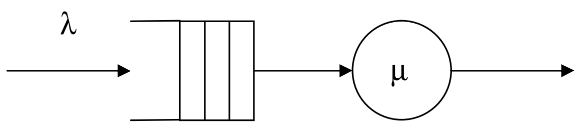
Teoria das Filas de Espera: resolução dos exercícios propostos na aula

Gil.Goncalves@fe.up.pt

MASP 2004

M/M/1 (pag.18)



processos de chegada e de serviço exponencialmente distribuídos (Markov), um só servidor, capacidade de armazenamento infinita

$$\lambda_n = \lambda \qquad \forall \quad n = 0, 1, ..$$

e

$$\mu_n = \mu \qquad \forall \quad n = 0, 1, ..$$

Logo

$$\pi_0 = \frac{1}{1 + \sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n}$$

e

$$\pi_n = \frac{\lambda_0 \ldots \lambda_{n-1}}{\mu_0 \ldots \mu_n} \pi_0$$

De notar que quando $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ a série geométrica $\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n$ é convergente. Para valores de $\frac{\lambda}{\mu} < 1$ temos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\frac{\lambda}{\mu})^n = \frac{\frac{\lambda}{\mu}}{1 - \frac{\lambda}{\mu}}$$

Assim,

$$\pi_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} \Leftrightarrow \pi_0 = 1 - \rho \quad (\rho = \frac{\lambda}{\mu})$$

Para valores de ρ compreendidos entre 0 e 1 ($0 \leq \rho < 1$), uma vez que $\frac{\lambda}{\mu} < 1$, a distribuição de probabilidade estacionária do comprimento de uma fila M/M/1 é dada por

$$\pi_n = (\frac{\lambda}{\mu})^n (1 - \rho) = (1 - \rho)\rho^n$$

Utilização e taxa de saída

utilização $= \rho = 1 - \pi_0$

Em regime permamente as taxas de chegada e de partida estão equilibradas logo

taxa de saída $= \mu(1 - \pi_0) = \lambda$

Num sistema M/M/1 em equilíbrio a taxa de saída $= \lambda$. Se $\lambda > \mu$ então a taxa de saída $= \mu$ (e o comprimento da fila cresce para infinito).

Comprimento médio da fila

$$E[X] = \sum_{n=0}^{\infty} n\pi_n = (1 - \rho) \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

Como

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n) = \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^{n-1} = \frac{1}{\rho} \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n$$

e

$$\sum_{n=0}^{\infty} \rho^n = \frac{1}{1 - \rho} \qquad \rho < 1 \qquad \frac{\partial}{\partial \rho}(\frac{1}{1 - \rho}) = \frac{1}{(1 - \rho)^2}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{n=0}^{\infty} n\rho^n = \frac{\rho}{(1 - \rho)^2}$$

Assim, o comprimento médio da fila

$$E[X] = \frac{\rho}{1 - \rho}$$

onde é possível verificar, como já era esperado, que quando $\rho \to 1$ o valor de $E[X] \to \infty$.

Tempo médio no sistema

Recorrendo à lei de Little

$$E[X] = \lambda E[S]$$

e

$$\frac{\rho}{1-\rho} = \lambda E[S] \qquad (\lambda = \rho\mu)$$

logo

$$E[S] = \frac{\frac{1}{\mu}}{(1-\rho)}$$

onde é possível verificar que quando $\rho \to 0 \quad E[S] \to \frac{1}{\mu}$ e quando $\rho \to 1 \quad E[S] \to \infty$.

Tempo médio de espera

Em regime permanente

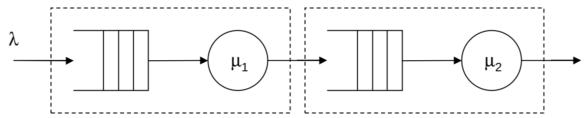
$$E[S] = E[W] + E[Z] = E[W] + \frac{1}{\mu}$$

logo

$$E[W] = \frac{\frac{1}{\mu}}{1-\rho} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1-\rho)}$$

onde é possível verificar que quando $\rho \to 1 \quad E[W] \to \infty$.

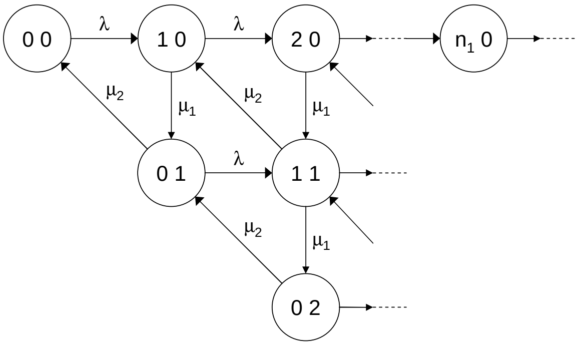
M=2 (pag. 23)



$$X = [X_1, X_2] \qquad \varepsilon = a, d_1, d_2$$

Uma vez que todos os acontecimentos são gerados por processos de Markov, podemos modelizar o sistema como uma cadeia de Markov com o diagrama de transição de estados da figura seguinte.

Por inspecção, as equações de equilíbrio são facilmente obtidas.



estado (n_1, n_2) **com** $n_1 > 0$ **e** $n_2 > 0$

$$\lambda\pi(n_1{-}1, n_2){+}\mu 1\pi(n_1{+}1, n_2{-}1){+}\mu_2\pi(n_1, n_2{+}1){-}(\lambda{+}\mu_1{+}\mu_2)\pi(n_1, n_2) = 0$$

estado $(n_1, 0)$

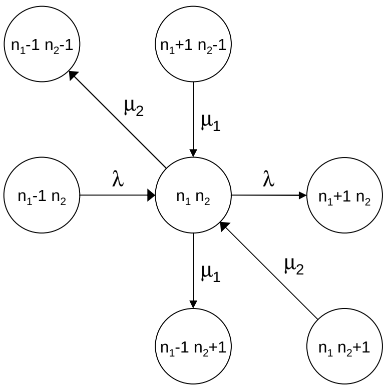
$$\lambda\pi(n_1 - 1, 0) + \mu_2\pi(n_1, 1) - (\lambda + \mu_1)\pi(n_1, 0) = 0$$

estado $(0, n_2)$

$$\mu_1\pi(1, n_2 - 1) + \mu_2\pi(0, n_2 + 1) - (\lambda + \mu_2)\pi(0, n_2) = 0$$

estado $(0, 0)$

$$\mu_2\pi(0, 1) - \lambda\pi(0, 0) = 0$$



A distribuição de probabilidade estacionária deve também obedecer à condição de normalização.

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\pi(i, j) = 1$$

Resolvendo, obtemos a seguinte expressão para a distribuição de probabilidade estacionária do comprimento da fila:

$$\pi(n_1, n_2) = (1-\rho_1)\rho_1^n(1-\rho_2)\rho_2^n$$

onde

$$\rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_1} \qquad \rho_1 = \frac{\lambda}{\mu_2}$$

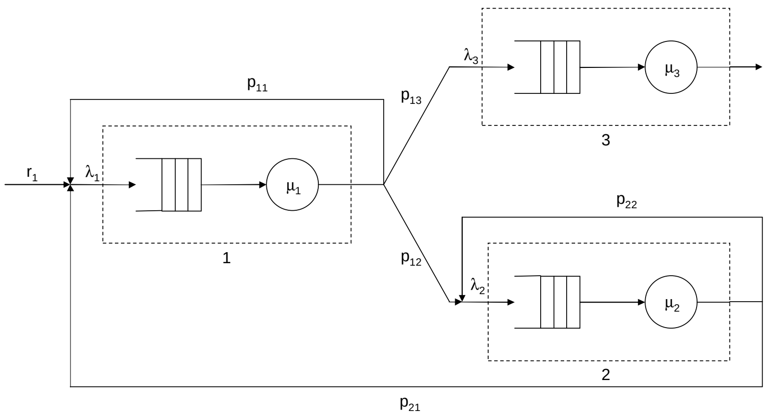
Analisando os dois nós isoladamente (como sistemas M/M/1 independentes) obteriamos as seguintes distribuições de probabilidade estacionária

$$\pi_1 = (1-\rho_1)\rho_1^n \qquad \pi_2(1-\rho_2)\rho_2^n$$

o que permite verificar que

$$\pi(n_1, n_2) = \pi_1(n_1)\pi_2(n_2)$$

Rede (pag. 25)



Calcular as taxas de chegada λ_i em regime permanente

$$\begin{cases} \lambda_1 = r_1 + p_{11}\lambda_1 + p_{21}\lambda_2 \\ \lambda_2 = p_{12}\lambda_1 + p_{22}\lambda_2 \\ \lambda_3 = p_{13}\lambda_1 \end{cases} \begin{cases} - \\ (1-p_{22})\lambda_2 = p_{12}\lambda_1 \\ - \end{cases} \begin{cases} - \\ \lambda_2 = \frac{p_{12}}{(1-p_{22})}\lambda_1 \\ - \end{cases} \begin{cases} - \\ \lambda_2 = \frac{p_{12}}{p_{21}}\lambda_1 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = r_1 + p_{11}\lambda_1 + p_{21}\frac{p_{12}}{p_{21}}\lambda_2 \\ - \\ - \end{cases} \begin{cases} (1-p_{11}-p_{12})\lambda_1 = r_1 \\ - \\ - \end{cases} \begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{p_{13}}r_1 \\ \lambda_2 = \frac{p_{12}}{p_{21}p_{13}}r_1 \\ \lambda_3 = r_1 \end{cases}$$

Obter a taxa de utilização ρ_i

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\mu_1} \qquad \rho_2 = \frac{\lambda_2}{\mu_2} \qquad \rho_3 = \frac{\lambda_3}{\mu_3}$$

Determinar para cada nó isoladamente

$$\pi_i(n_i), \quad i = 1, 2, 3 \qquad \pi_i(n_i) = (1 - \rho_i)\rho_i^{n_i}$$

Utilizando o resultado de um exercício anterior

$$\pi(n_1, n_2, n_3) = (1 - \rho_1)\rho_1^{n_1}(1 - \rho_2)\rho_2^{n_2}(1 - \rho_3)\rho_3^{n_3}$$

Considerando os seguintes valores numéricos

$$\begin{array}{lll} r_1 = 1, & \mu_1 = \mu_2 = 4, & \mu_3 = 2 \\ p_{12} = 0.2, & p_{13} = 0.5 & p_{21} = 0.2 \end{array}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 = \frac{1}{p_{13}} r_1 \\ \lambda_2 = \frac{p_{12}}{p_{21} p_{13}} r_1 \\ \lambda_3 = r_1 \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 2 \\ \lambda_3 = 1 \end{cases}$$

$$\rho_1 = 0.5 \qquad \rho_2 = 0.5 \qquad \rho_3 = 0.5 \qquad (\rho_i < 1)$$

$$\pi(n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{8}(\frac{1}{2})^{n_1}(\frac{1}{2})^{n_2}(\frac{1}{2})^{n_3}$$

Podemos agora calcular diversas medidas de desempenho. Por exemplo, o número médio de clientes no sistema $E[X_1 + X_2 + X_3]$. Considerando que cada nó se comporta como M/M/1

$$E[X_i] = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \qquad E[X_1 + X_2 + X_3] = 3$$

Utilizando a lei de Little podemos calcular o tempo médio no sistema

$$E[X_1 + X_2 + X_3] = r_1 E[S] \Leftrightarrow E[S] = 3$$