Sonho de Colaura

Divisão Euclidiana

Problema TT 6.20

Ache uma nova prova, Por indução do teorema de Fermat

Demonstração

Pelo Sonho de colaura,

Logo $(a+1)^p \equiv a^p + 1^p \pmod p$

Logo $(a+1)^p \equiv a^p + 1 \pmod p$

Subtraindo $(a+1)$ em ambos os lados

temos que $(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p + 1 - (a+1) \pmod p$

Logo $\boxed{(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a \pmod p}$ A-13

Por indução!

Base: $[p \mid a^p - a][p \mid 0^p - 0]$

$0^p - 0 = 0$

Logo $p \cdot 0 = 0$

P.I Suponha $\boxed{p \mid a^p - a}$ H.I

Precisamos Prova que $p \mid (a+1)^p - (a+1)$

Mas pela A13 se $(a+1)^p - (a+1) \equiv a^p - a \pmod p$

Logo $p \mid (a+1)^p - (a+1)$

Logo $a^p \equiv a \pmod p$

$(\forall p \text{ primo } \forall a \in \mathbb{Z})\ [a^p \equiv a \pmod p]$

#6.12 Sejam p,q Primos distintos: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

Demonstração

Pelo pequeno teorema de Fermat

temos que $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$

e que $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

logo $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{q}$

e $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

mas como $pq \mid p^{q-1} + q^{p-1} - 1$

logo $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

□

$(p,q \text{ Primos } p \neq q) \left[p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq} \right]$