Utilizando a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t},$$

e a definição de índice de refração, obtemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{c\mathbf{k}_1}{\omega} \times \boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&= n_1\epsilon_{01}\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_1\right) \times \left(-\hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1\right)\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= n_1\epsilon_{01}\left(\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}\cos^2\theta_1 - \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}\sin^2\theta_1\right)\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= \hat{\mathbf{y}}n_1\epsilon_{01}\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).
\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1' &= n_1\epsilon_{01}'\left(-\hat{\mathbf{z}}\times\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1'\cos\theta_1' + \hat{\mathbf{x}}\times\hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1'\sin\theta_1'\right)\exp\left(i\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= -\hat{\mathbf{y}}n_1\epsilon_{01}'\exp\left(i\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right)
\end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_2 = \hat{\mathbf{y}}n_2\epsilon_{02}\exp\left(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).$$

Na ausência de cargas e correntes livres, devemos ter

$$\hat{\mathbf{z}}\cdot\left(\varepsilon_2\boldsymbol{\epsilon}_2 - \varepsilon_1\boldsymbol{\epsilon}_1 - \varepsilon_1\boldsymbol{\epsilon}_1'\right)\big|_{z=0} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
0 &= -\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2\exp\left(ixk_2\sin\theta_2\right) + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1\exp\left(ixk_1\sin\theta_1\right) \\
&- \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1'\exp\left(ixk_1\sin\theta_1'\right)
\end{aligned}$$

para todo valor de x. Pela independência linear de exponenciais com argumentos distintos, concluímos que

$$k_1\sin\theta_1' = k_1\sin\theta_1,$$

$$k_2\sin\theta_2 = k_1\sin\theta_1$$

e, portanto,

$$-\varepsilon_2\epsilon_{02}\sin\theta_2 + \varepsilon_1\epsilon_{01}\sin\theta_1 - \varepsilon_1\epsilon_{01}'\sin\theta_1 = 0.$$

A equação

$$k_1\sin\theta_1' = k_1\sin\theta_1$$

dá a lei de reflexão, isto é,

$$\theta_1' = \theta_1.$$

A equação

$$k_2 \sin\theta_2 \quad = \quad k_1 \sin\theta_1$$

dá a Lei de Refração de Snell-Descartes, ou seja,

$$n_2 \sin\theta_2 \quad = \quad n_1 \sin\theta_1.$$

Como a componente tangente à interface do campo intensidade magnética é contínua no presente caso, obtemos

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1' \right)\bigg|_{z=0} \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Para simplificar, vamos supor que os dielétricos sejam tais que $\mu_1 = \mu_2 = 1$, isto é, que os dielétricos sejam materiais não magnéticos. Assim,

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} \left(n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon_{01}' \right) \quad = \quad \mathbf{0},$$

ou seja,

$$n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon_{01}' \quad = \quad 0.$$

Usando a Lei de Snell-Descartes,

$$k_2 \sin\theta_2 \quad = \quad k_1 \sin\theta_1,$$

vemos que as equações

$$-\varepsilon_2 \epsilon_{02} \sin\theta_2 + \varepsilon_1 \epsilon_{01} \sin\theta_1 - \varepsilon_1 \epsilon_{01}' \sin\theta_1 \quad = \quad 0$$

e

$$n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon_{01}' \quad = \quad 0$$

são linearmente dependentes. Como a continuidade da componente normal do campo indução magnética está automaticamente satisfeita, resta-nos utilizar a continuidade da componente tangencial do campo elétrico:

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1' \right)\big|_{z=0} \quad = \quad \mathbf{0}.$$

Essa equação nos dá

$$\epsilon_{02} \cos\theta_2 - \epsilon_{01} \cos\theta_1 - \epsilon_{01}' \cos\theta_1 \quad = \quad 0.$$

Resolvendo o sistema de equações

$$n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon_{01}' \quad = \quad 0$$

e

$$\epsilon_{02} \cos\theta_2 - \epsilon_{01} \cos\theta_1 - \epsilon_{01}' \cos\theta_1 \quad = \quad 0,$$

obtemos

$$\epsilon'_{01} = \frac{n_1 \cos\theta_2 - n_2 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}\epsilon_{01}$$

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}\epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

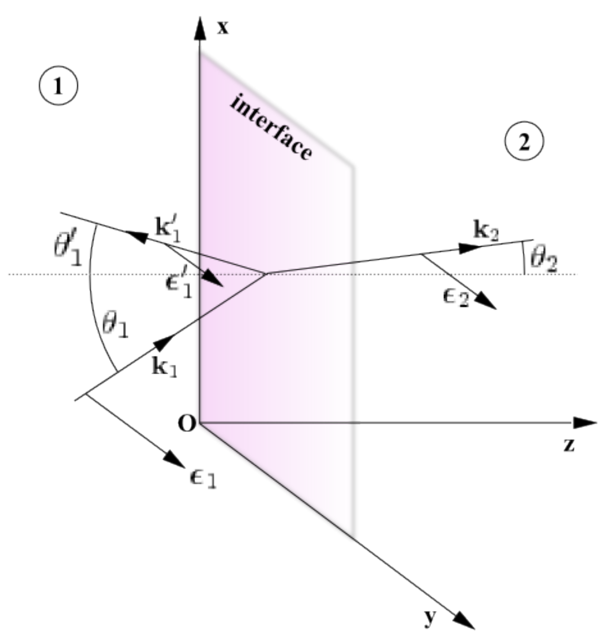
$$\begin{aligned} r_{12p} &= \frac{\epsilon'_{01}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1 \cos\theta_2 - n_2 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned} t_{12p} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1 \cos\theta_1}{n_2 \cos\theta_1 + n_1 \cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para transmissão.

Campo elétrico perpendicular ao plano de incidência



Nesse caso, tomamos

$$\begin{aligned}
\mathbf{k}_1 &= \hat{\mathbf{z}}k_1\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1\sin\theta_1, \\
\mathbf{k}_1' &= -\hat{\mathbf{z}}k_1\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1\sin\theta_1, \\
\mathbf{k}_2 &= \hat{\mathbf{z}}k_2\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2\sin\theta_2,
\end{aligned}$$

como no caso anterior, mas escolhemos os campos elétricos polarizados ao longo do eixo y, isto é,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_1 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01}\exp\left(izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right), \\
\boldsymbol{\epsilon}_1' &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01}'\exp\left(-izk_1\cos\theta_1 + ixk_1\sin\theta_1 - i\omega t\right), \\
\boldsymbol{\epsilon}_2 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{02}\exp\left(izk_2\cos\theta_2 + ixk_2\sin\theta_2 - i\omega t\right),
\end{aligned}$$

onde já estamos adiantando que vale a lei de reflexão. Assim, usando a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}_1 &= \frac{c\mathbf{k}_1}{\omega}\times\boldsymbol{\epsilon}_1 \\
&= n_1\left(\hat{\mathbf{z}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\sin\theta_1\right)\times\hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01}\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right) \\
&= n_1\left(-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1\right)\epsilon_{01}\exp\left(i\mathbf{k}_1\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right),
\end{aligned}$$

$$\boldsymbol{\beta}_1' = n_1\left(\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_1 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_1\right)\epsilon_{01}'\exp\left(i\mathbf{k}_1'\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right)$$

e

$$\boldsymbol{\beta}_2 = n_1\left(-\hat{\mathbf{x}}\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{z}}\sin\theta_2\right)\epsilon_{02}\exp\left(i\mathbf{k}_2\cdot\mathbf{r} - i\omega t\right).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface, temos

$$\hat{\mathbf{z}}\times\left(\boldsymbol{\epsilon}_2 - \boldsymbol{\epsilon}_1 - \boldsymbol{\epsilon}_1'\right)\big|_{z=0} = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon_{01}' = 0.$$

Também impomos que a componente tangencial do campo intensidade magnética seja contínua, obtendo

$$\hat{\mathbf{z}}\times\left(\frac{1}{\mu_2}\boldsymbol{\beta}_2 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1 - \frac{1}{\mu_1}\boldsymbol{\beta}_1'\right)\bigg|_{z=0} = \mathbf{0},$$

isto é, supondo meios não magnéticos, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, vem

$$-n_2\cos\theta_2\epsilon_{02} + n_1\cos\theta_1\epsilon_{01} - n_1\cos\theta_1\epsilon_{01}' = 0.$$

Agora resolvemos as equações

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon_{01}' = 0$$

e

$$-n_2\cos\theta_2\epsilon_{02}+n_1\cos\theta_1\epsilon_{01}-n_1\cos\theta_1\epsilon'_{01} \quad = \quad 0$$

e concluímos que

$$\epsilon'_{01} \quad = \quad \frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}\epsilon_{01}$$

e

$$\epsilon_{02} \quad = \quad \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}\epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

$$\begin{aligned} r_{12s} &= \frac{\epsilon'_{01}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1\cos\theta_1-n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned} t_{12s} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_1\cos\theta_1+n_2\cos\theta_2}, \end{aligned}$$

para transmissão.

Reflectância e transmitância

Os vetores de Poynting médios (no CGS) para as diversas ondas do exemplo acima são dados por

$$\begin{aligned} \langle\mathbf{S}_1\rangle &= \frac{c}{8\pi c\mu}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}_1\times\boldsymbol{\beta}_1^*\right) \\ &= \frac{n_1}{8\pi\mu_1}\hat{\mathbf{z}}\left|\epsilon_{01}\right|^2, \end{aligned}$$

$$\langle\mathbf{S}'_1\rangle \quad = \quad -\frac{n_1}{8\pi\mu_1}\hat{\mathbf{z}}\left|\epsilon'_{01}\right|^2$$

e

$$\langle\mathbf{S}_2\rangle \quad = \quad \frac{n_2}{8\pi\mu_2}\hat{\mathbf{z}}\left|\epsilon_{02}\right|^2.$$

No caso em que temos incidência normal à interface, cuja normal nesse caso é $\hat{\mathbf{z}}$, a reflectância e a transmitância são definidas, respectivamente, por

$$R \quad = \quad \left|\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\langle\mathbf{S}'_1\rangle}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\langle\mathbf{S}_1\rangle}\right|$$

e

$$T = \left|\frac{\hat{\mathbf{z}}\cdot\langle\mathbf{S}_2\rangle}{\hat{\mathbf{z}}\cdot\langle\mathbf{S}_1\rangle}\right|,$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
R &= \frac{|\epsilon'_{01}|^2}{|\epsilon_{01}|^2} \\
&= r_{12}^2 \\
&= \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
T &= \frac{\mu_1 n_2 |\epsilon_{02}|^2}{\mu_2 n_1 |\epsilon_{01}|^2} \\
&= \frac{\mu_0 n_2}{\mu_0 n_1} t_{12}^2 \\
&= \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}.
\end{aligned}$$

Assim, verificamos, neste caso particular, que a reflectância somada à transmitância é igual à unidade:

$$\begin{aligned}
R + T &= \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2}\right)^2 + \frac{4 n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Reflexão interna total e polarização por reflexão

Ângulo crítico

Agora que temos os resultados para os coeficientes de Fresnell no caso da reflexão e transmissão de ondas planas na interface entre dois meios dielétricos lineares, homogeneos e isotrópicos, podemos analisar o que acontece quando $n_1 > n_2$. Nesse caso, da Lei de Snell-Descartes, temos

$$\begin{aligned}
\cos\theta_2 &= \sqrt{1 - \sin^2\theta_2} \\
&= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1}.
\end{aligned}$$

Como temos liberdade de escolher a direção de propagação da onda incidente, podemos tomar $\theta_1 > \theta_c$, onde θ_c é o chamado ângulo crítico, definido pela expressão

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_c = 0,$$

ou seja,

$$\sin\theta_c \quad = \quad \frac{n_2}{n_1}.$$

Como estamos supondo $n_1 > n_2$, no caso em que $\theta_1 > \theta_c$ temos

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_1 \quad < \quad 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2\theta_c,$$

ou seja,

$$\cos^2\theta_2 \quad < \quad 0.$$

Como

$$\mathbf{k}_2 \quad = \quad \hat{\mathbf{z}}k_2\cos\theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2\sin\theta_2,$$

segue que a solução para a onda transmitida adquire uma parte imaginária no vetor de onda, ao longo da direção $\hat{\mathbf{z}}$. Isso implica em uma onda transmitida que se propaga apenas ao longo do eixo x, mas evanesce ao longo do eixo z.

Ângulo de Brewster

Considerando $n_2 > n_1$, podemos perguntar: quando a luz é refletida de uma superfície, uma de suas componentes de polarização pode ser suprimida para algum ângulo de incidência? Para responder a essa pergunta, primeiro consideramos impor que

$$r_{12s} \quad = \quad 0,$$

ou seja,

$$\frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_1\cos\theta_1 + n_2\cos\theta_2} \quad = \quad 0.$$

Assim,

$$\cos\theta_1 \quad = \quad \frac{n_2}{n_1}\cos\theta_2$$

e, portanto,

$$1 - \sin^2\theta_1 \quad = \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2\theta_2.$$

Usando a Lei de Snell-Descartes, obtemos

$$1 \quad = \quad \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.$$

Como estamos supondo $n_2 > n_1$, vemos que a reflexão da onda com polarização do campo elétrico perpendicular ao plano de incidência não pode ser eliminada com a escolha de um ângulo de incidência especial.

Já para a polarização do campo elétrico paralela ao plano de incidência, vemos que quando a incidência ocorre com o ângulo de Brewster, definido por

$$\tan\theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

temos

$$\begin{aligned}\cos\theta_2 &= \sqrt{1-\mathrm{sen}^2\theta_2} \\ &= \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \mathrm{sen}^2\theta_B}\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\cos\theta_2 &= \sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2\theta_B} \\ &= \sqrt{1-\cos^2\theta_B} \\ &= \mathrm{sen}\theta_B.\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}r_{12p} &= \frac{n_1\cos\theta_2 - n_2\cos\theta_B}{n_2\cos\theta_B + n_1\cos\theta_2} \\ &= \frac{n_1\mathrm{sen}\theta_B - n_2\cos\theta_B}{n_2\cos\theta_B + n_1\cos\theta_2}.\end{aligned}$$

Mas, da definição do ângulo de Brewster, acima, obtemos

$$\mathrm{sen}^2\theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2\theta_B,$$

isto é,

$$\mathrm{sen}^2\theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \left(1-\mathrm{sen}^2\theta_B\right),$$

ou seja,

$$\left[1+\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right]\mathrm{sen}^2\theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2,$$

ou ainda,

$$\mathrm{sen}\theta_B = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}.$$

Também obtemos

$$\cos\theta_B = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2+n_2^2}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} r_{12p} &= \frac{n_1 \text{sen}\theta_B - n_2 \cos\theta_B}{n_2 \cos\theta_B + n_1 \cos\theta_2} \\ &= \frac{1}{n_2 \cos\theta_B + n_1 \cos\theta_2} \left(n_1 \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} - n_2 \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a incidência de luz não polarizada, fazendo o ângulo de Brewster com a normal à interface entre os meios dielétricos, resulta em luz refletida polarizada com o campo elétrico perpendicular ao plano de incidência.