 2ª restrição por -1)

$$\begin{aligned} \min y &= 2.w_1 + 1.w_2 + 4.w_3 \\ \text{sujeito a} \\ -2.w_1 + 1.w_2 + 1.w_3 &\geq 1 \\ -1.w_1 + 2.w_2 - 1.w_3 &\leq 1 \\ w_1 \geq 0; w_2 \geq 0; w_3 &\text{ irrestrita} \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

86

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	2.000000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	3.000000	0.000000
X2	1.000000	0.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

87

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

primal

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 1		
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	7.000000	0.000000
3)	0.000000	0.666667
4)	0.000000	0.333333
5)	3.000000	0.000000
6)	1.000000	0.000000
NO. ITERATIONS= 1		

Prof. Wanderley de Souza Alencar

88

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

dual

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	2.000000	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
W1	0.000000	7.000000
W2	0.666667	0.000000
W3	0.333333	0.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

89

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

dual

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	0.000000	-3.000000
3)	0.000000	1.000000
4)	0.000000	0.000000
5)	0.666667	0.000000
NO. ITERATIONS= 2		

Prof. Wanderley de Souza Alencar

90

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 08

Prof. Wanderley de Souza Alencar

91

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 08: Considere o PPL a seguir. Explícite o seu dual.

$$\begin{aligned} \max z &= -3.x_1 + 2.x_2 \\ \text{sujeito a} \\ 1.x_1 &\leq 3 \\ 1.x_1 - 1.x_2 &\leq 0 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

92

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Exemplo 08: **RESOLUÇÃO**

Prof. Wanderley de Souza Alencar

93

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Dual:

$$\begin{aligned} \min y &= 3.w_1 + 0.w_2 \\ \text{sujeito a} \\ 1.w_1 + 1.w_2 &\geq -3 \\ 0.w_1 - 1.w_2 &\geq 2 \\ w_1 \geq 0; w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

94

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

Dual: (multiplicando a 1ª restrição por -1)

$$\begin{aligned} \min y &= 3.w_1 + 0.w_2 \\ \text{sujeito a} \\ -1.w_1 - 1.w_2 &\leq 3 \\ 0.w_1 - 1.w_2 &\geq 2 \\ w_1 \geq 0; w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

95

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal / Dual*

UNBOUNDED VARIABLES ARE:			primal
X2			
SLK	3		
SLK	5		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE			
1)	0.9999990E+08		
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST	
X1	0.000000	-7.000000	
X2	99999904.000000	4.000000	

Prof. Wanderley de Souza Alencar

96

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES	primal
2)	3.000000	0.000000	
3)	0.000000	-1.000000	
4)	0.000000	0.000000	
5)	0.000000	-1.000000	
NO. ITERATIONS= 0			

Prof. Wanderley de Souza Alencar

97

Capítulo 5: Dualidade

5.3. Exemplos de Pares de Problemas *Primal* / *Dual*

```

NO FEASIBLE SOLUTION AT STEP 0.
SUM OF INFEASIBILITIES= 2.000000000000
VIOLATED ROWS HAVE NEGATIVE SLACK, OR
(EQUALITY ROWS) NONZERO SLACKS. ROWS
CONTRIBUTING TO INFEASIBILITY HAVE A
NONZERO DUAL PRICE. USE THE "DEBUG"
COMMAND FOR MORE INFORMATION.
  
```

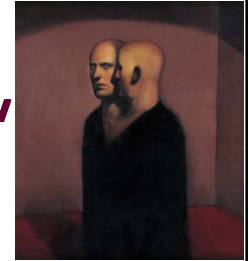
Prof. Wanderley de Souza Alencar

98

Capítulo 5: Dualidade

5.4

Um Algoritmo *Dual* para o *Simplex*



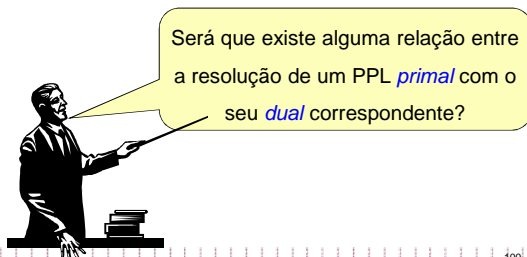
Dr. Jekyll and Mr. Hyde
(Ludovic Debeourme)

Prof. Wanderley de Souza Alencar

99

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o *Simplex*

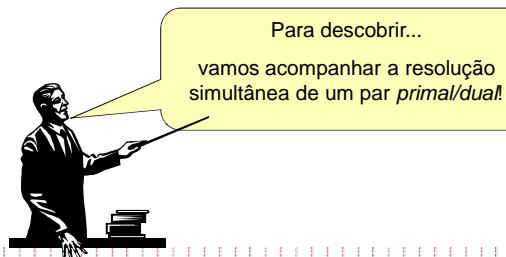


Prof. Wanderley de Souza Alencar

100

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o *Simplex*

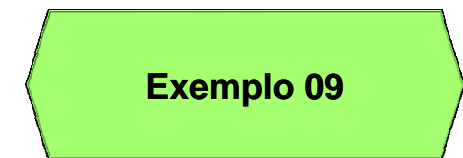


Prof. Wanderley de Souza Alencar

101

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o *Simplex*



Prof. Wanderley de Souza Alencar

102

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Exemplo 09: Resolver, simultaneamente, o modelo de PPL a seguir e seu dual.

$$\begin{aligned} \max z &= 6.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 1.x_1 - 1.x_2 + 7.x_3 &\leq 4 \\ 2.x_1 + 3.x_2 + 1.x_3 &\leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

103

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Exemplo 09: **RESOLUÇÃO**

Prof. Wanderley de Souza Alencar

104

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Elaborando-se o *dual*:

$$\begin{aligned} \min y &= 4.w_1 + 5.w_2 \\ \text{sujeito a} \\ 1.w_1 + 2.w_2 &\geq 6 \\ -1.w_1 + 3.w_2 &\geq 2 \\ 7.w_1 + 1.w_2 &\geq 1 \\ w_1, w_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

105

Capítulo 5: Dualidade

Primal: 1º Quadro (montagem do *tableau*)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	6	2	1	0	0	-0
x_4	0	1	-1	7	1	0	4
x_5	0	2	3	1	0	1	5

Prof. Wanderley de Souza Alencar

106

Capítulo 5: Dualidade

Dual: 1º Quadro (montagem do *tableau*)

B	Z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	RHS
	1	-4	-5	0	0	0	-M	-M	-M	-0
w_6	0	1	2	-1	0	0	1	0	0	6
w_7	0	-1	3	0	-1	0	0	1	0	2
w_8	0	7	1	0	0	-1	0	0	1	1

Prof. Wanderley de Souza Alencar

107

Capítulo 5: Dualidade

Primal: 1º Quadro (entra x_1 e sai x_5)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	6	2	1	0	0	-0
x_4	0	1	-1	7	1	0	4
x_5	0	2	3	1	0	1	5

Prof. Wanderley de Souza Alencar

108

Capítulo 5: Dualidade

Dual: 1º Quadro (entra x_2 e sai x_6)

B	Z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	RHS
1	-4	-5	0	0	0	-M	-M	-M	-0	
w_6	0	1	2	-1	0	0	1	0	0	6
w_7	0	-1	3	0	-1	0	0	1	0	2
w_8	0	7	1	0	0	-1	0	0	1	1

Prof. Wanderley de Souza Alencar

109

Capítulo 5: Dualidade

Primal: 2º Quadro (após pivoteamento)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	-7	-2	0	-3		-15
x_4	0	0	-5/2	13/2	1	-1/2	3/2
x_1	0	1	3/2	1/2	0	1/2	5/2

Fez-se: $L_4 = L_4 / 2$; $L_3 = L_3 - L_4$; $L_C = L_C - 6 \cdot L_4$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

110

Capítulo 5: Dualidade

Dual: 2º Quadro (após pivoteamento)

B	Z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	RHS
1	-3/2	0	-5/2	0	0	-M+5/2	-M	-M	-15	
w_2	0	1/2	1	-1/2	0	0	1/2	0	0	3
w_4	0	5/2	0	-3/2	1	0	3/2	-1	0	7
w_5	0	-13/2	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1	2

Fez-se: $L_6 = L_6 / 2$; $L_7 = -L_7 + 3 \cdot L_6$; $L_8 = -L_8 + L_6$; $L_C = L_C + 5 \cdot L_6$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

111

Capítulo 5: Dualidade

Primal: 2º Quadro (quem entra para a base? *Ninguém*)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
1	0	-7	-2	0	-3		-15
x_4	0	0	-5/2	13/2	1	-1/2	3/2
x_1	0	1	3/2	1/2	0	1/2	5/2

O ponto de ótimo foi atingido: $x_1^* = 5/2$; $x_2^* = x_3^* = 0$; $x_4^* = 3/2$ e $z^* = 15$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

112

Capítulo 5: Dualidade

Dual: 2º Quadro (Quem entra para a base? *Ninguém*)

B	Z	w_1	w_2	w_3	w_4	w_5	w_6	w_7	w_8	RHS
1	-3/2	0	-5/2	0	0	-M+5/2	-M	-M	-15	
w_2	0	1/2	1	-1/2	0	0	1/2	0	0	3
w_4	0	5/2	0	-3/2	1	0	3/2	-1	0	7
w_5	0	-13/2	0	-1/2	0	1	1/2	0	-1	2

Fez-se: $L_6 = L_6 / 2$; $L_7 = -L_7 + 3 \cdot L_6$; $L_8 = -L_8 + L_6$; $L_C = L_C + 5 \cdot L_6$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

113

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

O professor irá comparar
os quadros de *ótimo* dos PPLs **P** e **D**
e evidenciará propriedades importantes relacionando-os.

Fique atento e anote!

Prof. Wanderley de Souza Alencar

114

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Exemplo 10

Prof. Wanderley de Souza Alencar

115

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Exemplo 10: Resolver, simultaneamente, o modelo de PPL a seguir e seu dual.

$$\begin{aligned} \max z &= 1.x_1 + 2.x_2 + 3.x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 &\leq 10 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 4.x_3 &\leq 12 \\ 1.x_1 + 3.x_2 - 1.x_3 &\leq 9 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

116

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Exemplo 10: **RESOLUÇÃO**

Prof. Wanderley de Souza Alencar

117

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Elaborando-se o *dual*:

$$\begin{aligned} \min y &= 10.w_1 + 12.w_2 + 9.w_3 \\ \text{sujeito a} \\ 1.w_1 + 2.w_2 + 1.w_3 &\geq 1 \\ 1.w_1 + 1.w_2 + 3.w_3 &\geq 2 \\ 1.w_1 + 4.w_2 - 1.w_3 &\geq 3 \\ w_1, w_2, w_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

118

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Faça, em atividade extraclasse, a resolução simultânea de ambos os problemas (P e D) e observe as similaridades.

Registre-as em seu caderno de anotações.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

119

Capítulo 5: Dualidade

Primal: Quadro de ótimo

B	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
1	1,077	0	0	0	0	0,846	0,385	13,615
x_4	0	0,154	0	0	1	-0,308	-0,231	4,231
x_3	0	0,385	0	1	0	0,231	-0,077	2,077
x_2	0	0,462	1	0	0	0,077	0,308	3,692

Prof. Wanderley de Souza Alencar

120

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo Dual para o Simplex

primal

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	13.61539	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
X1	0.000000	1.076923
X2	3.692308	0.000000
X3	2.076923	0.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

121

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo Dual para o Simplex

primal

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 2		
ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES		
2)	4.230769	0.000000
3)	0.000000	0.846154
4)	0.000000	0.384615
NO. ITERATIONS= 2		

Prof. Wanderley de Souza Alencar

122

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo Dual para o Simplex

dual

LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0		
OBJECTIVE FUNCTION VALUE		
1)	13.61539	
VARIABLE	VALUE	REDUCED COST
W1	0.000000	4.230769
W2	0.846154	0.000000
W3	0.384615	0.000000

Prof. Wanderley de Souza Alencar

123

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo Dual para o Simplex

dual

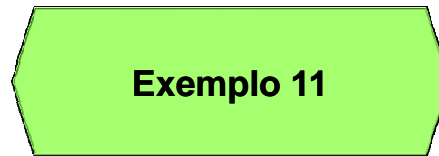
LP OPTIMUM FOUND AT STEP 0		
ROW SLACK OR SURPLUS DUAL PRICES		
2)	1.076923	0.000000
3)	0.000000	-3.692308
4)	0.000000	-2.076923
NO. ITERATIONS= 0		

Prof. Wanderley de Souza Alencar

124

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo Dual para o Simplex



Prof. Wanderley de Souza Alencar

125

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo Dual para o Simplex

Exemplo 11: Resolver, simultaneamente, o modelo de PPL a seguir e seu dual.

$$\begin{aligned} \max z &= 2.x_1 + 3.x_2 + 1.x_3 \\ \text{sujeito a} \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 &\leq 40 \\ 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 &\leq 20 \\ 3.x_1 + 2.x_2 - 1.x_3 &\leq 30 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

126

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Exemplo 11: **RESOLUÇÃO**

Prof. Wanderley de Souza Alencar

127

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Elaborando-se o *dual*:

$$\min y = 40.w_1 + 20.w_2 + 20.w_3$$

sujeito a

$$1.w_1 + 2.w_2 + 1.w_3 \geq 2$$

$$1.w_1 + 1.w_2 + 2.w_3 \geq 3$$

$$3.w_1 + 2.w_2 - 1.w_3 \geq 1$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Prof. Wanderley de Souza Alencar

128

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Repita o processo anterior e conclua a resolução deste exemplo.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

129

Capítulo 5: Dualidade

5.4. Um Algoritmo *Dual* para o Simplex

Vamos, na próxima seção, formalizar importantes propriedades sobre os PPLs *primal* e *dual*!



Prof. Wanderley de Souza Alencar

130

Capítulo 5: Dualidade

5.5

Propriedades Importantes *Primal* / *Dual*

Prof. Wanderley de Souza Alencar

131

Capítulo 5: Dualidade

5.5. Propriedades Importantes do par *Primal* / *Dual*

- Seja P um PPL dito *primal* e D seu *dual* correspondente, pode-se afirmar que:
 - A cada solução *básica viável* de P, não ótima, corresponde uma solução *básica inviável* de D.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

132

Capítulo 5: Dualidade

5.5. Propriedades Importantes do par *Primal / Dual*

- Seja P um PPL dito *primal* e D seu *dual* correspondente, pode-se afirmar que:
- 2. O valor da F.O. para qualquer solução factível de um PPL de *min* é sempre *maior ou igual* que o valor da F.O. para qualquer solução factível do PPL de *max*.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

133

Capítulo 5: Dualidade

5.5. Propriedades Importantes do par *Primal / Dual*

- Seja P um PPL dito *primal* e D seu *dual* correspondente, pode-se afirmar que:
- 3. As soluções *ótimas* z^* (primal) e y^* (dual) atendem a:
 - $z^* = y^*$ (princípio supervisor)

Prof. Wanderley de Souza Alencar

134

Capítulo 5: Dualidade

5.5. Propriedades Importantes do par *Primal / Dual*

- Seja P um PPL dito *primal* e D seu *dual* correspondente, pode-se afirmar que:
- 4. O coeficiente da variável de decisão na F.O. de P é o valor da variável correspondente em D.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

135

Capítulo 5: Dualidade

5.5. Propriedades Importantes do par *Primal / Dual*

- Seja P um PPL dito *primal* e D seu *dual* correspondente, pode-se afirmar que:
- 5. O coeficiente da variável de folga da F.O. de P é o valor da variável de decisão correspondente em D.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

136

Capítulo 5: Dualidade

5.5. Propriedades Importantes do par *Primal / Dual*

- Seja P um PPL dito *primal* e D seu *dual* correspondente, pode-se afirmar que:
- 5. Valem as condições de Karush-Khun-Tucker (KKT) para o ponto de *ótimo* x^* e w^* (primal e dual, respectivamente).

Prof. Wanderley de Souza Alencar

137

Capítulo 5: Dualidade

5.6

Exercícios Propostos

Prof. Wanderley de Souza Alencar

138

Capítulo 5: Dualidade

5.6. Exercícios Propostos

O professor encaminhará, por correio eletrônico, arquivo em formato .PDF (*Portable Document Format*) com a Lista de Exercício do capítulo.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

139

Capítulo 5: Dualidade

5.7

Saiba Mais...

Prof. Wanderley de Souza Alencar

140

Capítulo 5: Dualidade

5.7. Saiba mais...

O professor tornará disponível alguns documentos científicos (artigos, textos de divulgação, ...) abordando a *dualidade*.

Leia-os e amplie seus conhecimentos sobre o assunto.

Prof. Wanderley de Souza Alencar

141