Lista de problemas

Problema . 10.10(a)

Vamos partir de Ediff descrito por :

$$\vec{E}_{diff} = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \int_{apperture} da' \, (\hat{n} \times \vec{E}) \, \frac{\exp(ikR)}{R}$$

onde nossa integração acontece apenas na abertura e $\vec{E}$ é o campo elétrico total tangencial à abertura.

$$\vec{R} = \vec{r} - \vec{r}'$$

$$\frac{\exp(ikR)}{R} = \frac{\exp(i \vec{k} \cdot \vec{R})}{R} = \frac{\exp(i\vec{k} \cdot \vec{r} - \vec{k} \cdot \vec{r}')}{R} \; ; \; \boxed{R \approx r}$$

com $\vec{k} = k\hat{r}$.

$$= \exp(ikr) \, \frac{\exp(-ikr')}{R}$$

logo

$$\vec{E}_{diff} = \frac{1}{2\pi} \vec{\nabla} \times \frac{\exp(ikr)}{R} \int_{apperture} da' \, (\hat{n} \times \vec{E}) \exp(-i \vec{k} \cdot \vec{r}')$$

Na zona de radiação

$$\vec{\nabla} \times \; = \; i\vec{k} \times$$

logo

$$\vec{E}_{diff} = \frac{1}{2\pi} i\vec{k} \times \frac{\exp(ikr)}{R} \int_{apperture} da' \, (\hat{n} \times \vec{E}) \exp(i \vec{k} \cdot \vec{r}')$$

Vamos fazer uma aproximação para uma abertura pequena.

$$\exp(-ikr') = \cos(kr') - i\sin(kr')$$

$\theta$ muito pequeno $\Rightarrow$ $\cos\theta \approx 1$ e $\sin\theta \approx \theta$

log

$$\exp(-ikr') \approx 1 - ikr'$$

$$\vec{E}_{diff} = \frac{i}{2\pi}\frac{\exp(ikr)}{R}\vec{k}\times\left[\int_{apperture} da'\,(\hat{n}\times\vec{E}) - i\int_{apperture} da'\,(\hat{n}\times\vec{E})\,\vec{k}\cdot\vec{r}'\right]$$

Vamos considerar a identidade

$$(\hat{n}\times\vec{E})\,\vec{k}\cdot\vec{r}' = \frac{1}{2}\left[\vec{r}'\times(\hat{n}\times\vec{E})\right]\times\vec{k} + \frac{1}{2}\left[(\vec{k}\cdot\vec{r}')(\hat{n}\times\vec{E})\right.$$
$$\left. + (\vec{k}\cdot(\hat{n}\times\vec{E}))\,\vec{r}'\right]$$

substituindo temos,

$$E_{diff} = \frac{i}{2\pi}\frac{\exp(ikr)}{R}\vec{k}\times\left[\int_{apperture} da'\,(\hat{n}\times\vec{E})\left\{1 - \frac{1}{2}i\vec{k}\cdot\vec{r}'\right\}\right.$$
$$\left. - \frac{i}{2}\int_{apperture} da'\,\vec{r}'\times(\hat{n}\times\vec{E})\times\vec{k} - \frac{i}{2}\int_{apperture} da'\,\vec{k}\cdot(\hat{n}\times\vec{E})\vec{r}'\right]$$

$$= \frac{i}{2\pi}\frac{\exp(ikr)}{R}\vec{k}\times\left[\int_{ap} da'\,(\hat{n}\times\vec{E}) - \frac{i}{2}\left\{\hat{n}\int_{ap} da'\,\vec{r}'\cdot\vec{E}\right\}\times\vec{k}\right.$$
$$\left. - \frac{i}{2}\int_{ap} da'\,\vec{k}\cdot(\hat{n}\times\vec{E})\vec{r}'\right]$$

Digitalizado com CamScanner

Escrevendo apenas o primeiro termo

$$\vec{E}_{diff} = \frac{i}{2\pi} \frac{\exp(ikr)}{R} \left( \vec{k} \times \left[ \int_{ap} da' \, (\hat{n} \times \vec{E}) \right] \right)$$

$$= \frac{-Z_0 k^2}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{R} \left( \hat{k} \times \left[ \frac{-2i}{Z_0 k} \int_{ap} da' (\hat{n} \times \vec{E}) \right] \right)$$

Na qual podemos relacionar com

$$\vec{E} = -\frac{Z_0}{4\pi} k^2 (\hat{n} \times \vec{m}) \frac{\exp(ikr)}{r} \left( 1 - \frac{1}{ikr} \right)$$

que por analogia, nos dá que o momento de dipolo magnético pode ser descrito por

$$\vec{m} = \frac{-2i}{Z_0 k} \int_{ap} da' \, (\hat{n} \times \vec{E})$$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{2}{i\omega\mu} \int_{ap} (\hat{n} \times \vec{E}) \, da'} \qquad k = \frac{w}{c} = \omega\mu / Z_0$$

o segundo termo podemos escrever de forma analoga como

$$\vec{E}_{diff} = \frac{Z_0 c k^2}{4\pi} \frac{\exp(ikr)}{R} \hat{k} \times \left( \left[ \frac{1}{Z_0 c} \hat{n} \int_{ap} da' \, \vec{r}\,' \cdot \vec{E} \right] \times \vec{k} \right)$$

que usando a eq:

$$\vec{E} = \frac{Z_0 c k^2}{4\pi} (\hat{n} \times \vec{p}) \times \hat{n} \frac{\exp(ikr)}{R}$$

nos dá também por analogia que

$$\boxed{\vec{p} = \epsilon \hat{n} \int_{ap} da' \, (\vec{r}\,' \cdot \vec{E})}$$

problema 10.10 (b)

Partindo da lei de Faraday para campos harmonicos temos

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} - i w \vec{B} = 0$$

$$\hat{n}' \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{E}) = i w (\hat{n}' \cdot \vec{B})$$

integrando e considerando $\vec{r}'$ em ambas os termos

$$\int da' \, \hat{n}' \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{E}) \vec{r}' = \int da' \, i w \, (\hat{n}' \cdot \vec{B}) \vec{r}'$$

podemos usar as notações de Einstein para simplificar

$$= \int da' \left[ \hat{n}' \cdot (\vec{\nabla}' \times \vec{E}) \right] \vec{r}' = \int da' \, \vec{r}' \epsilon_{ijk} \, n_i' \, \partial_j E_k$$

$$= - \int da' \, \partial_j (\vec{r}') \, \epsilon_{ijk} \, n_i' \, E_k = \int da' \, \hat{n}' \times \vec{E}$$

na qual consideramos

$$\int da' \, \hat{n}' \times \vec{E} = \int da \, i w \, (\hat{n}' \cdot \vec{B})$$

logo,

$$\vec{m} = \frac{2}{i w \mu} \int_{app} da' \, (\hat{n} \times \vec{E}) = \frac{2 i w}{i w \mu} \int da' \, (\hat{n} \cdot \vec{B})$$

$$\boxed{\vec{m} = \frac{2}{\mu} \int da' \, (\hat{n} \cdot \vec{B})}$$