Problema 1.

Conte em quantas maneiras podemos cobrir um tabuleiro de dimensão $2 \times n$ com peças-dominô (ou seja, peças de dimensão 2×1).

Demonstração

Seja D(n) o número de maneiras que podemos cobrir um tabuleiro de dimensão $2 \times n$ com peças-dominô.

Usando o principio da adição.

$$
\begin{aligned}
D(0) &= 1 \\
D(1) &= 1 \\
\forall n > 1 D(n) &= D(n-1) + D(n-2)
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{D(n-1)}_{\text{onde o tabuleiro começa com uma peça no vertical}}$$

$$\underbrace{D(n-2)}_{\text{onde o tabuleiro começa com duas peças no vertical, ou horizontal}}$$

Problema 2.

Do alfabeto $\{a, b, c\}$ desejamos formar strings de tamanho ℓ onde não aparece o substring ab. Em quantas maneiras podemos fazer isso?

Demonstração

Seja K(n) o número de maneiras que podemos formar a string de tamanho n onde não aparece a substring ab.

Usando o principio da adição.

$$
\begin{aligned}
K(0) &= 1 \\
K(1) &= 3 \\
K(2) &= 8 \\
\forall n > 2 \ K(n) &= K(n-1) + K(n-1) + K(n-2) + K(n-2) - K(n-3)
\end{aligned}
$$

$$\underbrace{K(n-1)}_{\text{onde } a \text{ string não começa com o caractere a}}$$

$$\underbrace{K(n-2)}_{\text{onde } a \text{ string não começa com o caractere } ab}$$

$$\underbrace{K(n-3)}_{\text{onde a string começa com o caractere } b \text{ e depois é colocado o } a \text{ antes dele}}$$

Problema 3.

Definimos a $\leq$ nos naturais assim:

$$n \leq m \overset{\text{def}}{\iff} (\exists k \in \mathbb{N})[n + k = m]$$

Demonstre por indução que $\leq$ é uma bem-ordem:

Para todo $A \subseteq \mathbb{N}$, $A = \emptyset$ ou A possui mínimo.

Dica: visualise teu alvo assim:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\forall A \subseteq \mathbb{N})[|A| = n \implies \text{A vazio ou possui minimo}]$$

Onde $|A|$ denota a cardinalidade do A, ou seja, a quantidade de membros de A. Considere conhecido que:

$$|A| = 0 \iff A = \emptyset_{(a1101)}$$

$$|A| = Sn \iff (\exists a \in A)(\exists A' \subseteq A)[a \notin A' \;\&\; |A'| = n] \;\&\; (\forall x \in A)[x = a \text{ ou } x \in A']]_{(b1101)}$$

Lembre-se que $m \in A$ é minimo membro de A sse $(\forall x \in A)[m \leq a]$

Demonstração

Vou demonstrar a proposição.
Por indução!
BASE
Suponha |A|=0
Logo pela (a1101) $A = \emptyset$ ou A possui mínimo.
Passo Indutivo. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\forall A \subseteq \mathbb{N})[|A| = k \implies A = \emptyset \text{ ou possui minimo}] \text{ (H.I)}$$

Basta demonstrar que $(\forall A \subseteq \mathbb{N})[|A| = Sk \implies A = \emptyset$ ou possui minimo$]$

Seja $A \subseteq \mathbb{N}$ tal que $|A| = Sk$
Sejam $a \in A$ e $A' \subseteq A$ tais que $a \notin A'$ & $|A'| = n$ & $(\forall x \in A)[x = a$ ou $x \in A']$
Logo $A' \subseteq \mathbb{N}$ $(A' \subseteq A \subseteq \mathbb{N})$
Logo pelo H.I, $A' = \emptyset$ ou possui minimo.
Dividindo em casos

CASO $A' = \emptyset$

Logo pela (b1101) $(\forall x \in A)[x = a]$
Logo A possui minimo.

CASO A' possui minimo
Seja $y \in A'$ tal que $(\forall m \in A')[y \leq m]$
Logo $(\forall m \in A)[y \leq m \leq a$ ou $a \leq y \leq m]$
Logo A possui minimo.

∎

Problema 4.

Faria sentido trocar o '($\exists a \in A$)' por '($\forall a \in A$)' na penúltima linha do Problema 3? Explique curtamente.
Resposta: Não, pois A' não poderia ser subconjunto de A

.

Só isso mesmo.