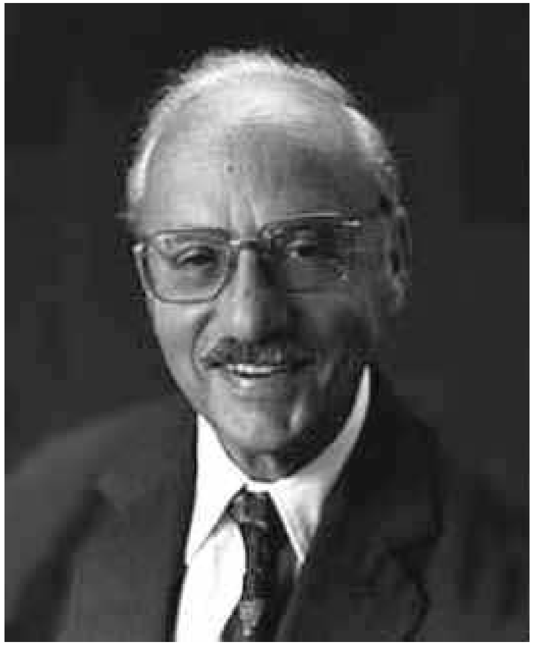
Capítulo 4



DSc. George Dantzig

O Método *Simplex*

Prof. Wanderley de Souza Alencar, MSc.

4. PAUTA

1. Introdução

2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

4. PAUTA

4. Casos Especiais: Degeneração, Ciclagem e Múltiplas Soluções

5. Exercícios do Capítulo

6. Saiba mais...

4. PAUTA

7. Apêndice A: Fundamentos Teóricos do *Simplex*

4.1

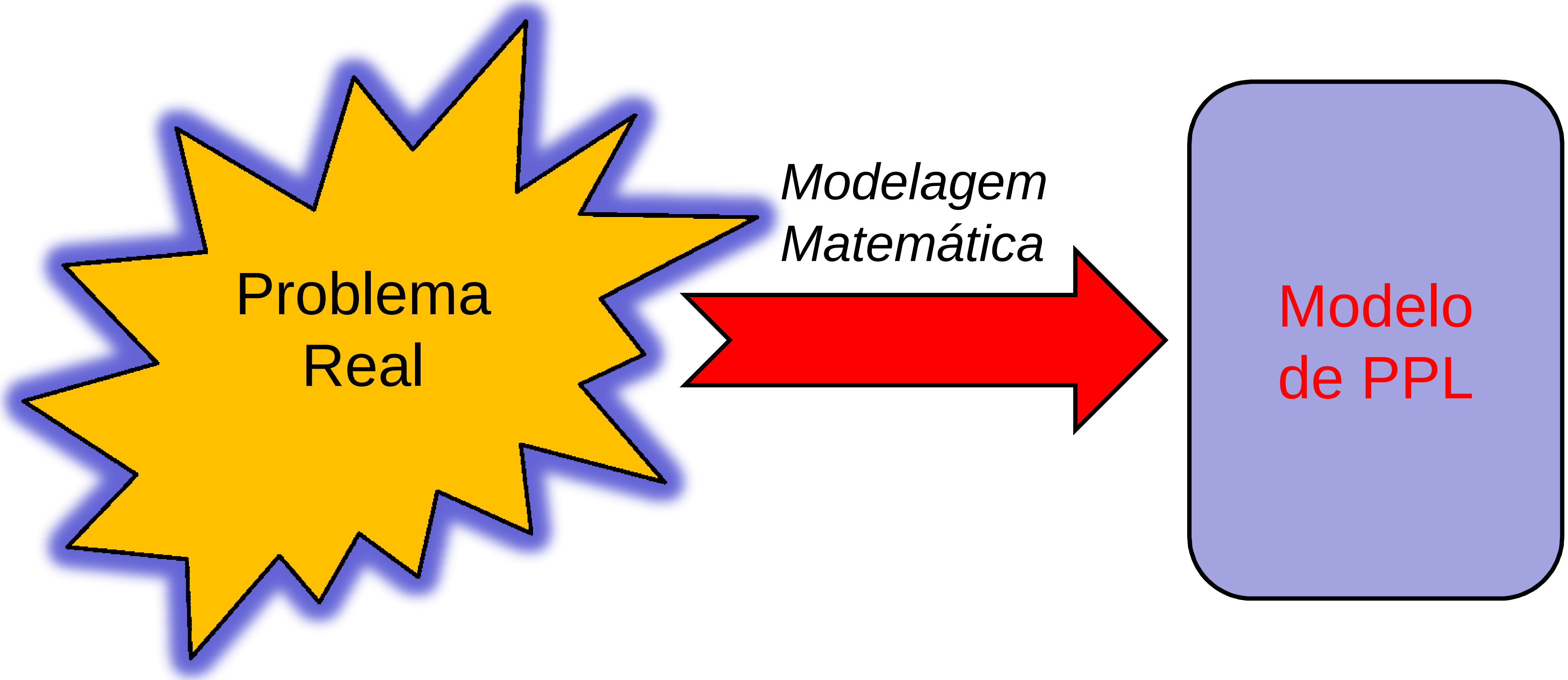
Introdução

4.1. Introdução

Vimos que o modelo de programação linear reduz um sistema *real* a um conjunto de equações (ou inequações) em se pretende *otimizar* determinada função objetivo.

Como resolver este problema ?

4.1. Introdução



4.1. Introdução

Veremos, neste capítulo, um método capaz de realizar tal resolução:

o Simplex !!!

4.2

Desenvolvimento do Método *Simplex*

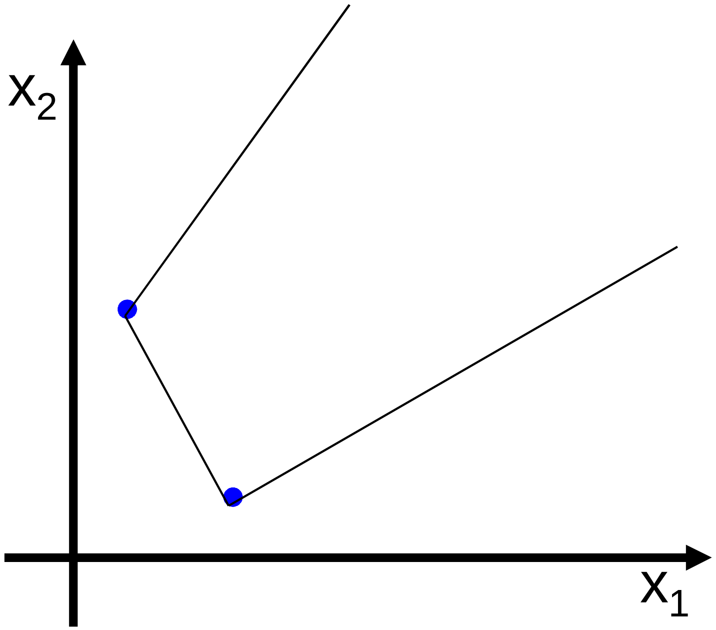
4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

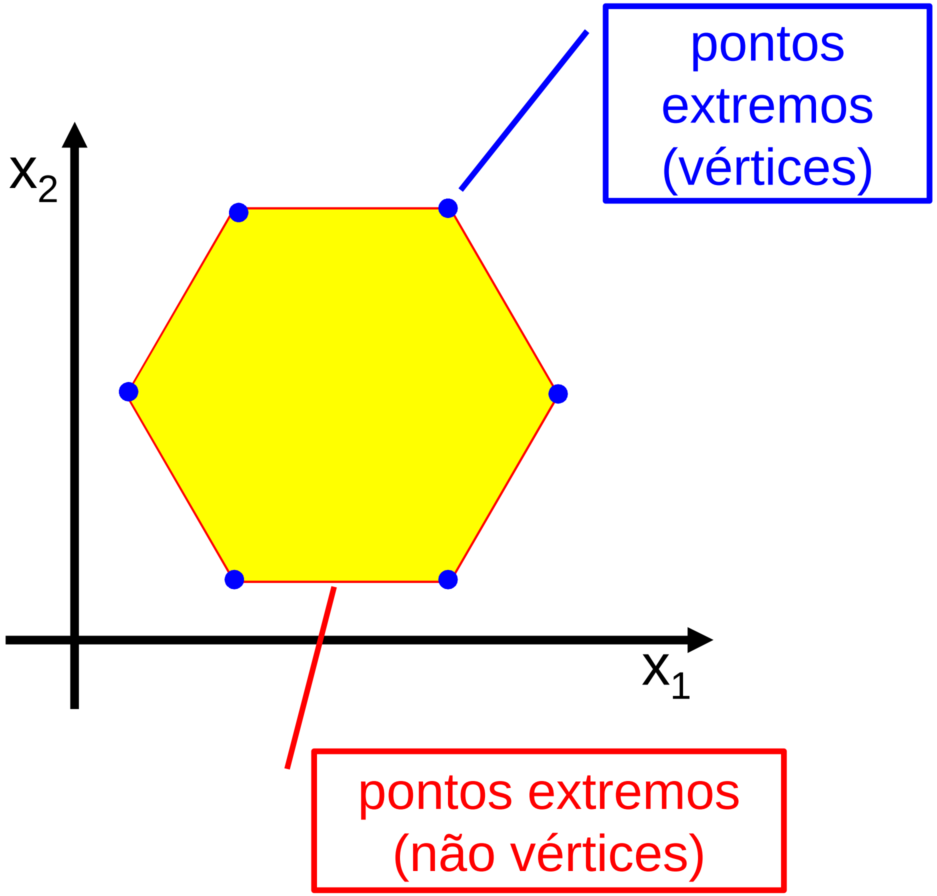
- Já sabemos que...
  - O conjunto de equações/inequações de um PPL deverá ser, em princípio, um conjunto indeterminado.

4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

- Já sabemos que...
  - A solução ótima (desde de que ela *exista*) será encontrada num *ponto extremo* do conjunto das soluções viáveis (ou factíveis) – que é um conjunto *convexo*.

4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*



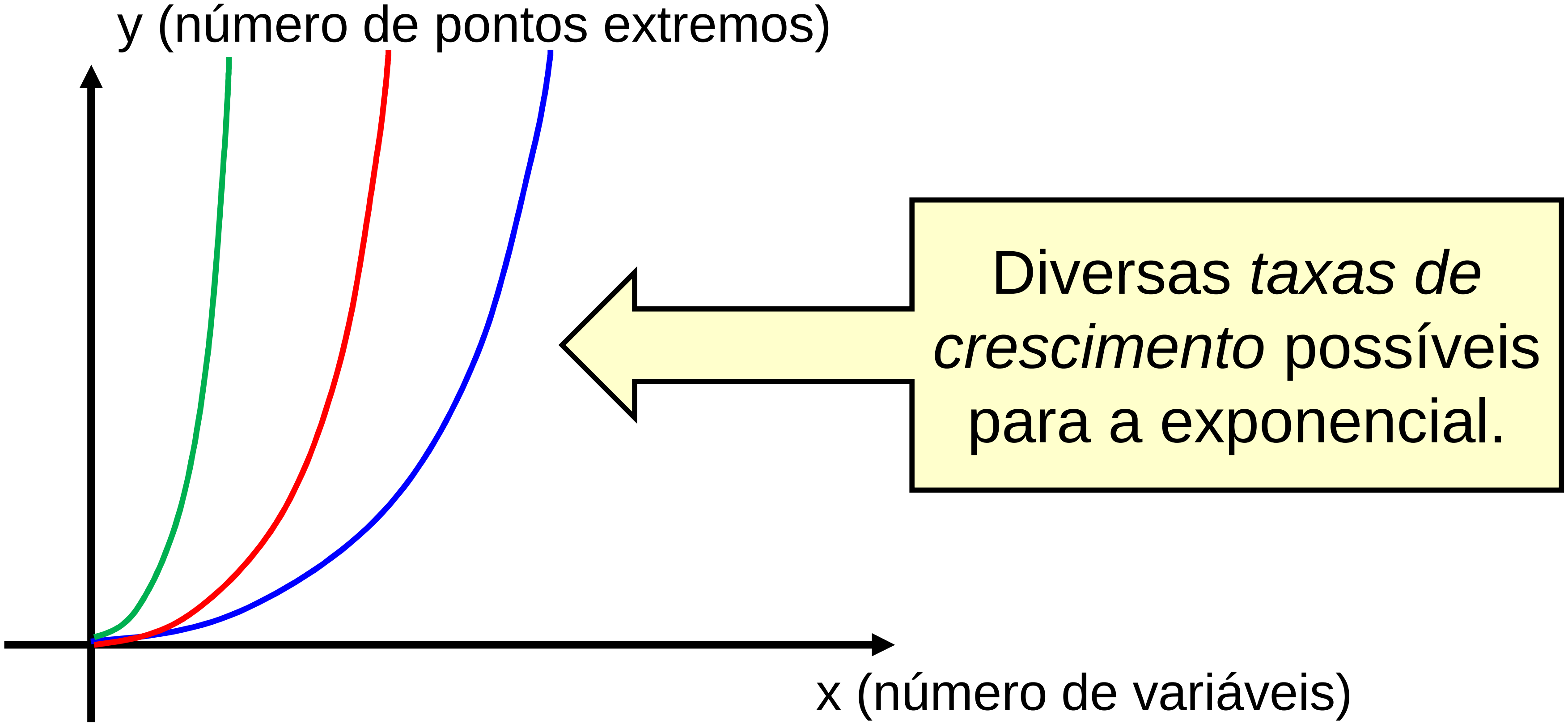


4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

- Dificuldades...

  - O número de pontos extremos é, em geral, *exponencialmente proporcional* ao número de variáveis de decisão.

4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*



4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

- Dificuldades...
  - Obter soluções *básicas viáveis* para o sistema de equações lineares (restrições do problema).
  - Evitar o teste de todas as soluções básicas viáveis para garantir a *otimização* do sistema.

4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

- Entretanto, o *Simplex* é...
  - um algoritmo eficiente para o problema.
  - adaptável ao cálculo computacional.

4.2. Desenvolvimento do Método *Simplex*

Algoritmo Simplex

Este algoritmo foi uma das grandes contribuições à Programação Matemática ocorrida no século XX.

4.3

Um Algoritmo *Primal Simplex*

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- O *Simplex*...
  - emprega ferramental da *Álgebra Linear*.
  - é interativo (e eficiente)

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- A estratégia geral do *Simplex* é...

1. iniciar numa *solução básica viável* para o sistema de equações formado pelas restrições do PPL.

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- A estratégia geral do *Simplex* é...

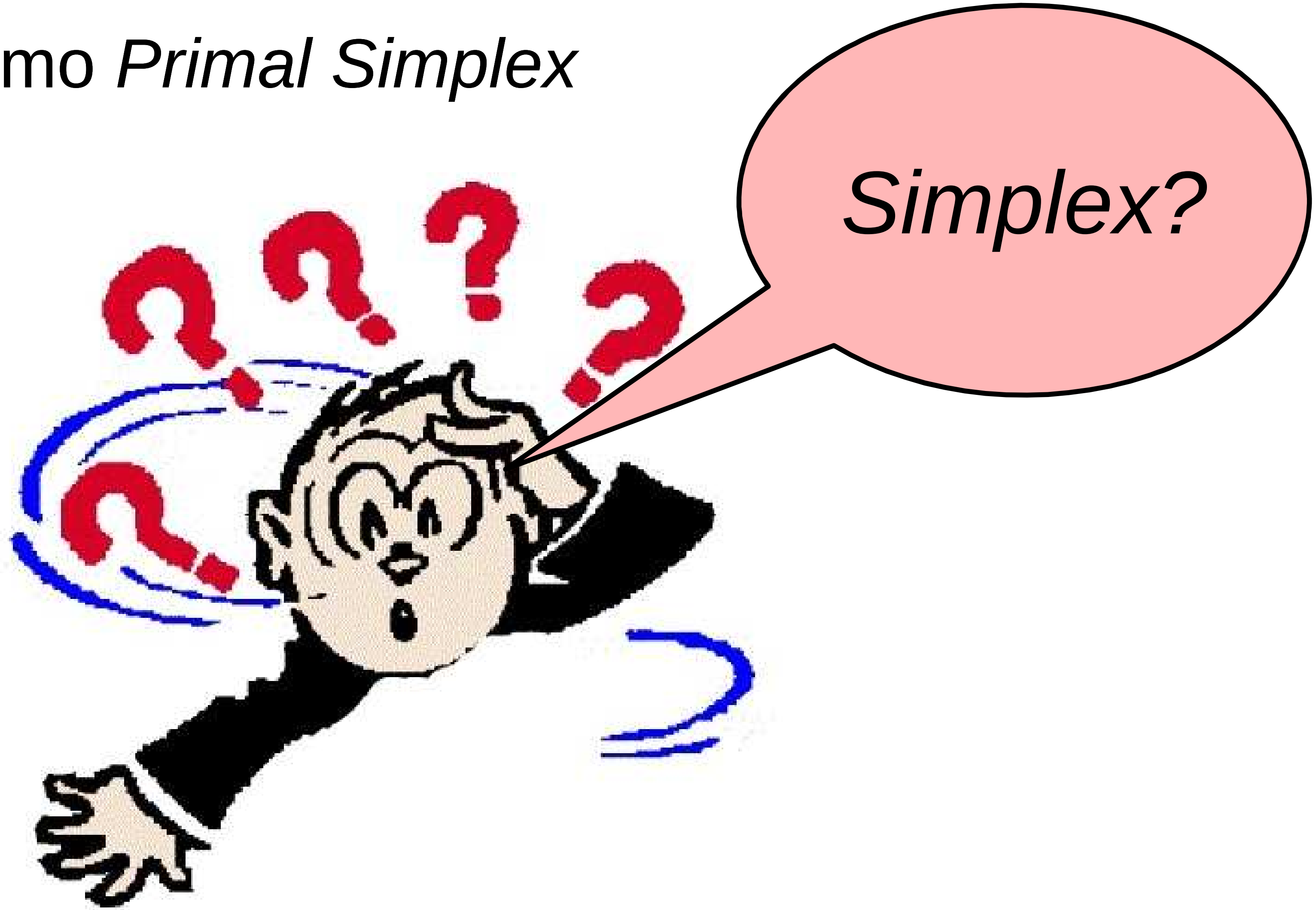
2. identificar *novas soluções viáveis* melhores ou iguais à atual (em relação à função objetivo)

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- A estratégia geral do *Simplex* é...

3. Identificar se uma dada *solução viável* é, ou não, um vértice ótimo para o PPL.

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*



Exemplo 01: Resolva o modelo de PPL

max $z = 400.x_1 + 300.x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} 4.x_1 + 6.x_2 \leq 720 \\ 6.x_1 + 3.x_2 \leq 480 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 01

0) Devemos, sempre, para empregar o Método Simplex , colocar o PPL em sua forma *padrão.*

Lembre-se que isto é feito inserindo-se nas restrições variável de:

- *folga* (somando) naquelas restrições que são do tipo $\leq$ (menor ou igual); e
- *excesso* (subtraindo) naquelas restrições que são do tipo $\geq$ (maior ou igual).

Exemplo 01: Na forma padrão...

$$\textbf{max } z = 400.x_1 + 300.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$$

sujeito a

$$\begin{cases} 4.x_1 + 6.x_2 + 1.x_3 = 720 \\ 6.x_1 + 3.x_2 + 1.x_4 = 480 \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

1) Coloca-se, em seguida, o PPL obtido sob a forma de um *tableau*, ou seja, de uma *tabela*:

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1					
	0					
	0					

Coeficientes da função objetivo z

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	
	0	4	6	1	0	720
	0	6	3	0	1	480

RHS = *Right Hand Side* ("Lado da Mão Direita", ou seja, termos independenes)

2) Determinar as variáveis *básicas* e *factíveis* (**B**), pois estas comporão a 1ª base.

Lembre-se que: a **base** é um conjunto de *vetores linearmente independentes* e que geram o espaço vetorial correspondente a $\Re^m$ (onde *m* é o número de restrições do PPL).

No nosso caso $m = 2$, assim devemos gerar uma base para $\Re^2$.

Coeficientes da função objetivo z

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	6	3	0	1	480

Não Básicas ⟷ Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_3 = 720; x_4 = 480$

- Variáveis não básicas:

$x_1 = 0; x_2 = 0$

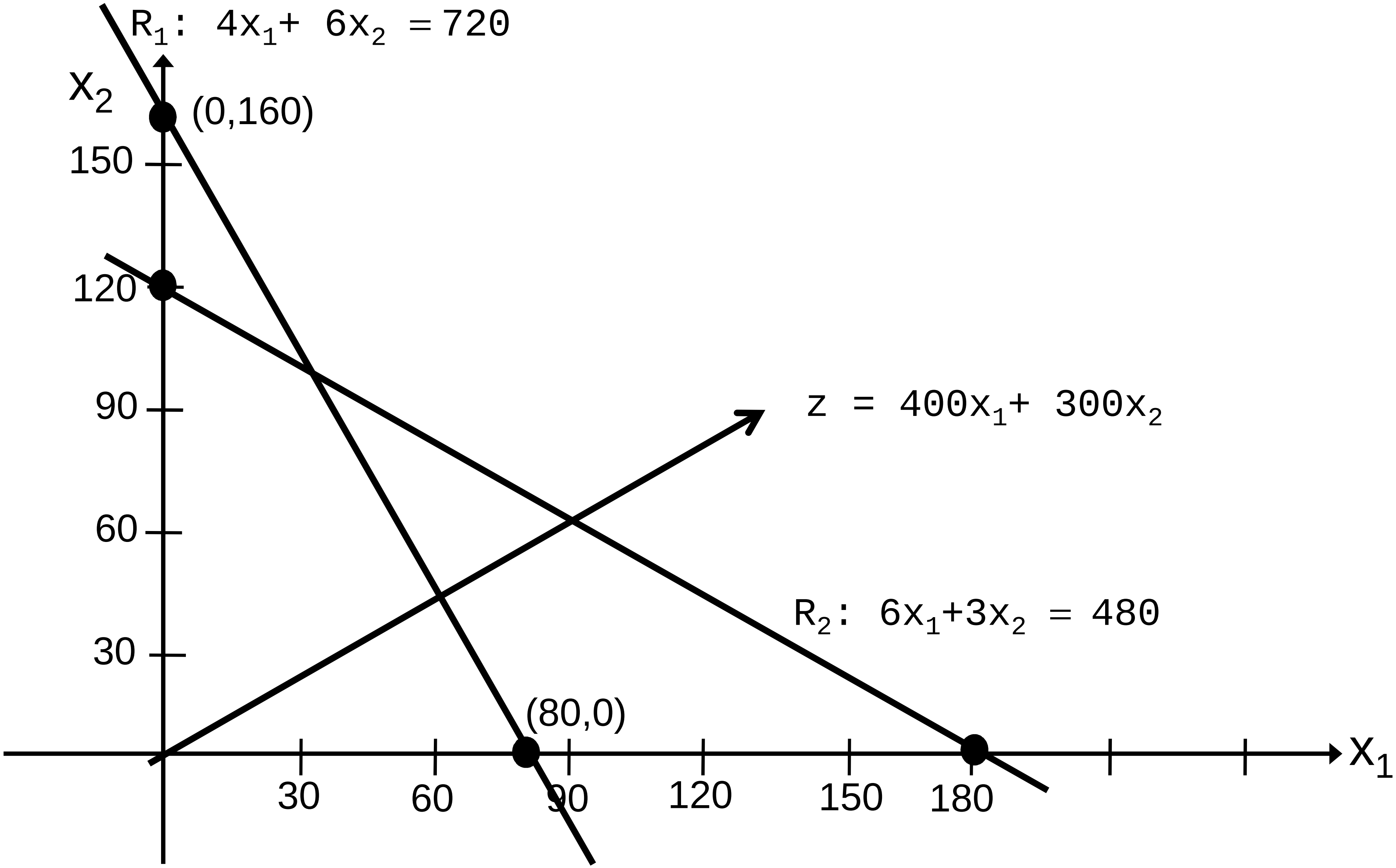
Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 400.x_1 + 300.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$$

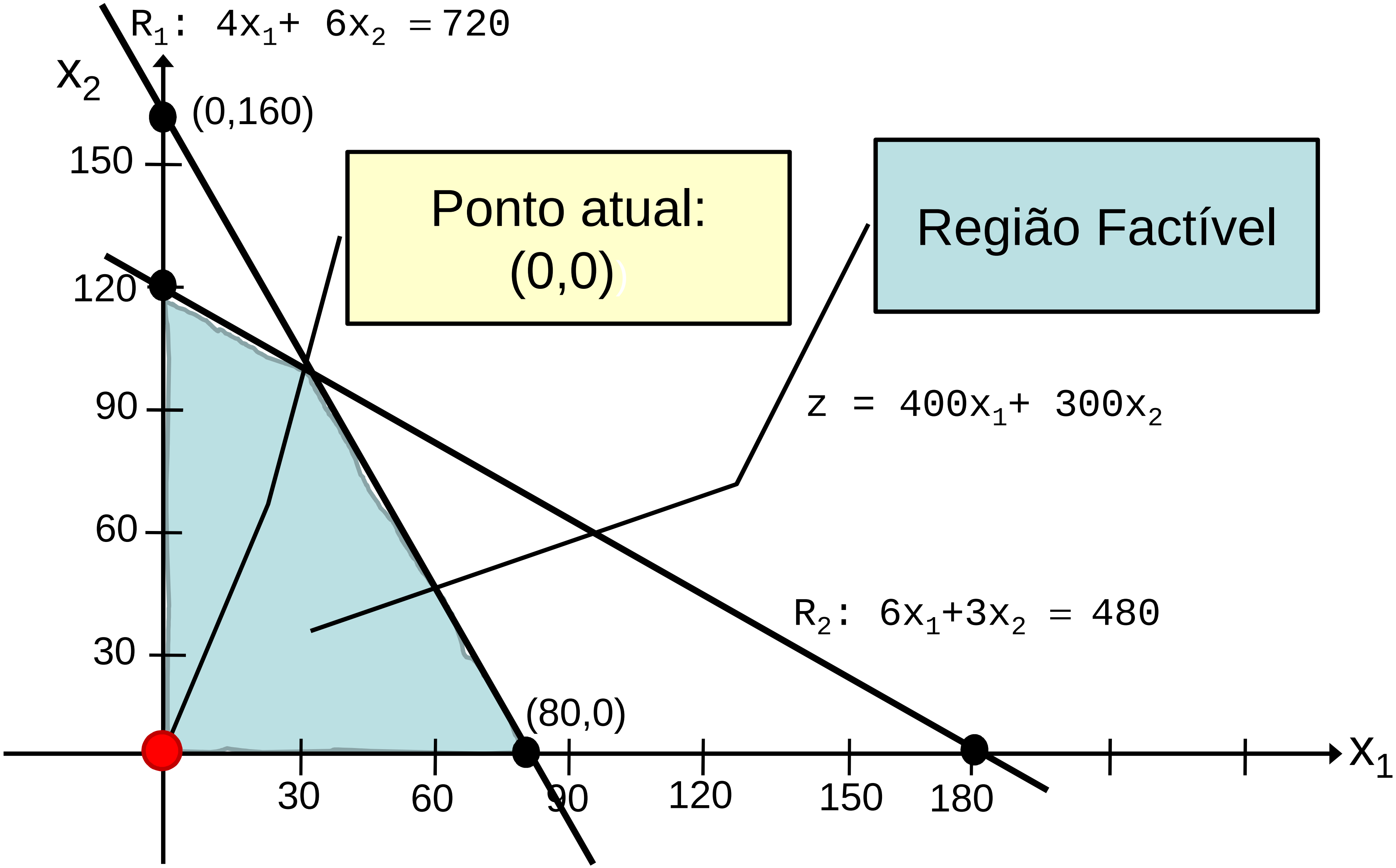
$$z = 400.0 + 300.0 + 0.720 + 0.480$$

$$z = 0$$



R_1: $4x_1 + 6x_2 = 720$
x_2
(0,160)
150
120
90
60
30
$z = 400x_1 + 300x_2$
R_2: $6x_1 + 3x_2 = 480$
(80,0)
x_1
30
60
90
120
150
180

Capítulo 4: O Método *Simplex*



3) O próximo passo é melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.

Para a mudança de base deve-se escolher uma *variável não básica* para que ela "ENTRE" para a base.

Evidentemente uma das *variáveis básicas* irá sair da base e tornar-se *não básica*.

Quem deve ENTRAR para a base: x_1 ou x_2?

Resposta: Deve entrar aquela variável que possuir o MAIOR CUSTO POSITIVO na F.O.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0

Se houver empate entre variáveis, pode-se *escolher* qualquer uma delas para entrar na base.

Se NENHUMA variável tiver custo positivo, então não será possível eleger uma nova base.

Isto caracteriza que se atingiu o *ponto de ótimo* da F.O. e, por consequência, que o *Algoritmo Simplex* atingiu seu “ponto de parada”.

O valor da F.O. será o *valor ótimo*.

Coeficientes da função objetivo z

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	6	3	0	1	480

Não Básicas Básicas

Como o coeficiente de x_1 é 400 e o de x_2 é 300, temos que...

A variável escolhida para ENTRAR é x_1.

E quem, dentre as variáveis básicas (x_3 ou x_4), deverá *sair da base*?

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	6	3	0	1	480

Não Básicas Básicas

4) Deve SAIR da base aquela variável cujo *coeficiente RHS* em relação à variável que está entrando para a base for MÍNIMO.

O *coeficiente RHS* somente pode ser calculado se resultar em um número positivo.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	**4**	6	1	0	**720**
x_4	0	**6**	3	0	1	**480**

Não Básicas

Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	**4**	6	1	0	**720**
x_4	0	**6**	3	0	1	**480**

Não Básicas (x_1, x_2) — Básicas (x_3, x_4)

coeficientes RHS = { 720/4; 480/6 } → mínimo = 80,
logo x_4 SAI da base

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	6	3	0	1	480

5) Há um elemento especial do *tableau* denominado de *pivô*.

O pivô é o elemento que se encontra na intersecção entre a *linha* da variável que irá sair da base e a *coluna* da variável que irá entrar para a base.

Assim temos...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	**6**	3	0	1	480

Pivô

6) Realiza-se, em seguida, o *pivoteamento* da base atual para obter-se a *nova base*.

O *pivoteamento* deve fazer com que todos os elementos da coluna, exceto o pivô, sejam transformados em ZERO.

O pivô deve ser transformado em 1 (um).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	6	3	0	1	480

$L_4 = L_4 / 6$ { L_4 é a *linha* da variável x_4}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	400	300	0	0	-0
x_3	0	4	6	1	0	720
x_4	0	1	1/2	0	1/6	80

$L_C = L_C - 400.L_4$ { L_C é a *linha de custos*, ou seja, a linha da F.O.}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	**-32000**
x_3	**0**	4	6	1	0	720
x_4	**0**	1	1/2	0	1/6	80

$L_3 = L_3 - 4.L_4$ { L_3 é a *linha* da variável x_3}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	4	1	-2/3	400
x_4	0	1	1/2	0	1/6	80

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	4	1	-2/3	400
x_1	0	1	1/2	0	1/6	80

Nova base: x_3 e x_1

Variáveis Não-básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	4	1	-2/3	400
x_1	0	1	1/2	0	1/6	80

Variáveis Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_3 = 400; x_1 = 80$

- Variáveis não básicas:

$x_2 = 0; x_4 = 0$

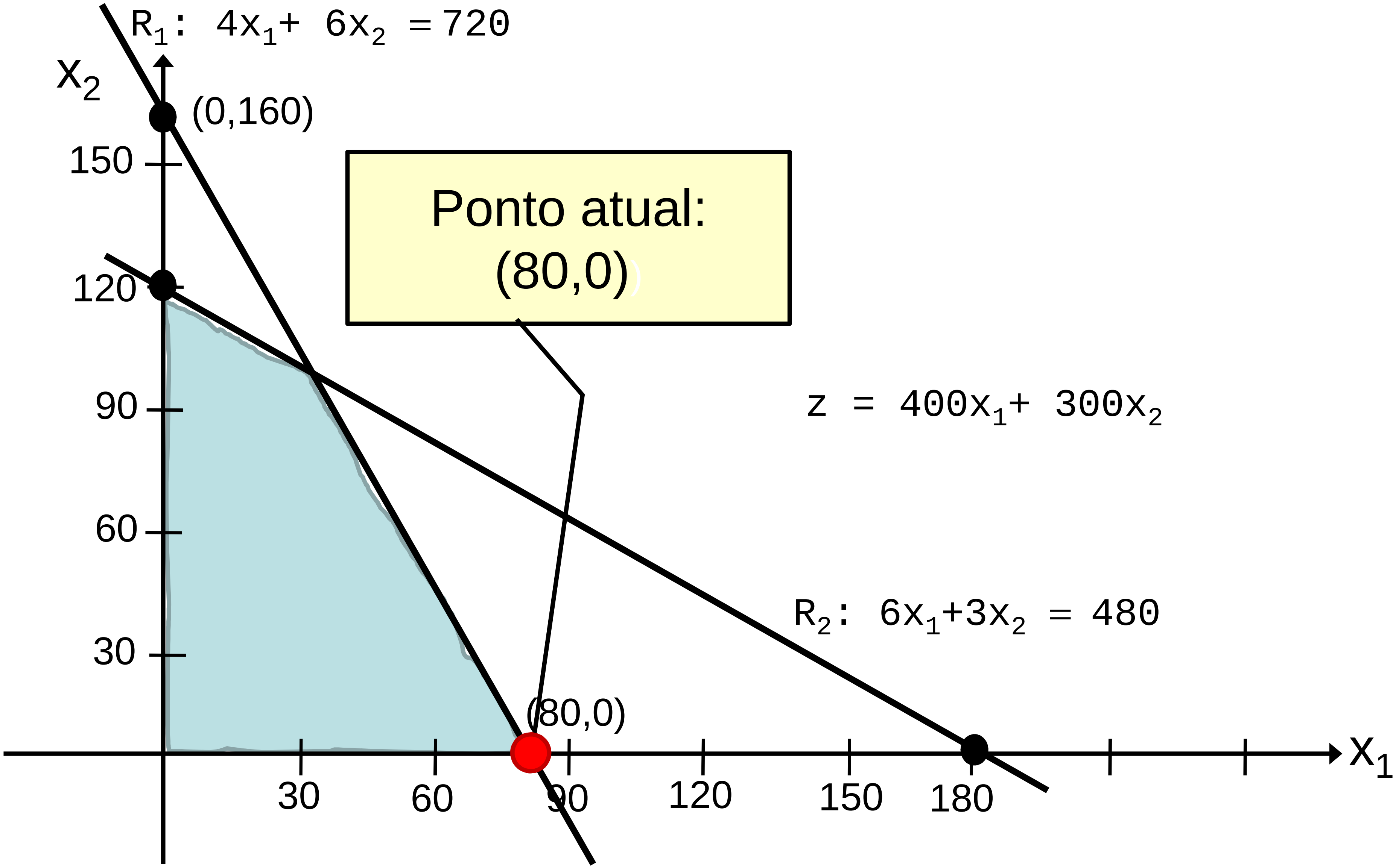
Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$z = 400x_1 + 300x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

$z = 400.80 + 300.0 + 0.400 + 0.0$

$z = 32000$


R1: 4x1+ 6x2 = 720
x2
(0,160)
150
Ponto atual:
(80,0)
120
90
z = 400x1+ 300x2
60
R2: 6x1+3x2 = 480
30
(80,0)
x1
30
60
90
120
150
180

7) A partir deste ponto REPETE-SE todo o processo...

- melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável (não básica) que ENTRA para a base
- determinar a variável (básica) que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

8) Selecionar a variável que ENTRA para a base...

As variáveis não básicas são x_2 e x_4.

Se houver empate entre variáveis, pode-se *escolher* qualquer uma delas para entrar na base.

Se NENHUMA variável tiver custo positivo, então não será possível eleger uma nova base.

Isto caracteriza que se atingiu o *ponto de ótimo* da F.O. e, por consequência, que o *Algoritmo Simplex* atingiu seu "ponto de parada".

O valor da F.O. será o *valor ótimo*.

Como o coeficiente de x_2 é 100 e o de x_4 é –200/3, temos que...

A variável escolhida para ENTRAR é x_2, pois é a única que tem COEFICIENTE POSITIVO na F.O. (somente ela está apta a entrar para a base>

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	**-32000**
x_3	**0**	0	4	1	-2/3	400
x_1	**0**	1	1/2	0	1/6	80

9) Deve SAIR da base aquela variável cujo *coeficiente RHS* em relação à variável que está entrando para a base for MÍNIMO.

O *coeficiente RHS* somente pode ser calculado se resultar em um número positivo.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	**-32000**
x_3	**0**	0	4	1	-2/3	400
x_1	**0**	1	1/2	0	1/6	80

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	**4**	1	-2/3	**400**
x_1	0	1	**1/2**	0	1/6	**80**

coeficientes RHS = { 400 /4; 80/(1/2) } → mínimo = 100,
logo x_3 SAI da base

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	4	1	-2/3	400
x_1	0	1	1/2	0	1/6	80

10) Há um elemento especial do *tableau* denominado de *pivô.*

O pivô é o elemento que se encontra na intersecção entre a *linha* da variável que irá sair da base e a *coluna* da variável que irá entrar para a base.

Assim temos...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	**4**	1	-2/3	400
x_1	0	1	1/2	0	1/6	80

Pivô

11) Realiza-se, em seguida, o *pivoteamento* da base atual para obter-se a *nova base*.

O *pivoteamento* deve fazer com que todos os elementos da coluna, exceto o pivô, sejam transformados em ZERO.

O pivô deve ser transformado em 1 (um).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	-32000
x_3	0	0	4	1	-2/3	400
x_1	0	1	1/2	0	1/6	80

$L_3 = L_3 / 4$ { L_3 é a *linha* da variável x_3}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	**-32000**
x_3	**0**	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	**0**	1	1/2	0	1/6	80

$L_3 = L_3 / 4$ { L_3 é a *linha* da variável x_3}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	100	0	-200/3	**-32000**
x_3	**0**	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	**0**	1	1/2	0	1/6	80

$L_C = L_C - 100L_3$ { L_C é a *linha* de *custo*, ou seja, da F.O.}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	-50	-42000
x_3	0	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	0	1	1/2	0	1/6	80

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	-50	**-42000**
x_3	**0**	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	**0**	1	1/2	0	1/6	80

$L_1 = L_1 - (L_3/2)$ { L_1 é a *linha* da variável x_1}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	-50	**-42000**
x_3	**0**	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	**0**	1	0	-1/8	1/4	30

$L_1 = L_1 - (L_3 /2)$ { L_1 é a *linha* da variável x_1}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	0	-42000
x_2	0	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	0	1	0	-1/8	1/4	30

Nova base: x_2 e x_1

Variáveis Não-básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	0	-42000
x_2	0	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	0	1	0	-1/8	1/4	30

Variáveis Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_2 = 100; x_1 = 30$

- Variáveis não básicas:

$x_3 = 0; x_4 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

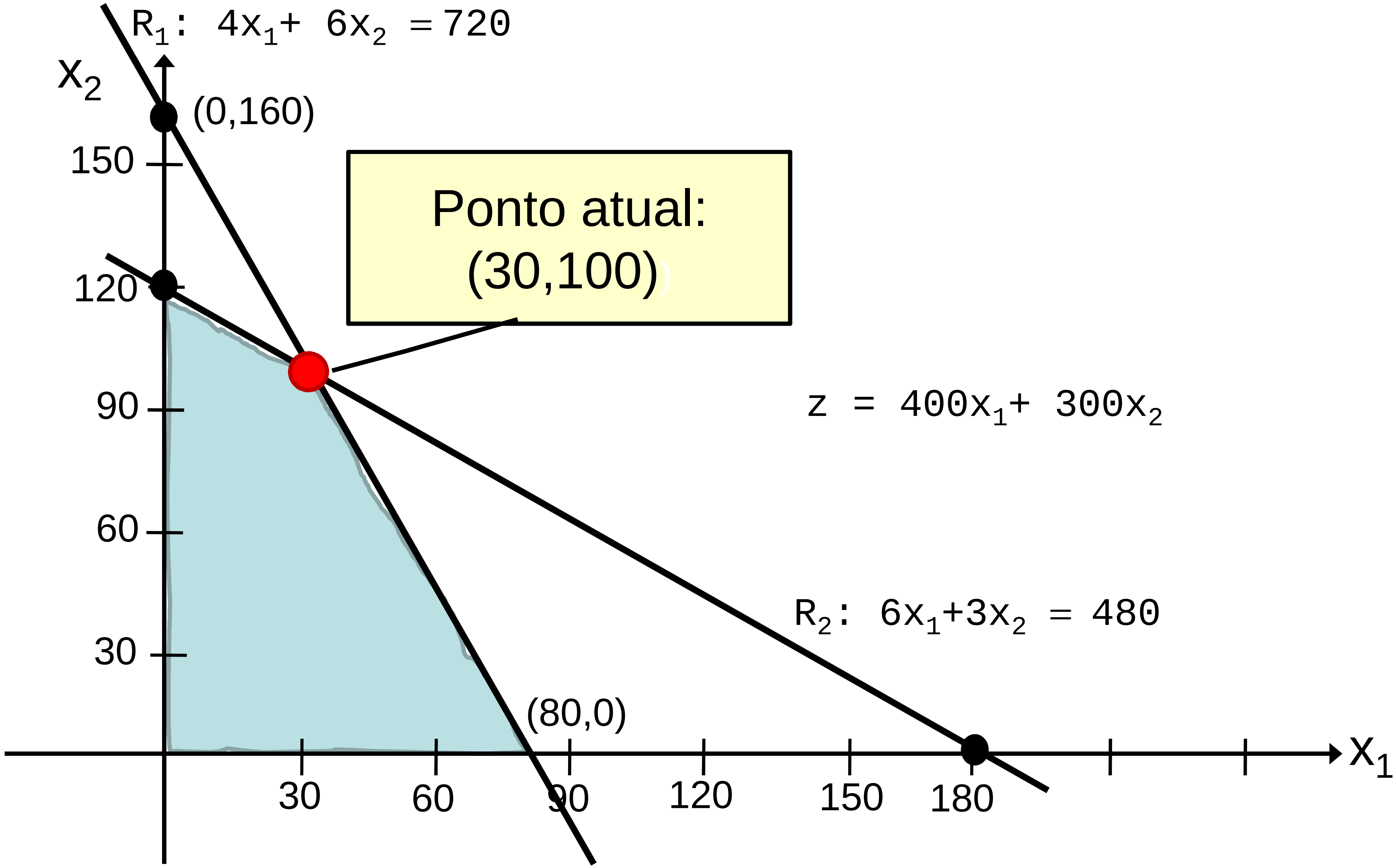
Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$z = 400x_1 + 300x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

$z = 400.30 + 300.100 + 0.400 + 0.0$

$z = 42000$

Capítulo 4: O Método *Simplex*



12) A partir deste ponto REPETE-SE todo o processo...

- melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável (não básica) que ENTRA para a base
- determinar a variável (básica) que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

13) Selecionar a variável que ENTRA para a base...

As variáveis não básicas são x_3 e x_4.

Se houver empate entre variáveis, pode-se *escolher* qualquer uma delas para entrar na base.

Se NENHUMA variável tiver custo positivo, então não será possível eleger uma nova base.

Isto caracteriza que se atingiu o *ponto de ótimo* da F.O. e, por consequência, que o *Algoritmo Simplex* atingiu seu “ponto de parada”.

O valor da F.O. será o *valor ótimo*.

14) Selecionar a variável que ENTRA para a base...

Vimos que as variáveis não básicas são x_3 e x_4.

Como NENHUMA tem COEFICIENTE POSITIVO na F.O., não é possível inserir nenhuma delas na base...

Isto é o ponto de PARADA do algoritmo *Simplex*!

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	0	-42000
x_2	0	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	0	1	0	-1/8	1/4	30

Consequência: foi atingido o *ponto de ótimo*.

$x_1^* = 30$; $x_2^* = 100$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0$

$z^* = 42000$

Quadro de Ótimo para o PPL do Exemplo 01

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-25	0	-42000
x_2	0	0	1	1/4	-1/6	100
x_1	0	1	0	-1/8	1/4	30

Exemplo 02: Resolva o modelo de PPL

max $z = 2.x_1 + x_2 - x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2.x_3 \leq 6 \\ x_1 + 4.x_2 - x_3 \leq 4 \\ \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = 1,2,3 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 02

0) Devemos, sempre, para empregar o Método Simplex , colocar o PPL em sua forma *padrão.*

Lembre-se que isto é feito inserindo-se nas restrições variável de *folga* (somando) naquelas que são do tipo $\leq$ e variável de *excesso* (subtraindo) naquelas que são do tipo $\geq$.

Exemplo 02: Na forma padrão...

max $z = 2.x_1 + x_2 - x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

sujeito a

$$\begin{cases} 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 + 1.x_4 = 6 \\ 1.x_1 + 4.x_2 - 1.x_3 + 1.x_5 = 4 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,5} \end{cases}$$

1) Coloca-se, em seguida, o PPL sob a forma de um *tableau*, ou seja, de uma *tabela*:

Coeficientes da função objetivo z

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	
	0	1	1	2	1	0	6
	0	1	4	-1	0	1	4

RHS = *Right Hand Side* ("Lado da Mão Direita", ou seja, termos independenes)

2) Determinar as variáveis *básicas* e *factíveis* (**B**), pois estas comporão a 1ª base.

Lembre-se que: a **base** é um conjunto de *vetores linearmente independentes* e que geram o espaço vetorial correspondente a $\Re^m$ (onde *m* é o número de restrições do PPL).

No nosso caso *m* = 2, assim devemos gerar uma base para $\Re^2$.

Não Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_4 = 6; x_5 = 4$

- Variáveis não básicas:

$x_1 = 0; x_2 = 0; x_3 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 2.x_1 + x_2 - x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$

$$z = 2.0 + 0 - 0 + 0.\ 6 + 0.\ 4$$

$$z = 0$$

3) O próximo passo é melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.

Para a mudança de base deve-se escolher uma *variável não básica* para que ela “ENTRE” para a base.

Evidentemente uma das *variáveis básicas* irá sair da base e tornar-se *não básica*.

Quem deve ENTRAR para a base: x_1, x_2 ou x_3?

Resposta: Deve entrar aquela variável que possuir o MAIOR CUSTO POSITIVO na F.O.

Vejamos:

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	**-0**

Se houver empate entre variáveis, pode-se *escolher* qualquer uma delas para entrar na base.

Se NENHUMA variável tiver custo positivo, então não será possível eleger uma nova base.

Isto caracteriza que se atingiu o *ponto de ótimo* da F.O. e, por consequência, que o *Algoritmo Simplex* atingiu seu "ponto de parada".

O valor da F.O. será o *valor ótimo*.

Não Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

Não Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	**2**	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

Maior custo positivo na F.O. (entre 2, 1 e -1)

x_1 é a variável escolhida para ENTRAR para a base.

E quem, dentre as variáveis básicas, deverá *sair da base*?

4) Deve SAIR da base aquela variável cujo *coeficiente RHS* em relação à variável que está entrando para a base for MÍNIMO.

O *coeficiente RHS* somente pode ser calculado se resultar em um número positivo.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	**2**	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	-0
x_4	0	**1**	1	2	1	0	**6**
x_5	0	**1**	4	-1	0	1	**4**

coeficientes RHS = { 6 /1; 4/1 } → mínimo = 4, logo x_5 SAI da base

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

5) Há um elemento especial do *tableau* denominado de *pivô*.

O pivô é o elemento que se encontra na intersecção entre a *linha* da variável que irá sair da base e a *coluna* da variável que irá entrar para a base.

Assim temos...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2	1	-1	0	0	-0
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	**1**	4	-1	0	1	4

Pivô

6) Realiza-se, em seguida, o *pivoteamento* da base atual para obter-se a *nova base*.

O *pivoteamento* deve fazer com que todos os elementos da coluna, exceto o pivô, sejam transformados em ZERO.

O pivô deve ser transformado em 1 (um).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	2-2.1	1-2.4	-1-2.-1	0–2.0	0–2.1	-0-2.4
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

$L_C = L_C - 2.L_5$ { L_C é a *linha de custos*, ou seja, a linha da F.O.}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	1	1	2	1	0	6
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

$L_C = L_C - 2.L_5$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	1-1	1-4	2-(-1)	1-0	0-1	6-4
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

$L_4 = L_4 – L_5$ { L_4 é a *linha* da variável x_4}

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_5	0	1	4	-1	0	1	4

$L_4 = L_4 - L_5$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

Nova base: x_1 e x_4

Variáveis Não-básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

(B) Variáveis Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_1 = 4; x_4 = 2$

- Variáveis não básicas:

$x_2 = 0; x_3 = 0; x_5 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 2.x_1 + x_2 - x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$

$$z = 2.4 + 0 - 0 + 0.\ 2 + 0.\ 0$$

$$z = 8$$

7) A partir deste ponto REPETE-SE todo o processo...

- melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável (não básica) que ENTRA para a base
- determinar a variável (básica) que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

8) Selecionar a variável que ENTRA para a base...

As variáveis não básicas são x_2, x_3 e x_5.

Como x_3 é a única que tem COEFICIENTE POSITIVO na F.O., somente ela está apta a entrar para a base.

Variáveis Não-básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

(B) Variáveis Básicas

Entra para a base

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

9) Determinar a variável que SAI da base...

Calculando o *coeficiente RHS* para x_1 e x_4 tem-se que:

$$\begin{array}{l} \quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\ x_1 \quad\quad x_4 \\ \textit{Coeficiente RHS} = \{\ 4/\text{-}1;\ 2/3\} \rightarrow x_4 \text{ é o mínimo, já que} \end{array}$$

x_1 é negativo (não permitido).

Portanto, x_4 SAI da base.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

10) Identificar o *pivô* ...

O *pivô* está na intersecção da linha 4 com a coluna 3.

Seu valor é 3.

Este deverá ser transformado em 1 (um).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

Pivô

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-3	3	1	-1	2
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

$L_4 = L_4 / 3$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7	1	0	-2	-8
x_4	0	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	0	1	4	-1	0	1	4

11) Realizar o *pivoteamento* ...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0-0	-7-(-1)	1-1	0-1/3	-2-(-1/3)	-8-2/3
x_4	0	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	0	1+0	4+(-1)	-1+1	0+1/3	1+(-1/3)	4+2/3

$L_c = L_c - L_4$ e $L_1 = L_1 + L_4$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-6	0	-1/3	-5/3	-26/3
x_4	**0**	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	**0**	1	3	0	1/3	2/3	14/3

$L_c = L_c - L_4$ e $L_1 = L_1 + L_4$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-6	0	-1/3	-5/3	-26/3
x_3	0	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	0	1	3	0	1/3	2/3	14/3

Nova base: x_3 e x_1

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_1 = 14/3; x_3 = 2/3$

- Variáveis não básicas:

$x_2 = 0; x_4 = 0; x_5 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 2.x_1 + x_2 - x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$

$$z = 2.(14/3) + 0 - 2/3 + 0.\ 0 + 0.\ 0$$

$$z = 26/3$$

12) REPETE-SE, novamente, todo o processo...

- melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável (não básica) que ENTRA para a base
- determinar a variável (básica) que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

13) Selecionar a variável que ENTRA para a base...

As variáveis não básicas são x_2, x_4 e x_5.

Como NENHUMA tem COEFICIENTE POSITIVO na F.O., não é possível inserir nenhuma delas na base...

Isto é o ponto de PARADA do algoritmo *Simplex*!

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-6	0	-1/3	-5/3	-26/3
x_3	0	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	0	1	3	0	1/3	2/3	14/3

Consequência: foi atingido o *ponto de ótimo*.

$x_1^* = 14/3$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 2/3$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 0$;

$z^* = 26/3$

Quadro de Ótimo para o PPL do Exemplo 02

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-6	0	-1/3	-5/3	-26/3
x_3	0	0	-1	1	1/3	-1/3	2/3
x_1	0	1	3	0	1/3	2/3	14/3

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Claro que bem mais fácil para um usuário *leigo* é empregar um *software* que resolva o PPL a partir da especificação de seu modelo!

Usando o *software* LINDO, pode-se gerar o modelo

```
max 2x1 + x2 - x3
    st
     x1 + x2 + 2x3 <= 6
     x1 + 4x2 - x3 <= 4
     x1 >= 0
     x2 >= 0
     x3 >= 0
end
```

Que, ao ser resolvido, gera como resposta...

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      3
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       8.666667

  VARIABLE          VALUE          REDUCED COST
        X1          4.666667           0.000000
        X2          0.000000           6.000000
        X3          0.666667           0.000000

       ROW    SLACK OR SURPLUS      DUAL PRICES
        2)          0.000000           0.333333
        3)          0.000000           1.666667
        4)          4.666667           0.000000
        5)          0.000000           0.000000
 NO. ITERATIONS=       3
```

Exemplo 03: Resolva o modelo de PPL

max $z = x_1 + 3.x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + 2.x_2 \leq 10 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 \leq 6 \\ x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 03

0) Devemos, sempre, para empregar o Método Simplex , colocar o PPL em sua forma *padrão.*

Lembre-se que isto é feito inserindo-se nas restrições variável de *folga* (somando) naquelas que são do tipo $\leq$ e variável de *excesso* (subtraindo) naquelas que são do tipo $\geq$.

Exemplo 03: Na forma padrão...

max $z = 1.x_1 + 3.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

sujeito a

$$\begin{cases} 1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 = 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_4 = 8 \\ 1.x_1 + \quad + 1.x_5 = 6 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,5} \end{cases}$$

1) Coloca-se, em seguida, o PPL sob a forma de um *tableau*, ou seja, de uma *tabela*:

Coeficientes da função objetivo

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	
	0	1	2	1	0	0	10
	0	1	1	0	1	0	8
	0	1	0	0	0	1	6

3) Determinar as variáveis *básicas* e *factíveis* (**B**), pois estas comporão a 1ª base.

Lembre-se que: a **base** é um conjunto de *vetores linearmente independentes* e que geram o espaço vetorial correspondente a $\Re^m$ (onde *m* é o número de restrições do PPL)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	
x_3	**0**	1	2	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

(B) Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_3 = 10$; $x_4 = 8$ e $x_5 = 6$

- Variáveis não básicas:

$x_1 = 0$ e $x_2 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 1.x_1 + 3.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$

$$z = 1.0 + 3.0 + 0.10 + 0.8 + 0.6$$

$$z = 0$$

4) O próximo passo é melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.

Para a mudança de base deve-se escolher uma *variável não básica* para que ela “ENTRE” para a base.

Evidentemente uma das *variáveis básicas* irá sair da base e tornar-se *não básica*.

Quem deve ENTRAR para a base: x_1 ou x_2?

Resposta: Deve entrar aquela variável que possuir o MAIOR CUSTO POSITIVO na F.O.

Se houver empate entre variáveis, pode-se *escolher* qualquer uma delas para entrar na base.

Se NENHUMA variável tiver custo positivo, então não será possível eleger uma nova base.

Isto caracteriza que atingiu-se o *ponto de ótimo* da F.O. e, por consequência, que o *Algoritmo Simplex* atingiu seu "ponto de parada".

O valor da F.O. será o *valor ótimo*.

(NB) Não Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	2	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

(NB) Não Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	2	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

Maior custo positivo na F.O. (entre 1 e 3)

x_2 é a variável escolhida para ENTRAR para a base.

E quem, dentre as variáveis básicas, deverá sair da base?

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	2	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

5) Deve SAIR da base aquela variável cujo *coeficiente RHS* em relação à variável que está entrando para a base for MÍNIMO.

O *coeficiente RHS* somente pode ser calculado se resultar em um número positivo.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	2	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

coeficientes RHS = { 10/2; 8/1; 6/0 } → mínimo = 5, logo x_3 SAI da base

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	2	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

6) Há um elemento especial do *tableau* denominado de *pivô*.

O pivô é o elemento que se encontra na intersecção entre a *linha* da variável que irá sair da base e a *coluna* da variável que irá entrar para a base.

Assim temos...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	**2**	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

Pivô

7) Realiza-se, em seguida, o *pivoteamento* da base atual para obter-se a *nova base*.

O pivoteamento deve fazer com que todos os elementos da coluna, exceto o pivô, transformem-se em ZERO.

O pivô deve transformar-se em 1 (um).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1	**2**	1	0	0	10
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

Devemos fazer $L_3 = L_3 / 2$ para que o *pivô* transforme-se em 1.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	**0**	1	1	0	1	0	8
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

Agora fazemos: $L_4 = L_4 – L_3$ e L_5 já esta correta, pois possui 0.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	3	0	0	0	-0
x_3	**0**	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	**0**	1/2	0	-1/2	1	0	3
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

Finalmente fazemos: $L_c = L_c - 3.L_3$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1/2	0	-3/2	0	0	-15
x_3	**0**	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	**0**	1/2	0	-1/2	1	0	3
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1/2	0	-3/2	0	0	-15
x_2	**0**	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	**0**	1/2	0	-1/2	1	0	3
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

Nova base: x_2 , x_4 e x_5

(NB) Variáveis Não-básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1/2	0	-3/2	0	0	-15
x_2	**0**	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	**0**	1/2	0	-1/2	1	0	3
x_5	**0**	1	0	0	0	1	6

(B) Variáveis Básicas:

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_2 = 5$; $x_4 = 3$ e $x_5 = 6$

- Variáveis não básicas:

$x_1 = 0$ e $x_3 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 1.x_1 + 3.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$$

$$z = 1.0 + 3.5 + 0.0 + 0.3 + 0.\ 6$$

$$z = 15$$

8) A partir deste ponto REPETE-SE o processo...

-melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.

- selecionar a variável que ENTRA para a base
- determinar a variável que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

9) Selecionar a variável que ENTRA para a base...

As variáveis não básicas são x_1 e x_3.

Como NENHUMA tem COEFICIENTE POSITIVO na F.O., não é possível inserir nenhuma delas na base...

Isto é o ponto de PARADA do algoritmo *Simplex*!

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1/2	0	-3/2	0	0	-15
x_2	0	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	0	1/2	0	-1/2	1	0	3
x_5	0	1	0	0	0	1	6

Foi atingido o *ponto de ótimo*:

$x_1^* = 0$; $x_2^* = 5$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 3$; $x_5^* = 6$;

$z^* = 15$;

Quadro de Ótimo para o PPL do Exemplo 03

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1/2	0	-3/2	0	0	-15
x_2	0	1/2	1	1/2	0	0	5
x_4	0	1/2	0	-1/2	1	0	3
x_5	0	1	0	0	0	1	6

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- No *quadro de ótimo* observe que:
    - o valor $x_3 = 0$ indica que todo o recurso expresso pela 1ª restrição foi utilizado:

$$1.\cancelto{0}{x_1} + 2.\cancelto{5}{x_2} <= 10 \qquad (1^{a} \text{ restrição})$$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- No *quadro de ótimo* observe que:
  - o valor $x_4 = 3$ indica a sobra (excedente) do recurso expresso pela 2ª restrição:

$$1.\cancel{x_1}^{\,0} + 1.\cancel{x_2}^{\,5} <= 8 \qquad \text{(2ª restrição)}$$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- No *quadro de ótimo* observe que:

  - o valor $x_5 = 6$ indica a sobra (excedente) do recurso expresso pela 3ª restrição:

$$1.\cancelto{0}{x_1} <= 6 \qquad\qquad \text{(3ª restrição)}$$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- No *quadro de ótimo* observe que:
  - Estes valores são fundamentais para aplicações reais, pois indicam o *estoque* remanescente dos recursos na situação de otimalidade.

Usando o *software* LINDO, pode-se gerar o modelo

```
max 1x1 + 3x2
    st
         1x1 + 2x2 <= 10
         1x1 + 1x2 <= 8
         1x1 <= 6
         x1 >= 0
         x2 >= 0
end
```

Que, ao ser resolvido, gera como resposta...

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
      OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)      15.00000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.000000          0.500000
        X2         5.000000          0.000000

       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          1.500000
        3)         3.000000          0.000000
        4)         6.000000          0.000000
        5)         0.000000          0.000000
        6)         5.000000          0.000000

 NO. ITERATIONS=       1
```

Exemplo 04: Resolva o modelo de PPL

max $z = x_1 + x_2$

sujeito a

$$
\begin{cases}
2.x_1 + x_2 \leq 8 \\
x_1 + 2.x_2 \leq 7 \\
x_2 \leq 3 \\
x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 04

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Resolva este exercício e registre a solução em suas *anotações* da disciplina.

A resposta é: $x_1^* = 5$; $x_2^* = 2$; $z^* = 5$.

As variáveis de *folga* criadas para resolução valerão:

$x_3^* = 0$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 1$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Técnica das Variáveis Artificiais

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Todos os modelos de programação linear que vimos possuem...

- restrições com $\leq$
- termos independentes positivos

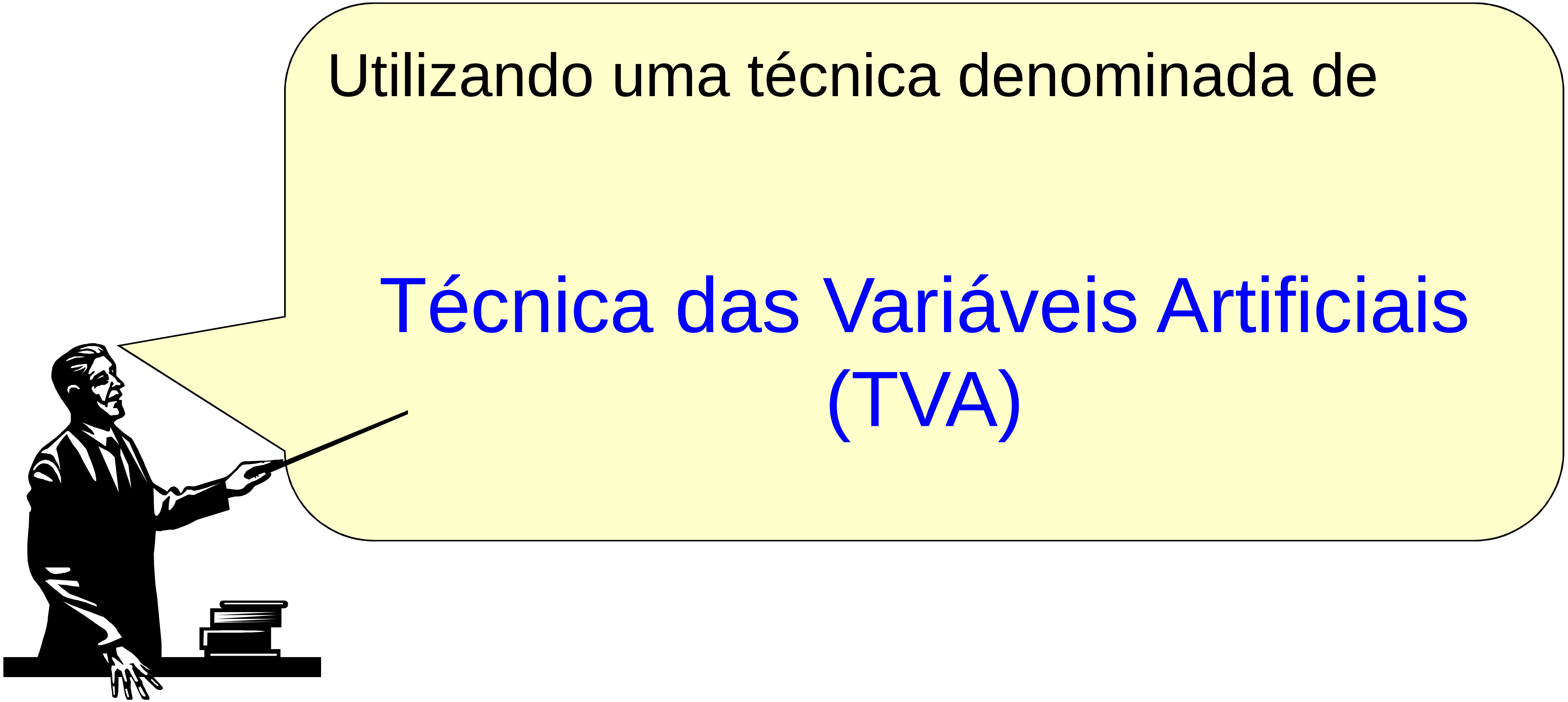
4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

E se o PPL apresentar...

restrições com $\geq$ ou com $=$

Como resolver ?

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*



4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- A *TVA*...
  - insere uma nova variável, *artificial*, em todas as restrições do tipo $\geq$ ou $=$ durante a conversão do PPL para a forma *padrão.*

Exemplo 05: modelo de PPL

max $z = x_1 + x_2 + x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 \leq 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 \geq 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 = 60 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 05

0) Devemos, sempre, para empregar o Método Simplex , colocar o PPL em sua forma *padrão.*

Neste caso teremos dois passos:

1º passo: inserir as variáveis de folga/*excesso*

2º passo: Inserir as variáveis *artificiais*

Exemplo 05: Para a forma padrão, temos:

1º passo: Inserir variáveis de *folga* e *excesso:*

max $z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 1.x_4 = 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 = 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 = 60 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,5} \end{cases}$$

Exemplo 05: Para a forma padrão, temos:

2º passo: Inserir variáveis de *artificiais:*

max $z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$

sujeito a

$$
\begin{cases}
2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 1.x_4 = 10 \\
1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 = 20 \\
2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 + 1.x_7 = 60 \\
x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,7}
\end{cases}
$$

1) Coloca-se, em seguida, o PPL sob a forma de um *tableau*, ou seja, de uma *tabela*:

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	0	0	-0
	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
	0	2	1	3	0	0	0	1	60

3) Determinar as variáveis *básicas* e *factíveis* (**B**), pois estas comporão a 1ª base.

Lembre-se que: a **base** é um conjunto de *vetores* *linearmente independentes* e que geram o espaço vetorial correspondente a $\Re^m$ (onde *m* é o número de restrições do PPL)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	0	0	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

B B B

(B) Variáveis Básicas

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$$x_4 = 10;\ x_6 = 20;\ x_7 = 60$$

- Variáveis não básicas:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_3 = 0;\ x_5 = 0$$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 - 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$$

$$z = 1.0 + 1.0 + 1.0 + 0.10 - 0.\ 0 + 0.20 + 0.60$$

$$z = 0$$

4) O próximo passo é melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.

Para a mudança de base deve-se escolher uma *variável não básica* para que ela “ENTRE” para a base.

Evidentemente uma das *variáveis básicas* irá sair da base e tornar-se *não básica*.

Quem deve ENTRAR para a base: x_1, x_2, x_3 ou x_5?

Resposta: Deve entrar aquela variável que possuir o MAIOR CUSTO POSITIVO na F.O.

Se houver empate entre variáveis, pode-se *escolher* qualquer uma delas para entrar na base.

Se NENHUMA variável tiver custo positivo $\Rightarrow$ ponto de ótimo atingido.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	0	0	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

NB (x_1, x_2, x_3) B (x_4) NB (x_5) B (x_6) B (x_7)

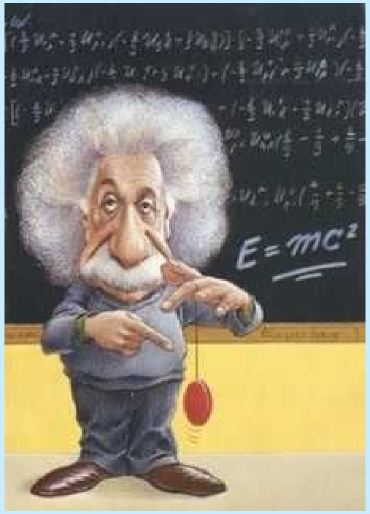
(B) Básicas

(NB) Não-Básicas

Como x_1, x_2 e x_3 possuem os mesmos custos (1 - um) e x_5 tem custo 0 - zero...

Pode-ser escolher dentre x_1, x_2 ou x_3.

Qual a escolha mais *inteligente* ?



Resposta:

Aquela variável que fizer com que uma variável *artificial* saia da base.

Em nosso PPL temos que x_6 ou x_7 deve sair da base.

5) Deve SAIR da base aquela variável cujo *coeficiente RHS* em relação à variável que está entrando para a base for MÍNIMO.

O *coeficiente RHS* somente pode ser calculado se resultar em um número positivo.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	0	0	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

- Se escolhermos...
  - x_1 para entrar para a base quem sairá será x_4
  - x_2 para entrar para a base quem sairá será x_4
  - x_3 para entrar para a base quem sairá será x_6

- Logo...
  - devemos escolher x_3 para entrar para a base, fazendo com que x_6 saia...

6) O pivô é o número 2...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	0	0	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	**2**	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

7) Realiza-se, em seguida, o *pivoteamento* da base atual para obter-se a *nova base*.

O pivoteamento deve fazer com que todos os elementos da coluna, exceto o pivô, transformem-se em ZERO.

O pivô deve transformar-se em 1 (um).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	0	0	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

Fazendo $L_6 = L_6/2$; $L_c = L_c - L_6$; $L_4 = L_4 + L_6$; $L_7 = L_7 – 3.L_6$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-1/2	0	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_6	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

A nova base é dada com x_3 no lugar de $x_{6,}$ ou seja, x_3, x_4 e x_7.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-1/2	0	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$$x_3 = 10;\ x_4 = 20;\ x_7 = 30;$$

- Variáveis não básicas:

$$x_1 = 0;\ x_2 = 0;\ x_5 = 0;\ x_6 = 0;$$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 - 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$$

$$z = 1.0 + 1.0 + 1.10 + 0.20 - 0.\ 0 + 0.0 + 0.30$$

$$z = 10$$

8) A partir deste ponto REPETE-SE o processo...

-melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável que ENTRA para a base
- determinar a variável que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-1/2	0	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Quem entra para a BASE: x_1, x_2, ou x_5? (já que x_6 não está apto)

- Se escolhermos...

  - x_1 para entrar para a base quem sairá será x_4
  - x_2 para entrar para a base quem sairá será x_4
  - x_5 para entrar para a base quem sairá será x_7

Portanto devemos escolher x_5 e fazer x_7 sair da base

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-1/2	0	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Fazendo $L_7 = (2.L_7)/3$; $L_3 = L_3 + (L_7/2)$; $L_4 = L_4 + (L_7/2)$; $L_c = L_c - (L_7/2)$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	0	-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

A base agora é x_3; x_4 e x_5

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$$x_3 = 20; x_4 = 30; x_5 = 20;$$

- Variáveis não básicas:

$$x_1 = 0; x_2 = 0; x_6 = 0; x_7 = 0$$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$$z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 - 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$$

$$z = 1.0 + 1.0 + 1.20 + 0.30 - 0.\ 20 + 0.0 + 0.0$$

$$z = 20$$

9) REPETE-SE, mais uma vez, o processo...

-melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável que ENTRA para a base
- determinar a variável que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	0	-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Quem entra para a BASE: x_1 ou x_2? (já que x_6 e x_7 não estão aptos)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	0	-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Resposta: x_2 entra e x_4 sai... o pivô será o valor 4/3

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	0	-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Fazendo $L_4= (3.L_4)/4$; $L_3= L_3 -(L_4/3)$; $L_5= L_5 +(L_4/3)$; $L_c= L_c -(2.L_4/3)$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	0	-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	-1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

A nova base é x_2; x_3 e x_5

Resumindo o *ponto extremo* atual:

- Variáveis básicas factíveis:

$x_2 = 45/2;\ x_3 = 25/2;\ x_5 = 55/2;$

- Variáveis não básicas:

$x_1 = 0;\ x_4 = 0;\ x_6 = 0;\ x_7 = 0$

Resumindo o *ponto extremo* atual:

Valor da função objetivo (F.O.) nesta base:

$z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 - 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$

$z = 1.0+1.(45/2)+1.(25/2)+0.0-0.(55/2)+0.0+0.0$

$z = 35$

10) REPETE-SE, novamente, o processo...

-melhorar o *valor* da F.O. por meio de uma *mudança de base*.
- selecionar a variável que ENTRA para a base
- determinar a variável que SAI da base
- localizar o *pivô*
- realizar o *pivoteamento*
- encontrar a *nova base*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	0	-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

Quem entrará para a base (x_1; x_4; x_6 ou x_7)?

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	0	-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

Resposta: Ninguém $\Rightarrow$ Ponto de *ótimo* foi alcançado!

Foi atingido o *ponto de ótimo*:

$x_1^* = 0$; $x_2^* = 45/2$; $x_3^* = 25/2$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 55/2$;

$x_6^* = 0$; $x_7^* = 0$;

$z^* = 35$

Quadro de Ótimo para o PPL do Exemplo 05

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	0	-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

Usando o *software* LINDO, pode-se gerar o modelo

```
max x1 + x2 + x3
st
    2x1 + 1x2 - 1x3 <= 10
    1x1 + 1x2 + 2x3 >= 20
    2x1 + 1x2 + 3x3  = 60
    x1 >= 0
    x2 >= 0
    x3 >= 0
end
```

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP      1
        OBJECTIVE FUNCTION VALUE
        1)       35.00000
  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.000000          1.000000
        X2        22.500000          0.000000
        X3        12.500000          0.000000
       ROW   SLACK OR SURPLUS     DUAL PRICES
        2)         0.000000          0.500000
        3)        27.500000          0.000000
        4)         0.000000          0.500000
        5)         0.000000          0.000000
        6)        22.500000          0.000000
        7)        12.500000          0.000000
 NO. ITERATIONS=       13
```

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

- Observe que na solução anterior havia um problema sutil no início...
    - a presença de variáveis artificiais na *base inicial*

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Como *eliminar* variáveis artificiais da base?

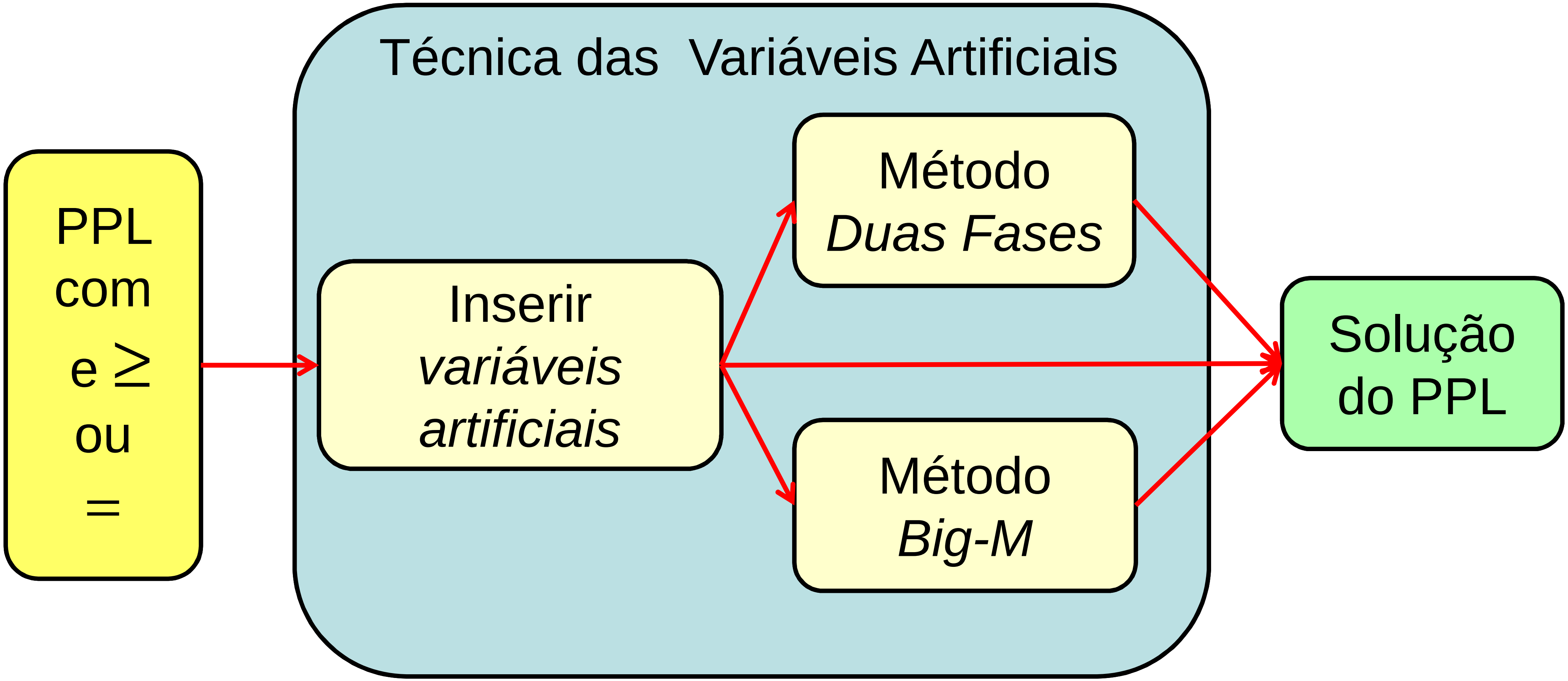
4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Resposta:

Empregando um dos seguintes métodos:

do **Big-M** das **Duas Fases**

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*



4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Método do *Big-M*

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método do Big M*

- Deve-se atribuir *custos elevados* para as variáveis artificiais na F.O. original:

  - positivos (+) para problemas de *min*

  - Negativos (-) para problemas de *max*

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método do Big M*

- O *custo elevado* é representado por uma variável especial: M

- M indica um valor enorme quando comparado aos demais coeficientes envolvidos no *tableau*.

Exemplo 06: modelo de PPL (anterior)

max $z = x_1 + x_2 + x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 \leq 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 \geq 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 = 60 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 06

Exemplo 06: Para a forma padrão, temos:

$$\mathbf{max}\ z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 \boxed{- \mathbf{M}.x_6 - \mathbf{M}.x_7}$$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 1.x_4 = 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 = 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 + 1.x_7 = 60 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,7} \end{cases}$$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	-M	-M	-0
	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
	0	2	1	3	0	0	0	1	60

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	-M	-M	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

NB (x_1, x_2, x_3) — B (x_4) — NB (x_5) — B (x_6) — B (x_7)

(B) Básicas

(NB) Não-Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	-M	-M	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1	1	1	0	0	-M	-M	-0
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

Fazendo $L_6 = L_6/2$; $L_c = L_c - L_6$; $L_4 = L_4 + L_6$; $L_7 = L_7 - 3.L_6$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-M-1/2	-M	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_6	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

A nova base é dada com x_3 no lugar de x_6, ou seja, x_3, x_4 e x_7.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-M-1/2	-M	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-M-1/2	-M	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Quem entra para a BASE: x_1, x_2, ou x_5? (já que x_6 não está apto)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	1/2	0	0	1/2	-M-1/2	-M	-10
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Fazendo $L_7 = (2.L_7)/3$; $L_3 = L_3 + (L_7/2)$; $L_4 = L_4 + (L_7/2)$; $L_c = L_c - (L_7/2)$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-M	-M-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

A base agora é x_3; x_4 e x_5

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-M	-M-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Quem entra para a BASE: x_1 ou x_2? (já que x_6 e x_7 não estão aptos)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-M	-M-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Resposta: x_2 entra e x_4 sai... o pivô será o valor 4/3

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-M	-M-1/3	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Fazendo $L_4 = (3.L_4)/4$; $L_3 = L_3 - (L_4/3)$; $L_4 = L_4 + (L_7/2)$; $L_c = L_c - (L_7/2)$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	-M	-M-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

A nova base é x_2; x_3 e x_5

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	-M	-M-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

Quem entrará para a base (x_1; x_4; x_6 ou x_7)?

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	-M	-M-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	90/4
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	50/4
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

Resposta: Ninguém $\Rightarrow$ Ponto de *ótimo* foi alcançado!

Foi atingido o *ponto de ótimo*:

$x_1^* = 0$; $x_2^* = 45/2$; $x_3^* = 25/2$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 55/2$;

$x_6^* = 0$; $x_7^* = 0$;

$z^* = 35$

Quadro de Ótimo para o PPL do Exemplo 06

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	-M	-M-1/2	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	0	1/4	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	0	1/12	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	-1	3/4	55/2

Exemplo 07: modelo de PPL

min $z = -3.x_1 - 5.x_2$

sujeito a

$x_1 \leq 4$

$x_2 \leq 6$

$3.x_1 + 2.x_2 \geq 18$

$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$

RESOLUÇÃO

Exemplo 07

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método do Big M*

- *Atenção:*
    - deve-se, primeiramente, transformar o problema de *min* para *max* multiplicando a F.O. por (-1):
        - $\mathbf{max}\ z' = 3.x_1 + 5.x_2$

Exemplo 07: forma padrão

variáveis de folga e de excesso

max $z' = 3.x_1 + 5.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 \boxed{- \mathbf{M}.x_6}$

sujeito a

$$
\begin{cases}
1.x_1 + 0.x_2 + 1.x_3 = 4 \\
0.x_1 + 1.x_2 + 1.x_4 = 6 \\
3.x_1 + 2.x_2 - 1.x_5 + 1.x_6 = 18 \\
\\
x_i \geq 0 \text{ para } i = 1, 2, \ldots, 6
\end{cases}
$$

variável artificial

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	5	0	0	0	-M	
	0	1	0	1	0	0	0	4
	0	0	1	0	1	0	0	6
	0	3	2	0	0	-1	1	18

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	5	0	0	0	-M	-0
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	0	3	2	0	0	-1	1	18

NB B B NB B

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	5	0	0	0	-M	-0
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_4	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	0	3	2	0	0	-1	1	18

BASE	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
	1	3	5	0	0	0	-M	-0
X_3	0	1	0	1	0	0	0	4
X_4	0	0	1	0	1	0	0	6
X_6	0	3	2	0	0	-1	1	18

Fazendo $L_C = L_C - 5.L_4$ e $L_6 = L_6 - 2.L_4$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	0	0	-5	0	**-M**	-30
x_3	**0**	1	0	1	0	0	0	4
x_2	**0**	0	1	0	1	0	0	6
x_6	**0**	3	0	0	-2	-1	1	6

Nova base: x_2; x_3 e x_6 (x_6 é artificial e ainda não saiu da base)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	0	0	-5	0	-M	-30
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	0	3	0	0	-2	-1	1	6

NB	B	B	NB	NB	B

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	0	0	-5	0	-M	-30
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	0	3	0	0	-2	-1	1	6

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	3	0	0	-5	0	-M	-30
x_3	0	1	0	1	0	0	0	4
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_6	0	3	0	0	-2	-1	1	6

Fazendo $L_6 = L_6/3$; $L_3 = L_3 - L_6$; $L_C = L_C - 3.L_6$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	0	-3	1	**-M-1**	-36
x_3	**0**	0	0	1	2/3	1/3	-1/3	2
x_2	**0**	0	1	0	1	0	0	6
x_1	**0**	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	2

Nova base: x_1 ; x_2 e x_3 (x_6 saiu da base → o que queríamos)

BASE	Z	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	RHS
	1	0	0	0	-3	1	**-M-1**	-36
X_3	0	0	0	1	2/3	1/3	-1/3	2
X_2	0	0	1	0	1	0	0	6
X_1	0	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	2

B B B NB NB NB

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	0	-3	1	-M-1	-36
x_3	0	0	0	1	2/3	1/3	-1/3	2
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_1	0	1	0	0	-2/3	-1/3	1/3	2

Fazendo $L_3 = 3.L_3$; $L_C = L_C - L_3$ e $L_1 = L_1 + (L_1/3)$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	-3	-5	0	-M	-42
x_5	0	0	0	3	2	1	-1	6
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_1	0	1	0	1	0	0	0	4

Nova base: x_1 ; x_2 e x_5

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	-3	-5	0	-M	-42
x_5	0	0	0	3	2	1	-1	6
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_1	0	1	0	1	0	0	0	4

B B NB NB NB B

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	-3	-5	0	-M	-42
x_5	0	0	0	3	2	1	-1	6
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_1	0	1	0	1	0	0	0	4

Ninguém pode entrar para a base ⇒ Ponto de *ótimo*!

Foi atingido o *ponto de ótimo*:

$x_1^* = 4;\ x_2^* = 6;\ x_3^* = 0;\ x_4^* = 0;\ x_5^* = 6;$

$x_6^* = 0$ ← *variável artificial*

$z'^* = 42$, como a função objetivo original é z, tem-se:

$$z = -z' = -42 \Rightarrow z = -42$$

Quadro de ótimo para o PPL do Exemplo 07

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	RHS
	1	0	0	-3	-5	0	-M	-42
x_5	0	0	0	3	2	1	-1	6
x_2	0	0	1	0	1	0	0	6
x_1	0	1	0	1	0	0	0	4

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método do Big M*

- Observe que:
  - O conhecimento de uma *base factível* é crucial para a aplicação do *Simplex.*
  - o ***Big-M*** requer a resolução de apenas um PPL.

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método do Big M*

- Observe que:
  - *Muitas vezes* a obtenção desta base é bastante trabalhosa...
  - veremos que, em geral, é *menos* trabalhosa que pelo método das *Duas Fases.*

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex*

Método das *Duas Fases*

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Esta técnica divide o PPL em *dois outros problemas:*
  - 1ª fase: problema de *min* (soma das *var. artificiais*)
  - 2ª fase: problema de *min* ou de *max*

Exemplo 08: modelo de PPL (Exemplo 06)

max $z = x_1 + x_2 + x_3$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 \leq 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 \geq 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 = 60 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0;\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 08

Exemplo 08: Para a forma padrão, temos:

$$\max z = 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5 + 0.x_6 + 0.x_7$$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 1.x_4 = 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 = 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 + 1.x_7 = 60 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,7} \end{cases}$$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Na 1ª fase gera-se uma F.O. auxiliar envolvendo apenas as *variáveis artificiais* sob a forma de soma:

$$\min\ x_6 + x_7$$

minimizar

1ª Fase: F.O. auxiliar (sempre de *min*)

min $\Phi = 1.x_6 + 1.x_7$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 1.x_4 = 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 = 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 + 1.x_7 = 60 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,7} \end{cases}$$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Somando a 2ª e a 3ª restrições:

$$1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 = 20$$
$$2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 + 1.x_7 = 60$$

$$3.x_1 + 2.x_2 + 5.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 + 1.x_7 = 80$$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Somando a 2ª e a 3ª restrições:

$$1.x_6 + 1.x_7 = 80 - 3.x_1 - 2.x_2 - 5.x_3 + 1.x_5$$

$$\Phi = 80 - 3.x_1 - 2.x_2 - 5.x_3 + 1.x_5$$

1ª Fase: F.O. auxiliar (sempre de *min*)

$$\min \Phi = 80 - 3.x_1 - 2.x_2 - 5.x_3 + 1.x_5$$

sujeito a

$$\begin{cases} 2.x_1 + 1.x_2 - 1.x_3 + 1.x_4 = 10 \\ 1.x_1 + 1.x_2 + 2.x_3 - 1.x_5 + 1.x_6 = 20 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 3.x_3 + 1.x_7 = 60 \\ x_i \geq 0 \text{ e } i = \overline{1,7} \end{cases}$$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	3	2	5	0	-1	0	0	-(-80)
	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
	0	2	1	3	0	0	0	1	60

Sinais invertidos, pois a função era de *min*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	3	2	5	0	-1	0	0	80
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

NB B NB B B

(B) Básicas

(NB) Não-Básicas

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	3	2	5	0	-1	0	0	80
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	3	2	5	0	-1	0	0	80
x_4	0	2	1	-1	1	0	0	0	10
x_6	0	1	1	2	0	-1	1	0	20
x_7	0	2	1	3	0	0	0	1	60

Fazendo $L_6 = L_6/2$; $L_c = L_c – 5.L_6$; $L_4 = L_4 + L_6$; $L_7 = L_7 – 3.L_6$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	-1/2	0	0	3/2	-5/2	0	30
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Nova base x_3; x_4 e x_7 (x_6 já saiu da base → o que queríamos)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	-1/2	0	0	3/2	-5/2	0	30
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	1/2	-1/2	0	0	3/2	-5/2	0	30
x_4	0	5/2	3/2	0	1	-1/2	1/2	0	20
x_3	0	1/2	1/2	1	0	-1/2	1/2	0	10
x_7	0	1/2	-1/2	0	0	3/2	-3/2	1	30

Fazendo $L_7 = 2.(L_7/3)$; $L_c = L_c-(3.L_7/2)$; $L_4 = L_4+L_7/2$; $L_3 = L_3+L_7/2$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	1/3	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Nova base: x_3 ; x_4 e x_5 (x_7 saiu da base → como queríamos)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	1/3	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Ninguém pode entrar para a base $\Rightarrow$ Ponto de *ótimo* da 1ª Fase

Quadro de *ótimo* para o PPL – 1ª Fase

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	1/3	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Foi atingido o *ponto de ótimo* da 1ª Fase

$x_1^* = 0$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 20$; $x_4^* = 30$; $x_5^* = 20$;

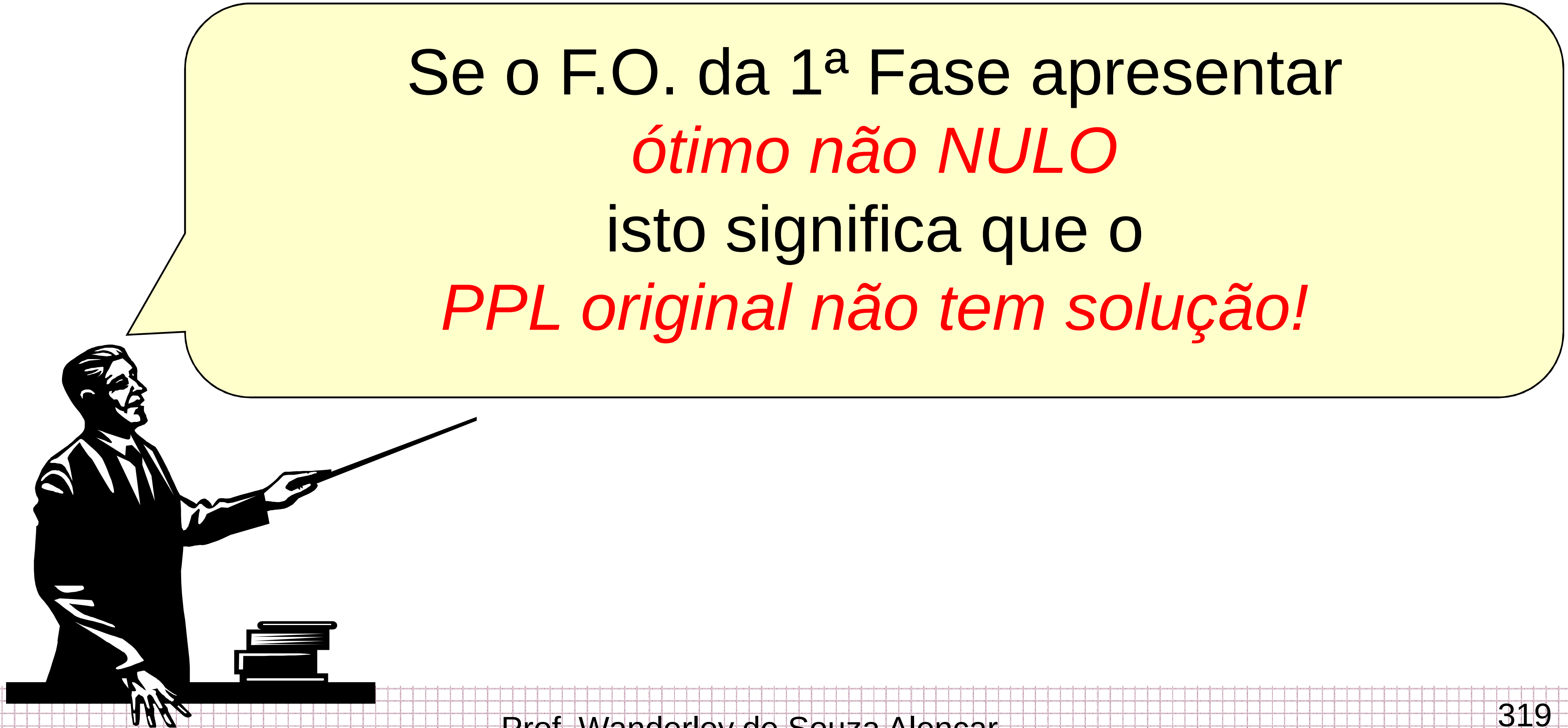
$x_6^* = 0$; $x_7^* = 0$ $\leftarrow$ *variáveis artificiais*

$z'^* = 0 \rightarrow z = -0$, logo $z = 0$

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Observe que:
  - Sempre que o PPL *tiver solução* o valor mínimo da F.O. da 1ª fase será ZERO.

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*



4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Agora...

  - estamos prontos para a **2ª Fase**, pois as *variáveis artificiais* não estão na base!

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Na **2ª Fase...**
  - utilizamos o *quadro de ótimo* da 1ª Fase
  - **Eliminam-se** as colunas das variáveis artificiais

2ª Fase: Preparando o *tableau*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	RHS
	1	0	0	0	0	0	-1	-1	0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	0	1/3	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	0	1/3	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	-1	2/3	20

Eliminar

2ª Fase: Preparando o *tableau*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	0	0	0	0	0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	20

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Na **2ª Fase...**

  - **Tomam-se** os *custos* da F.O. original

2ª Fase: Preparando o *tableau*

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	1	1	0	0	-0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	20

2ª Fase: *Tableau* pronto para utilização

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	1	1	0	0	0
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	20

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

- Observe que:
  - **Há uma variável da base (x_3)** cujo custo na F.O. não é ZERO...
  - devemos torná-lo igual a ZERO.

2ª Fase

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1	1	1	0	0	0
x_4	**0**	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	**0**	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	**0**	1/3	-1/3	0	0	1	20

Fazendo: $L_c = L_c - L_3$

2ª Fase

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	20

2ª Fase

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	20

2ª Fase

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	1/3	2/3	0	0	0	-20
x_4	0	8/3	4/3	0	1	0	30
x_3	0	2/3	1/3	1	0	0	20
x_5	0	1/3	-1/3	0	0	1	20

Fazendo: $L_4 = (3.L_4)/4$; $L_C = L_C\ (2.L_4)/3$; $L_3 = L_3 - L_4/3$; $L_5 = L_5 + L_4/3$

2ª Fase

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	55/2

Nova base: x_2; x_3 e x_5

Foi atingido o *ponto de ótimo*:

$x_1^* = 0$; $x_2^* = 45/2$; $x_3^* = 25/2$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 55/2$;

$z^* = 35$

Quadro de *ótimo* para o PPL do Exemplo 08

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	-1	0	0	-1/2	0	-35
x_2	0	2	1	0	3/4	0	45/2
x_3	0	0	0	1	-1/4	0	25/2
x_5	0	1	0	0	1/4	1	55/2

Exemplo 09: modelo de PPL

min $z = -x_1 + 2x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 2 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \\ x_2 \leq 3 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 09

4.3. Um Algoritmo *Primal Simplex – Método das 2 Fases*

Resolva este exercício e registre a solução em suas *anotações* da disciplina.

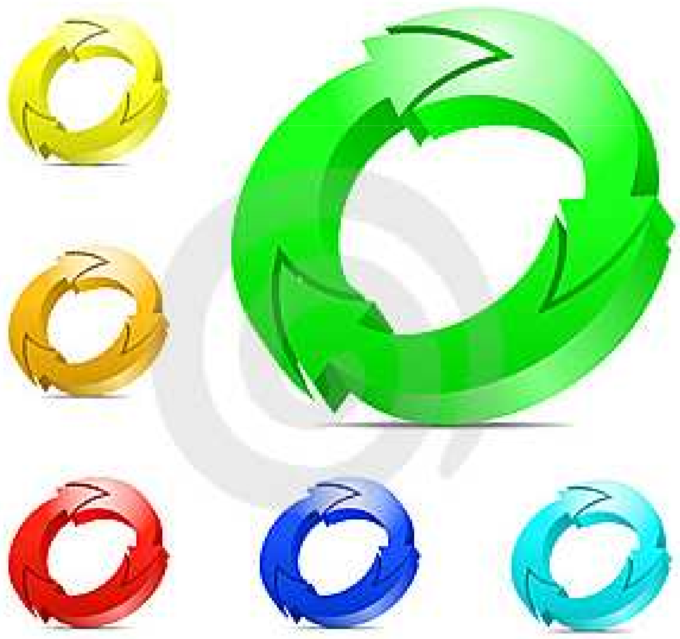
A resposta é: $x_1^* = 0$; $x_2^* = 3$; $z^* = 6$.

As variáveis criadas para resolução valerão:

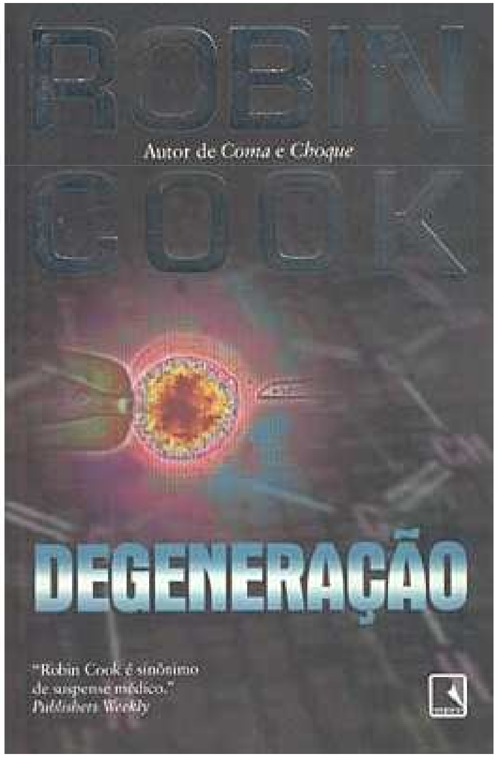
$x_3^* = 1$; $x_4^* = 2$; $x_5^* = 0$

4.4

Casos Especiais



Ciclagem



4.4. Casos Especiais

Veremos agora algumas situações especiais que podem ocorrer durante a resolução de um PPL por meio do *Simplex*...

4.4. Casos Especiais

- São *casos especiais* do *Simplex*:
  - solução ilimitada
  - degeneração
  - solução múltipla

4.4. Casos Especiais

- São *casos especiais* do *Simplex*:

  - problema impossível

  - problema com variável *livre*

4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada

- Alguns PPLs apresentam *solução ilimitada.*

4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada

No *tableau Simplex*, ao tentarmos escolher a variável que deverá SAIR DA BASE, todos os elementos a_{ij} (na coluna da variável que está entrando para a base) são negativos ou nulos.

Isto identificará *solução ilimitada*.

Exemplo 10: modelo de PPL

max $z = x_1 + 2x_2$

sujeito a

$$
\begin{cases}
-2x_1 + x_2 \leq 2 \\
x_1 - 2x_2 \leq 6 \\
x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 10

Exemplo 10: Na forma padrão...

max $z = 1.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

sujeito a

$$\left|\begin{array}{l} -2.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 = 2 \\ 1.x_1 - 1.x_2 + 1.x_4 = 6 \\ \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4} \end{array}\right.$$

1º Passo: Montar o *tableau simplex* para a base inicial...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1	2	0	0	**-0**
x_3	**0**	-2	1	1	0	2
x_4	**0**	1	-1	0	1	6

2º Passo: Determinar qual é a nova base (x_2 entra e x_3 sai)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1	2	0	0	**-0**
x_3	**0**	-2	1	1	0	2
x_4	**0**	1	-1	0	1	6

$L_C = L_C - 2.L_3$; $L_4 = L_4 + L_3$

3º Passo: Nova base é x_2 e x_4, com z = 4.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	5	0	-2	0	**-4**
x_2	**0**	-2	1	1	0	2
x_4	**0**	-1	0	1	1	8

4º Passo: Determinar qual é a nova base (x_1 entra e...)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	5	0	-2	0	**-4**
x_2	**0**	-2	1	1	0	2
x_4	**0**	-1	0	1	1	8

4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada

No *tableau simplex* anterior temos um problema:

- x_1 entrará para a base, mas ao tentarmos identificar quem sairá...
- vemos que todos os a_{ij} da coluna de x_1 são NEGATIVOS.

4º Passo: Determinar qual é a nova base (x_1 entra e...)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	5	0	-2	0	**-4**
x_2	**0**	**-2**	1	1	0	2
x_4	**0**	**-1**	0	1	1	8

4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada

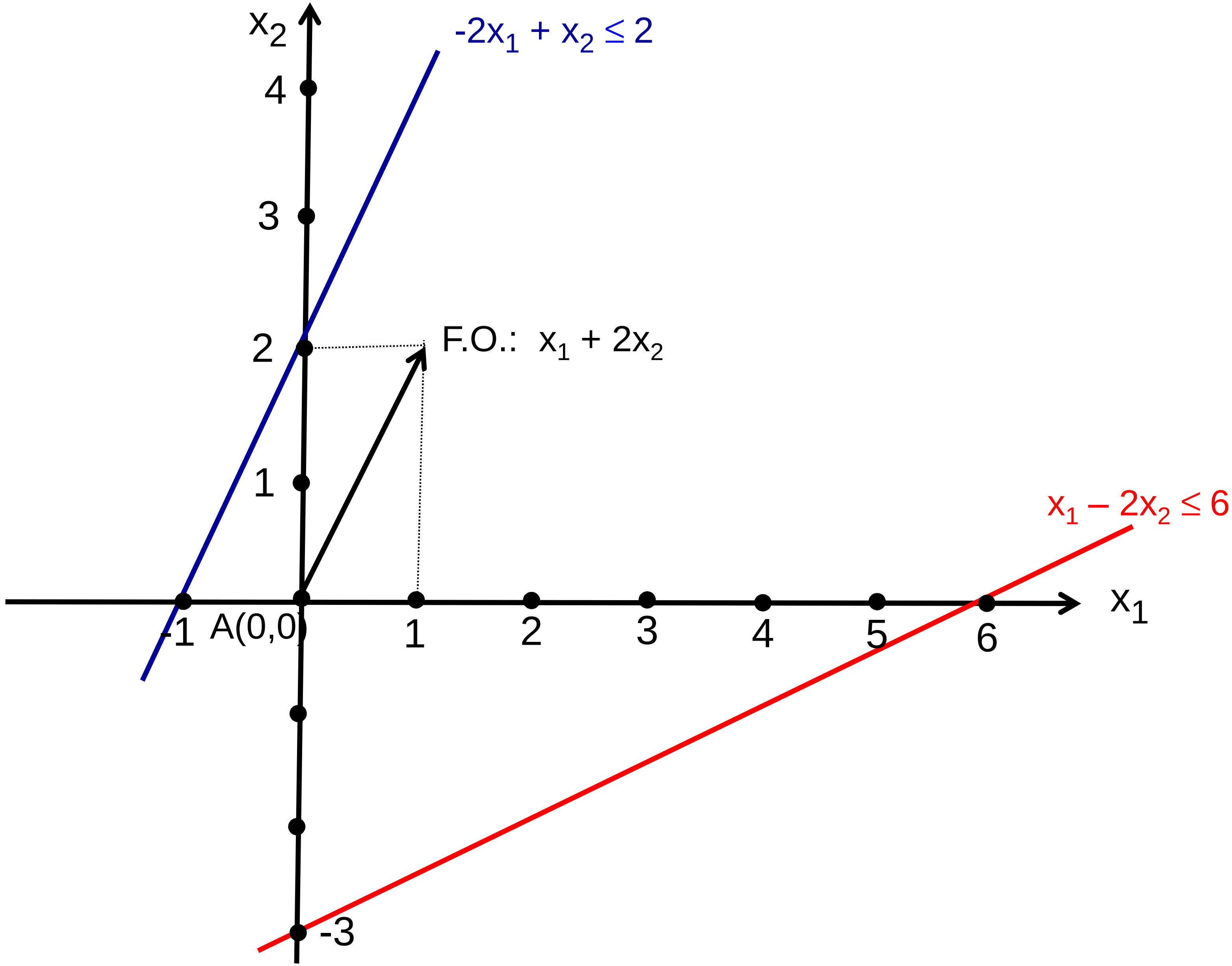
5º Passo: O *tableau simplex* final é:

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	5	0	-2	0	**-4**
x_2	**0**	**-2**	1	1	0	2
x_4	**0**	**-1**	0	1	1	8

Resposta: O PPL apresenta solução ilimitada.

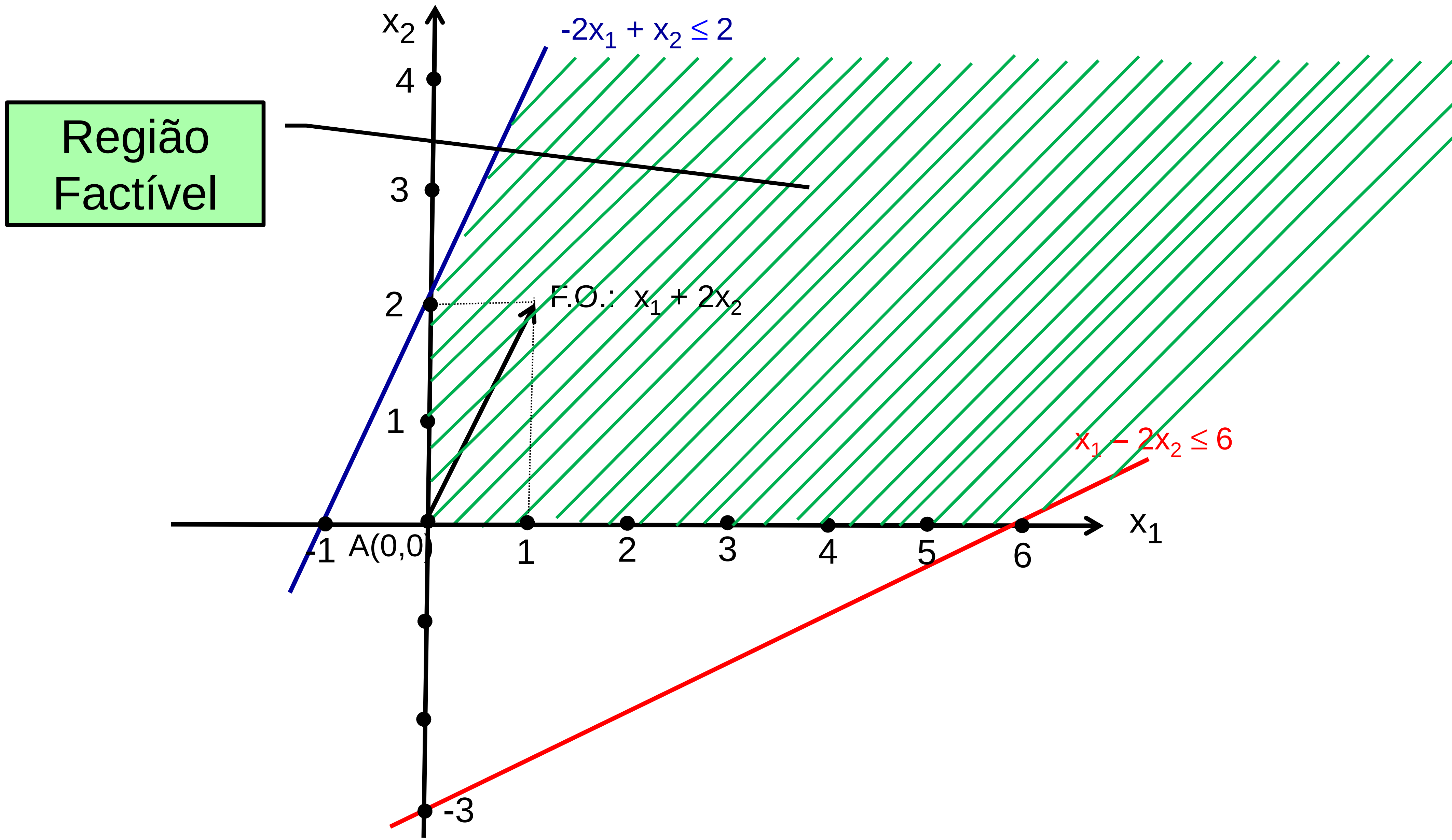
4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada

Observe graficamente o que acontece:



x2
-2x1 + x2 ≤ 2
4
3
2
F.O.: x1 + 2x2
1
x1 – 2x2 ≤ 6
x1
-1 A(0,0)
1
2
3
4
5
6
-3

4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada



x_2
$-2x_1 + x_2 \leq 2$
4
Região Factível
3
2
F.O.: $x_1 + 2x_2$
1
$x_1 - 2x_2 \leq 6$
x_1
-1
A(0,0)
1
2
3
4
5
6
-3

Exemplo 11: modelo de PPL

max $z = x_1 + 3x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \leq 4 \\ -1x_1 + x_2 \leq 3 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 11

Exemplo 11: Na forma padrão...

max $z = 1.x_1 + 3.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

sujeito a

$$\left|\begin{array}{l} 1.x_1 - 2.x_2 + 1.x_3 \qquad\qquad = 4 \\ -1.x_1 + 1.x_2 \qquad\qquad + 1.x_4 = 3 \\ \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4} \end{array}\right.$$

1º Passo: Montar o *tableau simplex* para a base inicial...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1	3	0	0	**-0**
x_3	**0**	1	-2	1	0	4
x_4	**0**	-1	1	0	1	3

2º Passo: Determinar qual é a nova base (x_2 entra e x_4 sai)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1	3	0	0	-0
x_3	**0**	1	-2	1	0	4
x_4	**0**	-1	1	0	1	3

$L_C = L_C - 3.L_4$; $L_3 = L_3 + 2.L_4$

3º Passo: Nova base é x_3 e x_2, com z = 9

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	4	0	0	-3	-9
x_3	0	-1	0	1	2	10
x_2	0	-1	1	0	1	3

4º Passo: Determinar qual é a nova base: observe que x_1 é a única variável habilitada, mas... ninguém pode sair!

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	4	0	0	-3	-9
x_3	**0**	**-1**	0	1	2	10
x_1	**0**	**-1**	1	0	1	3

4.4. Casos Especiais: Solução Ilimitada

Quando isto acontece temos um PPL que apresenta solução ILIMITADA, ou seja, pode-se *maximizar* (ou *minimizar*) de maneira infinita...

5º Passo: Quadro de ótimo

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	4	0	0	-3	-9
x_3	0	-1	0	1	2	10
x_1	0	-1	1	0	1	3

$x_1^* = 3$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 10$; $x_4^* = 0$ e $z^* = 9$

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

Outro fenômeno que ocorre com um PPL é denominado de degeneração.

Vamos identificá-lo...

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

No *tableau simplex*, o fenômeno da degeneração surge quando temos duas ou mais variáveis estão "empatadas" para sair da base...

Exemplo 12: modelo de PPL

max $z = 3x_1 + 4x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 9 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 18 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 12

Exemplo 12: Na forma padrão...

max $z = 3.x_1 + 4.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

sujeito a

$$\left| \begin{array}{l} 1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 \qquad\qquad = 9 \\ 2.x_1 + 3.x_2 \qquad\qquad + 1.x_4 = 18 \\ \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4} \end{array} \right.$$

1º Passo: Montar o *tableau simplex* para a base inicial...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	3	4	0	0	-0
x_3	0	1	1	1	0	9
x_4	0	2	3	0	1	18

2º Passo: Determinar qual é a nova base (x_2 entra e x_4 sai)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	3	4	0	0	-0
x_3	0	1	1	1	0	9
x_4	0	2	3	0	1	18

$L_4 = L_4/3$; $L_C = L_C - 4.L_4$; $L_3 = L_3 - L_4$

3º Passo: Nova base é x_3 e x_2, com z = 24

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1/3	0	0	-4/3	**-24**
x_3	**0**	1/3	0	1	-1/3	3
x_2	**0**	2/3	1	0	1/3	6

4º Passo: Determinar qual é a nova base (x_1 entra, mas...)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1/3	0	0	-4/3	**-24**
x_3	**0**	1/3	0	1	-1/3	3
x_2	**0**	2/3	1	0	1/3	6

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

4º Passo: Determinar qual é a nova base (x_1 entra e x_2 sai)

x_2 escolhida para sair...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1/3	0	0	-4/3	**-24**
x_3	**0**	1/3	0	1	-1/3	3
x_2	**0**	2/3	1	0	1/3	6

$L_2 = 3L_2/2$; $L_C = L_C - (L_2/3)$; $L_3 = L_3 - (L_2/3)$

5º Passo: Nova base é x_3 e x_1, com z = 27

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	-1/2	0	-3/2	**-27**
x_3	**0**	0	-1/2	1	-1/2	0
x_1	**0**	1	3/2	0	1/2	9

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

Observe que há uma variável na base e que tem valor igual a ZERO (x_3).

Isto é consequência da *degeneração*.

6º Passo: Determinar a nova base... mas como ninguém pode entrar, então a solução ótima foi atingida.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	-1/2	0	-3/2	-27
x_3	0	0	-1/2	1	-1/2	0
x_1	0	1	3/2	0	1/2	9

$x_1^* = 9$; $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ e $z^* = 27$

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

O que aconteceria se no 4º passo eu tivesse escolhido x_3 para sair da base ao invés de x_2?

4º Passo: Determinar qual é a nova base (x_1 entra e x_3 sai)

x_3 escolhida para sair...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	1/3	0	0	-4/3	**-24**
x_3	**0**	1/3	0	1	-1/3	3
x_2	**0**	2/3	1	0	1/3	6

$L_3 = 3L_3$; $L_C = L_C - (L_3/3)$; $L_2 = L_2 - (2L_3/3)$

5º Passo: Nova base é x_1 e x_2, com z = 27

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-1	-1	-27
x_1	0	1	0	3	-1	9
x_2	0	0	1	-2	1	0

6º Passo: Determinar a nova base... mas como ninguém pode entrar, então a solução ótima foi atingida.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	-1	-1	-27
x_1	0	1	0	3	-1	9
x_2	0	0	1	-2	1	0

$x_1^* = 9$; $x_2^* = x_3^* = x_4^* = 0$ e $z^* = 27$

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

Conclusão: Obtem-se a mesma resposta, porém a variável que está na base com valor igual a ZERO é x_2 (e não x_3 como antes).

Exemplo 13: modelo de PPL

max $z = 5x_1 + 2x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 \leq 3 \\ x_2 \leq 4 \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 13

Exemplo 12: Na forma padrão...

max $z = 5.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4 + 0.x_5$

sujeito a

$$\begin{cases} 4.x_1 + 3.x_2 + 1.x_3 = 12 \\ 1.x_1 + 1.x_4 = 3 \\ 1.x_2 + 1.x_5 = 4 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0;\ i = \overline{1,5}$$

1º Passo: Montar o *tableau simplex* para a base inicial...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	5	2	0	0	0	-0
x_3	**0**	4	3	1	0	0	12
x_4	**0**	1	0	0	1	0	3
x_5	**0**	0	1	0	0	1	4

2º Passo: Determinar a próxima base (há um empate na saída)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	5	2	0	0	0	-0
x_3	0	4	3	1	0	0	12
x_4	0	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	4

Conclusão: Tanto x_3 quanto x_4 podem ser escolhidos...

Escolhendo, *arbitrariamente*, x_3 para sair da base...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	5	2	0	0	0	-0
x_3	**0**	4	3	1	0	0	12
x_4	**0**	1	0	0	1	0	3
x_5	**0**	0	1	0	0	1	4

Fazendo: $L_3 = L_3 / 4$; $L_4 = L_4 - L_3$; $L_C = L_C - 5.L_3$;

3º Passo: Nova base é x_1, x_4 e x_5, com $z = 15$

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7/4	-5/4	0	0	-15
x_3	0	1	3/4	1/4	0	0	3
x_4	0	0	-3/4	-1/4	1	0	0
x_5	0	0	1	0	0	1	4

4º Passo: Determinar a nova base ...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7/4	-5/4	0	0	-15
x_3	**0**	1	3/4	1/4	0	0	3
x_4	**0**	0	-3/4	-1/4	1	0	0
x_5	**0**	0	1	0	0	1	4

como x_1 e x_2 não estão habilitados... *ponto de ótimo*!

5º Passo: Quadro de ótimo...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	-7/4	-5/4	0	0	-15
x_3	0	1	3/4	1/4	0	0	3
x_4	0	0	-3/4	-1/4	1	0	0
x_5	0	0	1	0	0	1	4

$x_3^* = 3$; $x_4^* = 0$; $x_5^* = 4$ e $z^* = 15$ ($x_1^* = 0$; $x_2^* = 0$)

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

Temos uma variável que, apesar de estar na base, tem seu valor igual a ZERO!

Isto é a DEGENERAÇÃO!

4.4. Casos Especiais: Solução Degenerada

E se tivéssemos escolhido x_4 para sair da base ao invés de x_3?

Escolhendo, *arbitrariamente*, x_4 para sair da base...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	5	2	0	0	0	-0
x_3	0	4	3	1	0	0	12
x_4	0	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	4

Fazendo: $L_C = L_C - 5.L_4$; $L_3 = L_3 - 4.L_4$

3º Passo: Nova base é x_3, x_1 e x_5, com z = 15

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	2	0	-5	0	-15
x_3	0	0	3	1	-4	0	0
x_1	0	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	4

4º Passo: Determinar a nova base...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	2	0	-5	0	-15
x_3	0	0	3	1	-4	0	0
x_1	0	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	4

mas x_1 e x_2 não estão habilitados: *ponto de ótimo* atingido!

5º Passo: Quadro de ótimo.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	RHS
	1	0	2	0	-5	0	-15
x_3	0	0	3	1	-4	0	0
x_1	0	1	0	0	1	0	3
x_5	0	0	1	0	0	1	4

$x_1^* = 3$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 0$ e $z^* = 15$ ($x_4^* = 0$; $x_5^* = 0$)

4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla

Mais uma situação especial...

solução múltipla!

4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla

A *solução múltipla* é pode ser identificada quando, no *tableau Simplex* da solução ótima, observarmos que há alguma variável *não básica* com custo ZERO para a F.O.

4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla

Ao realizarmos a *mudança de base* podemos encontrar uma nova solução ótima para o PPL.

Isto indica que o PPL tem mais de uma “configuração” que atinge o ótimo desejado.

Exemplo 14: modelo de PPL

max $z = 4x_1 + 2x_2$

sujeito a

$$\left|\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 \leq 12 \\ 2x_1 + x_2 \leq 12 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{array}\right.$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 14

Exemplo 14: Na forma padrão...

max $z = 4.x_1 + 2.x_2 + 0.x_3 + 0.x_4$

sujeito a

$$\begin{cases} 1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 = 12 \\ 2.x_1 + 1.x_2 + 1.x_4 = 12 \\ x_i \geq 0;\ i = \overline{1,4} \end{cases}$$

1º Passo: Montar o *tableau simplex* para a base inicial...

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	4	2	0	0	-0
x_3	0	1	2	1	0	12
x_4	0	2	1	0	1	12

2º Passo: Determinar qual é a nova base (x_1 entra e x_4 sai)

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	4	2	0	0	**-0**
x_3	**0**	1	2	1	0	12
x_4	**0**	2	1	0	1	12

$L_4 = L_4/2$; $L_C = L_C - 4.L_4$; $L_3 = L_3 - L_4$

3º Passo: Nova base é x_3 e x_1, com z = 24

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	0	-2	**-24**
x_3	**0**	0	3/2	1	-1/2	6
x_1	**0**	1	1/2	0	1/2	6

4º Passo: Determinar qual é a nova base: observe que x_2 é a única variável habilitada, porém seu custo é ZERO.

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	**0**	0	-2	**-24**
x_3	**0**	0	3/2	1	-1/2	6
x_1	**0**	1	1/2	0	1/2	6

$x_1^* = 6$; $x_2^* = 0$; $x_3^* = 6$; $x_4^* = 0$ e $z^* = 24$

4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla

Conclusão: se realizarmos a *mudança de base* poderemos encontrar uma nova solução ótima para o PPL...

Façamos isto!

4º Passo: Determinar qual é a nova base (x_2 entra e x_3 sai).

BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	0	-2	**-24**
x_3	**0**	0	3/2	1	-1/2	6
x_1	**0**	1	1/2	0	1/2	6

$L_3 = 2L_3/3$; $L_1 = L_1 - L_3/2$

5º Passo: Nova base é x_2 e x_1, com z = 24

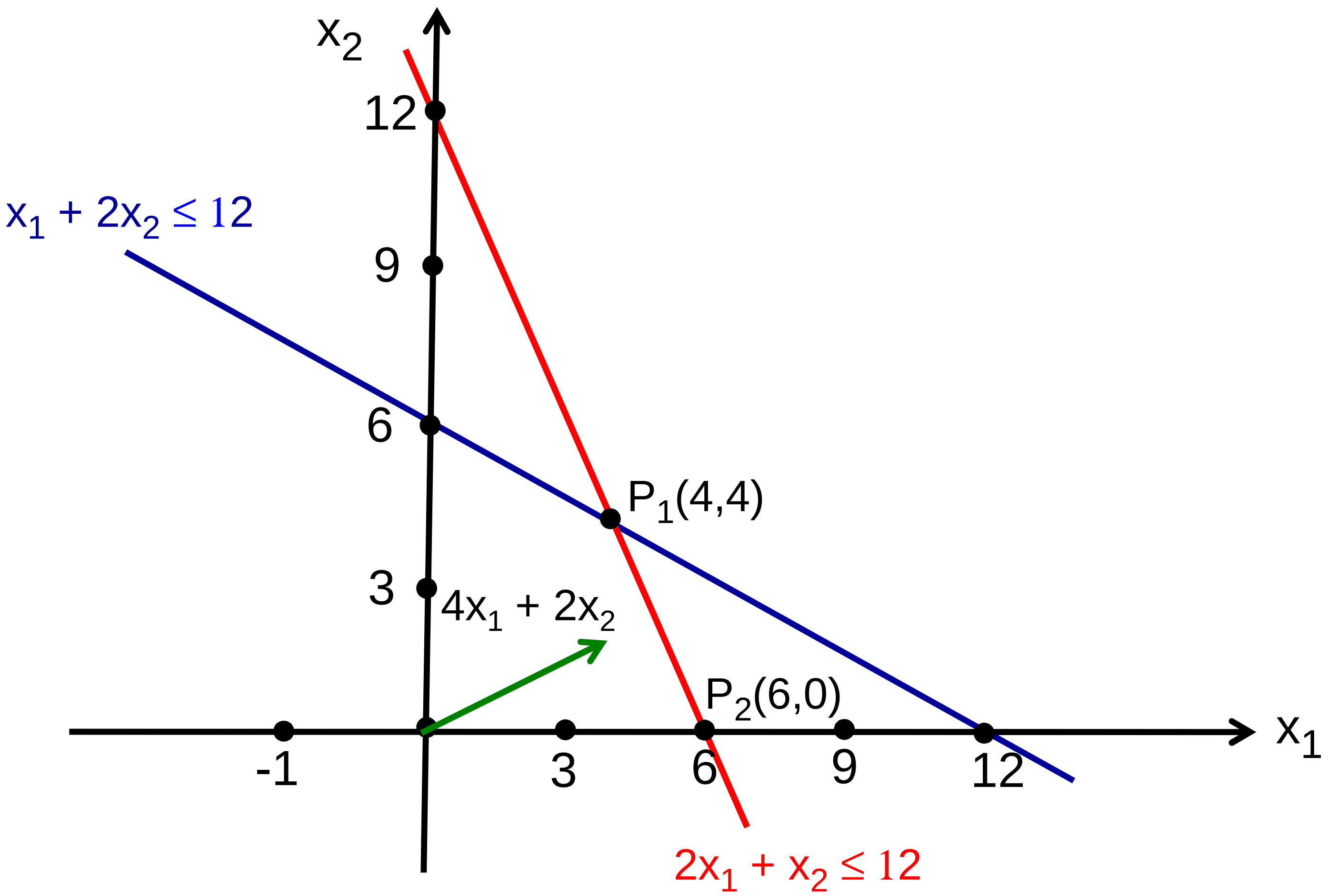
BASE	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	RHS
	1	0	0	0	-2	**-24**
x_2	**0**	0	1	2/3	-1/3	4
x_1	**0**	1	0	-1/3	2/3	4

$x_1^* = 4$; $x_2^* = 4$; $x_3^* = 0$; $x_4^* = 0$ e $z^* = 24$

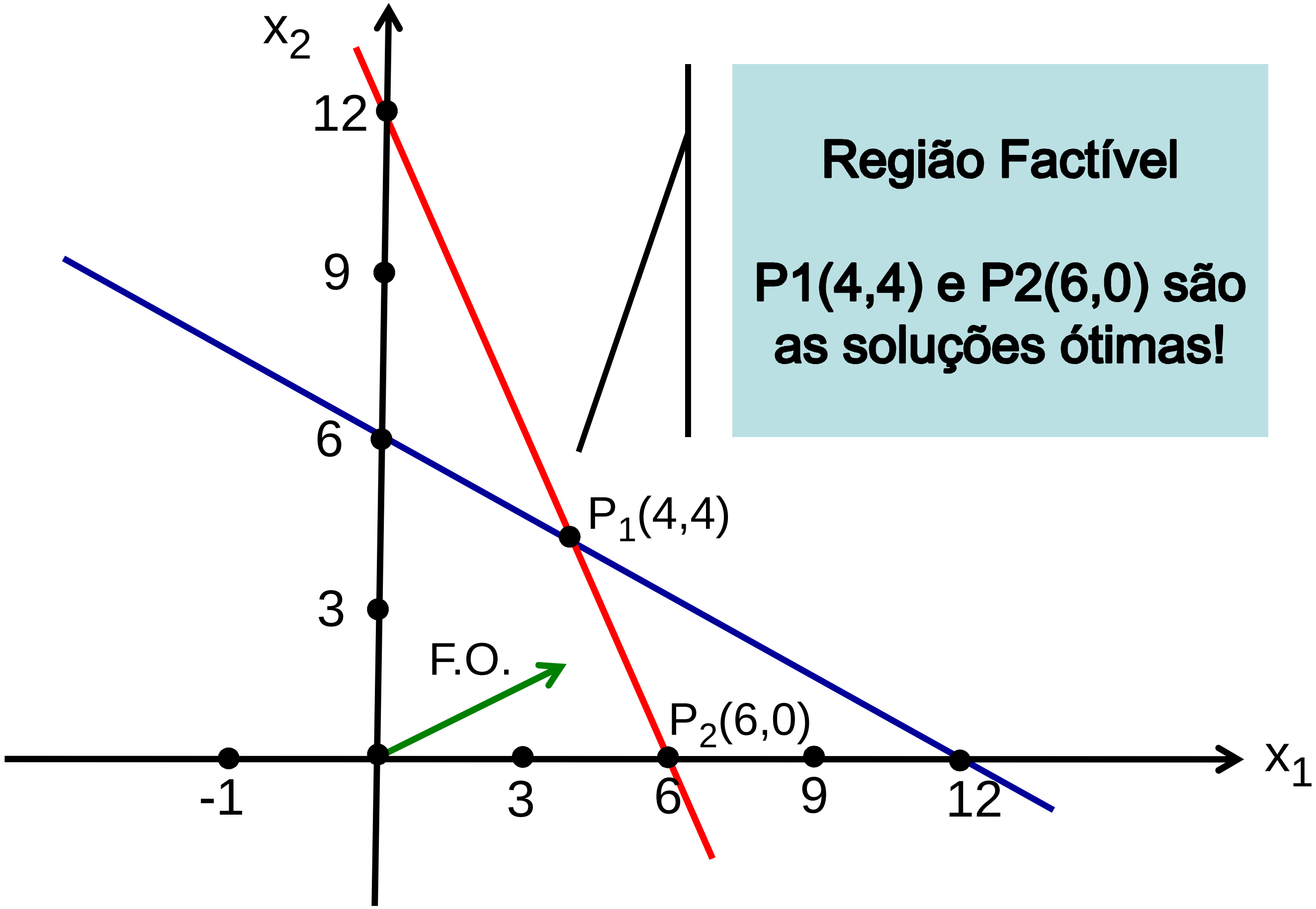
4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla

Encontramos duas soluções *ótimas* distintas.

Veja graficamente o que ocorreu...



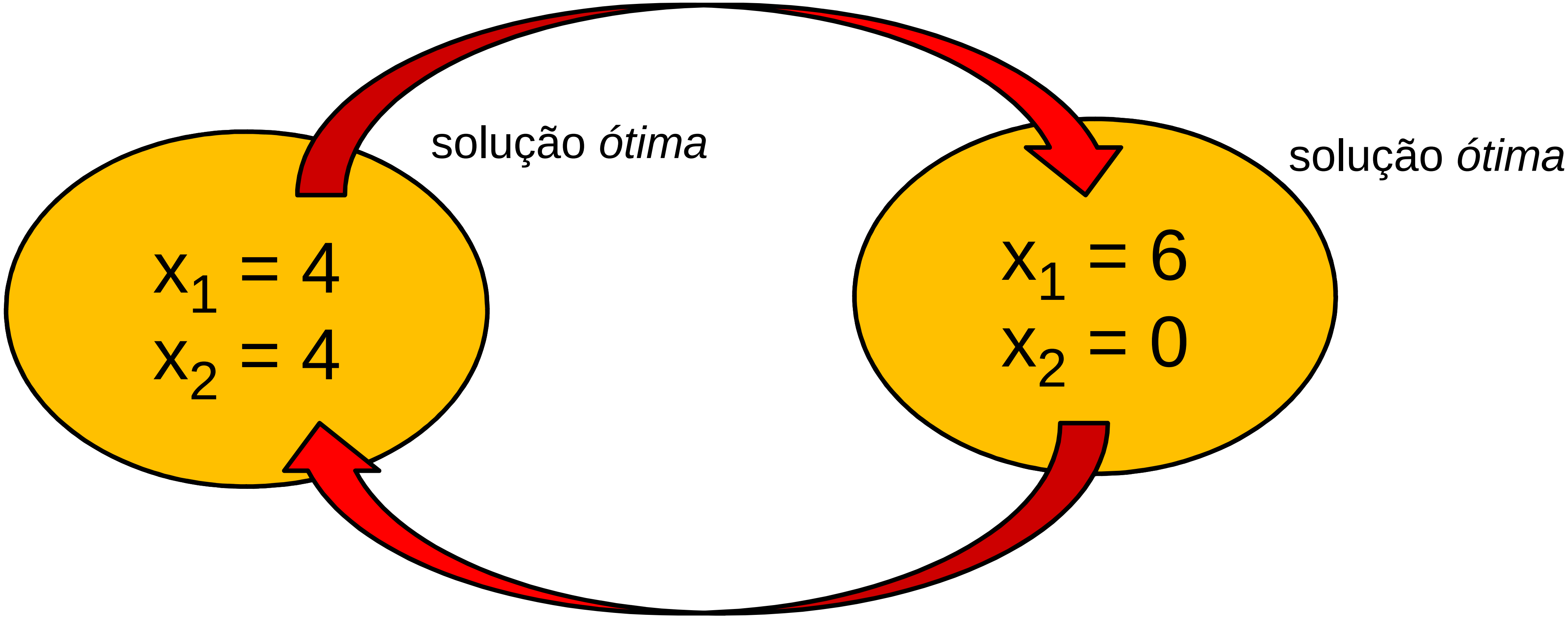
x2
12
9
6
3
x1 + 2x2 ≤ 12
P1(4,4)
4x1 + 2x2
P2(6,0)
x1
-1
3
6
9
12
2x1 + x2 ≤ 12



Região Factível

P1(4,4) e P2(6,0) são as soluções ótimas!

4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla



4.4. Casos Especiais: Solução Múltipla

Qualquer ponto do *segmento de reta* que une $P_1(4,4)$ e $P_2(6,0)$ é também solução para o PPL.

Há infinitas soluções para ele!

4.4. Casos Especiais: Problema Impossível

Há situações em que a *combinação simultânea* das restrições pode tornar o problema *insolúvel* (*impossível*) com aquelas condicionantes.

Exemplo 15: modelo de PPL

max $z = 3x_1 + 4x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 2 \\ x_1 \leq 1 \\ \\ x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0 \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 15

4.4. Casos Especiais: Problema com Variável Livre

Há PPLs em que algumas variáveis não estão restritas a valores positivos, são *irrestritas* (ou *livres*).

4.4. Casos Especiais: Problema com Variável Livre

A solução é substituir cada uma destas variáveis pela subtração entre duas variáveis positas:

$$x_a = x_1 - x_2 \qquad x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0$$

Exemplo 16: modelo de PPL

max $z = 3x_1 + 4x_2$

sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4 \\ x_1 - x_2 \geq 0 \\ x_2 \geq 5 \\ \\ x_1 \text{ e } x_2 \text{ são livres} \end{cases}$$

RESOLUÇÃO

Exemplo 16

Exemplo 16: Devemos, primeiramente, substituir x_1 e x_2 por:

$$x_1 = x_3 - x_4$$
$$x_2 = x_5 - x_6$$

e, em seguida, reescrever o PPL, com x_3, x_4, x_5 e x_6 todas positivas.

Exemplo 16: *novo* modelo de PPL

max $z = 3(x_3 - x_4) + 4(x_5 - x_6)$

sujeito a

$$\left|\begin{array}{l} (x_3 - x_4) + 3(x_5 - x_6) \leq 4 \\ (x_3 - x_4) - (x_5 - x_6) \geq 0 \\ (x_5 - x_6) \geq 5 \\ \\ x_i \geq 0; \quad i = 3,6 \end{array}\right.$$

4.4. Casos Especiais: Problema com Variável Livre

A partir deste ponto, resolve-se o *novo* PPL normalmente.

Lembre-se de, ao final, *retornar* para o PPL original e calcular x_1 e x_2.

Exemplo 17: modelo de PPL

max $z = 3x_1 - 4x_2$

sujeito a

$x_1 + 3x_2 \leq 4$

$x_1 - x_2 \leq 3$

$x_1 \geq 0$; x_2 é livre

RESOLUÇÃO

Exemplo 17

4.5

Exercícios do Capítulo

4.5. Exercícios do Capítulo

O professor encaminhará, por correio eletrônico, arquivo em formato .PDF (*Portable Document Format*) com a

Lista de Exercício do capítulo.

Observações:

a. Acompanhe os exemplos do livro-texto.

b. Faça os exercícios propostos neste capítulo.

c. Lembre-se: treine a elaboração de modelos de problemas de programação linear

4.6

Saiba Mais...

4.6. Saiba Mais...

- Sociedada Brasileira de Pesquisa Operacional
  - www.sobrapo.org.br

- Operational Research Society
  - www.orsoc.uk/home.html

4.6. Saiba Mais...

- Associação Portuguesa de Investigação Operacional
  - www.apdio.pt

- INFORMS - Institute for Operation Research and Manegement Sciences
  - www.informs.org

4.7

Apêncide A: Fundamentos Téoricos do *Simplex*

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Um modelo de PPL pode ser escrito como:

$$\max z = c.x$$

$$x \in S$$

$$S = \{x \in \Re^n \mid A.x \le b,\ x \ge 0\}$$

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

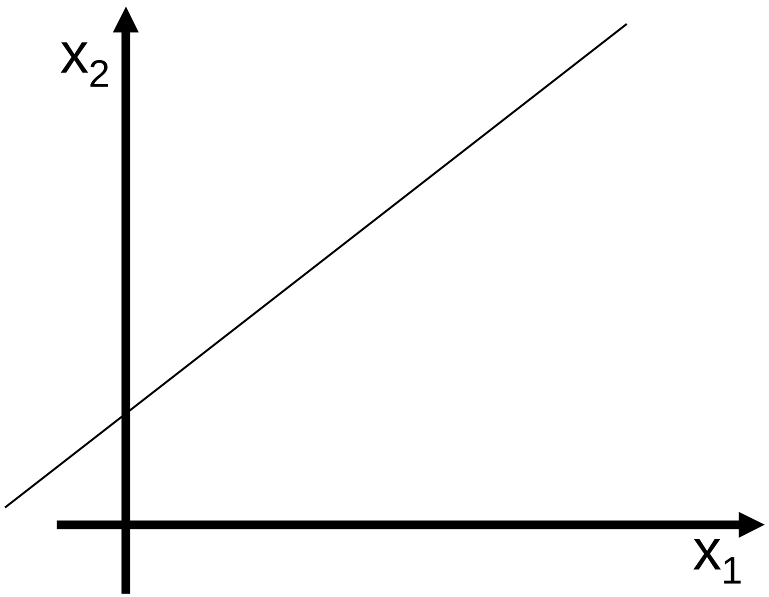
- O conjunto S admite valores reais, não negativos, para o vetor *x* de dimensão igual a *n.*

- Geometricamente o conjunto S é constituído por semi-espaços e hiperplanos.

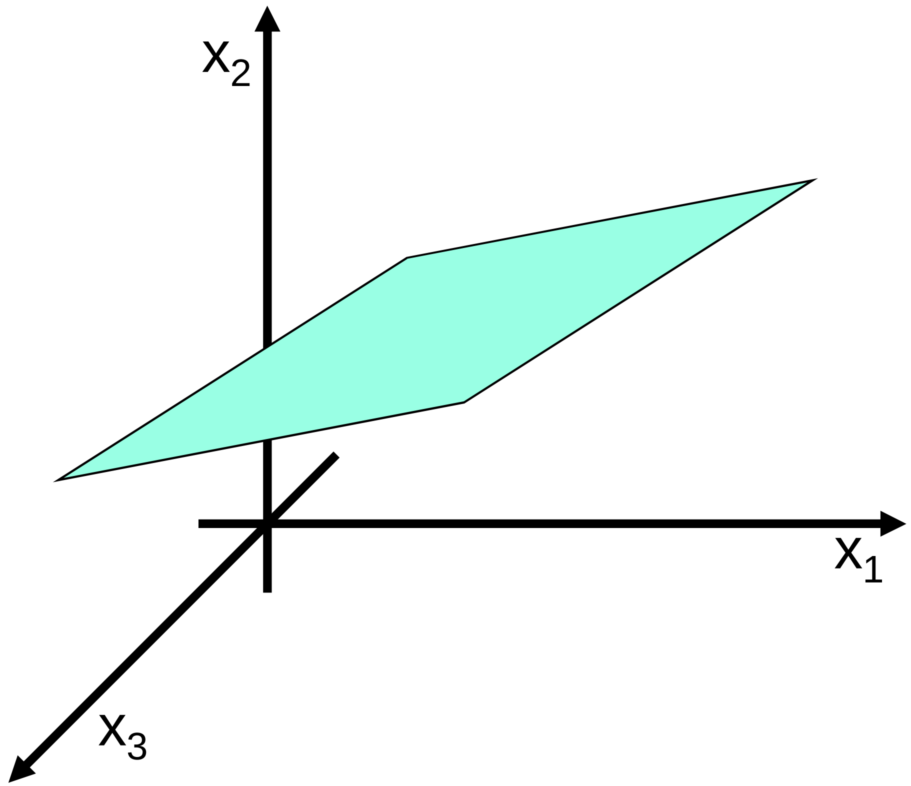
4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

$\Re^2$

$x_1 + 2x_2 = 10$

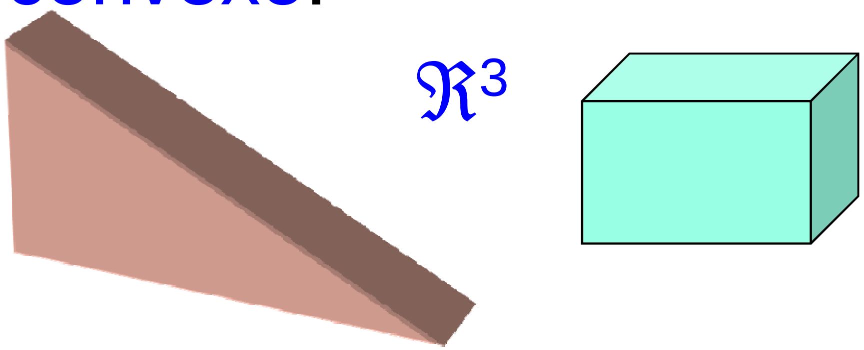


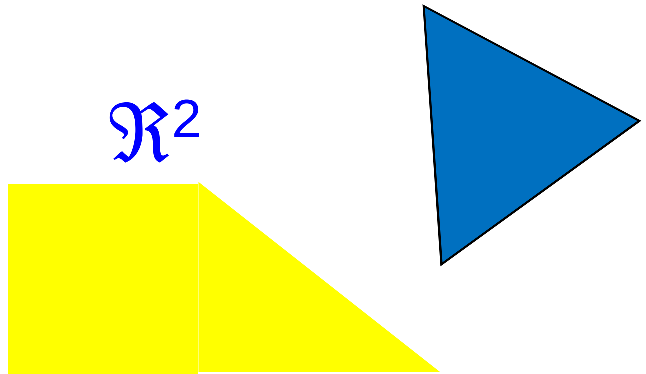
$\Re^3$



4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

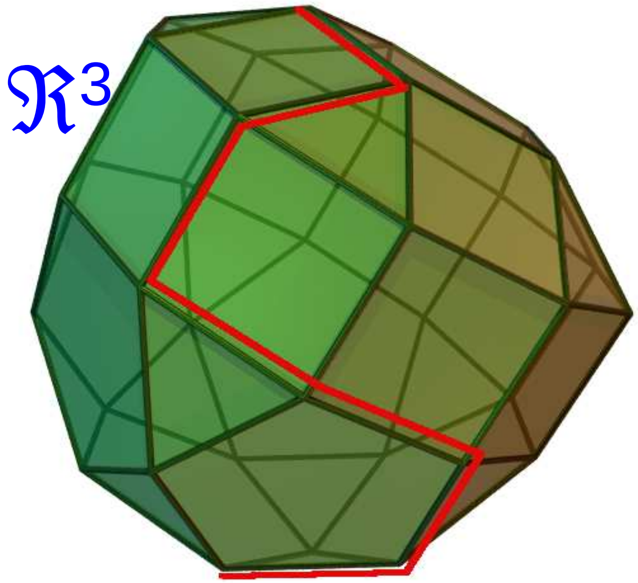
- A intersecção de semi-espaços e hiperplanos define uma região no espaço de dimensão n que é, genericamente, denominada de poliedro convexo.





4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Um poliedro convexo fechado é denominado politopo.



4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

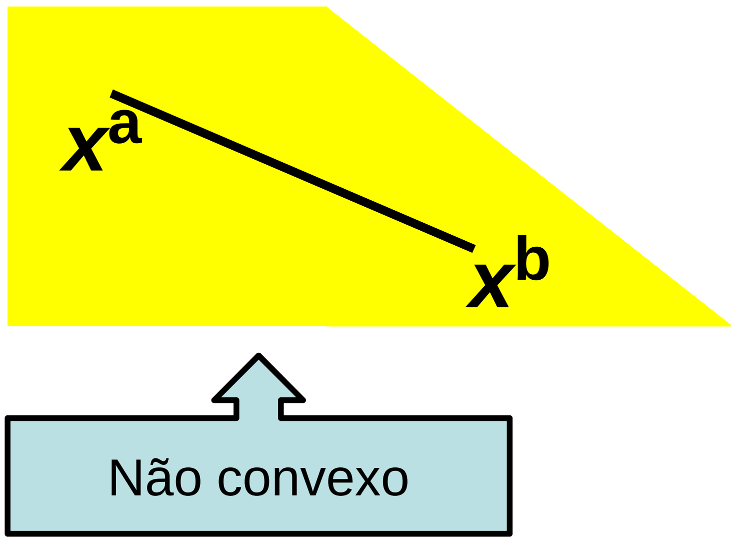
- Definições

Definição 1

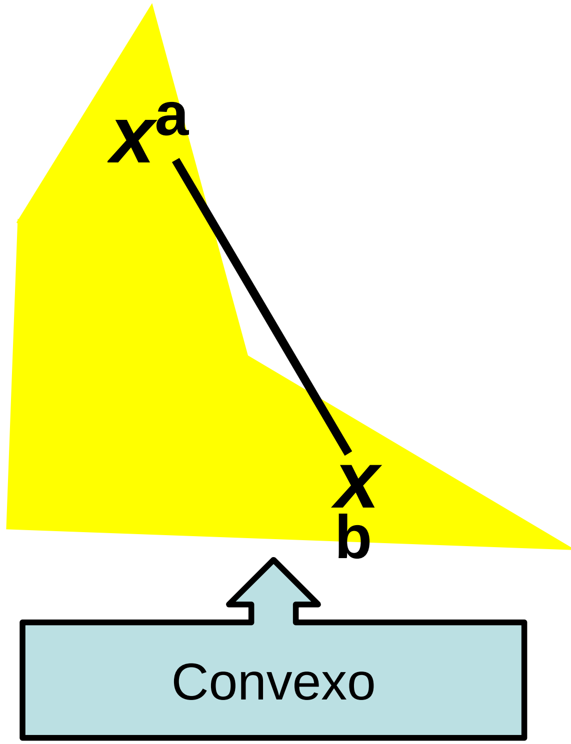
Um conjunto de vetores *n*-dimensionais é convexo se, e somente se, para dois vetores quaisquer do conjunto, x^a e x^b, o segmento de reta que une estes vetores também pertencer ao conjunto.

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Definições



$\Re^2$

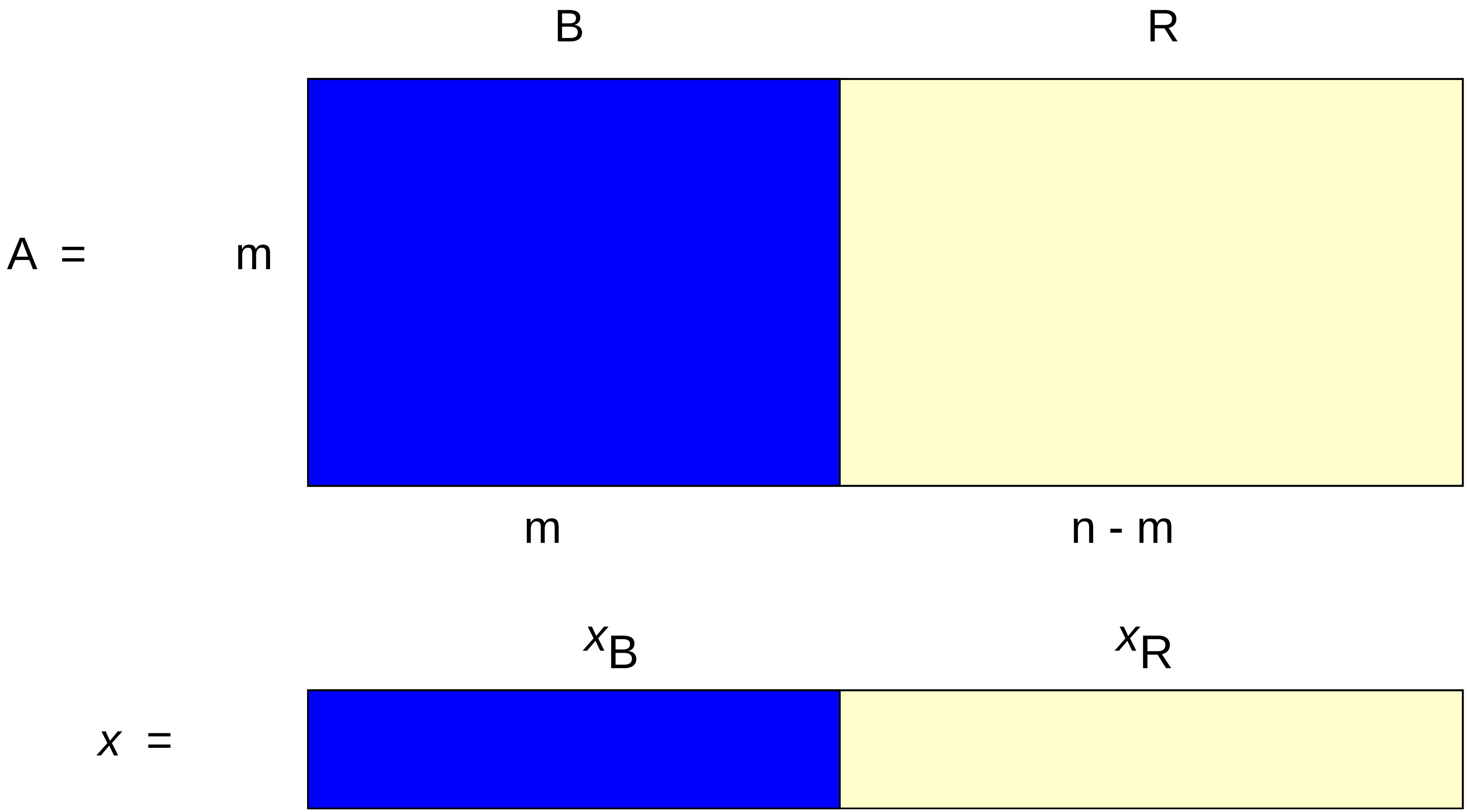


4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Definições

Definição 2

Uma base de uma matriz A (m x n) é uma matriz quadrada de *m* vetores coluna linearmente independentes em $\Re^m$.
As variáveis associadas a essas colunas são denominadas de variáveis básicas.


B
R
A =
m
m
n - m
x_B
x_R
x =

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Podendo-se dizer que...
  - $x = (x_B, x_R)$
  - x_B = vetor das variáveis básicas de m componentes
  - x_R = vetor das variáveis não-básicas de $(n - m)$ componentes

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Definições

Definição 3

Seja B uma base associada à matriz A.
O vetor composto $x_B = B^{-1}b$ e $x_R = 0$ é chamado de solução básica, ou seja:

$x = (B^{-1}b, 0)$ é uma solução básica

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Definições

Definição 4

Um solução básica sem componentes negativas é denominada de solução básica viável.

$$x_B = B^{-1}.b \qquad\qquad x_R$$

$\bar{x} =$ | | 000 .... 000 .... 000...000...00

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Vamos a um exemplo...

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 &\leq 4 \\
x_2 &\leq 1
\end{aligned}
$$

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Vamos a um exemplo...

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 \quad &= 4 \\ x_2 \quad + x_4 &= 1 \end{aligned}$$

Forma padrão (inclusão de duas variáveis de *folga*)

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

$$A = \begin{Vmatrix} +1 & +2 & +1 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & +1 \end{Vmatrix}$$

Forma matricial

$$B = \begin{Vmatrix} +1 & 0 \\ 0 & +1 \end{Vmatrix}$$

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Vamos a um exemplo...

$x_B = (x_3, x_4)$ e $x_R = (x_1, x_2)$

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Definições

Definição 5

O conjunto **C** = $\{x \mid Ax = b,\ x \geq 0\}$ denomina-se conjunto de soluções viáveis.

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Teorema 1

O conjunto **C** das soluções viáveis de um modelo de programação linear é um conjunto convexo.

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Teorema 2

Toda solução básica viável do sistema A.x = b é um *ponto extremo* do conjunto de soluções viáveis,
ou seja,
um ponto extremo do conjunto **C**.

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Teorema 3

Todo *ponto extremo* do conjunto de soluções viáveis de um sistema A.*x* = b é uma solução básica viável.

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Ponto Extremo $\Leftrightarrow$ **Solução Básica Viável**

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Corolário 1

O conjunto dos *pontos extremos* de um conjunto de soluções viáveis é finito e limitado a $\binom{n}{m}$, ou seja,

o número binomial de *n* sobre *m.*

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Corolário 2

Se existe uma solução viável, então existe uma solução básica viável.

Há alguma relação entre os pontos extremos e o valor da função objetivo?

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Teorema 4

1. Se uma função objetivo possui um máximo finito (ou mínimo), então pelo menos uma solução ótima é um ponto extremo do conjunto convexo **C** do *Teorema 1.*

4.7. Fundamentos Teóricos do *Simplex*

- Teoremas

Teorema 4

2. Se a função objetivo assume o máximo (ou mínimo) em mais de um ponto extremo, então ela toma o mesmo valor para qualquer combinação convexa desses pontos.

Capítulo 4: O Método *Simplex*