Problema 1.

Demonstre que dado qualquer inteiro a, existem únicos inteiros q e r tais que $a = 3q + r$ e $-1 \leq r \leq 1$.

Demonstração

Existência

Seja $a \in \mathbb{Z}$

Dividindo em casos

Caso $3 \nmid a$
Logo existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 3q + 1$ ou $a = 3q - 1$
Logo $a = 3q + r$ com $r = 1$ ou $r = -1$

Caso $3 \mid a$
Logo existe $q' \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 3q' + 0$
Logo $a = 3q' + r'$ com $r' = 0$

Logo pelos 2 casos existe $q \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 3q + r$ com $r = 1$ ou $r = -1$ ou $r = 0$
Logo existe $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que $a = 3q + r \;\; \& \;\; -1 \leq r \leq 1$

∎

Unicidade

Suponha $q, r, q', r' \in \mathbb{Z}$ tais que

$a = 3q + r \;\; \& \;\; -1 \leq r \leq 1 \;\; \&$
$a = 3q' + r' \;\; \& \;\; -1 \leq r' \leq 1$

Logo $3q' + r' = 3q + r$
Logo $r - r' = 3(q - q')$
Como $r < 3$
logo $r - r' = 0$
logo $q - q' = 0$
logo $q = q' \;\; \& \;\; r = r'$

∎

Problema 2.

Clique aqui

Demonstração

Existência
Vou demonstrar para $x \in \mathbb{Z}$.
Logo que multiplicando $d_m ... d_0$ por -1 individualmente temos o valor negativo da representação. Logo demonstrano para $x \in \mathbb{Z}$

Pela demonstração do problema 1, Sejam q, r tais que
$x = 3q + r \ \ \& \ \ -1 \leq r \leq 1$
Usando indução forte
Como $q < x$
Logo pela H.I
$q = d_m 3^m + ... + d_1 3^1 + d_0 3^0$
Logo $x = 3(d_m 3^m + ... + d_1 3^1 + d_0 3^0) + r$
Aplicando a propriedade distributiva
Logo $x = d_m 3^{m+1} + ... + d_1 3^2 + d_0 3^1 + r$
Logo $x = d_m 3^{m+1} + ... + d_1 3^2 + d_0 3^1 + r 3^0$
onde $-1 \leq r \leq 1$

$\blacksquare$

Unicidade
A unicidade é dada como consequência imediata da unicidade da demonstração do problema 1 e da Hipotese indutiva.

Problema 3.

Demonstre por indução que para todo $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{i=0}^{n} i \cdot i! = (n+1)! - 1$$

Demonstração

Vou demonstrar a proposição.
Por indução!
BASE $0 \cdot 0! \stackrel{?}{=} (0+1)! - 1$

$$\begin{aligned} 0 \cdot 0! &= 0 \\ (0+1)! - 1 &= 0 \end{aligned}$$

Passo Indutivo. Seja $k \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\sum_{i=0}^{k} i \cdot i! = (k+1)! - 1 \tag{H.I}$$

Basta demonstrar que $\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! = ((k+1)+1)! - 1$

Calculamos

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} i \cdot i! &= \sum_{i=0}^{k} i \cdot i! + (k+1)(k+1)! \\
&= (k+1)! - 1 + (k+1)(k+1)! && \text{(H.I)} \\
&= (k+1)! + (k+1)(k+1)! - 1 \\
&= (k+1)! + \underbrace{(k+1)! + (k+1)! + ... + (k+1)!}_{(k+1) \text{ vezes}} -1 \\
&= \underbrace{(k+1)! + (k+1)! + (k+1)! + ... + (k+1)!}_{(k+2) \text{ vezes}} -1 \\
&= (k+2) \cdot (k+1)! - 1 \\
&= ((k+1)+1)! - 1
\end{aligned}$$

∎

Problema 4.

Dawerton 4 (demonstração errada e sem tempo para consertar devido à outras turmas)

.

Só isso mesmo.