Problema 1.

Com as definições das operações do capítulo «Naturais; recursão; indução», demonstre a distributividade esquerda da $\cdot$ sobre a $+$ nos naturais:

$$(\forall x)(\forall a)(\forall b)[x \cdot (a+b) = (x \cdot a)(x \cdot b)]$$

Das propriedades de operações podes apenas considerar como dada a associatividade da $+$

Demonstração

Vou demonstrar a proposição.
Por indução no b!

BASE: $x \cdot (a+0) \stackrel{?}{=} (x \cdot a) + (x \cdot 0)$
Calculamos:

$$\begin{aligned} x \cdot (a+0) &= x \cdot a && \text{(Pela (a1) com } n := a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (x \cdot a) + (x \cdot 0) &= x \cdot a + 0 && \text{(Pela (m1) com } n := x) \\ &= x \cdot a && \text{(Pela (a1) com } n := a) \end{aligned}$$

Passo Indutivo. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$x \cdot (a+k) = (x \cdot a) + (x \cdot k) \text{ (H.I)}$$

Basta demonstrar que $x \cdot (a + (k+1)) = (x \cdot a) + (x \cdot (k+1))$

Calculamos:

$$\begin{aligned} x \cdot (a + (k+1)) &= x \cdot ((a+k)+1) && \text{(Pela associatividade da } +) \\ &= (x \cdot (a+k)) + x && \text{(Pela (m2) com } n := x,\ m := (a+k)) \\ &= ((x \cdot a) + (x \cdot k)) + x && \text{(H.I)} \\ &= (x \cdot a) + ((x \cdot k) + x) && \text{(Pela associatividade da } +) \\ &= (x \cdot a) + (x \cdot (k+1)) && \text{(Pela (m2}^{\leftarrow}\text{) com } n := x,\ m := (k)) \end{aligned}$$

∎

Problema 2.

Divulgando o LEM (princípio do terceiro excluido) tentei vender a idéia que seria essencial para demonstrar mais proposições do que realmente é! Com as definições de par e ímpar seguintes

$$n \textit{ par} \overset{def}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})[n = 2k]$$
$$n \textit{ impar} \overset{def}{\iff} (\exists k \in \mathbb{Z})[n = 2k + 1]$$

e sem usar nenhum dos feitiços que discutimos (LEM, Reductio ad Absurdum, Lei da dupla negação, etc.) demonstre diretamente (por indução) a proposição: todo número natural é par ou ímpar

Demonstração

Vou demonstrar a proposição.
Por indução!

BASE: $(\exists t \in \mathbb{Z})[0 = 2t] \overset{?}{\textit{ou}} (\exists t \in \mathbb{Z})[0 = 2t + 1]$
Suponha t=0
Calculamos:

$$\begin{aligned} 0 &= 2 \cdot 0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Como $0 \in \mathbb{Z}$, logo $(\exists t \in \mathbb{Z})[0 = 2t]$ *ou* $(\exists t \in \mathbb{Z})[0 = 2t + 1]$

PASSO INDUTIVO. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$(\exists t \in \mathbb{Z})[k = 2t] \textit{ ou } (\exists t \in \mathbb{Z})[k = 2t + 1] \text{ (H.I)}$$

Basta demonstrar que $(\exists t \in \mathbb{Z})[k + 1 = 2t]$ *ou* $(\exists t \in \mathbb{Z})[k + 1 = 2t + 1]$

CASO $(\exists t \in \mathbb{Z})[k = 2t]$
Seja $t \in \mathbb{Z}$, tal que $k = 2t$
Calculamos:

$$\begin{aligned} k + 1 &= (2t) + 1 && \text{(Hipótese do caso)} \\ &= 2t + 1 \end{aligned}$$

Como $t \in \mathbb{Z}$, logo $(\exists t \in \mathbb{Z})[k + 1 = 2t]$ *ou* $(\exists t \in \mathbb{Z})[k + 1 = 2t + 1]$

CASO $(\exists t \in \mathbb{Z})[k = 2t + 1]$
Seja $t \in \mathbb{Z}$, tal que $k = 2t + 1$
Calculamos:

$$\begin{aligned} k + 1 &= (2t + 1) + 1 && \text{(Hipótese do caso)} \\ &= 2t + (1 + 1) && \text{(Pela associatividade da +)} \\ &= 2t + 2 \\ &= 2 \cdot (t + 1) && \text{(distributividade da multiplicação)} \end{aligned}$$

Como $(t + 1) \in \mathbb{Z}$, logo $(\exists t \in \mathbb{Z})[k + 1 = 2t]$ *ou* $(\exists t \in \mathbb{Z})[k + 1 = 2t + 1]$

∎

Problema 3.

Considere a funcção recursiva $\mathbb{N}^2 \longrightarrow \mathbb{N}$, definida pelas equações:

$$\begin{aligned} &\text{(K1)} && \alpha(0, x) = x + 1 \\ &\text{(K2)} && \alpha(n + 1, 0) = \alpha(n, 1) \\ &\text{(K3)} && \alpha(n + 1, x + 1) = \alpha(n, \alpha(n + 1, x)) \end{aligned}$$

(i) Demonstre que para todo $x \in \mathbb{N}, \alpha(1, x) = x + 2$.
(ii) Dado que para todo $x \in \mathbb{N}, \alpha(2, x) = 2x + 3$, demonstre que para todo $x \in \mathbb{N}, \alpha(3, x) = 2^{x+3} - 3$.

Demonstração

Vou demonstrar a proposição (i).
Por indução!

BASE: $\alpha(1, 0) \stackrel{?}{=} 0 + 2$
Calculamos:

$$\begin{aligned} \alpha(1, 0) &= \alpha(0, 1) && \text{(Pela (K2) com } n := 0) \\ &= 1 + 1 && \text{(Pela (K1) com } x := 1) \\ &= 2 \end{aligned}$$

Passo Indutivo. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\alpha(1, k) = k + 2 \text{ (H.I)}$$

Basta demonstrar que $\alpha(1, (k + 1)) = (k + 1) + 2$

Calculamos:

$$\begin{aligned} \alpha(1, (k + 1)) &= \alpha(0, \alpha(1, k)) && \text{(Pela (K3) com } n := 0, x := k) \\ &= \alpha(0, (k + 2)) && \text{(H.I)} \\ &= (k + 2) + 1 && \text{(Pela (K1) com } x := k + 2) \\ &= k + (2 + 1) && \text{(Associatividade da } +) \\ &= k + (1 + 2) && \text{(Comutatividade da } +) \\ &= (k + 1) + 2 && \text{(Associatividade da } +) \end{aligned}$$

∎

Demonstração

Vou demonstrar a proposição (ii).
Temos que para todo $x \in \mathbb{N}, \alpha(2,x) = 2x + 3_{(d13)}$
Por indução!

BASE: $\alpha(3,0) = 2^{0+3} - 3$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\alpha(3,0) &= \alpha(2,1) && \text{(Pela (K2) com } n := 2\text{)} \\
&= 2+3 && \text{(d13 x:=1)} \\
&= 5 \\
&= 2^3 - 3
\end{aligned}$$

Passo Indutivo. Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\alpha(3,k) = 2^{k+3} - 3 \text{ (H.I)}$$

Basta demonstrar que $\alpha(3,(k+1)) = 2^{(k+1)+3} - 3$

Calculamos:

$$\begin{aligned}
\alpha(3,(k+1)) &= \alpha(2,\alpha(3,k)) && \text{(Pela (K3) com } n := 2, x := k\text{)} \\
&= \alpha(2,(2^{k+3} - 3)) && \text{(H.I)} \\
&= 2 \cdot (2^{k+3} - 3) + 3 && \text{(d13 x:=}(2^{k+3} - 3)\text{)} \\
&= (2 \cdot 2^{k+3}) - 6 + 3 && \text{(Propriedade distributiva)} \\
&= (2 \cdot 2^{k+3}) - 3 \\
&= 2^{(k+3)+1} - 3 && \text{(Def. Potenciação)} \\
&= 2^{k+(3+1)} - 3 && \text{(Associatividade da +)} \\
&= 2^{k+(1+3)} - 3 && \text{(Comutatividade da +)} \\
&= 2^{(k+1)+3} - 3 && \text{(Associatividade da +)}
\end{aligned}$$

∎

.

Só isso mesmo.