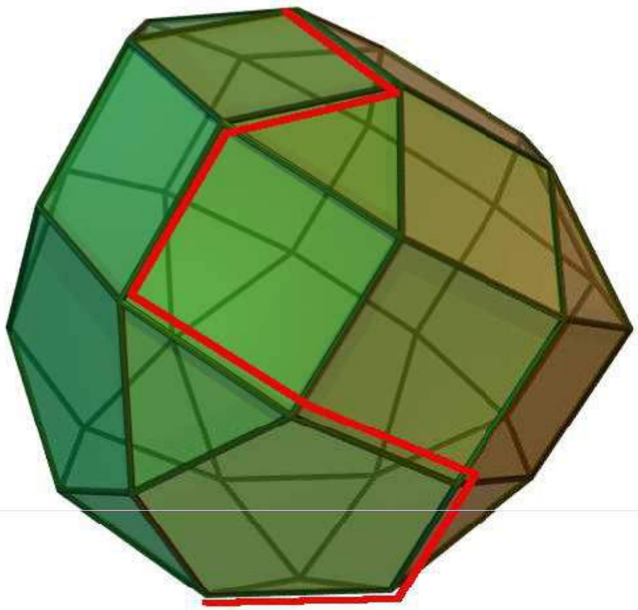
Capítulo 3



Programação Linear

3. PAUTA

1. Introdução
2. Exemplos de Aplicação
3. Definição Geral de Programação Linear

3. PAUTA

4. Solução Gráfica de um PPL

5. Exercícios do capítulo

6. Saiba mais...

3.1

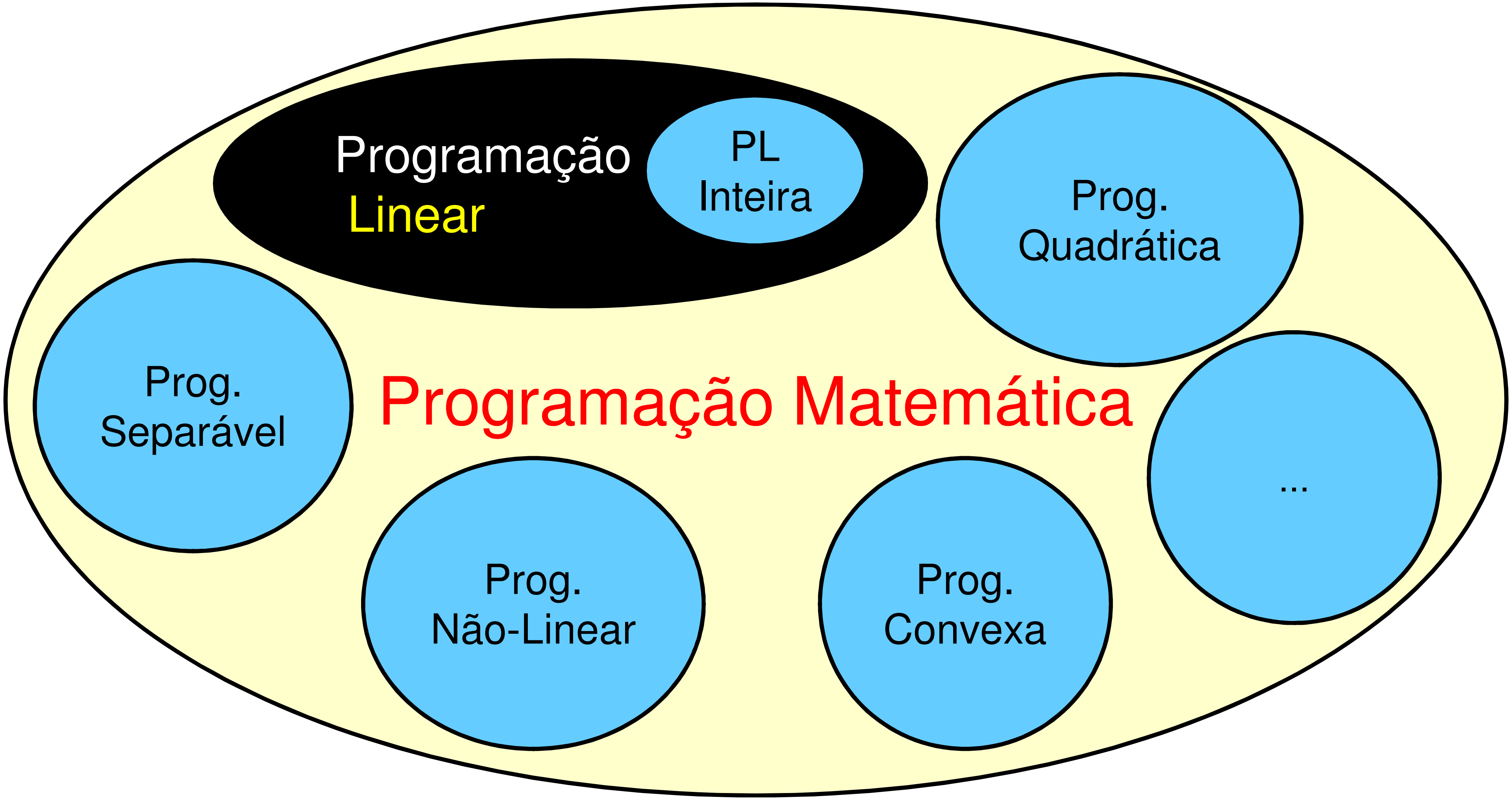
Introdução

3.1. Introdução

- Os *problemas de programação linear (PPLs)* são uma classe especial de problemas de *programação matemática*.

Elaboração de *modelos matemáticos* para a obtenção de solução para problemas de planejamento.

Capítulo 3: Programação Linear



3.1. Introdução

- O estudo dos PPLs nos permite entender os outros modelos de programação matemática mais sofisticados.

3.1. Introdução

- Os modelos de PL são um tipo especial de modelos de *otimização*.

Busca pelas melhores soluções para problemas matematicamente *bem definidos*.

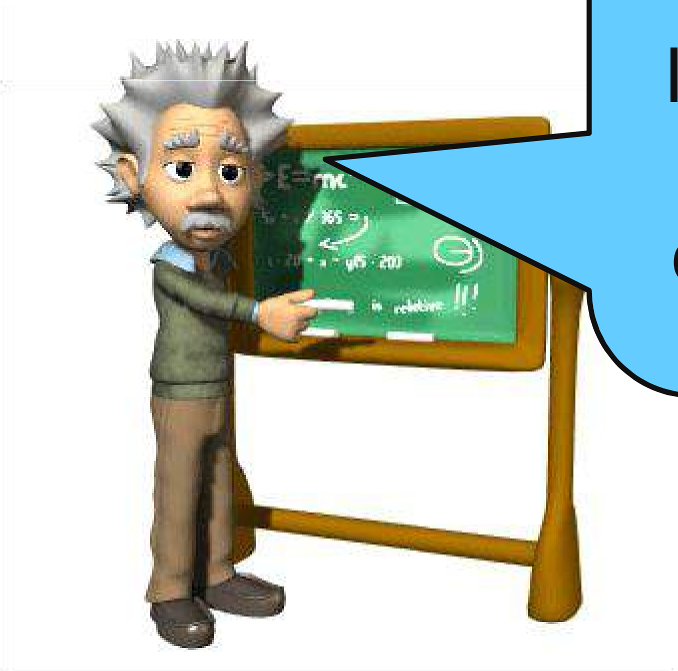
Capítulo 3: Programação Linear

3.1. Introdução

Como saber se um problema qualquer pode ser modelado por *Programação Linear*?

Capítulo 3: Programação Linear

3.1. Introdução



Fácil...

Identificando, no problema, certas *características* que nos permitem concluir que ele é modelável pela *Programação Linear*!

3.2

Exemplos de Aplicação

Capítulo 3: Programação Linear

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 01: Uma dieta balanceada

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 01

Para uma boa alimentação, o corpo necessita de vitaminas e proteínas. A necessidade mínima de vitaminas é de 32 unidades por dia e a de proteínas é de 36 unidades por dia.

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 01 (continuação)

Uma pessoa tem disponível carne e ovos para se alimentar.

Cada unidade de ovo contem 8 unidades de vitamina e 6 de proteína e cada unidade de carne contém 4 unidades de vitamina e 6 de proteínas.

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 01 (continuação)

Qual a quantidade diária de carne e ovos que deve ser consumida para suprir as necessidades de vitaminas e proteínas com o menor custo?

Cada unidade de carne custa R$ 3,00 e cada unidade de ovo custa R$ 2,50.

3.2. Exemplos de Aplicação

Auguste Rodin (1840 – 1917)

3.2. Exemplos de Aplicação

Fases para elaborar o *modelo* do problema:

1. Identificar as *variáveis de decisão*
2. Construir a *função objetivo*
3. Expressar as restrições aplicáveis
4. Explicitar formalmente o *modelo* concebido

3.2. Exemplos de Aplicação

1ª Fase: Identificar as *variáveis de decisão*

x_1: Qtde de carne consumida por dia
x_2: Qtde de ovos consumida por dia

3.2. Exemplos de Aplicação

2ª Fase: Construir a *função objetivo*

$$\textbf{min } z = \underbrace{3,00}_{\text{custo carne}}.x_1 + \underbrace{2,50}_{\text{custo ovos}}.x_2$$

O objetivo é gastar o menos possível com a dieta.

3.2. Exemplos de Aplicação

3ª Fase: Expressar as *restrições* aplicáveis

$$4.x_1 + 8.x_2 \geq 32$$
$$6.x_1 + 6.x_2 \geq 36$$

$$x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0$$

3.2. Exemplos de Aplicação

4ª Fase: Explicitar formalmente o *modelo* concebido

Exemplo 01: modelo de PPL

min $z = 3{,}00.x_1 + 2{,}50.x_2$

sujeito a

$$
\left|
\begin{array}{l}
4.x_1 + 8.x_2 \geq 32 \\
6.x_1 + 6.x_2 \geq 36 \\
\\
x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0
\end{array}
\right.
$$

```
Exemplo 01: Implementado no LINDO...

min 3.00x1 + 2.50x2

st
    4x1 + 8x2 >= 32
    6x1 + 6x2 >= 36

    x1 >= 0
    x2 >= 0
```

RESPOSTA:

```
LP OPTIMUM FOUND AT STEP        1

        OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      15.00000

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1         0.000000          0.500000
        X2         6.000000          0.000000
```

RESPOSTA: (continuação)

ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	16.000000	0.000000
3)	0.000000	-0.416667
4)	0.000000	0.000000
5)	6.000000	0.000000

NO. ITERATIONS= 1

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02: Um problema de produção

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02

Uma indústria produz sapatos, bolsas e cintos, cuja venda resulta em lucro, por unidade vendida, de R$ 2,00; R$ 3,00 e R$ 1,50, respectivamente.

Para fabricar estes produtos são necessárias quatro matérias-primas: couro, borracha, metal e rebite.

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02 (continuação)

A tabela a seguir mostra o número de unidades de matérias-primas consumidas para a produção de uma unidade de cada produto.

Apresenta também a quantidade em estoque de cada matéria-prima.

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02 (continuação)

Matéria-prima	Produtos Fabricados			Matéria-prima em estoque
	Sapatos	Bolsas	Cintos	
Couro	2	3	1	900
Metal	0	2	1	500
Borracha	1	2	1	800
Rebite	3	4	2	1500

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02 (continuação)

Outra informação importante é o número de horas de mão-de-obra necessárias para produzir uma unidade de cada produto:

Recurso	**Homens-hora necessários para a produção**		
	Sapato	Bolsa	Cinto
Mão-de-obra	3,0	5,0	1,0

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02 (continuação)

O planejamento da produção é mensal e conta com no máximo 1.050 homens-hora.

Por fim, sabe-se que a indústria recebeu uma encomenda de, no mínimo, 600 itens, e que fez compromisso contratual em atender sem nenhum atraso o fornecimento destes produtos.

3.2. Exemplos de Aplicação

Exemplo 02 (continuação)

Questiona-se:

a) Qual o modelo de produção que permite à indústria atender ao pedido recebido e obter o maior lucro possível, respeitando-se as restrições impostas?

3.2. Exemplos de Aplicação

Fases para elaborar o *modelo* do problema:

1. Identificar as *variáveis de decisão*
2. Construir a *função objetivo*
3. Expressar as restrições aplicáveis
4. Explicitar formalmente o *modelo* concebido

3.2. Exemplos de Aplicação

1ª Fase: Identificar as *variáveis de decisão*

$\mathbf{x_1}$: Qtde de sapatos produzidos

$\mathbf{x_2}$: Qtde de bolsas produzidos

$\mathbf{x_3}$: Qtde de cintos produzidos

3.2. Exemplos de Aplicação

1ª Fase: Identificar as *variáveis de decisão*

2ª Fase: Construir a *função objetivo*

x_1: Qtde de sapatos produzidos

x_2: Qtde de bolsas produzidos

x_3: Qtde de cintos produzidos

3.2. Exemplos de Aplicação

3ª Fase: Expressar as *restrições* aplicáveis

$$2.x_1 + 3.x_2 + 1.x_3 \leq 900 \quad \{ \text{ couro } \}$$
$$0.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \leq 500 \quad \{ \text{ metal } \}$$
$$1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \leq 800 \quad \{ \text{ borracha } \}$$
$$3.x_1 + 4.x_2 + 2.x_3 \leq 1500 \quad \{ \text{ rebite } \}$$

3.2. Exemplos de Aplicação

3ª Fase: Expressar as *restrições* aplicáveis

$$3.x_1 + 5.x_2 + 1.x_3 \leq 1050 \quad \{ \text{ mão-de-obra } \}$$

$$1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 \geq 600 \quad \{ \text{ pedido } \}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \quad \text{e} \quad x_3 \geq 0$$

3.2. Exemplos de Aplicação

4ª Fase: Explicitar formalmente o *modelo* concebido

Exemplo 02: modelo de PPL

max $z = 2{,}00.x_1 + 3{,}00.x_2 + 1{,}50.x_3$

sujeito a

$2.x_1 + 3.x_2 + 1.x_3 \leq 900$ { couro }

$0.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \leq 500$ { metal }

$1.x_1 + 2.x_2 + 1.x_3 \leq 800$ { borracha }

$3.x_1 + 4.x_2 + 2.x_3 \leq 1500$ { rebite }

$3.x_1 + 5.x_2 + 1.x_3 \leq 1050$ { mão-de-obra }

$1.x_1 + 1.x_2 + 1.x_3 \geq 600$ { pedido }

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ e $x_3 \geq 0$

Exemplo 02: Implementado no LINDO...

```
max 2x1 + 3x2 + 1.5x3
st
       2x1 + 3x2 + 1x3 <=  900
       0x1 + 2x2 + 1x3 <=   500
       1x1 + 2x2 + 1x3 <=  800
       3x1 + 4x2 + 2x3 <=  1500
       3x1 + 5x2 + 1x3 <=  1050
       1x1 + 1x2 + 1x3 >=  600

       x1 >= 0
        x2 >= 0
        x3 >= 0


end
```

Resposta:

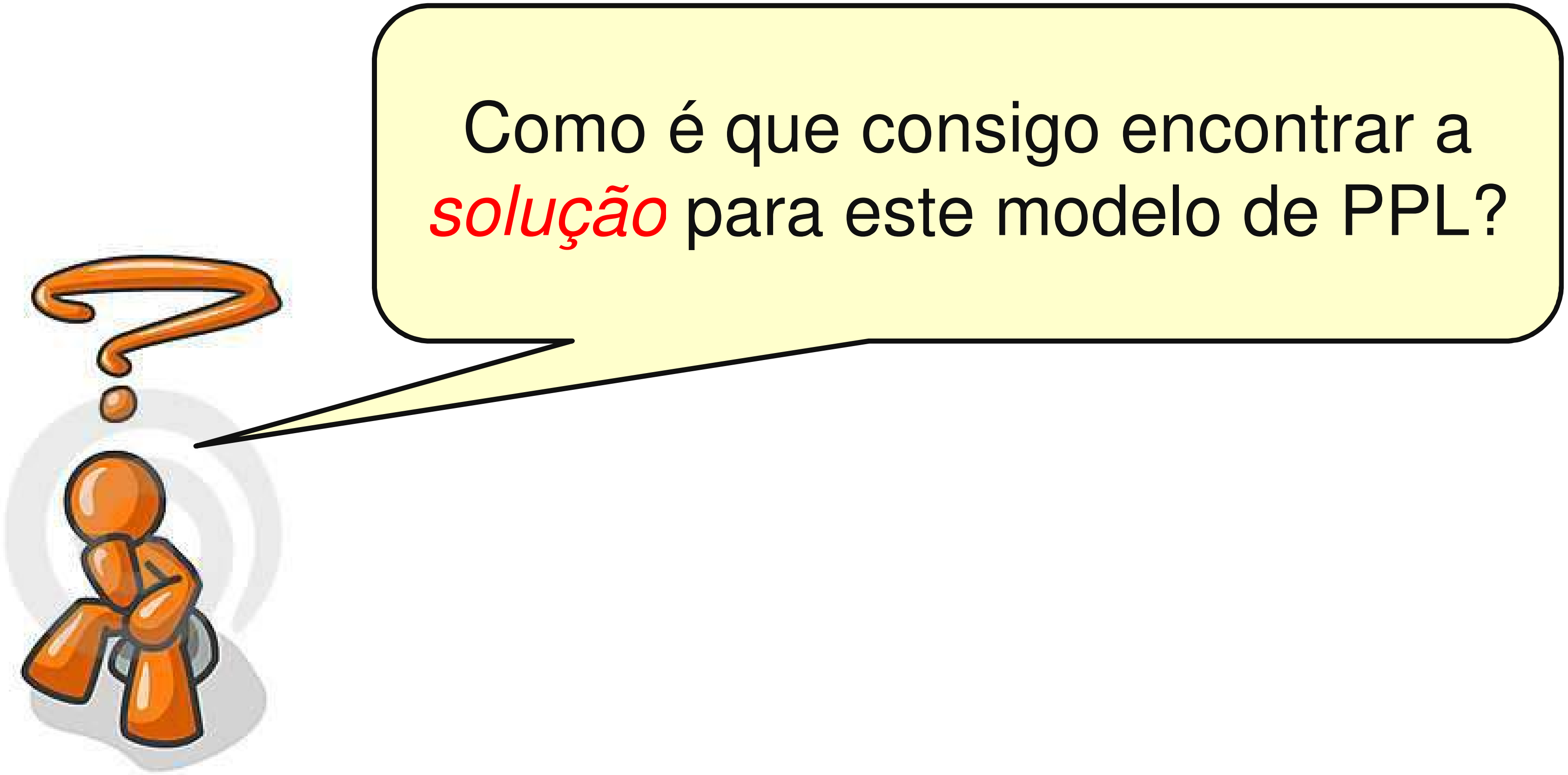
```
OBJECTIVE FUNCTION VALUE

        1)      1083.333

  VARIABLE        VALUE          REDUCED COST
        X1       166.666672         0.000000
        X2        16.666666         0.000000
        X3       466.666656         0.000000
```

Resposta: (continuação)

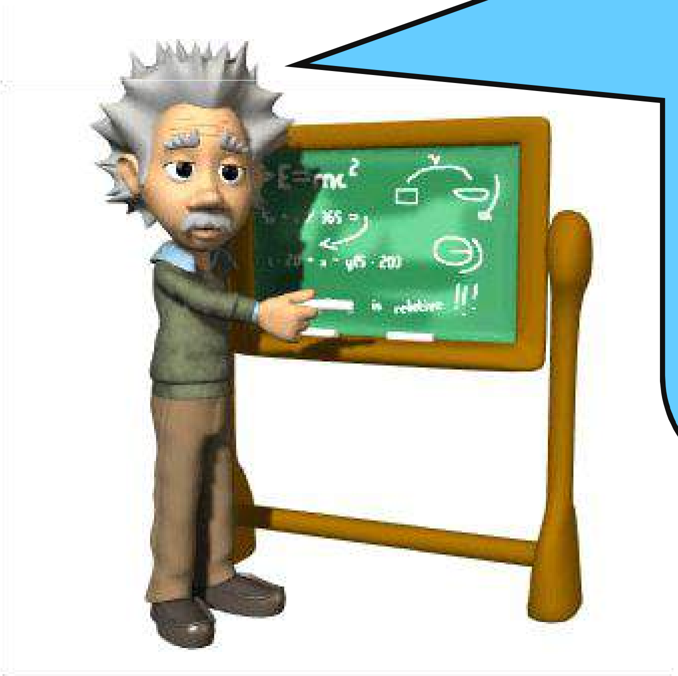
ROW	SLACK OR SURPLUS	DUAL PRICES
2)	50.000000	0.000000
3)	0.000000	0.166667
4)	133.333328	0.000000
5)	0.000000	0.666667
6)	0.000000	0.000000
7)	50.000000	0.000000
8)	166.666672	0.000000
9)	16.666666	0.000000
10)	466.666656	0.000000

NO. ITERATIONS= 0

3.2. Exemplos de Aplicação



3.2. Exemplos de Aplicação

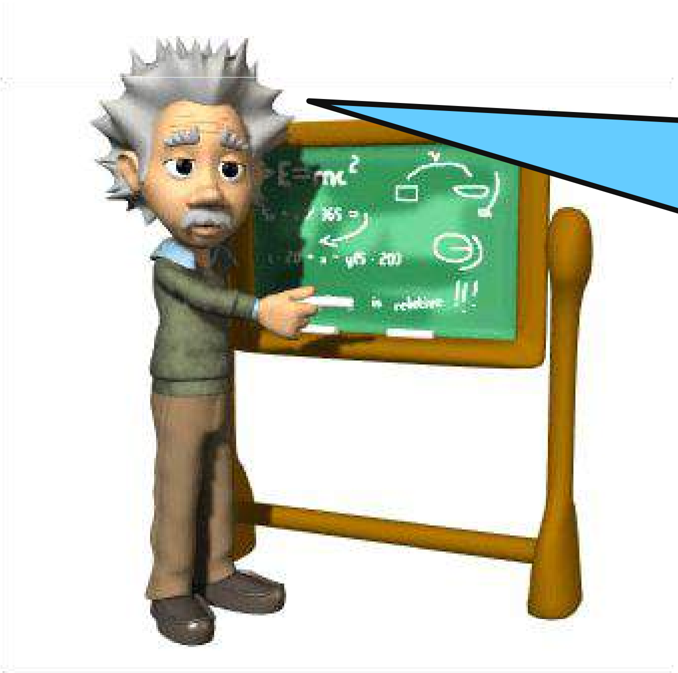


Fácil...
Há um método denominado *Simplex* que obtém a solução ótima para o PPL
(se existe solução).

Capítulo 3: Programação Linear

3.2. Exemplos de Aplicação

3.2. Exemplos de Aplicação



Não se preocupe...

vamos aprendê-lo em breve!

3.3

Definição Geral de Problema de Programação Linear (PPL)

3.3. Definição Geral do PPL

- Um PPL pode ser *formulado* da seguinte maneira:

$$\textit{Otimizar } z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_i$$

sujeito a:

3.3. Definição Geral do PPL

$\sum a_{ij} x_j \geq b_i$ $\quad\quad$ $i = 1, 2, 3, \ldots, p$

$\sum a_{ij} x_j = b_i$ $\quad\quad$ $i = (p+1), (p+2), (p+3), \ldots, m$

$x_j \geq 0$ $\quad\quad$ $j = 1, 2, 3, \ldots, q$

$x_j \in \Re$ $\quad\quad$ $j = (q+1), (q+2), (q+3), \ldots, n$

3.3. Definição Geral do PPL

com*:*

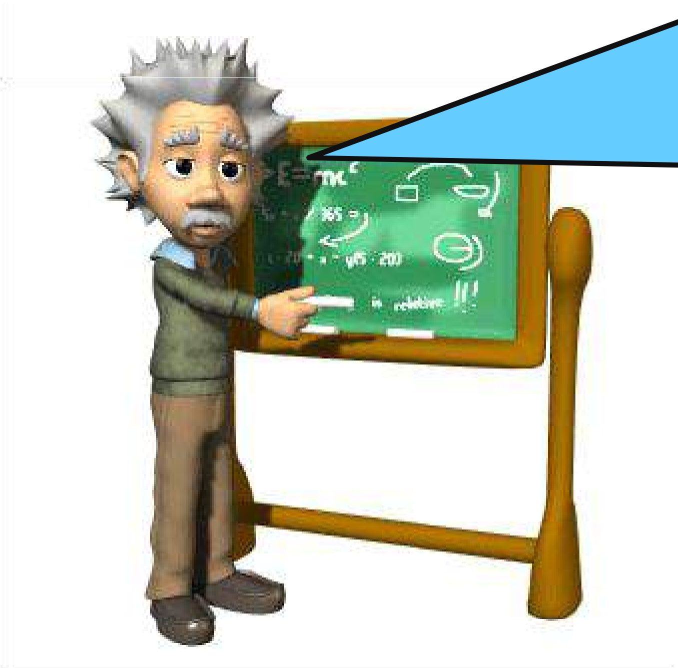
$A = \{a_{ij}\} \equiv$ matriz de restrições (ordem *m* x *n*)
$x = (x_j)$ = vetor *coluna* de *n* componentes
$c = (c_j)$ = vetor *linha* de *n* componentes

Otimizar ≡ *minimizar* ou *maximizar*

3.3. Definição Geral do PPL

Só há *uma maneira* de expressar um modelo para um PPL?

3.3. Definição Geral do PPL



Não apenas uma.

Há TRÊS formas de expressar um modelo:

- mista
- canônica
- padrão

3.3. Definição Geral do PPL

1. Forma mista (já vista)

$$Otimizar\ z = c.x$$

sujeito a:

$$A.x \geq b \qquad \text{ou} \qquad A.x = b$$

$$x \geq 0$$

3.3. Definição Geral do PPL

2. Forma canônica

$$\text{Otimizar } z = c.x$$

sujeito a:

$$A.x \leq b \qquad \text{ou} \qquad A.x \geq \text{b}$$

$$x \geq 0$$

3.3. Definição Geral do PPL

3. Forma padrão

$$\text{Otimizar } z = c.x$$

sujeito a:

$$A.x = b$$

$$x \geq 0 \text{ e } b \geq 0$$

3.3. Definição Geral do PPL

3. Forma padrão

$$Min\ \ z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

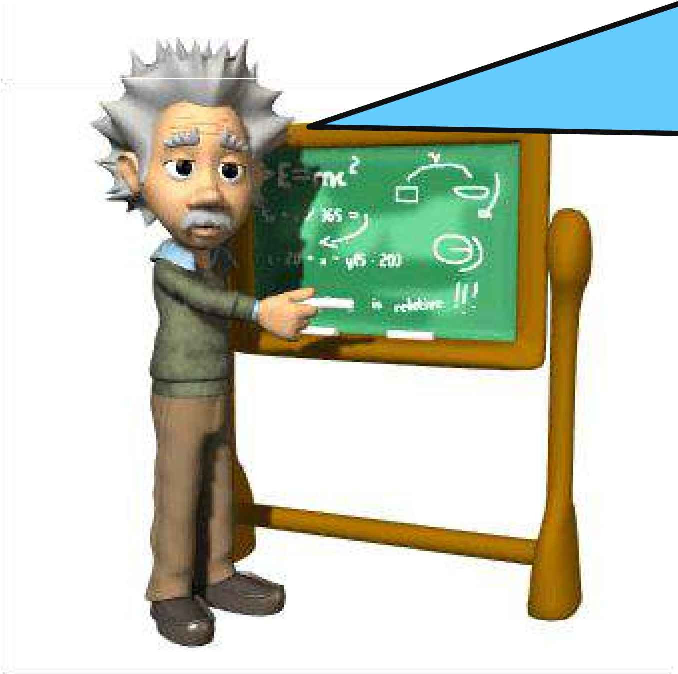
sujeito a:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m \end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

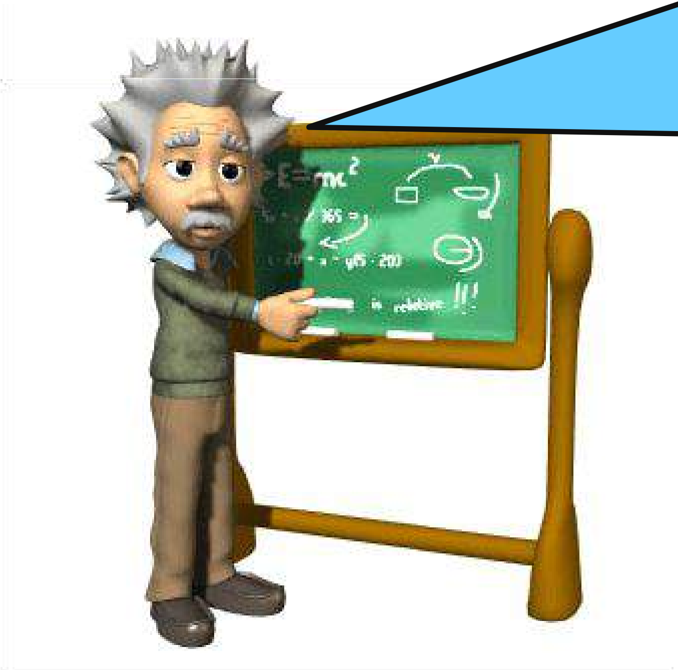
Os termos independentes, “b’s”, são todos positivos.

3.3. Definição Geral do PPL



As três formas são equivalentes!

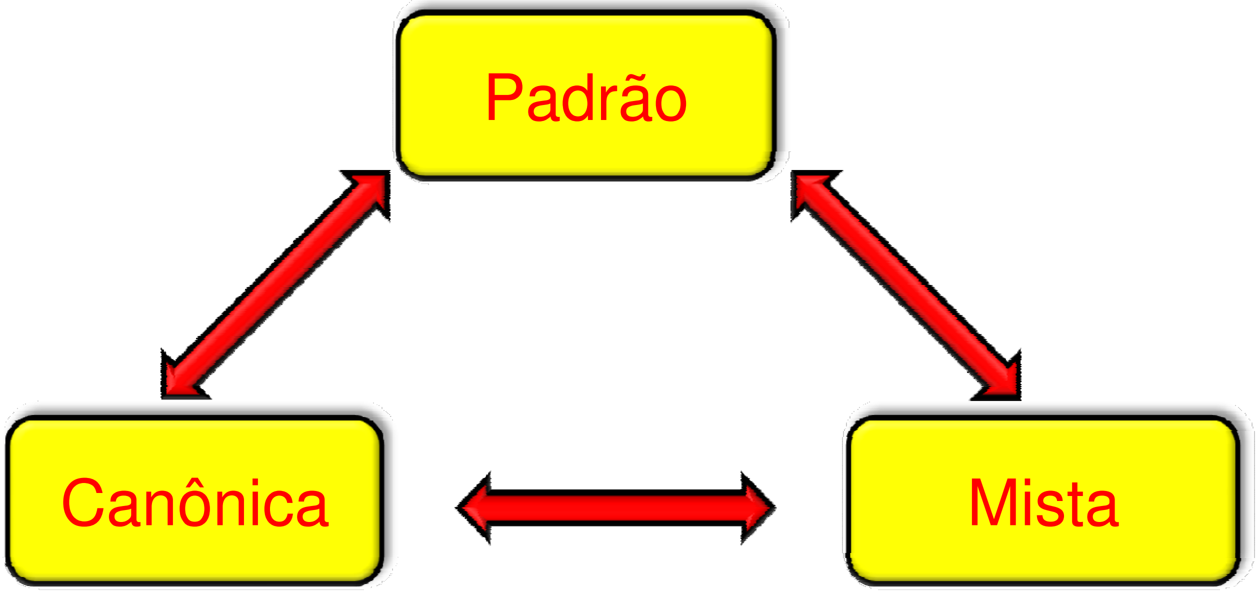
3.3. Definição Geral do PPL



Equivalentes significa que se pode converter um modelo de PPL para qualquer uma delas a partir de outra dada.

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas



3.3. Definição Geral do PPL

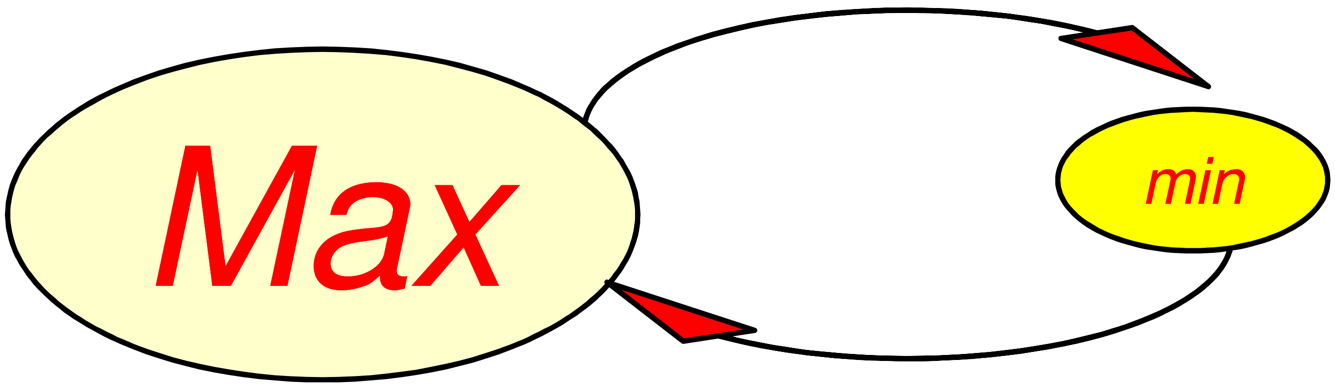
- Equivalência das formas

  - Por meio de *operações elementares* um modelo expresso numa forma (mista, canônica ou padrão) pode ser expresso noutra forma.

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

1ª operação: mudar critério de otimização



3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

1ª operação: mudar critério de otimização.

$$\max [\ f(x)\ ] = \min [\ -f(x)\ ]$$
$$\min [\ f(x)\ ] = \max [\ -f(x)\ ]$$

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

2ª operação: transformar variável *livre* em variável não negativa .

$$x_n = x_a - x_b \text{ com } x_n \in \Re,\ x_a \geq 0 \text{ e } x_b \geq 0$$

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

3ª operação: transformar desigualdades em igualdades (ou vice-versa).

$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \leq b$ ⟵ adicionar variável $x_{(n+1)}$

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

3ª operação: transformar desigualdades em igualdades (ou vice-versa).

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n + x_{(n+1)} = b$$

com $x_{(n+1)} \geq 0$

Variável de "folga"

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

3ª operação: transformar desigualdades em igualdades (ou vice-versa).

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n \geq b$$

subtrair variável $x_{(n+1)}$

3.3. Definição Geral do PPL

- Equivalência das formas

3ª operação: transformar desigualdades em igualdades (ou vice-versa)

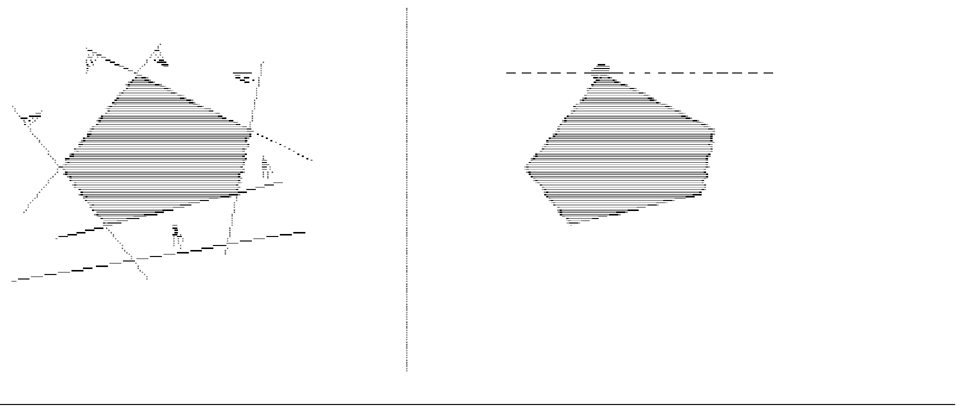
$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n - x_{(n+1)} = b$$

com $x_{(n+1)} \geq 0$

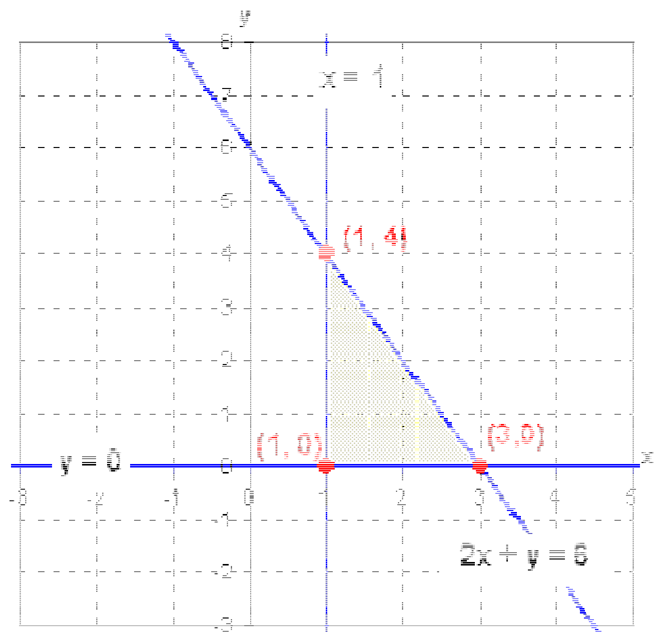
Variável de "excesso"

3.4

Solução Gráfica de um PPL



ENTRADA SAÍDA

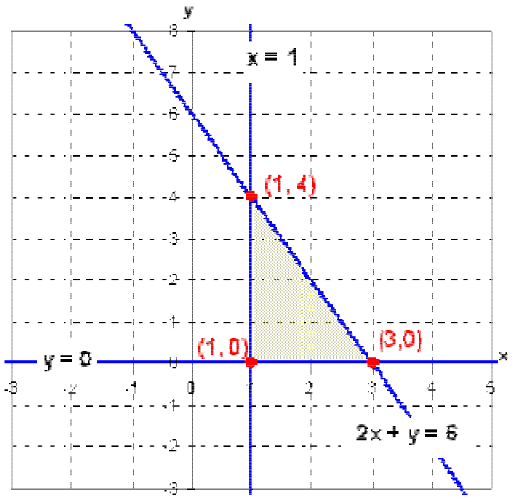


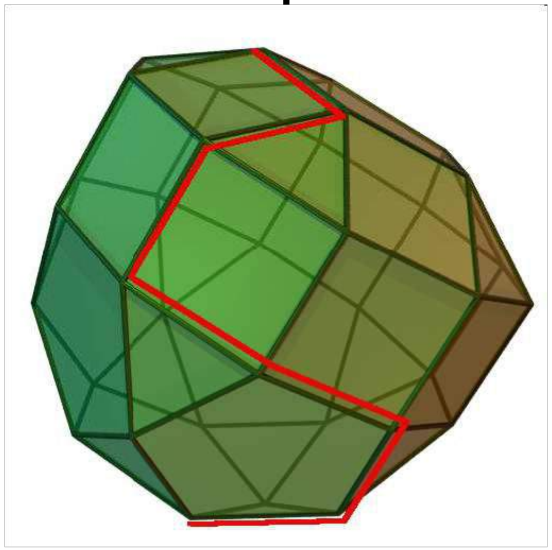
3.4. Solução Gráfica de um PPL

- Em *teoria* pode-se resolver qualquer PPL por meio de um *método gráfico*, ou seja:
  - representando a *função objetivo* e *as restrições* graficamente num plano cartesiano *"n"* dimensional.

3.4. Solução Gráfica de um PPL

- Na *prática* apenas problemas que envolvam 2 ou 3 variáveis de decisão podem ser resolvidos por meio gráfico.





3.4. Solução Gráfica de um PPL

Acompanhe, em sala de aula, a apresentação do método gráfico para resolução de PPLs

Exemplo 01: modelo de PPL

min $z = 3{,}00.x_1 + 2{,}50.x_2$

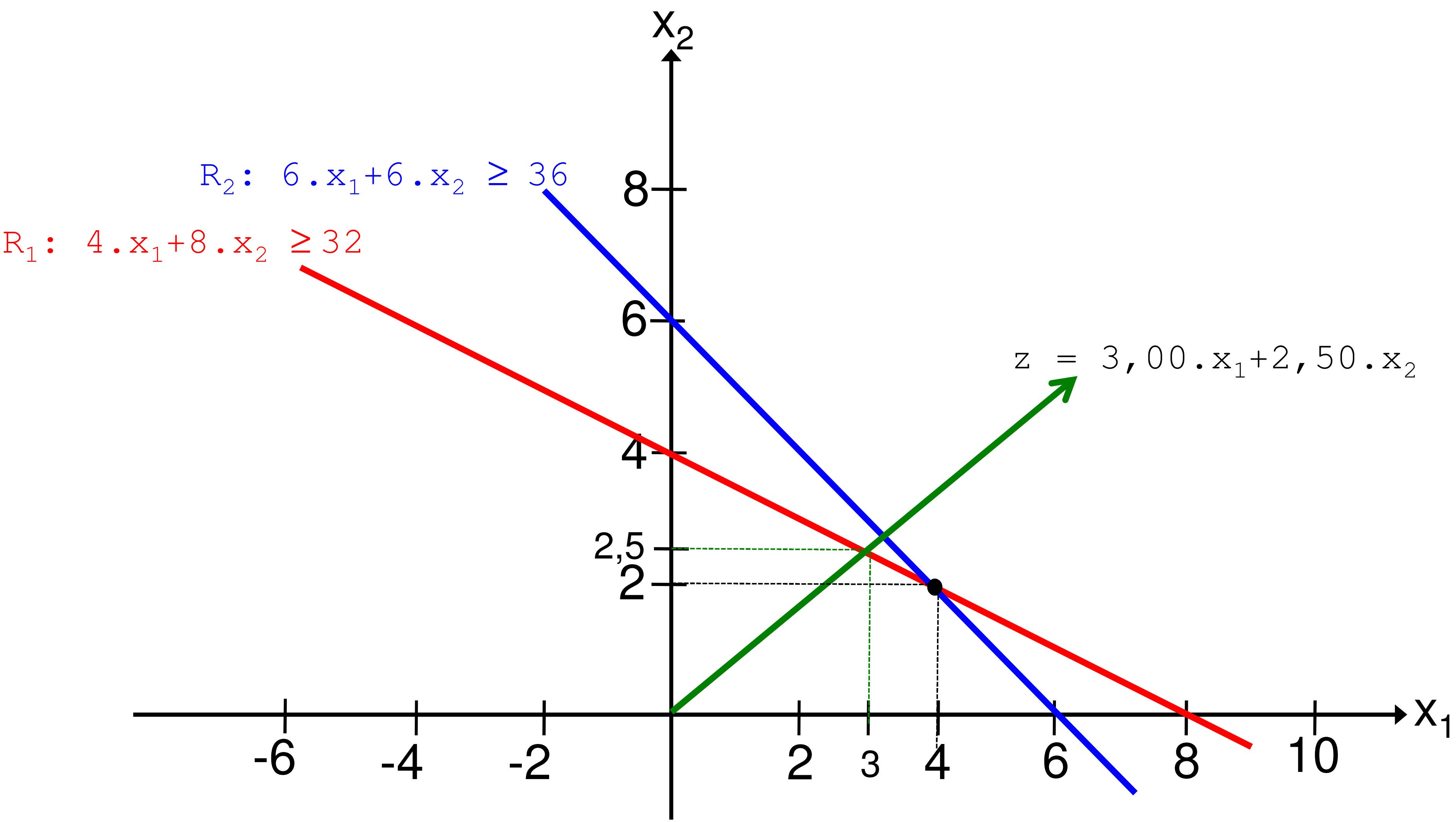
sujeito a

$$
\begin{cases}
4.x_1 + 8.x_2 \geq 32 \\
6.x_1 + 6.x_2 \geq 36 \\
\\
x_1 \geq 0 \text{ e } x_2 \geq 0
\end{cases}
$$

3.4. Solução Gráfica de um PPL

- Considere o *Exemplo 01 – Problema da Dieta* para resolução pelo método gráfico...

  - Como há somente DUAS variáveis de decisão, o *gráfico* será *bidimensional*... portanto a função objetivo e as restrições serão representadas por *retas*.



x2
R2: 6.x1+6.x2 ≥ 36
R1: 4.x1+8.x2 ≥ 32
8
6
4
2,5
2
z = 3,00.x1+2,50.x2
-6
-4
-2
2
3
4
6
8
10
x1

3.4. Solução Gráfica de um PPL

- Ponto de mínimo custo: (0, 6)
- Custo mínimo:

$$z = 3,00.x_1 + 2,50.x_2$$
$$z = 3,00.0 + 2,50.6$$
$$z = 0,00 + 15,00$$
$$z = 15,00$$

O custo mínimo da dieta é de R$ 15,00.

3.5

Exercícios do Capítulo

3.5. Exercícios do Capítulo

O professor encaminhará, por correio eletrônico, arquivo em formato .PDF (*Portable Document Format*) com a

Lista de Exercício do capítulo.

3.6

Saiba Mais...

3.6. Saiba Mais...

- International Federation of the OR Societies
  www.ifors.org
- Sociedade Brasileira de Pesquisa Operacional
  www.sobrapo.org.br
- Australian Society for Operations Research
  www.asor.org.au

3.6. Saiba Mais...

- Institute for OR and the Management Sciences
  www.informs.org
- Operational Research Society of United Kingdom
  www.orsoc.org.uk
- Canadian OR Society
  www.cors.ca

3.6. Saiba Mais...

- ILOG
  www.ilog.com
- Hearne Scientific Software
  www.hearne.com.au
- OR – The OR Society
  www.theorsociety.com

3.6. Saiba Mais...

- LINDO Systems
  www.lindo.com
- The MathWorks
  www.mathlab.com
- Maple Software
  www.maplesoft.com