Ondas planas em meios condutores

Em meios lineares, isotrópicos, homogêneos e ôhmicos com condutividade σ, temos

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}.$$

Vamos considerar que uma onda plana incida normalmente sobre uma interface entre um meio dielétrico e um meio condutor, adentrando o meio condutor. Para o presente objetivo, vamos apenas considerar a propagação da onda transmitida no interior do meio condutor. Supondo que a interface coincida com o plano xy e que o meio condutor tenha coordenadas $z > 0$, o vetor de onda no meio dielétrico tem o sentido do versor $\hat{\mathbf{z}}$. Considerando a isotropia dos dois meios, esperamos que a onda que penetra o meio condutor continue a se propagar ao longo do mesmo sentido e direção que a onda incidente, de modo que, dentro do material condutor, escrevemos

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}.$$

Com essa hipótese, adotamos o seguinte ansatz para os campos $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\beta}$:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right)$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_0 \exp\left(ikz - i\omega t\right),$$

onde ω é uma frequência que supomos dada. Segue da Lei de Indução de Faraday que

$$k\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0 = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_0.$$

Ao mesmo tempo, também segue da Lei de Ampère & Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t},$$

que

$$ik\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\beta}_0 = \frac{4\pi\mu}{c}\sigma\boldsymbol{\epsilon}_0 - i\frac{\mu\varepsilon}{c}\omega\boldsymbol{\epsilon}_0,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \frac{ikc\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\beta}_0}{\mu\left(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega\right)}.$$

Logo,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0.$$

Assim, usando a equação obtida anteriormente, isto é,

$$k\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0 = \frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_0,$$

na expressão logo acima para $\boldsymbol{\epsilon}_0$, obtemos

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_0 &= \frac{ikc\hat{\mathbf{z}} \times (ck\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0)}{\mu\omega\,(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega)} \\
&= \frac{ik^2c^2\,(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 - \boldsymbol{\epsilon}_0)}{\mu\omega\,(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega)}.
\end{aligned}
$$

Temos, portanto,

$$
\boldsymbol{\epsilon}_0 = -\frac{ik^2c^2\boldsymbol{\epsilon}_0}{\mu\omega\,(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega)},
$$

ou seja,

$$
ik^2c^2 + \mu\omega\,(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega) = 0,
$$

ou, simplificando,

$$
k^2c^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\mu\omega.
$$

Logo, k é um número complexo e, como tal, podemos escrever

$$
k = k_r + ik_i,
$$

onde

$$
k_r = \mathrm{Re}\,(k)
$$

e

$$
k_i = \mathrm{Im}\,(k)\,.
$$

Escrevamos:

$$
\begin{aligned}
k^2 &= (k_r + ik_i)^2 \\
&= \left(k_r^2 - k_i^2\right) + 2ik_rk_i.
\end{aligned}
$$

Então, devemos ter

$$
k_r^2 - k_i^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}
$$

e

$$
2k_rk_i = 4\pi\sigma\mu\frac{\omega}{c^2}.
$$

Substituindo k_i da segunda dessas equações na primeira, resulta na equação

$$
k_r^4 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}k_r^2 - \frac{(4\pi\sigma\mu\omega)^2}{4c^4} = 0.
$$

A solução para essa equação é dada por

$$k_r^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{\left(\mu\varepsilon\omega^2\right)^2 + \left(4\pi\sigma\mu\omega\right)^2}}{2c^2},$$

já que $k_r^2 \geqslant 0$. Como estamos supondo que a onda transmitida se propaga na direção positiva do eixo z, obtemos

$$\begin{aligned} k_r &= \sqrt{\frac{1}{2c^2}\left(\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{\left(\mu\varepsilon\omega^2\right)^2 + \left(4\pi\sigma\mu\omega\right)^2}\right)} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\omega}{c\sqrt{2}}\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Dessa solução para k_r e da equação

$$2k_rk_i = 4\pi\sigma\mu\frac{\omega}{c^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{2k_rc^2} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu c}{\sqrt{2}c^2\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1}}{\sqrt{1+\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1}}{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2-1}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1}}{\sqrt{\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}}\frac{\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1}}{\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}\frac{\omega}{c\sqrt{2}}\sqrt{\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}-1}. \end{aligned}$$

Notemos que a onda é evanescente, pois

$$\exp\left(ikz - i\omega t\right) = \exp\left(-k_iz\right)\exp\left(ik_rz - i\omega t\right),$$

com

$$k_i \quad > \quad 0$$

quando $\sigma \neq 0$. Isso significa que uma onda eletromagnética penetra apenas até um certo ponto em um meio condutor, sendo que essa profundidade de penetração, chamada de "profundidade da pele", do inglês "skin depth", é dada por

$$\delta \quad = \quad \frac{1}{k_i}.$$

O fluxo de energia médio no meio condutor é dado pelo vetor de Poynting médio:

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi\mu} \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*) \\
&= \frac{c^2 \exp{(-2k_i z)}}{8\pi\mu\omega} \mathrm{Re}\left[\boldsymbol{\epsilon}_0 \times (k\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0)^*\right] \\
&= \frac{c^2 \exp{(-2k_i z)}}{8\pi\mu\omega} \mathrm{Re}\,(k^* \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*) \\
&= \frac{k_r c^2 \exp{(-2k_i z)}}{8\pi\mu\omega} \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}$$

Assim, a energia da onda diminui à medida que penetra no condutor. Também é interessante notarmos que se a condutividade for muito grande, a penetração será muito pequena e, portanto, para um condutor ideal, a onda incidente será totalmente refletida.

Também podemos calcular a densidade de energia eletromagnética média dentro do material condutor. Então,

$$\begin{aligned}
\langle u \rangle &= \frac{\varepsilon}{16\pi} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{16\pi\mu} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* \\
&= \frac{\varepsilon}{16\pi} \exp{(-2k_i z)}\, \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{1}{16\pi\mu} \exp{(-2k_i z)}\, \boldsymbol{\beta}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}_0^* \\
&= \frac{1}{16\pi} \exp{(-2k_i z)} \left[\varepsilon \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{kk^* c^2}{\mu\omega^2} (\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0) \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0^*)\right] \\
&= \frac{1}{16\pi} \exp{(-2k_i z)} \left[\varepsilon + \frac{kk^* c^2}{\mu\omega^2}\right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{1}{16\pi} \exp{(-2k_i z)} \left[\varepsilon + \frac{k_r^2 + k_i^2}{\mu\omega^2} c^2\right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}
k_r^2 + k_i^2 &= \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{2c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1\right] \\
&= \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle u \rangle \quad = \quad \frac{1}{16\pi} \exp{(-2k_i z)} \left[\varepsilon + \frac{1}{\mu\omega^2} \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} c^2\right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{16\pi}\exp\left(-2k_i z\right)\left[1+\sqrt{1+\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2}\right]\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{\varepsilon}{16\pi}\exp\left(-2k_i z\right)\frac{2c^2k_r^2}{\mu\varepsilon\omega^2}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{1}{8\pi\mu}\exp\left(-2k_i z\right)\frac{c^2k_r^2}{\omega^2}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}
$$

Dessa expressão e da equação para o fluxo médio de energia, isto é,

$$
\langle \mathbf{S}\rangle = \frac{k_r c^2\exp\left(-2k_i z\right)}{8\pi\mu\omega}\hat{\mathbf{z}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^*,
$$

segue que

$$
\begin{aligned}
\frac{k_r}{\omega}\langle \mathbf{S}\rangle &= \frac{k_r^2 c^2\exp\left(-2k_i z\right)}{8\pi\mu\omega^2}\hat{\mathbf{z}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \hat{\mathbf{z}}\frac{1}{8\pi\mu}\exp\left(-2k_i z\right)\frac{c^2k_r^2}{\omega^2}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \hat{\mathbf{z}}\left\langle u\right\rangle,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$
\langle \mathbf{S}\rangle = \hat{\mathbf{z}}\frac{\omega}{k_r}\left\langle u\right\rangle.
$$

Como a onda que se propaga no interior do condutor é proporcional à exponencial

$$
\begin{aligned}
\exp\left(ikz-i\omega t\right) &= \exp\left(-k_i z\right)\exp\left(ik_r z-i\omega t\right) \\
&= \exp\left(-k_i z\right)\exp\left[ik_r\left(z-\frac{\omega}{k_r}t\right)\right],
\end{aligned}
$$

vemos que a velocidade de fase da onda no meio condutor, $\mathbf{v}$, é ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}$ e de módulo ω/k_r, ou seja,

$$
\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}}\frac{\omega}{k_r}
$$

e, portanto, o fluxo de energia eletromagnética, em cada z, é dado por

$$
\langle \mathbf{S}\rangle = \langle u\rangle\,\mathbf{v},
$$

em analogia com

$$
\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}
$$

para densidades de carga e corrente.