Substituindo as derivadas parciais, temos

$$\begin{aligned}\partial_j A_k &= \frac{q}{c}\left[\frac{-a_k\hat{\mathbf{R}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_j}{Rc\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^2}-\frac{v_k\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{a}\hat{\mathbf{R}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_j}{Rc^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\right.\\ &- \left.\frac{v_k}{R^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^2}\left(\frac{\left(1-\beta^2\right)\hat{\mathbf{R}}\cdot\hat{\mathbf{x}}_j}{\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)}-\beta_j\right)\right]\end{aligned}$$

onde

$$\beta_j = \frac{v_j}{c}.$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}v_k\beta_j &= \varepsilon_{ijk}\beta_j v_k\\ &= \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}v_j v_k\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois, das propriedades do símbolo de Levi-Civita, vemos que

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}v_j v_k &= -\varepsilon_{ikj}v_j v_k\\ &= -\varepsilon_{ikj}v_k v_j\end{aligned}$$

e, como neste resultado, j e k são índices mudos, fazemos $j\to k$ e $k\to j$. Com isso, vem:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}v_j v_k &= -\varepsilon_{ikj}v_k v_j\\ &= -\varepsilon_{ijk}v_j v_k,\end{aligned}$$

isto é,

$$2\varepsilon_{ijk}v_j v_k = 0.$$

Em termos vetoriais, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \frac{q}{c}\left[\frac{-\hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{a}}{Rc\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^2}-\frac{\left(\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{a}\right)\hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{v}}{Rc^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\right.\\ &\left.-\frac{\left(1-\beta^2\right)\hat{\mathbf{R}}\times\mathbf{v}}{R^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\right],\end{aligned}$$

onde, como vimos, o termo proporcional a $\boldsymbol{\beta}\times\mathbf{v}$ se anula. Podemos ainda escrever

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c}\hat{\mathbf{R}}\times\left[\frac{-\mathbf{a}\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)-\left(\hat{\mathbf{R}}\cdot\mathbf{a}\right)\boldsymbol{\beta}}{Rc\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}-\frac{\left(1-\beta^2\right)\mathbf{v}}{R^2\left(1-\hat{\mathbf{R}}\cdot\boldsymbol{\beta}\right)^3}\right]$$

$$= \frac{q}{c}\hat{\mathbf{R}} \times \left[\frac{-\mathbf{a}\hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) + \left(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}\right)\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right)}{Rc\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} - \frac{\left(1 - \beta^2\right)\mathbf{v}}{R^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} \right],$$

onde adicionamos um termo proporcional a $\hat{\mathbf{R}}$ entre colchetes, que não contribui para $\mathbf{B}$, pois é multiplicado vetorialmente pelo $\hat{\mathbf{R}}$ que aparece fora dos colchetes. Notamos agora que

$$-\mathbf{a}\hat{\mathbf{R}} \cdot \left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) = \hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right].$$

Logo,

$$\mathbf{B} = \frac{q}{c}\hat{\mathbf{R}} \times \left\{ \frac{\hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right]}{Rc\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} - \frac{\left(1 - \beta^2\right)\mathbf{v}}{R^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} \right\}.$$

De maneira análoga, calculamos o campo elétrico e obtemos

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= q\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right)\left(1 - \beta^2\right)}{R^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} + \frac{\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right)\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a}}{Rc^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} - \frac{\mathbf{a}}{Rc^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^2} \right] \\
&= q\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right)\left(1 - \beta^2\right)}{R^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} + \frac{\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right)\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{a} - \mathbf{a}\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)}{Rc^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} \right] \\
&= q\left[\frac{\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right)\left(1 - \beta^2\right)}{R^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} + \frac{\hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right]}{Rc^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} \right]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}.$$

Emissão de energia por uma partícula carregada em movimento arbitrário

Vamos calcular a potência irradiada por uma partícula em movimento arbitrário. Os campos de radiação, $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ e $\mathbf{B}_{\text{rad}}$, produzidos por uma carga q que descreve uma trajetória $\mathbf{r}_0(t)$ arbitrária são deduzidos a partir dos potenciais de Liénard & Wiechert:

$$\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = q\frac{\hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right]}{Rc^2\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3}$$

e

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t) = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t),$$

onde

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}}),$$

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c},$$

$$R = |\mathbf{R}|,$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t_{\text{ret}}) \\ &= \frac{d\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})}{dt_{\text{ret}}} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_0(t_{\text{ret}}) \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

É importante notarmos que os campos são dados para o ponto arbitrário de observação, $\mathbf{r}$, no instante arbitrário de observação, t. Nesse ponto do espaço-tempo, entretanto, a radiação que ali se encontre, necessariamente terá sido a emitida pela partícula no instante retardado t_{ret} e na posição $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$. O vetor de Poynting de radiação, nesse caso, fica

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) \times \mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) \\ &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) \times \left[\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t)\right] \\ &= \frac{c}{4\pi}\hat{\mathbf{R}}\left[\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t)\right] - \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t)\,\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t). \end{aligned}$$

Como

$$\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = \mathbf{0},$$

segue que

$$\mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) = \frac{c}{4\pi}\hat{\mathbf{R}}\,|\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t)|^2.$$

Seja $d^2W/d\Omega$ a energia por unidade de ângulo sólido $d\Omega$ emitida pela partícula durante o intervalo de tempo dt_{ret}. Seja S a superfície esférica, centrada em $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$, com raio R. Dentro do ângulo sólido $d\Omega$, em torno do vetor $\mathbf{R}$, a energia d^2W leva um intervalo de tempo dt para passar através do elemento de área $R^2 d\Omega$. Podemos escrever, portanto,

$$\frac{d^2W}{d\Omega dt} = R^2\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t),$$

isto é,

$$d^2W = dt d\Omega R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t).$$

Como essa mesma quantidade de energia é a que a partícula emite em um intervalo dt_{ret}, segue que a potência emitida pela partícula, no ponto $\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})$ de sua trajetória, é dada por

$$\frac{dW}{dt_{\text{ret}}} = \int_{4\pi} d\Omega \frac{dt}{dt_{\text{ret}}} R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{S}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t),$$

onde a integral é sobre todo o ângulo sólido compreendido por S. Como

$$t_{\text{ret}} = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c},$$

segue que

$$t = t_{\text{ret}} + \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}{c}$$

e, portanto,

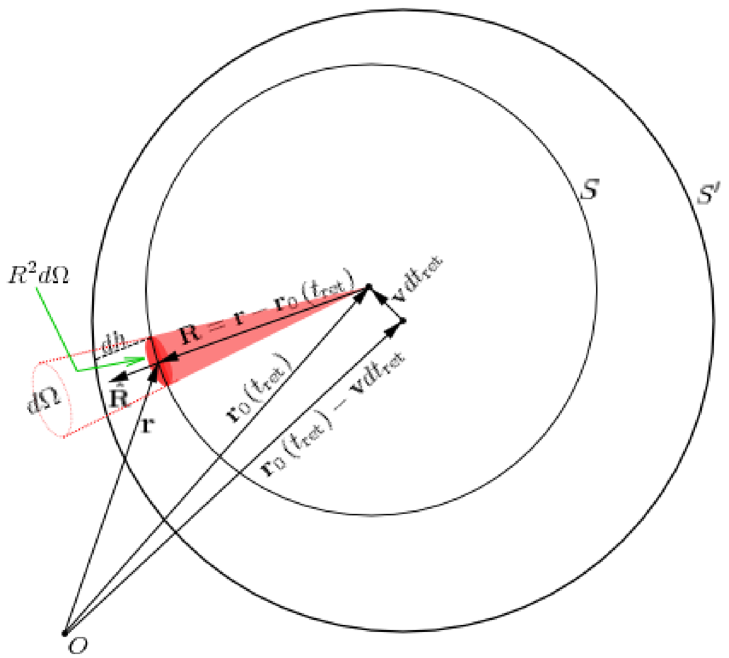
$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dt_{\text{ret}}} &= 1 - \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})}{c\,|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})|}\right] \cdot \frac{d\mathbf{r}_0(t_{\text{ret}})}{dt_{\text{ret}}} \\
&= 1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}.
\end{aligned}$$

Com isso, vemos que a potência irradiada pela partícula é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt_{\text{ret}}} &= \frac{c}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega \left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \left|\mathbf{E}_{\text{rad}}(\mathbf{r}, t)\right|^2 \\
&= \frac{c}{4\pi} \int_{4\pi} d\Omega \left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) R^2 \hat{\mathbf{R}} \cdot \hat{\mathbf{R}} \left| q \frac{\hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right]}{Rc^2 \left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} \right|^2,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{dW}{dt_{\text{ret}}} &= \frac{q^2}{4\pi c^3} \int_{4\pi} d\Omega \left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) \left| \frac{\hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right]}{\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^3} \right|^2, \\
&= \frac{q^2}{4\pi c^3} \int_{4\pi} d\Omega \frac{\left|\hat{\mathbf{R}} \times \left[\left(\hat{\mathbf{R}} - \boldsymbol{\beta}\right) \times \mathbf{a}\right]\right|^2}{\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right)^5}.
\end{aligned}$$



Outra maneira de deduzir essa mesma expressão para a potência irradiada é a seguinte. Considere que a superfície S esteja centrada no ponto $\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right)$ e que o cálculo que estamos fazendo seja no instante t. Durante um intervalo de tempo dt_{ret}, antes de t_{ret}, a partícula estava em $\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right) - \mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)dt_{\text{ret}}$. A radiação se propaga com velocidade de magnitude c. Então, no instante $t > t_{\text{ret}}$, toda a energia emitida pela partícula entre os instantes $t_{\text{ret}} - dt_{\text{ret}}$ e t_{ret} se encontra entre duas superfícies esféricas de raios $c\left(t - t_{\text{ret}}\right)$ e $c\left(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}}\right)$, a primeira, S, centrada em $\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right)$ e a segunda, S', centrada em $\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right) - \mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)dt_{\text{ret}}$. Note que a segunda superfície esférica, S', contém a primeira, S, pois teve mais tempo para se expandir com velocidade c. Um ângulo sólido $d\Omega$, a partir de $\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right)$, define, sobre S, um elemento de área de normal dada por $\hat{\mathbf{R}}$ e magnitude $R^2 d\Omega$. O elemento de volume entre esse elemento de área de S e a superfície esférica S', de raio $c\left(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}}\right)$ e centrada em $\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right) - \mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)dt_{\text{ret}}$, contém a energia que a partícula irradiou, durante dt_{ret}, no ângulo sólido $d\Omega$. Seja $\mathbf{r}$ o ponto de S onde calculamos a normal $\hat{\mathbf{R}}$. Então, sendo $\hat{\mathbf{R}}dh$ o vetor que vai de $\mathbf{r}$ até a superfície esférica S', seguem as relações:

$$\begin{aligned} c\left(t - t_{\text{ret}}\right) &= \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right)\right| \\ &= R \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} c\left(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}}\right) &= \left|\mathbf{r} + \hat{\mathbf{R}}dh - \left[\mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right) - \mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)dt_{\text{ret}}\right]\right| \\ &= \left|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\left(t_{\text{ret}}\right) + \hat{\mathbf{R}}dh + \mathbf{v}\left(t_{\text{ret}}\right)dt_{\text{ret}}\right| \end{aligned}$$

$$= \left| R\hat{\mathbf{R}} + dh\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v}(t_{\text{ret}})\, dt_{\text{ret}} \right|.$$

Como $R \gg dh, \left|\mathbf{v}(t_{\text{ret}})\, dt_{\text{ret}}\right|$, segue que

$$\begin{aligned}
\left| R\hat{\mathbf{R}} + dh\hat{\mathbf{R}} + \mathbf{v}(t_{\text{ret}})\, dt_{\text{ret}} \right| &= R\left| \hat{\mathbf{R}} + \frac{dh}{R}\hat{\mathbf{R}} + \frac{\mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{R} dt_{\text{ret}} \right| \\
&\approx R\sqrt{1 + 2\frac{dh}{R} + 2\frac{\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}})}{R} dt_{\text{ret}}} \\
&\approx R + dh + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}})\, dt_{\text{ret}}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$c(t - t_{\text{ret}} + dt_{\text{ret}}) \approx R + dh + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}})\, dt_{\text{ret}}$$

e, como $c(t - t_{\text{ret}}) = R$, vem

$$c dt_{\text{ret}} \approx dh + \hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{v}(t_{\text{ret}})\, dt_{\text{ret}},$$

isto é,

$$dh \approx c\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) dt_{\text{ret}}.$$

A densidade de energia no ponto $\mathbf{r}$ é dada por

$$u_{\text{rad}} = \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}} + \mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}}\right).$$

Como $\mathbf{B}_{\text{rad}} = \hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}$, segue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}} &= \left(\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}\right) \cdot \left(\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}\right) \\
&= \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\mathbf{E}_{\text{rad}} \times \left(\hat{\mathbf{R}} \times \mathbf{E}_{\text{rad}}\right)\right] \\
&= \hat{\mathbf{R}} \cdot \left[\hat{\mathbf{R}}\left(\mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}\right) - \mathbf{E}_{\text{rad}}\left(\hat{\mathbf{R}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}\right)\right]
\end{aligned}$$

e, porque $\mathbf{E}_{\text{rad}}$ é ortogonal a $\hat{\mathbf{R}}$, obtemos

$$\mathbf{B}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{B}_{\text{rad}} = \mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}.$$

Logo,

$$u_{\text{rad}} = \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}_{\text{rad}} \cdot \mathbf{E}_{\text{rad}}.$$

A energia irradiada pela partícula durante o intervalo dt_{ret} e dentro do ângulo sólido $d\Omega$ é, portanto,

$$\begin{aligned}
d^2W &= u_{\text{rad}} dh R^2 d\Omega \\
&= d\Omega\left(1 - \hat{\mathbf{R}} \cdot \boldsymbol{\beta}\right) c u_{\text{rad}} R^2 dt_{\text{ret}}.
\end{aligned}$$