Essa díade está relacionada com o momento de quadrupolo elétrico da distribuição. Para entendermos como é essa relação, escrevemos

$$\overleftrightarrow{\Upsilon}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_m\hat{\mathbf{x}}_n\int_V d^3r'x'_mx'_n\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right),$$

onde os produtos

$$\hat{\mathbf{x}}_m\hat{\mathbf{x}}_n, \text{ para } m,n=1,2,3,$$

são chamados produtos diádicos; notemos que não há ponto entre cada vetor do produto e os vetores são simplesmente escritos um ao lado do outro. No produto diádico, a ordem é importante, pois o produto diádico não é comutativo, já que, em geral, para qualquer vetor $\mathbf{w}$, temos

$$\mathbf{w}\cdot(\hat{\mathbf{x}}_m\hat{\mathbf{x}}_n) \neq \mathbf{w}\cdot(\hat{\mathbf{x}}_n\hat{\mathbf{x}}_m)$$

e

$$(\hat{\mathbf{x}}_m\hat{\mathbf{x}}_n)\cdot\mathbf{w} \neq (\hat{\mathbf{x}}_n\hat{\mathbf{x}}_m)\cdot\mathbf{w}.$$

A integral acima pode ser escrita em termos do momento de quadrupolo elétrico:

$$\begin{aligned}\int_V d^3r'x'_mx'_n\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right) &= \frac{1}{3}\int_V d^3r'\left(3x'_mx'_n-\delta_{m,n}\left|\mathbf{r}'\right|^2\right)\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\\ &+ \frac{\delta_{m,n}}{3}\int_V d^3r'\left|\mathbf{r}'\right|^2\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right),\end{aligned}$$

que pode ser reescrita como

$$\int_V d^3r'x'_mx'_n\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{3}Q_{m,n}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\delta_{m,n}}{3}r_2\left(t-\frac{r}{c}\right),$$

onde definimos o tensor quadrupolar elétrico instantâneo como na eletrostática, isto é,

$$Q_{m,n}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int_V d^3r'\left(3x'_mx'_n-\delta_{m,n}\left|\mathbf{r}'\right|^2\right)\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)$$

e introduzimos a quantidade

$$r_2\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int_V d^3r'\left|\mathbf{r}'\right|^2\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right),$$

que é igual ao traço da matriz cujos elementos são as integrais

$$\int_V d^3r'x'_mx'_n\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right), \text{ para } m,n=1,2,3.$$

Assim, podemos escrever

$$\begin{aligned}\overleftrightarrow{\Upsilon}\left(t-\frac{r}{c}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_m\hat{\mathbf{x}}_n\left[\frac{1}{3}Q_{m,n}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\delta_{m,n}}{3}r_2\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &= \frac{\overleftrightarrow{Q}}{6}+\frac{\overleftrightarrow{I}}{6}r_2\left(t-\frac{r}{c}\right),\end{aligned}$$

onde

$$\overleftrightarrow{Q} = \sum_{m=1}^{3}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_m Q_{m,n}\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{\mathbf{x}}_n$$

e

$$\overleftrightarrow{I} = \sum_{m=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_m\hat{\mathbf{x}}_m,$$

que é a identidade diádica, já que, para qualquer vetor $\mathbf{w}$, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{w}\cdot\overleftrightarrow{I} &= \overleftrightarrow{I}\cdot\mathbf{w}\\ &= \mathbf{w}.\end{aligned}$$

Voltemos agora ao cálculo do potencial vetorial, utilizando os resultados acima. Logo,

$$\begin{aligned}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r}\int_V d^3r'\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left[\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\mathbf{r}}+\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &+ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{rc}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\mathbf{r}}+\hat{\mathbf{r}}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right].\end{aligned}$$

Para simplificar o primeiro termo, calculemos, por exemplo,

$$\begin{aligned}\int_V d^3r' J_x\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right) &= \int_V d^3r'\hat{\mathbf{x}}\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\\ &= \int_V d^3r'\left(\boldsymbol{\nabla}'x'\right)\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\\ &= \int_V d^3r'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x'\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\right]-\int_V d^3r' x'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right).\end{aligned}$$

Se utilizamos o teorema da divergência de Gauss, obtemos

$$\begin{aligned}\int_V d^3r'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x'\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\right] &= \oint_{S(V)} da'\,\hat{\mathbf{n}}'\cdot\left[x'\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\right]\\ &= \oint_{S(V)} da'\,x'\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)\\ &= 0,\end{aligned}$$

pois, como as cargas e correntes estão confinadas na região V,

$$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right) = 0$$

sobre a fronteira de V. Logo,

$$\int_V d^3r' J_x\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right) = -\int_V d^3r' x'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right).$$

No entanto, utilizando a equação da continuidade, temos

$$\boldsymbol{\nabla}' \cdot \mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) = -\frac{\partial \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right)}{\partial t}$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r' J_x\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\int_V d^3r' x' \rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c}\right) \\
&= \dot{p}_x\left(t - \frac{r}{c}\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &\approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r} + \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{r^2}\left[\mathbf{m}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\
&+ \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{1}{rc}\left[\dot{\mathbf{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].
\end{aligned}$$

Para o cálculo do campo elétrico, precisamos da derivada temporal do potencial vetorial, isto é,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} \\
&+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2c^2}\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathbf{m}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \\
&+ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{rc^3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\mathbf{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]
\end{aligned}$$

e do gradiente do potencial escalar, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}\phi(\mathbf{r}, t) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left(\frac{Q}{r}\right) + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{r^2}\right] + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc}\right].$$

O campo elétrico de radiação, definido como sendo apenas a parte que varia com o inverso de r, pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\text{rad}} &\approx -\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{rc}\boldsymbol{\nabla}\left[\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)}{rc^2} \\
&- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{rc^3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\mathbf{m}}\left(t - \frac{r}{c}\right) \times \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \ddot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right].
\end{aligned}$$

Calculemos:

$$\boldsymbol{\nabla}\left[\hat{\mathbf{r}} \cdot \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \approx \boldsymbol{\nabla}\left[\frac{1}{r}\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \left[\boldsymbol{\nabla}\frac{1}{r}\right]\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r}\boldsymbol{\nabla}\left[\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \\
&= -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r}\boldsymbol{\nabla}\left[\sum_{i=1}^{3}x_i\dot{p}_i\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \\
&= -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}\left(\boldsymbol{\nabla}x_i\right)\dot{p}_i\left(t-\frac{r}{c}\right) \\
&+ \frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}x_i\left[\boldsymbol{\nabla}\dot{p}_i\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_i\dot{p}_i\left(t-\frac{r}{c}\right) \\
&- \frac{1}{rc}\sum_{i=1}^{3}x_i\ddot{p}_i\left(t-\frac{r}{c}\right)\left[\boldsymbol{\nabla}r\right] \\
&= -\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2}\mathbf{r}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{r}\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \\
&- \frac{1}{rc}\mathbf{r}\cdot\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\hat{\mathbf{r}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_{\mathrm{rad}} &\approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)-\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{rc^2} \\
&- \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{rc^3}\frac{\partial}{\partial t}\left[\dot{\mathbf{m}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\mathbf{r}}+\hat{\mathbf{r}}\cdot\ddot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{d^2}{dt^2}\left[\frac{\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)-\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{rc^2}-\frac{\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\mathbf{r}}+\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{rc^3}\right] \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[\hat{\mathbf{r}}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)-\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)-\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\hat{\mathbf{r}}\times\left[\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]+\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)-\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}\right\} \\
&= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 rc^2}\frac{d^2}{dt^2}\left\{\hat{\mathbf{r}}\times\left[\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}\right]-\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{c}\right\}.
\end{aligned}
$$

onde já desprezamos todos os termos que variam com o inverso de r^2. Comparemos

$$
\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int_V d^3r'\mathbf{r}'\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{r}{c}\right)
$$

e

$$\mathbf{m}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \frac{1}{2}\int_V d^3r'\mathbf{r'}\times\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right).$$

Mas,

$$\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right) = \mathbf{v}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\rho\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right),$$

onde $\mathbf{v}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)$ é o campo de velocidades das partículas carregadas na região V. Assim, comparativamente, o momento de dipolo magnético dividido por c é uma ordem v/c menor do que o momento de dipólo elétrico. Analogamente, comparemos

$$\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) = \int_V d^3r'\mathbf{r'}\rho\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)$$

e

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right) &= \frac{1}{2}\int_V d^3r'\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}\mathbf{r'}\frac{\partial\rho\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_n\int_V d^3r'\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}x'_n\boldsymbol{\nabla'}\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\\
&= -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_n\int_V d^3r'\boldsymbol{\nabla'}\cdot\left[\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}x'_n\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\right]\\
&+ \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_n\int_V d^3r'\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla'}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}x'_n\right).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\int_V d^3r'\boldsymbol{\nabla'}\cdot\left[\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}x'_n\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\right] &= \oint_{S(V)} da'\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}x'_n\\
&= 0
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla'}\left(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}x'_n\right) &= \sum_{m=1}^{3}\frac{x_m}{r}\boldsymbol{\nabla'}\left(x'_m x'_n\right)\\
&= \sum_{m=1}^{3}\frac{x_m}{r}\left(\hat{\mathbf{x}}_m x'_n+\hat{\mathbf{x}}_n x'_m\right)\\
&= \hat{\mathbf{r}}x'_n+\hat{\mathbf{x}}_n\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}.
\end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned}
\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right) &= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{3}\hat{\mathbf{x}}_n\int_V d^3r'\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{r}}x'_n+\hat{\mathbf{x}}_n\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}\right)\\
&= \frac{1}{2}\int_V d^3r'\left[\mathbf{r'}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)+\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}\mathbf{J}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\right]\\
&= \frac{1}{2}\int_V d^3r'\left[\mathbf{r'}\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{v}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)+\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r'}\mathbf{v}\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right)\right]\rho\left(\mathbf{r'},t-\frac{r}{c}\right).
\end{aligned}$$

Assim, comparativamente, o termo

$$\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$$

dividido por c é uma ordem v/c menor do que o momento de dipolo elétrico. Podemos, portanto, desprezar os termos envolvendo $\mathbf{m}$ e

$$\dot{\overleftrightarrow{\boldsymbol{\Upsilon}}}$$

e o campo elétrico de radiação fica

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\left[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{rc^2}.$$

Para sermos consistentes, devemos adotar os potenciais de radiação:

$$\phi_{\text{rad}}\left(\mathbf{r},t\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{rc}$$

e

$$\mathbf{A}_{\text{rad}}\left(\mathbf{r},t\right) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r},$$

já que os outros termos não contribuem para os campos de radiação, que, por definição, devem variar com o inverso de r. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{rad}}\left(\mathbf{r},t\right) &\approx \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_{\text{rad}}\left(\mathbf{r},t\right)\\
&\approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi rc}\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\boldsymbol{\nabla}r\\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}}{rc}.
\end{aligned}$$

Resumindo os resultados até este ponto, o campo elétrico de radiação que calculamos deu

$$\mathbf{E}_{\text{rad}} \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\left[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{rc^2}.$$

Para sermos consistentes, devemos adotar os potenciais de radiação:

$$\phi_{\text{rad}}\left(\mathbf{r},t\right) \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{rc}$$

e

$$\mathbf{A}_{\text{rad}}\left(\mathbf{r},t\right) \approx \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{r},$$

já que os outros termos não contribuem para os campos de radiação, que, por definição, devem variar com o inverso de r. Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) &\approx \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) \\
&\approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\boldsymbol{\nabla}\times\dot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right) \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi rc}\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\boldsymbol{\nabla}r \\
&= \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}}{rc}.
\end{aligned}$$

Notemos que, em todas as passagens para calcular os campos e potenciais de radiação, formalmente estamos fazendo o limite, por exemplo,

$$\mathbf{B}_{\text{rad}}(\mathbf{r},t) \equiv \lim_{r\to\infty}\left[r\mathbf{B}_{\text{total}}(\mathbf{r},t)\right].$$

Agora podemos calcular o vetor de Poynting:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S}_{\text{rad}} &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}_{\text{rad}}\times\mathbf{B}_{\text{rad}} \\
&\approx \frac{1}{4\pi}\left\{\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\left[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]}{rc^2}\right\}\times\left[\frac{\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\hat{\boldsymbol{r}}}{rc}\right] \\
&= \frac{\hat{\mathbf{r}}}{4\pi}\frac{\left[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]^2}{r^2c^3}.
\end{aligned}$$

A distribuição angular da potência irradiada pode ser obtida da expressão

$$r^2\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{S}_{\text{rad}}d\Omega = \frac{d\Omega}{4\pi c^3}\left[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]^2.$$

Finalmente, integrando sobre todas as direções do espaço, temos a potência total emitida pela distribuição, ou seja,

$$\begin{aligned}
P_{\text{rad}} &= \frac{1}{4\pi c^3}\int_{\Omega=4\pi}d\Omega\left[\hat{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right]^2 \\
&= \frac{2\pi}{4\pi c^3}\int_0^{\pi}d\theta\,\mathrm{sen}^3\theta\left|\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|^2,
\end{aligned}$$

onde escolhemos o eixo z ao longo do sentido de $\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)$. Logo,

$$P_{\text{rad}} = \frac{1}{2c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|^2\int_{-1}^{+1}du\,\left(1-u^2\right),$$

onde fizemos

$$u = \cos\theta.$$

Como

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1}du\,\left(1-u^2\right) &= \left[u-\frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{+1} \\
&= 2-\frac{2}{3} \\
&= \frac{4}{3},
\end{aligned}$$

segue

$$
\begin{aligned}
P_{\text{rad}} &= \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|^2 \\
&= \frac{2}{3c^3}\left|\ddot{\mathbf{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|^2 .
\end{aligned}
$$

Em particular, para uma só carga pontual, com trajetória dada por $\mathbf{r}(t)$, o momento dipolar elétrico é dado por

$$
\mathbf{p}\left(t-\frac{r}{c}\right) = q\mathbf{r}\left(t-\frac{r}{c}\right)
$$

e, portanto,

$$
P_{\text{rad}} = \frac{2q^2}{3c^3}\left|\ddot{\mathbf{r}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right|^2 ,
$$

ou seja, a potência total irradiada por uma partícula é proporcional ao quadrado da aceleração. Essa é a chamada fórmula de Larmor.

Radiação de fontes localizadas harmonicamente oscilantes

Quando a densidade de carga e a densidade de corrente variam no tempo, podemos escrevê-las como uma superposição contínua de componentes de Fourier. Vamos, portanto, considerar apenas uma dessas componentes monocromáticas e escrever

$$
\rho(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left[\rho_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right]
$$

e

$$
\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left[\mathbf{J}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right].
$$

Na ausência de fronteiras, isto é, no espaço livre, o potencial vetorial no calibre de Lorentz é dado por

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) &= \frac{1}{c}\int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \\
&= \frac{1}{c}\int_V d^3r' \frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\operatorname{Re}\left\{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)\right]\right\} \\
&= \operatorname{Re}\left\{\frac{1}{c}\int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left[-i\omega\left(t-\frac{1}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)\right]\right\},
\end{aligned}
$$

onde V é a região do espaço limitada onde a densidade de corrente não se anula. Podemos, portanto, escrever o potencial vetorial como

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \operatorname{Re}\left\{\mathbf{A}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right\},
$$

onde

$$
\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right).
$$

Com isso, o campo $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ escreve-se

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}(\mathbf{r},t)\\
&= \boldsymbol{\nabla}\times\mathrm{Re}\{\mathbf{A}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\}\\
&= \mathrm{Re}\{[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_c(\mathbf{r})]\exp(-i\omega t)\}\\
&= \mathrm{Re}\{\mathbf{B}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\},
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_c(\mathbf{r}).$$

Da Lei de Ampère-Maxwell segue que

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

considerando que o meio seja o vácuo e que não há correntes elétricas no ponto em que calculamos $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= c\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t)\\
&= c\boldsymbol{\nabla}\times\mathrm{Re}\{\mathbf{B}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\}\\
&= \mathrm{Re}\{c[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_c(\mathbf{r})]\exp(-i\omega t)\}
\end{aligned}$$

e, usando o ansatz

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\{\mathbf{E}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\},$$

obtemos

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Re}\{\mathbf{E}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = \mathrm{Re}\{c[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_c(\mathbf{r})]\exp(-i\omega t)\},$$

isto é,

$$\mathrm{Re}\{-i\omega\mathbf{E}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\} = \mathrm{Re}\{c[\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_c(\mathbf{r})]\exp(-i\omega t)\}.$$

Como essa igualdade deve ser válida para todo t, segue que

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = i\frac{c}{\omega}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_c(\mathbf{r}).$$

A partir de agora, portanto, podemos nos concentrar apenas no estudo do potencial vetorial complexo, isto é,

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) = \frac{1}{c}\int_V d^3r'\,\frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\exp\left(i\frac{\omega}{c}|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right),$$

já que os campos podem ser obtidos através desse potencial vetorial complexo, pois

$$\mathbf{B}_c(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$$

e

$$\mathbf{E}_c(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_c(\mathbf{r}),$$

onde definimos, por conveniência,

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

O comprimento de onda da radiação é dado por

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{2\pi}{k} \\ &= \frac{2\pi c}{\omega}. \end{aligned}$$

Em termos da distância à fonte dos campos, $r = |\mathbf{r}|$, e do comprimento característico da fonte localizada, d, há três regiões espaciais de interesse: a zona próxima ou estática, quando

$$d \ll r \ll \lambda,$$

a zona intermediária, quando

$$d \ll r \sim \lambda,$$

e a zona distante ou de radiação, quando

$$d \ll \lambda \ll r.$$

Aqui abordaremos apenas a zona de radiação. Em geral, os campos elétrico e indução magnética têm termos proporcionais a todas as potências positivas de r^{-1}. No entanto, em uma esfera infinitamente distante da fonte, somente os termos dos campos proporcionais a r^{-1} contribuem com uma energia não nula, como podemos ver pela integral do vetor de Poynting sobre essa superfície. Um elemento de área da superfície é proporcional a r^2 e, portanto, somente os termos dos campos elétrico e indução magnética proporcionais a r^{-1} contribuem com outro fator r^2 no denominador do integrando para cancelar aquele do numerador. As contribuições dos termos de potências de r^{-1} superiores não contribuem para o fluxo do vetor de Poynting sobre a superfície esférica no infinito. É por essa razão que os termos dos campos proporcionais a r^{-1} são definidos como os campos de radiação.

Na integral que dá $\mathbf{A}_c(\mathbf{r})$, vemos que a densidade de corrente, $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$, só não é nula em uma região tal que

$$r' = |\mathbf{r}'| \lesssim d,$$

de forma que, na zona de radiação,

$$r' \ll \lambda \ll r.$$

Com essa hipótese, podemos escrever

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| &= r\sqrt{1 - 2\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2} \\ &= r\left\{1 - \frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)\left[-2\frac{\mathbf{r}}{r}\cdot\left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right]^2 + \ldots\right\} \\ &= r - \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' + r\frac{1}{2}\left(\frac{r'}{r}\right)^2 - r\frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}'}{r}\right)^2 + \ldots \\ &= r - \hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}' + r'\left[\frac{1 - (\hat{\mathbf{r}}\cdot\hat{\mathbf{r}}')^2}{2}\left(\frac{r'}{r}\right) + \ldots\right], \end{aligned}$$

onde

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

e

$$\hat{\mathbf{r}}' = \frac{\mathbf{r}'}{r'}.$$

Logo, podemos aproximar:

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'$$

e, assim,

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \approx \frac{\exp(ikr)}{c} \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}').$$

Como

$$\begin{aligned}
\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} &= \frac{1}{r}\left\{1 - \frac{1}{2}\left[-2\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right) + \left(\frac{r'}{r}\right)^2\right] + \frac{3}{2}\left[\frac{\mathbf{r}}{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}'}{r}\right)\right]^2\right\} + \ldots \\
&= \frac{1}{r} + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^3} - \frac{1}{2}\frac{(r')^2}{r^3} + \frac{3}{2}\frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^2}{r^5} + \ldots,
\end{aligned}$$

aproximamos:

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

na integral acima e obtemos

$$\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) \approx \frac{\exp(ikr)}{rc} \int_V d^3r' \mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}').$$

Como r' é da ordem de d, na zona de radiação temos

$$d \ll \lambda,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
r' &\ll \lambda \\
&= \frac{2\pi}{k}
\end{aligned}$$

e, portanto, podemos impor

$$kr' \ll 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\exp(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}') &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}')^n}{n!} \\
&\approx 1 - ik\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{r}'
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) &\approx \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\,\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &- ik\frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\,(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\,\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\,.\end{aligned}$$

Radiação de Dipolo Elétrico ou Radiação Dipolar Elétrica

Considerando apenas a zona de radiação, obtivemos uma expansão aproximada para o potencial vetorial, supondo que o número de onda multiplicado pelo tamanho característico da distribuição localizada de corrente era muito menor do que a unidade:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_c(\mathbf{r}) &\approx \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\,\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\ &- ik\frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\,(\hat{\mathbf{r}}\cdot\mathbf{r}')\,\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\,.\end{aligned}$$

Quando consideramos apenas o primeiro termo da expansão acima,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\,\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\,.$$

Da equação da continuidade temos

$$\nabla\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial\rho(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Como

$$\mathbf{J}(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\mathbf{J}_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right]$$

e, analogamente,

$$\rho(\mathbf{r},t) = \mathrm{Re}\left[\rho_c(\mathbf{r})\exp(-i\omega t)\right],$$

a equação da continuidade fornece

$$\nabla'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') = i\omega\rho_c(\mathbf{r}')\,.$$

No entanto, no integrando da integral que dá $\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$ aparece apenas $\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$, ao invés de $\nabla'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')$. Para resolver isso, consideremos:

$$\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') = \hat{\mathbf{x}}_i\hat{\mathbf{x}}_i\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\,,$$

onde estamos usando a convenção de Einstein para somas. Assim, como

$$\boldsymbol{\nabla}'x_i' = \hat{\mathbf{x}}_i,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') &= \hat{\mathbf{x}}_i\left(\boldsymbol{\nabla}' x_i'\right)\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\
&= \hat{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x_i'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\right] - \hat{\mathbf{x}}_i x_i'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\
&= \hat{\mathbf{x}}_i\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x_i'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\right] - \mathbf{r}'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}').
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{\exp(ikr)}{rc}\hat{\mathbf{x}}_i\int_V d^3r'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x_i'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\right] - \frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\mathbf{r}'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}').$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss, a primeira das integrais volumétricas pode ser transformada em uma integral na superfície $S(V)$, fronteira de V:

$$\int_V d^3r'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\left[x_i'\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\right] = \oint_{S(V)} da'\, x_i'\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}').$$

Na superfície, fronteira da região onde a densidade de corrente não é nula, porque envolve toda essa região,

$$\hat{\mathbf{n}}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}')\big|_{S(V)} = 0,$$

pois, se a densidade de corrente tivesse uma componente normal à fronteira, então, por continuidade, haveria corrente através da fronteira, o que contradiziria a hipótese de a superfície ser a fronteira da região onde a densidade de corrente não se anula. Logo, na aproximação dipolar elétrica,

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) &= -\frac{\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\mathbf{r}'\boldsymbol{\nabla}'\cdot\mathbf{J}_c(\mathbf{r}') \\
&= -\frac{i\omega\exp(ikr)}{rc}\int_V d^3r'\mathbf{r}'\rho_c(\mathbf{r}'),
\end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r}) = -ik\frac{\exp(ikr)}{r}\mathbf{p}_c,$$

onde, como acima,

$$k = \frac{\omega}{c}$$

e definimos o momento de dipolo elétrico complexo como

$$\mathbf{p}_c = \int_V d^3r'\mathbf{r}'\rho_c(\mathbf{r}').$$

Os campos de radiação

O campo indução magnética complexo de radiação pode ser obtido a partir de $\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$, na aproximação de dipolo elétrico, através da equação

$$\mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_{DE}(\mathbf{r})$$

e desprezando termos que não sejam proporcionais a r^{-1}. Assim,

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) &= -ik\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\exp(ikr)}{r}\mathbf{p}_c\right] \\
&= ik\mathbf{p}_c\times\boldsymbol{\nabla}\left[\frac{\exp(ikr)}{r}\right] \\
&= ik\mathbf{p}_c\times\hat{\mathbf{r}}\left[ik\frac{\exp(ikr)}{r}-\frac{\exp(ikr)}{r^2}\right]
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\mathbf{B}^{\mathrm{rad}}_{DE}(\mathbf{r}) = k^2\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c}{r}\exp(ikr).$$

Da Lei de Ampère-Maxwell, podemos escrever

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r}) = -ik\mathbf{E}_{DE}(\mathbf{r}),$$

ou seja,

$$\mathbf{E}_{DE}(\mathbf{r}) = \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_{DE}(\mathbf{r})$$

e, assim, o campo elétrico de radiação fica

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}^{\mathrm{rad}}_{DE}(\mathbf{r}) &= \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}^{\mathrm{rad}}_{DE}(\mathbf{r}) \\
&= ik\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c}{r}\exp(ikr)\right] \\
&= ik\boldsymbol{\nabla}\times\left[\frac{\mathbf{r}\times\mathbf{p}_c}{r^2}\exp(ikr)\right] \\
&\approx ik\frac{1}{r^2}\boldsymbol{\nabla}\times[\mathbf{r}\times\mathbf{p}_c\exp(ikr)] \\
&= ik\frac{\exp(ikr)}{r^2}\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_c)+ik\frac{1}{r^2}[\boldsymbol{\nabla}\exp(ikr)]\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_c) \\
&= ik\frac{\exp(ikr)}{r^2}\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_c)-k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c).
\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times(\mathbf{r}\times\mathbf{p}_c) &= \hat{\mathbf{x}}_l\varepsilon_{lmn}\partial_m\left[\varepsilon_{npq}x_p(\mathbf{p}_c)_q\right] \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{npq}\delta_{mp}(\mathbf{p}_c)_q \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l\varepsilon_{lmn}\varepsilon_{nmq}(\mathbf{p}_c)_q \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l(\delta_{lm}\delta_{mq}-\delta_{lq}\delta_{mm})(\mathbf{p}_c)_q \\
&= \hat{\mathbf{x}}_l\delta_{lm}\delta_{mq}(\mathbf{p}_c)_q-\hat{\mathbf{x}}_l\delta_{lq}\delta_{mm}(\mathbf{p}_c)_q \\
&= \mathbf{p}_c-3\mathbf{p}_c \\
&= -2\mathbf{p}_c.
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{DE}^{\mathrm{rad}}(\mathbf{r}) &= -2ik\frac{\exp(ikr)}{r^2}\mathbf{p}_c - k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c)\,. \\
&\approx -k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c)\,,
\end{aligned}$$

onde desprezamos o termo proporcional a r^{-2}. Definimos o campo de radiação dipolar elétrica como

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}_{DE}^{\mathrm{rad}}(\mathbf{r}) &= -k^2\frac{\exp(ikr)}{r}\hat{\mathbf{r}}\times(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c) \\
&= \left[k^2\frac{1}{r}(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c)\exp(ikr)\right]\times\hat{\mathbf{r}} \\
&= \left[k^2\frac{1}{r}(\hat{\mathbf{r}}\times\mathbf{p}_c)\exp(ikr)\right]\times\hat{\mathbf{r}} \\
&= \mathbf{B}_{DE}^{\mathrm{rad}}(\mathbf{r})\times\hat{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$