Sistema de unidades para nossas discussões eletromagnéticas

A velocidade da luz no vácuo é dada, exatamente, por

$$c = 299792458 \text{ m/s}.$$

Eu disse, "exatamente"! Isso mesmo: pode parecer incrível, mas a velocidade da luz é *exatamente* dada pelo valor acima, no vácuo. A razão para isso é que o antigo metro, aquele que ficava em Sèvres, perto de Paris, foi trocado por um novo metro. Desde 1967, o segundo é definido como sendo a duração de 9192631770 períodos da radiação correspondente à transição entre dois níveis hiperfinos do estado fundamental do átomo ^{133}Cs. Usando essa definição de segundo e a velocidade da luz como definida acima, encontramos o atual metro padrão (desde 1983), que, obviamente, é muito parecido com o antigo metro.

Em nossas discussões sobre eletromagnetismo estaremos sempre usando o sistema de unidades baseado em centímetro, grama e segundo, conhecido como o sistema CGS, ao invés do mais conhecido Sistema Internacional (SI), baseado em metro, quilograma e segundo (também chamado de sistema MKS). As equações de Maxwell, no vácuo, no sistema CGS são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Os potenciais vetorial e escalar

Todas as grandezas nas equações de Maxwell são dependentes, em princípio, do espaço e do tempo, isto é,

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t),$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}(\mathbf{r}, t),$$

$$\rho = \rho(\mathbf{r}, t)$$

e

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}(\mathbf{r}, t).$$

Mas sabemos que quando o divergente de um campo é nulo em todo lugar, segue que esse campo deve ser o rotacional de outro campo. Assim, de

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

segue que existe um campo vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ tal que

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}.$$

O campo $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ é chamado de potencial vetorial. Há também quem o chame de potencial vetor ou vetor potencial. No entanto, a expressão utilizada nos livros em inglês é "vector potential" e eu a traduzo para o português como potencial vetorial. Nessas nossas discussões, portanto, estarei sempre chamando de potencial vetorial o campo $\mathbf{A}$.

Podemos substituir $\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}$ na Lei da Indução de Faraday. Assim, a equação

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

fica

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) \\ &= -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right), \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} + \boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0},$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}.$$

Então, como o rotacional do campo $\mathbf{E} + (1/c)\,\partial \mathbf{A}/\partial t$ é nulo em todo lugar, segue que existe um campo escalar $\phi = \phi(\mathbf{r}, t)$ tal que

$$\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\boldsymbol{\nabla}\phi,$$

isto é,

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

O campo $\phi(\mathbf{r}, t)$ é chamado de potencial escalar e o sinal de menos que aparece acima, na frente do gradiente de ϕ, é introduzido para recuperarmos o caso eletrostático quando $\mathbf{A}$ não depender do tempo.

Em suma, se conhecermos os potenciais vetorial e escalar, poderemos calcular os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ seguindo a prescrição expressa pelas equações:

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

e

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}.$$

Transformações de calibre (ou de gauge)

O fato de que não há monopolos magnéticos, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

implica na existência de um potencial vetorial:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \mathbf{A} = \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$$

tal que

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}.$$

Substituindo esse resultado na Lei de Faraday, ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

temos

$$\boldsymbol{\nabla} \times \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = \mathbf{0}.$$

Então,

$$\exists \phi = \phi(\mathbf{r}, t)$$

tal que

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

Com isso, a Lei de Gauss,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

fica

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \left(-\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 4\pi\rho,$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}^2\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{A}) = -4\pi\rho,$$

onde, para simplificar, estamos considerando os campos no vácuo. A Lei de Ampère-Maxwell, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},$$

dá

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{A}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}\right)-\boldsymbol{\nabla}^{2}\mathbf{A} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{A}}{\partial t^{2}},$$

ou ainda,

$$\boldsymbol{\nabla}^{2}\mathbf{A}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{A}}{\partial t^{2}}-\boldsymbol{\nabla}\left(\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}.$$

Notemos que se

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

teremos

$$\boldsymbol{\nabla}^{2}\phi-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\phi}{\partial t^{2}} = -4\pi\rho \tag{2}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}^{2}\mathbf{A}-\frac{1}{c^{2}}\frac{\partial^{2}\mathbf{A}}{\partial t^{2}} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J}. \tag{3}$$

Mas é possível termos

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0?$$

A resposta a essa questão é afirmativa e a razão para isso é a que segue. Suponhamos novos potenciais

$$\phi_{1} = \phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\chi}{\partial t} \tag{4}$$

e

$$\mathbf{A}_{1} = \mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi, \tag{5}$$

onde

$$\chi = \chi\left(\mathbf{r},t\right)$$

é uma função arbitrária do espaço e do tempo. Com isso, calculemos os novos campos:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{1} &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}_{1}\\ &= \boldsymbol{\nabla}\times\left(\mathbf{A}+\boldsymbol{\nabla}\chi\right)\\ &= \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}\\ &= \mathbf{B},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}_1 &= -\boldsymbol{\nabla}\phi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}_1}{\partial t} \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\left(\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{A} + \boldsymbol{\nabla}\chi\right) \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\phi + \boldsymbol{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\boldsymbol{\nabla}\chi\right) \\
&= -\boldsymbol{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \\
&= \mathbf{E}.
\end{aligned}
$$

Logo, fica evidente que, para qualquer função $\chi(\mathbf{r},t)$, podemos trocar os potenciais usando as chamadas transformações de calibre, Eqs. (4) e (5), e os mesmos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$ são obtidos com os novos potenciais. Em outras palavras, as equações de Maxwell são invariantes por transformações de calibre, Eqs. (4) e (5). Uma vez que temos os mesmos campos para qualquer escolha da função de calibre, $\chi(\mathbf{r},t)$, podemos escolher χ de forma a fazer com que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1), fixando o calibre de Lorentz! Para isso, basta impor que os novos potenciais satisfaçam a Eq. (1) e econtrarmos a equação resultante que χ deve satisfazer:

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,
$$

isto é, usando as Eqs. (4) e (5),

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\left(\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\nabla}\chi\right) + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\phi_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}\right) = 0,
$$

ou seja,

$$
\nabla^2\chi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}_1 - \frac{1}{c}\frac{\partial \phi_1}{\partial t}. \tag{6}
$$

Assim, uma vez que supusemos que ϕ_1 e $\mathbf{A}_1$ não satisfazem a Eq. (1), segue que basta encontrarmos uma função χ satisfazendo a Eq. (6) e encontraremos um novo par de potenciais, através do uso das Eqs. (4) e (5), que satisfarão a Eq. (1) e, ao mesmo tempo, darão os mesmos campos eletromagnéticos satisfazendo as equações de Maxwell com as mesmas fontes de carga e corrente. E, além disso, no caso do calibre de Lorentz, a Eq. (6) tem o mesmo tipo que as Eqs. (4) e (5). Portanto, resolvendo a equação de onda com fonte encontramos ϕ, $\mathbf{A}$ e χ.

Logo, mostramos que, no calibre de Lorentz, dadas as fontes ρ e $\mathbf{J}$, tudo o que temos a fazer para encontrar os potenciais escalar e vetorial é resolver a equação diferencial

$$
\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r},t),
$$

para cada um dos pares ordenados (Ψ, f) do conjunto

$$
\left\{(\phi, -4\pi\rho), \left(A_x, -\frac{4\pi}{c}J_x\right), \left(A_y, -\frac{4\pi}{c}J_y\right), \left(A_z, -\frac{4\pi}{c}J_z\right)\right\}.
$$