

Exercício 1: 19/08 Considere uma casca esférica não condutora uniformemente carregada. Suponha que a espessura da casca é desprezível. Calcule o campo eletrostático devido a essa distribuição de carga em um ponto da superfície da esfera. Calcule a força por unidade de área em um ponto da superfície esférica.

O fluxo sobre uma superfície fechada pode ser descrito pela lei de Gauss:

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= 4\pi Q_{int} = 4\pi\sigma 4\pi R^2 = 16\pi^2\sigma R^2 \\ &= E 4\pi r^2 = 16\pi^2\sigma R^2 \implies E = 4\pi\sigma \frac{R^2}{r^2}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

Sendo R o raio da casca esférica e r o raio da superfície Gaussiana sobre a esfera. Uma vez que o campo elétrico é paralelo à r temos:

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma \frac{R^2}{r^2} \hat{r}\tag{1.2}$$

Como queremos calcular o campo elétrico sujeito a um elemento de área na superfície da esfera temos que considerar o campo médio entre os campos. Nesse caso, como não temos cargas no interior da esfera podemos considerar a contribuição interna do campo elétrico como nula, logo

$$\mathbf{E}_{med} = \left(\frac{\mathbf{E}_{int} + \mathbf{E}_{ext}}{2} \right) \implies \mathbf{E}_{med} = \frac{\mathbf{E}_{ext}}{2}; \quad \mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E}\tag{1.3}$$

Finalmente, para calcularmos a força gerada pelo campo elétrico podemos considerar $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, no caso para considerarmos um elemento de área dA temos '

$$\frac{dq}{dA} = \sigma \implies dq = \sigma dA\tag{1.4}$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}_{med} dq = \mathbf{E}_{med} \sigma dA\tag{1.5}$$

substituindo 1.2 e 1.3 em 1.5 temos

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \frac{1}{2} \sigma 4\pi \frac{R^2}{r^2} \sigma \hat{r} = 2\pi\sigma^2 \frac{R^2}{r^2} \hat{r}\tag{1.6}$$

para que tomemos os resultados na superfície da esfera consideramos o limite em que $r \rightarrow R$. Portanto:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = 2\pi\sigma^2 \hat{r}\tag{1.7}$$

Exercício 2: 21/08

- Demonstre o teorema de Helmholtz, isto é, demonstre as Eqs. (6.47), (6.49) e (6.50) da segunda edição do livro de J. D. Jackson ou as Eqs. (6.25), (6.27) e (6.28), da terceira.
- Refaça detalhadamente os cálculos para obter a função de Green para a equação de onda.

Queremos encontrar a solução para a equação de onda resultante das transformações por Gauge de Lorentz no qual queremos encontrar a solução particular que satisfaça

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Psi = f(\mathbf{r}, t) \quad (2.1)$$

Portanto, queremos encontrar a função de Green que satisfaz a equação 2.1. Das propriedades da função de Green temos

$$\begin{aligned} \nabla^2 G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') &= \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') &= \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t') \end{aligned} \quad (2.2)$$

no qual possibilitamos a construção da solução particular Ψ_p

$$\Psi(\mathbf{r}, t)_p = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') f(\mathbf{r}', t') \quad (2.3)$$

Para facilitar nossas contas vamos passar do espaço temporal para o de frequências por meio de transformada de Fourier sobre t

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \quad (2.4)$$

Substituindo 2.4 em 2.2 podemos calcular explicitamente as derivadas temporais e passar de operadores de derivada temporal para termos geométricos da forma $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

$$\begin{aligned} \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ = \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ = \left(\nabla^2 + k_0^2 \right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \end{aligned} \quad (2.5)$$

Olhando para o lado direito da equação 2.2 quando tomamos a transformada de Fourier temos que levar em consideração que a delta de Dirac passa a ser escrita também na sua forma transformada.

$$\delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \quad (2.6)$$

Logo, chegamos que

$$(\nabla^2 + k_0^2) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}. \quad (2.7)$$

Simplificar essa equação pode nos ajudar a visualizar o problema que vamos trabalhar nesse momento, logo subtraindo o lado direito da equação em ambos os lados e colocando tudo dentro do mesmo integrando com a exponencial de t em evidência

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \left[(\nabla^2 + k_0^2) g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') - \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \right] = 0 \quad (2.8)$$

Notemos que essa equação será verdadeira no caso dos termos internos se anularem uma vez que a exponencial dependente de t nunca será nula.

$$(\nabla^2 + k_0^2) g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.9)$$

Nesse ponto, o que queremos é encontrar o valor da função de Green (G) a partir de g . Nesse caso, temos que levar em consideração a existência de uma singularidade no denominador ao isolarmos g uma vez que a solução do sistema divergiria no eixo dos reais. Para resolver esse problema vamos induzir um polo no semi-espço dos complexos por meio de uma aproximação g_η na qual

$$g_\eta = g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t')$$

que resultaria na correção infinitesimal em 2.9 correspondente à

$$(\nabla^2 + (k_0 + i\eta)^2) g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.10)$$

Realizando agora a transformada de Fourier da posição para eliminar o operador de derivada temos

$$g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \quad (2.11)$$

que nos dá

$$\int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (k^2 + (k_0 + i\eta)^2) \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.12)$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') &= \nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= (-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = -k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \end{aligned} \quad (2.13)$$

Finalmente podemos encontrar uma equação \bar{g}_η que pode está a uma integral de nos dar o resultado para a função de Green desejada desde o início.

$$(\nabla^2 + (k_0 + i\eta)^2) g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.14)$$

$$\int d^3k (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2) \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (2.15)$$

Substituindo a delta explicitamente, assim como na equação 2.6

$$\int d^3k \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (2.16)$$

Igualando os integrandos, temos

$$\left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2 \right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \quad (2.17)$$

logo,

$$\bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} = \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} \quad (2.18)$$

Substituindo \bar{g}_η em g_η , em seguida em g_η em G conseguiremos encontrar o valor para G_η

$$\begin{aligned} g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') &= \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} \end{aligned} \quad (2.19)$$

finalmente,

$$\begin{aligned} G_\eta(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} \end{aligned} \quad (2.20)$$

Para obtermos os resultados desejados para a solução, a partir de agora basta realizar as integrações em d^3k e $d\omega$, uma vez que para facilitar podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$G_\eta(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\omega(t-t')}}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} \quad (2.21)$$

ou então,

$$G_\eta(\mathbf{r}, t) = G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} \quad (2.22)$$

uma vez que $G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad \exists \quad \forall \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}' \text{ e } t - t'.$

Aplicando a transformação de coordenadas polares para coordenadas esféricas temos

$$\begin{aligned}
& \int_V d^3k \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} \\
&= \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\cos\theta \int_0^R \frac{k^2}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} dk \\
&= (2\pi) \int_1^{-1} e^{ikr\cos\theta} d\cos\theta \int_0^R \frac{k^2}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} dk \\
&= \int_0^R \frac{2\pi (-e^{ikr} + e^{-ikr})}{ikr} \frac{k^2}{(2\pi)^4 (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} dk \\
&= \int_{-R}^R \frac{ke^{ikr}}{(2\pi)^3 ir (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} dk
\end{aligned} \tag{2.23}$$

No contexto de integrais complexas podemos desconsiderar o caminho que passa fora do eixo dos reais quando fechamos a superfície ao redor dos polos. Isso pode ser facilmente demonstrado quando olhamos para

$$\begin{aligned}
z &= Re^{i\theta} = R\cos\theta + iR\sin\theta \\
e^{irz} &= e^{ir(R\cos\theta + iR\sin\theta)} = e^{irR\cos\theta - rR\sin\theta} \\
e^{irz} &= e^{irR\cos\theta} e^{-rR\sin\theta}
\end{aligned}$$

Quando tomamos o limite de R tendendo a ∞ temos uma contribuição nula da parte complexa, e fazendo apenas a integral na reta real com η no limite de 0 por dentro da curva. Para finalizar, basta fazermos a integração utilizando o teorema dos resíduos. Vale lembrar que,

$$\oint dz \frac{ze^{izr}}{z^2 - (k_0 + i\eta)^2} = 2\pi i \text{Res}(z_{\pm}) \tag{2.24}$$

com

$$z^2 - (k_0 + i\eta)^2 = (z - z_+)(z - z_-) \iff \begin{cases} z_+ = k_0 + i\eta \\ z_- = -k_0 - i\eta \end{cases} \tag{2.25}$$

Calculando os resíduos em z_+ temos,

$$\text{Res}(z_+) = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{k_+ e^{iz_+ r}}{z_+ - z_-} = \frac{k_0 e^{ik_0 r}}{k_0 - (-k_0)} = \frac{e^{ik_0 r}}{2} \tag{2.26}$$

já em z_- temos:

$$\text{Res}(z_-) = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \frac{k_- e^{iz_- r}}{z_- - z_+} = \frac{-k_0 e^{-ik_0 r}}{-k_0 - k_0} = \frac{e^{-ik_0 r}}{2} \tag{2.27}$$

Por fim, podemos substituir os resultados para os resíduos na função de Green, lembrando de considerar a integral sobre ω e a constante $2\pi i$ enunciada anteriormente no teorema.

$$\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \int_{-R}^R \frac{ke^{ikr}}{(2\pi)^3 i r (-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 i r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikr}}{(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)} dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 i r} \cdot 2\pi i \text{Res}(z_{\pm}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 i r} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{\pm i k_0 r}}{2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 i r} \cdot \pi i e^{\pm i \frac{\omega c}{r}} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{r} \delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right)
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Substituindo em 2.3 e retornando os tempos e posições $t - t'$ e $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ considerando que definimos essa possibilidade anteriormente, temos:

$$\Psi(\mathbf{r}, t)_{\pm} = - \int d^3 r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{1}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) f(\mathbf{r}', t') \tag{2.29}$$

Resolvendo para t ,

$$\Psi(\mathbf{r}, t)_{\pm} = - \int d^3 r' \frac{f(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.30}$$

Nesse contexto, como temos duas soluções, utilizaremos a solução de tempo retardado, que é definido pelas consequências serem geradas após a interação. A outra escolha é chamado de tempo adiantado, mas pode não ser muito interessante no momento uma vez que estaríamos considerando, por exemplo, uma medida antes de realizar o experimento.

$$\Psi(\mathbf{r}, t)_{+} = - \int d^3 r' \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.31}$$

Para finalizar, podemos substituir os resultados encontrados nos pares ordenados das fontes discutidos em sala de aula, desta forma encontrando uma solução para evolução temporal com relação as fontes

$$\phi \rightarrow f = -4\pi \rho(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow f = \frac{-4\pi}{c} \mathbf{J}$$

logo,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.33)$$

Exercício 3: 28/08 Refaça detalhadamente os cálculos sobre a conservação de momentum linear em eletromagnetismo do PDF da aula de hoje.

Do que já sabemos da mecânica clássica, a variação do momento de um sistema é descrito pela força externa que atua sobre o mesmo.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt} \mathbf{P} \quad (3.1)$$

Queremos nessa etapa, analisar de alguma forma a conservação de momento de um sistema eletromagnético e, para isso, vamos considerar a variação de momentum linear da matéria carregada ($\frac{d}{dt} \mathbf{P}_m$) igual a força de Lorentz por unidade de área expressa sobre um volume com distribuição de carga ρ

$$d\mathbf{F} = d^3r \left(\rho \mathbf{E} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \quad (3.2)$$

e força total F_V

$$\begin{aligned} F_V &= \int_V d^3r \left(\rho \mathbf{E} + \frac{\rho}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \\ &= \int_V d^3r \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) = \frac{d}{dt} \mathbf{P}_m \end{aligned} \quad (3.3)$$

Entretanto, não demonstraremos isso em função das fontes, e sim trabalharemos nessa demonstração majoritariamente através das equações de Maxwell. Para isso, vamos apenas fazer um lembrete de todas elas:

Equações de Maxwell

Lei de Gauss

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho \quad (3.4)$$

Inexistência de monopolos magnéticos

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.5)$$

Lei de indução de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \quad (3.6)$$

Lei de Ampère-Maxwell

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \quad (3.7)$$

Utilizando a lei de Gauss e a lei de Ampère-Maxwell para descrever as fontes temos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi} \nabla \cdot \mathbf{E} \\ \mathbf{J} &= \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \end{aligned} \quad (3.8)$$

podemos então substituir em 3.3.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m &= \int_V d^3r \left(\rho \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) \\ &= \int_V d^3r \left(\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right)\end{aligned}\quad (3.9)$$

Podemos facilmente trabalhar com a Lei de Faraday (3.6) na igualdade acima, a regra do produto nos dá que

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} + \mathbf{E} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \implies \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{E} \times \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B}.\end{aligned}\quad (3.10)$$

Substituindo em 3.9 e em seguida substituindo a derivada temporal do campo magnético pela Lei de Faraday:

$$\begin{aligned}& \int_V d^3r \left[\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \mathbf{E} \times \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{B} \right) \right] \\ &= \int_V d^3r \left[\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) + c \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right) \right] \\ &= \int_V d^3r \left[\frac{1}{4\pi} (\nabla \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} + \frac{1}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi} \mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \right]\end{aligned}\quad (3.11)$$

Exercício 4: 02/09 Considere duas cargas pontuais idênticas separadas por uma distância finita no vácuo. Faça a integral de superfície do tensor dos estresses de Maxwell sobre o plano dos pontos equidistantes às duas cargas. Deduza, assim, a força de Coulomb entre as duas cargas.