Tópicos em Pesquisa Operacional

Teoria do Jogos

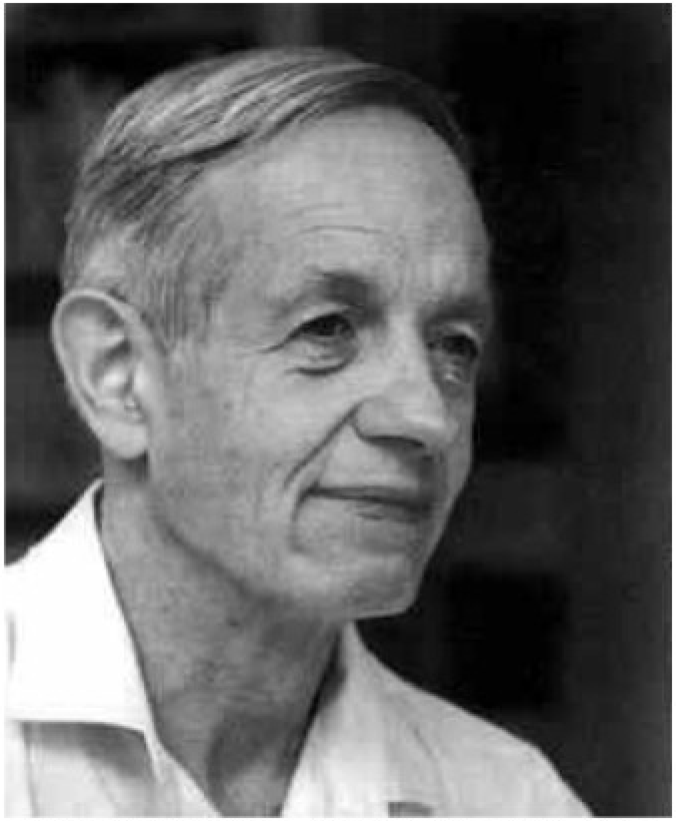
Professor Dr. Anderson Santos
santosardr@facom.ufu.br

Teoria dos Jogos

- Introdução
- Solução ótima de jogos de Soma Zero
- Jogos com estratégias mistas
- Resolução por programação linear
- Conclusão

Teoria do Jogos
Introdução


John von Neumann (*1903, Budapeste, Hungria; †1957, Washington, Estados Unidos).


John Forbes Nash (*1928, Bluefield, West Virgina, Estados Unidos).

Teoria do Jogos

Introdução

- Tomadas de decisão entre oponentes em conflito, exemplos:
  - Campanhas publicitárias;
  - Estratégias de guerra entre exércitos inimigos;
  - Estratégia de expansão de comércios;

Teoria do Jogos
Introdução

- Características:
  - Jogadores podem ter número de estratégias/movimentações finitas ou não;
  - A cada par de estratégias é atribuído um custo denominado *payoff* pago para o oponente;
  - Com dois jogadores são conhecidos como 'Soma Zero';
  - O valor de perda de um jogador é o valor do ganho do outro;

Teoria do Jogos

Introdução

Tabela de pagamentos (*payoff*)

Perspectiva do Oponente

	B1	B2	...	Bn
A1	P11	P12	...	P1m
A2	P21	P22	...	P2m
...	...	...	...	...
Am	Pm1	Pm2	...	Pmn

Perspectiva do Jogador

Teoria do Jogos

Introdução

A matriz de *payoff* de um jogo de par ou ímpar para um jogador A que apostou em par:

Perspectiva do Oponente

		B1	B2
		Número par de dedos	Número ímpar de dedos
A1	Número par de dedos	1	-1
A2	Número ímpar de dedos	-1	1

Perspectiva do Jogador

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- Seleciona uma ou mais estratégias para cada jogador de modo que qualquer mudança posterior não melhorará o *payoff* para o outro jogador.
- Podem ser estratégias únicas ou várias estratégias de acordo com probabilidades.

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- Duas companhias, A e B, vendem duas marcas de vacina para gripe. Companhia A pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia A1), na televisão (estratégia A2) ou no jornal (estratégia A3). A Companhia B pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia B1), na televisão (estratégia B2), no jornal (estratégia B3) ou mala direta (estratégia B4). Dependendo da criatividade e da intensidade dos anúncios, cada companhia pode ganhar uma porção do mercado da outra companhia. A matriz de *payoff* abaixo resume a porcentagem de mercado ganho ou perdido pela companhia A.

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- Duas companhias, A e B, vendem duas marcas de vacina para gripe. Companhia A pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia A1), na televisão (estratégia A2) ou no jornal (estratégia A3). A Companhia B pode anunciar o seu produto no rádio (estratégia B1), na televisão (estratégia B2), no jornal (estratégia B3) ou mala direta (estratégia B4). Dependendo da criatividade e da intensidade dos anúncios, cada companhia pode ganhar uma porção do mercado da outra companhia. A matriz de payoff abaixo resume a porcentagem de mercado ganho ou perdido pela companhia A.

	B1	B2	B3	B4	Mini Linha	
A1	8	-2	9	-3	-3	
A2	6	5	6	8	5	MaxiMin
A3	-2	4	-9	5	-9	
Max Coluna	8	5	9	8		
		MiniMax				

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- O *payoff* será a favor da companhia A, porque seu mercado irá ganhar 5% do mercado de B;
- Neste caso, é dito que o valor do jogo é 5 (5%);
- A e B estão usando uma **Estratégia Pura** ou **Estratégia Dominante** cuja solução é um **Ponto de Sela**.

	B1	B2	B3	B4	Mini Linha	
A1	8	-2	9	-3	-3	
A2	6	5	6	8	**5**	**MaxiMin**
A3	-2	4	-9	5	-9	
Max Coluna	8	**5**	9	8		
		MiniMax				

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- Dois políticos A e B, estão em campanha concorrendo a uma vaga de senador. É necessário fazer o planejamento para os dois dias finais da campanha. Os dois políticos pretendem gastar estes dois dias finais em duas cidades: São Paulo e Rio de Janeiro. Cada político pode gastar um dia em cada cidade ou então gastar dois dias em São Paulo ou dois dias no Rio de Janeiro. Resumindo, as estratégias ficam:
  - A1 = político A gastar um dia em São Paulo e um dia no Rio de Janeiro;
  - A2 = político A gastar dois dias em São Paulo;
  - A3 = político A gastar dois dias no Rio de Janeiro;
  - B1 = político B gastar um dia em São Paulo e um dia no Rio de Janeiro;
  - B2 = político B gastar dois dias em São Paulo;
  - B3 = político B gastar dois dias no Rio de Janeiro.

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- A matriz de *payoff* abaixo resume o número (em milhares) de votos ganhos (valores positivos) ou perdidos (valores negativos) para o político A.

	B1	B2	B3	Mini Linha	
A1	0	-2	2	-2	MaxiMin
A2	5	4	-3	-3	
A3	2	3	-4	-4	
Maxi Coluna	5	4	2		
			MiniMax		

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

Perspectiva do candidato A

	B1	B2	B3	Mini Linha	
A1	0	-2	2	-2	MaxiMin
A2	5	4	-3	-3	
A3	2	3	-4	-4	
Maxi Coluna	5	4	2		
			MiniMax		

Perspectiva do candidato B = A^T

	A1	A2	A3	Mini Linha	
B1	0	-5	-2	-5	
B2	2	-4	-3	-4	
B3	-2	3	4	-2	MaxiMin
Maxi Coluna	2	3	4		
	MiniMax				

- Análise do cenário pelo candidato B/A:
- A1xB3 = Tabela A: Candidato **A** → **+2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-2 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

Perspectiva do candidato A

	B1	B2	B3	Mini Linha	
A1	0	-2	2	-2	MaxiMin
A2	5	4	-3	-3	
A3	2	3	-4	-4	
Maxi Coluna	5	4	2		
			MiniMax		

Perspectiva do candidato B = A^T

	A1	A2	A3	Mini Linha	
B1	0	-5	-2	-5	
B2	2	-4	-3	-4	
B3	-2	3	4	-2	MaxiMin
Maxi Coluna	2	3	4		
	MiniMax				

- Análise do cenário pelo candidato B/A:
- A1xB3 = Tabela A: Candidato **A** → **+2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-2 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

- Iniciativa do candidato B:
- A1x**B2** = Tabela A: Candidato **A** → **-2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **+2 mil** votos;
- O candidato A tentará antecipar os movimentos do candidato B:

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

Perspectiva do candidato A

	B1	B2	B3	Mini Linha	
A1	0	-2	2	-2	MaxiMin
A2	5	4	-3	-3	
A3	2	3	-4	-4	
Maxi Coluna	5	4	2		
			MiniMax		

Perspectiva do candidato B = A^T

	A1	A2	A3	Mini Linha	
B1	0	-5	-2	-5	
B2	2	-4	-3	-4	
B3	-2	3	4	-2	MaxiMin
Maxi Coluna	2	3	4		
	MiniMax				

- Análise do cenário pelo candidato B/A:
- A1xB3 = Tabela A: Candidato **A** → **+2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-2 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

- Iniciativa do candidato B:
- A1x**B2** = Tabela A: Candidato **A** → **-2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **+2 mil** votos;
- O candidato A tentará antecipar os movimentos do candidato B:

- Iniciativa do candidato A:
- **A2**xB2 = Tabela A: Candidato **A** → **+4 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-4 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

Perspectiva do candidato A

	B1	B2	B3	Mini Linha	
A1	0	-2	2	-2	MaxiMin
A2	5	4	-3	-3	
A3	2	3	-4	-4	
Maxi Coluna	5	4	2		
			MiniMax		

Perspectiva do candidato B = A^T

	A1	A2	A3	Mini Linha	
B1	0	-5	-2	-5	
B2	2	-4	-3	-4	
B3	-2	3	4	-2	MaxiMin
Maxi Coluna	2	3	4		
	MiniMax				

- Análise do cenário pelo candidato B/A:
- A1xB3 = Tabela A: Candidato **A** → **+2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-2 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

- Iniciativa do candidato B:
- A1x**B2** = Tabela A: Candidato **A** → **-2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **+2 mil** votos;
- O candidato A tentará antecipar os movimentos do candidato B:

- Iniciativa do candidato A:
- **A2**xB2 = Tabela A: Candidato **A** → **+4 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-4 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

- Iniciativa do candidato B:
- A2x**B3** = Tabela A: Candidato **A** → **-3 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **+3 mil** votos;
- O candidato A tentará antecipar os movimentos do candidato B:

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

Perspectiva do candidato A

	B1	B2	B3	Mini Linha	
A1	0	-2	2	-2	MaxiMin
A2	5	4	-3	-3	
A3	2	3	-4	-4	
Maxi Coluna	5	4	2		
			MiniMax		

Perspectiva do candidato B = A^T

	A1	A2	A3	Mini Linha	
B1	0	-5	-2	-5	
B2	2	-4	-3	-4	
B3	-2	3	4	-2	MaxiMin
Maxi Coluna	2	3	4		
	MiniMax				

C
I
C
L
O

- Análise do cenário pelo candidato B/A:
- A1xB3 = Tabela A: Candidato **A** → **+2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-2 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

- Iniciativa do candidato B:
- A1x**B2** = Tabela A: Candidato **A** → **-2 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **+2 mil** votos;
- O candidato A tentará antecipar os movimentos do candidato B:

- Iniciativa do candidato A:
- **A2**xB2 = Tabela A: Candidato **A** → **+4 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **-4 mil** votos;
- O candidato B tentará antecipar os movimentos do candidato A:

- Iniciativa do candidato B:
- A2x**B3** = Tabela A: Candidato **A** → **-3 mil** votos; Tabela B: Candidato **B** → **+3 mil** votos;
- O candidato A tentará antecipar os movimentos do candidato B:

Teoria do Jogos

Solução ótima de jogos de Soma Zero

- Em jogos que não possuem Estratégia Dominante, sempre quando a estratégia de um jogador é previsível, o seu oponente poderá tomar vantagem desta informação para melhorar a sua tomada de decisão.
- Com isso, uma característica essencial para um planejamento racional de um jogo deste tipo é que nenhum jogador deveria estar habilitado a deduzir a estratégia que o seu oponente irá usar.
- Ao invés de aplicar algum critério conhecido para determinar uma única estratégia que será definitivamente usada, faz-se necessário escolher estratégias alternativas aceitáveis geradas sobre algum tipo de base randômica.
- O valor v deste jogo estará entre o valor Maximin e Minimax.

Teoria do Jogos

Jogos com estratégias mistas

- Quando um jogo não possuir solução em ponto de sela faz-se necessário utilizar uma distribuição de probabilidade sobre o conjunto de estratégias:
  - x_i = probabilidade do jogador A usar a estratégia i
    (i = 1,2,...,m)
  - y_j = probabilidade do jogador B usar a estratégia j
    (j = 1,2,...,n)
  - m e n são os números de estratégias do jogador A e B, respectivamente

Teoria do Jogos

Jogos com estratégias mistas

		B1	B2	B3
		Y1 = 0	Y2 = 1/2	Y3 = 1/2
A1	X1 = 1/2	0	-2	2
A2	X2 = 1/2	5	4	-3
A3	X3 = 0	2	3	-4

$$\textit{payoff} \text{ para o jogador A} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j$$

Teorema Minimax: Se estratégias mistas são permitidas, o par de estratégias mistas que é ótimo de acordo com o critério Minimax fornece uma solução estável com: MaxiMin = v = MiniMax, de tal maneira que nenhum jogador pode melhorar sua situação mudando sua estratégia.

Teoria do Jogos

Jogos com estratégias mistas

- O *payoff* esperado do último exemplo é v=1/4;
- Não revela risco envolvido no jogo, mas indica o valor médio para um jogo que se repete várias vezes;
- Se jogo não ocorre várias vezes, ainda cabe a seleção randômica a partir da distribuição de probabilidades;
- A estratégia ótima (pura ou mista) pode ser obtida por programação linear;

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- As probabilidades ótimas ou planos (x1, x2, …, Xm) do jogador A podem ser determinadas resolvendo-se o seguinte problema Maximin:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)\right\}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

No entanto:

$$v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)$$

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- As probabilidades ótimas ou planos (x1, x2, …, Xm) do jogador A podem ser determinadas resolvendo-se o seguinte problema Maximin:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)\right\}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

No entanto:

$$\boxed{v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i \geq v, j = 1,2,\ldots,n}$$

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- As probabilidades ótimas ou planos (x1, x2, …, Xm) do jogador A podem ser determinadas resolvendo-se o seguinte problema Maximin:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)\right\}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \end{cases}$$

No entanto:

$$\boxed{v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i \geq v, j = 1,2,\ldots,n}$$

Maximize $z = v$

Sujeito a

$$\begin{cases} v - \sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i \leq 0, j = 1,2,\ldots,n \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\ldots,m \\ v \quad \text{livre} \end{cases}$$

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- As probabilidades ótimas ou planos (x1, x2, …, Xm) do jogador A podem ser determinadas resolvendo-se o seguinte problema Maximin:

$$\max_{x_i}\left\{\min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)\right\}$$

Sujeito a

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\dots,m \end{cases}$$

De acordo com o ponto de vista do outro jogador: o raciocínio, o desenvolvimento e os pesos são invertidos.

No entanto:

$$\boxed{v = \min\left(\sum_{i=1}^{m} p_{i1}x_i, \sum_{i=1}^{m} p_{i2}x_i, \dots, \sum_{i=1}^{m} p_{in}x_i\right)}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i \geq v, j = 1,2,\dots,n}$$

Maximize $z = v$

Sujeito a

$$\begin{cases} v - \sum_{i=1}^{m} p_{ij}x_i \leq 0, j = 1,2,\dots,n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ x_i \geq 0, i = 1,2,\dots,m \\ v \quad \text{livre} \end{cases}$$

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- Duas companhias, A e B, vendem duas marcas de vacina para gripe.

	B1	B2	B3	B4	Mini Linha	
A1	8	-2	9	-3	-3	
A2	6	5	6	8	5	MaxiMin
A3	-2	4	-9	5	-9	
Max Coluna	8	5	9	8		
		MiniMax				

Maximize $z = v$

Sujeito a

$$\begin{cases} v - \sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \le 0, \; j = 1,2,\dots,n \\ x_1 + x_2 + \dots + x_m = 1 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\dots,m \\ v \quad \text{livre} \end{cases}$$

Maximize $z = v$

Sujeito a

$$\begin{cases} v - 8x_1 - 6x_2 + 2x_3 \le 0 \\ v + 2x_1 - 5x_2 - 4x_3 \le 0 \\ v - 9x_1 - 6x_2 + 9x_3 \le 0 \\ v + 3x_1 - 8x_2 - 5x_3 \le 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \\ v \quad \text{livre} \end{cases}$$

```
MAX v
SUBJECT TO
REST1) v - 8 X1 - 6 X2 + 2 X3 <=0
REST2) v + 2 X1 - 5 X2 - 4 X3 <=0
REST3) v - 9 X1 - 6 X2 + 9 X3 <=0
REST4) v + 3 X1 - 8 X2 - 5 X3 <=0
REST5) X1 + X2 + X3 = 1
END
FREE v
```

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- Duas companhias, A e B, vendem duas marcas de vacina para gripe.

	B1	B2	B3	B4	Mini Linha	
A1	8	-2	9	-3	-3	
A2	6	5	6	8	**5**	**MaxiMin**
A3	-2	4	-9	5	-9	
Max Coluna	8	**5**	9	8		
		MiniMax				

- Este jogo possui uma solução de ponto de sela ou estratégia pura, com isso o plano ótimo para o jogador **A** é **(x_1 , x_2 , x_3) = (0,1,0)** e o plano ótimo para o jogador **B** é **(y_1 , y_2 , y_3 , y_4) = (0,1,0,0)**

- O valor v do jogo é 5 (v = 5%).

- Os resultados estão de acordo com resultados obtidos anteriormente, ou seja, o jogador A deve utilizar somente a sua segunda estratégia (A2) e o jogador B deve utilizar também somente a sua segunda estratégia (B2).

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

		B1	B2	B3
		Y1 = **?**	Y2 = **?**	Y3 = **?**
A1	X1 = **?**	0	-2	2
A2	X2 = **?**	5	4	-3
A3	X3 = **?**	2	3	-4

Teorema Minimax: Se estratégias mistas são permitidas, o par de estratégias mistas que é ótimo de acordo com o critério Minimax fornece uma solução estável com: MaxiMin = v = MiniMax, de tal maneira que nenhum jogador pode melhorar sua situação mudando sua estratégia.

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

		B1	B2	B3
		Y1 = **?**	Y2 = **?**	Y3 = **?**
A1	X1 = **?**	0	-2	2
A2	X2 = **?**	5	4	-3
A3	X3 = **?**	2	3	-4

De acordo com o ponto de vista do outro jogador: o raciocínio, o desenvolvimento e os pesos são invertidos.

Maximize $z = v$

Sujeito a

$$\begin{cases} v - 0x_1 - 5x_2 - 2x_3 \leq 0 \\ v + 2x_1 - 4x_2 - 3x_3 \leq 0 \\ v - 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \\ v \quad \text{livre} \end{cases}$$

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{11}, \frac{4}{11}, 0\right)$$

Minimize $z = v$

Sujeito a

$$\begin{cases} v - 0y_1 + 2y_2 - 2y_3 \geq 0 \\ v - 5y_1 - 4y_2 + 3y_3 \geq 0 \\ v - 2y_1 - 3x_2 + 4y_3 \geq 0 \\ y_1 + y_2 + y_3 = 1 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \\ v \quad \text{livre} \end{cases}$$

$$(y_1, y_2, y_3) = \left(0, \frac{5}{11}, \frac{6}{11}\right)$$

Teoria do Jogos

Resolução por programação linear

- Dois políticos A e B, estão em campanha concorrendo a uma vaga de senador. É necessário fazer o planejamento para os dois dias finais da campanha. Os dois políticos pretendem gastar estes dois dias finais em duas cidades: São Paulo e Rio de Janeiro. Cada político pode gastar um dia em cada cidade ou então gastar dois dias em São Paulo ou dois dias no Rio de Janeiro. Resumindo, as estratégias ficam:
  - **X1 = 0.63 = político A gastar um dia em São Paulo e um dia no Rio de Janeiro;**
  - X2 = 0.36 = político A gastar dois dias em São Paulo;
  - X3 = 0.00 = político A gastar dois dias no Rio de Janeiro;
  - Y1 = 0.00 = político B gastar um dia em São Paulo e um dia no Rio de Janeiro;
  - Y2 = 0.45 = político B gastar dois dias em São Paulo;
  - **Y3 = 0.55 = político B gastar dois dias no Rio de Janeiro.**

Teoria do Jogos

Conclusão

- A contribuição fundamental da Teoria dos Jogos é que esta fornece uma metodologia para formulação e análise dos problemas apresentados em situações simples.
- Ainda há uma grande lacuna entre o que a teoria pode tratar e a complexidade da maioria das situações competitivas reais.

Teoria do Jogos

Exercício 01

- Os times X e Y estão estabelecendo suas estratégias para o campeonato nacional de basquete. Avaliando as forças de seus respectivos bancos de reserva, cada um dos treinadores estabelece quatro estratégias para a rotação de jogadores durante o jogo. A capacidade de cada equipe converter lances de 2 pontos, 3 pontos e lances livres são fatores fundamentais para determinar o placar final do jogo. A matriz apresentada resume o número líquido de pontos que a equipe X marcará por posse de bola como uma função das diferentes estratégias disponíveis para cada equipe.

Teoria do Jogos

Exercício 01

	Y1	Y2	Y3	Y4	min	max(min)
X1	3	-2	1	2	-2	-2
X2	2	3	-3	0	-3	
X3	-1	2	-2	2	-2	-2
X4	-1	-2	4	1	-2	-2
max	3	3	4	2		
min(max)				2		

Teoria do Jogos

Exercício 01

	Y1	Y2	Y3	Y4
X1	3	-2	1	2
X2	2	3	-3	0
X3	-1	2	-2	2
X4	-1	-2	4	1

- Resolva o jogo por programação linear e determine uma estratégia para o campeonato.
- Com base nas informações da resolução, qual dos dois times é previsto que vencerá o campeonato.

Teoria do Jogos

Exercício 02

- Um jogo é disputado por dois jogadores. A cada lance os jogadores exibem 1 ou 2 dedos ao mesmo tempo, tentam adivinhar o número de dedos que o oponente mostrará. O jogador que adivinhar o número correto de dedos que o oponente mostrará ganha uma quantia igual ao total de números de dedos mostrados por ambos os jogadores. Caso contrário, o jogo fica empatado e nenhum jogador leva pontos. Estabeleça o problema como um jogo de soma zero com duas pessoas e resolva-o por programação linear.

Teoria do Jogos

Exercício 02

		Y1	Y2	Y3	Y4
	Exibe, Adivinha	1,1	1,2	2,1	2,2
X1	1,1	0	+2	-3	0
X2	1,2	-2	0	0	+3
X3	2,1	+3	0	0	-4
X4	2,2	0	-3	+4	0

- Resolva o jogo por programação linear e determine uma estratégia para o campeonato.
- Com base nas informações da resolução, qual dos dois times é previsto que vencerá o campeonato.

Teoria do Jogos

Exercício 03

- O exército X está lutando pelo controle de duas localizações estratégicas. Este exército X tem dois regimentos e o seu inimigo Y tem três regimentos. Um local estratégico ficará sob o controle do exército que atacar com mais regimentos. Caso contrário, o resultado do embate no local será um empate.
  - Formule o problema como um jogo de soma zero com duas pessoas e resolva-o por programação linear;
  - Qual dos dois exércitos vencerá a batalha?

Teoria do Jogos

Exercício 03

Possibilidades de distribuição da quantidade de regimentos no Local A (Loc A) e quantidade de regimentos no Local B (Loc B)

	Loc A , Loc B	Y1	Y2	Y3	Y4
		3,0	2,1	1,2	0,3
X1	2,0				
X2	1,1				
X3	0,2				

Teoria do Jogos

Exercício 03

		Y1	Y2	Y3	Y4
	Loc A , Loc B	3,0	2,1	1,2	0,3
X1	2,0				
X2	1,1				0
X3	0,2				

O jogador X ganha em Loc A (1>0), mas perde em Loc B (1 < 3) e por isso o payoff é zero para ele.

Teoria do Jogos

Exercício 03

		Y1	Y2	Y3	Y4
		3,0	2,1	1,2	0,3
X1	2,0	-1	-1	0	0
X2	1,1	0	-1	-1	0
X3	0,2	0	0	-1	-1