Lista de exercícios 12 Eduardo Fonseca Rabelo - 11272697

Vamos escrever a onda evanescente que descreve o nosso sistema:

$$\vec{E} = \hat{x} E_0 \exp(-K_i z) \exp(i K_r z - i\omega t)$$

onde

$$K_r = \mathrm{Re}(K) \qquad K_i = \mathrm{Im}(K)$$

com

$$K^2 = (1 + 4\pi \chi_c)\frac{\omega^2}{c^2} = K_r^2 - K_i^2 + 2 i K_r K_i$$

e

$$\chi_c = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)}$$

Que nos dá o sistema

$$\begin{cases} K_r^2 - K_i^2 = \left[1 + 4\pi \mathrm{Re}(\chi_c)\right]\frac{\omega^2}{c^2} \\ 2K_r K_i = 4\pi \mathrm{Im}(\chi_c)\frac{\omega^2}{c^2} \end{cases}$$

Considerando próximo à primeira ressonância:

$$\chi_c \approx \frac{N n_1 e^2}{m(\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1 \omega)} = a + bi$$

$$a = \frac{N n_1 e^2}{m\left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2\right]} \qquad b = \frac{N n_1 e^2 \gamma_1 \omega}{m\left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2\right]}$$

Adotando a frequência de plasma:

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N n_1 e^2}{m}$$

$$\begin{cases} K_r^2 - K_i^2 = (1 + 4\pi a)\dfrac{w^2}{c^2} \\ 2K_r K_i = 4\pi b \dfrac{w^2}{c^2} \end{cases}$$

Substituindo temos então:

$$K_r^2 - \frac{1}{4K_r^2}\left(4\pi b \frac{w^2}{c^2}\right)^2 = (1 + 4\pi a)\frac{w^2}{c^2}$$

$$K_r^4 - (1 + 4\pi a)\frac{w^2}{c^2}K_r^2 - \frac{1}{4}\left(4\pi b \frac{w^2}{c^2}\right)^2 = 0$$

Que é uma equação de segundo grau simples com raízes

$$K_r^2 = (1+4\pi a)\frac{w^2}{2c^2} \pm \frac{w^2}{2c^2}\sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}$$

Para $K_r \in \mathbb{R}$ temos

$$\frac{w^2}{2c}\sqrt{(1+4\pi a)^2 + \epsilon} \geq (1 + 4\pi a)\frac{w^2}{2c^2}$$

portanto vale a solução

$$K_r^2 = (1+4\pi a)\frac{w^2}{2c^2} + \frac{w^2}{2c^2}\sqrt{(1+4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}$$

Finalmente

$$K_r = \frac{w}{c}\sqrt{\frac{1 + 4\pi a + \sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}}{2}}$$

Do sistema anterior

$$2k_r k_i = 4\pi b \cdot \frac{w^2}{c^2} \Rightarrow k_i = \frac{(4\pi b)}{2k_r} \cdot \frac{w^2}{c^2}$$

Por fim,

$$k_i = \frac{(4\pi b)}{2} \frac{c}{w} \cdot \frac{w^2}{c^2} \left[\frac{2}{1 + 4\pi a + \sqrt{(1+4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$k_i = (2\pi b) \frac{w}{c} \left[\frac{2}{1 + 4\pi a + \sqrt{(1+4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}} \right]^{\frac{1}{2}}$$