Ondas planas em meios não condutores, lineares, homogêneos e isotrópicos

As equações de Maxwell macoscópicas para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico são escritas como

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Considerando uma região do meio com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, podemos proceder analogamente ao caso do vácuo e obter as equações de onda para os campos elétrico e indução magnética:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2\mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Há campos $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ que satisfazem essas equações? Para responder a essa questão, consideremos inicialmente somente a componente x de $\mathbf{E}$:

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r},t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = 0.$$

É óbvio que podemos escrever a identidade

$$E_x(\mathbf{r},t) = \int_{V_\infty} d^3r'\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')E_x(\mathbf{r}',t).$$

Uma representação para a função delta de Dirac é

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')].$$

Assim,

$$\begin{aligned}
E_x(\mathbf{r},t) &= \int_{V_\infty} d^3r'\,\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k\,\exp[i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')]E_x(\mathbf{r}',t) \\
&= \int d^3k\,\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\left[\frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_\infty} d^3r'\,\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')E_x(\mathbf{r}',t)\right] \\
&= \int d^3k\,\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})f_x(\mathbf{k},t),
\end{aligned}$$

onde

$$f_x(\mathbf{k},t) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int_{V_\infty} d^3r'\,\exp(-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}')E_x(\mathbf{r}',t).$$

Aplicando o operador

$$\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

à expressão acima para E_x dá

$$\begin{aligned}
\nabla^2 E_x(\mathbf{r},t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} &= \int d^3k\, f_x(\mathbf{k},t)\nabla^2\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \\
&- \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\int d^3k\,\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k},t)}{\partial t^2} \\
&= \int d^3k\,\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})\left[-k^2 f_x(\mathbf{k},t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k},t)}{\partial t^2}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Logo,

$$-k^2 f_x(\mathbf{k},t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k},t)}{\partial t^2} = 0.$$

A solução geral dessa equação pode ser escrita como:

$$f_x(\mathbf{k},t) = a_x(\mathbf{k})\exp(ikct/\sqrt{\mu\varepsilon}) + b_x(\mathbf{k})\exp(-ikct/\sqrt{\mu\varepsilon}),$$

onde $a_x(\mathbf{k})$ e $b_x(\mathbf{k})$ são funções arbitrárias de $\mathbf{k}$. Assim, a solução geral para E_x é dada por

$$\begin{aligned}
E_x(\mathbf{r},t) &= \int d^3k\, a_x(\mathbf{k})\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] \\
&+ \int d^3k\, b_x(\mathbf{k})\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right].
\end{aligned}$$

Como $E_x(\mathbf{r},t)$ é uma grandeza real, devemos ter

$$[E_x(\mathbf{r},t)]^* = E_x(\mathbf{r},t),$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\int d^3k\,[a_x(\mathbf{k})]^*\exp\left[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] &+ \\
\int d^3k\,[b_x(\mathbf{k})]^*\exp\left[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] &= \int d^3k\, a_x(\mathbf{k})\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] \\
&+ \int d^3k\, b_x(\mathbf{k})\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right].
\end{aligned}$$

Trocando a variável de integração $\mathbf{k}$ por $-\mathbf{k}$ no primeiro membro dessa equação fornece

$$\begin{aligned}\int d^3k\ [a_x(-\mathbf{k})]^* \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] & + \\ \int d^3k\ [b_x(-\mathbf{k})]^* \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] & = \int d^3k\, a_x(\mathbf{k}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] \\ & + \int d^3k\, b_x(\mathbf{k}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right]\end{aligned}$$

e, portanto, independência linear entre as funções exponenciais complexas implica em

$$[a_x(-\mathbf{k})]^* = b_x(\mathbf{k})$$

e

$$[b_x(-\mathbf{k})]^* = a_x(\mathbf{k}).$$

Em particular, podemos escrever

$$a_x(-\mathbf{k}) = [b_x(\mathbf{k})]^* .$$

Assim, a forma geral de $E_x(\mathbf{r},t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}E_x(\mathbf{r},t) &= \int d^3k\, a_x(-\mathbf{k}) \exp\left[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] \\ &+ \int d^3k\, b_x(\mathbf{k}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] \\ &= \int d^3k\ [b_x(\mathbf{k})]^* \exp\left[-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} + i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right] \\ &+ \int d^3k\, b_x(\mathbf{k}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right]\end{aligned}$$

e, portanto,

$$E_x(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left\{\int d^3k\, 2b_x(\mathbf{k}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right]\right\}.$$

As funções escalares

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r},t) = \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right]$$

satisfazem a equação de onda para todo $\mathbf{k}$. Dessa forma, definimos

$$\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k};\mathbf{r},t) = \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_0\,(\mathbf{k}) \exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right]$$

como as funções vetoriais que formam a base funcional para os campos. Essas funções representam ondas planas, pois, em uma frente de onda, o valor de $\boldsymbol{\epsilon}(\mathbf{k};\mathbf{r},t)$ fica fixo e isso ocorre somente quando

$$\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\frac{ikct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right]$$

é constante, resultando em uma equação do plano:

$$\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \quad = \quad d,$$

onde d é uma constante.

Aqui, vamos sempre utilizar as funções de onda plana complexas, como acima. Os campos devem ser obtidos tomando as partes reais das combinações lineares de ondas complexas. Por exemplo, escrevemos

$$\boldsymbol{\epsilon} \quad = \quad \hat{\mathbf{x}}E_0\exp(ik_z z-i\omega t),$$

com E_0 real e $\omega=kc/\sqrt{\mu\varepsilon}$. O campo elétrico associado é

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathrm{Re}(\boldsymbol{\epsilon})\\ &= \hat{\mathbf{x}}E_0\cos(k_z z-\omega t).\end{aligned}$$

E o campo $\mathbf{B}$? Isto é, supondo dado um campo elétrico cuja representação complexa seja

$$\boldsymbol{\epsilon} \quad = \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_0\exp\left[i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right],$$

como podemos encontrar o campo $\mathbf{B}$? Primeiro, escrevemos

$$\mathbf{B} \quad = \quad \mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right),$$

onde $\boldsymbol{\beta}$ é a onda plana magnética dada por

$$\boldsymbol{\beta} \quad = \quad \hat{\boldsymbol{\epsilon}}_0'\exp\left[i\mathbf{k}'\cdot\mathbf{r}-i\frac{k'ct}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\right],$$

já que tanto $\boldsymbol{\epsilon}$ como $\boldsymbol{\beta}$ satisfazem a mesma equação de onda. Com as equações de Maxwell na ausência de fontes, fica óbvio que

$$\mathbf{k}' \quad = \quad \mathbf{k},$$

pois as equações que acoplam $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\beta}$ devem ser satisfeitas em todo ponto do espaço e em todo instante de tempo. Portanto, calculemos:

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon} \quad = \quad i\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}$$

e

$$\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t} \quad = \quad -i\omega\boldsymbol{\beta},$$

onde, como é usual, definimos

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Utilizando a Lei de Indução de Faraday, obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta} &= \frac{c\mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}}{\omega} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}$$

Analogamente, a Lei de Ampère-Maxwell na ausência de corrente livre fornece

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta} - \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} &= i\mathbf{k}\times\boldsymbol{\beta} + i\frac{\mu\varepsilon}{c}\omega\boldsymbol{\epsilon} \\ &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\beta}.$$

Assim, vemos que tanto $\boldsymbol{\epsilon}$ como $\boldsymbol{\beta}$ são ortogonais ao vetor de onda $\mathbf{k}$ e entre si. É desnecessário dizer que essa mesma conclusão vale para suas respectivas partes reais, $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$.

Na ausência de cargas livres, a Lei de Gauss dá

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\epsilon} &= i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon} \\ &= 0,\end{aligned}$$

mais uma vez levando à conclusão de que $\boldsymbol{\epsilon}$ é ortogonal a $\mathbf{k}$. O mesmo vale para o divergente de $\boldsymbol{\beta}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\beta} &= i\mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\beta} \\ &= 0.\end{aligned}$$

A polarização da luz

Se tivermos, por exemplo,

$$\boldsymbol{\epsilon} = (E_x\hat{\mathbf{x}} + iE_y\hat{\mathbf{y}})\exp(ik_z z - i\omega t),$$

teremos luz polarizada. Se $|E_x| = |E_y|$, teremos polarização circular. Se $|E_x| \neq |E_y|$, a polarização é dita elíptica. Para vermos porque isso acontece, tomemos a parte real da onda plana acima:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \mathrm{Re}\left[(E_x\hat{\mathbf{x}} + iE_y\hat{\mathbf{y}})\exp(ik_z z - i\omega t)\right] \\ &= E_x\hat{\mathbf{x}}\cos(k_z z - \omega t) - E_y\hat{\mathbf{y}}\sin(k_z z - \omega t).\end{aligned}$$

No plano $z = z_0$, com z_0 constante, o vetor campo elétrico descreve uma elipse conforme o tempo passa; a elipse é uma circunferência se $|E_x| = |E_y|$.