Função de Green para a equação de onda

Anteriormente mostramos que, no calibre de Lorentz, dadas as fontes ρ e $\mathbf{J}$, tudo o que temos a fazer para encontrar os potenciais escalar e vetorial é resolver a equação diferencial

$$\nabla^2 \Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \Psi(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} = f(\mathbf{r},t),$$

onde o par ordenado (Ψ, f) representa um elemento qualquer do conjunto

$$\left\{(\phi, -4\pi\rho), \left(A_x, -\frac{4\pi}{c}J_x\right), \left(A_y, -\frac{4\pi}{c}J_y\right), \left(A_z, -\frac{4\pi}{c}J_z\right)\right\}.$$

Queremos encontrar, primeiramente, uma solução particular dessa equação. Para isso, utilizamos a função de Green $G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')$, que, por definição, satisfaz

$$\nabla^2 G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t'). \tag{1}$$

A estratégia de utilizarmos esta abordagem em termos de função de Green é a seguinte. Notemos que o efeito de cada fonte singular $\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t')$ pode ser ponderamente acumulado através da fórmula:

$$f(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t').$$

Assim, quando multiplicarmos a Eq. (1) por $f(\mathbf{r}',t')$ e integramos sobre todo o espaço e todo o tempo, obteremos:

$$\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left[f(\mathbf{r}',t')\,\nabla^2 G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') - \frac{1}{c^2}f(\mathbf{r}',t')\,\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\right] =$$
$$\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\,\delta(t-t'),$$

isto é,

$$\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left[\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t')\right] = f(\mathbf{r},t),$$

ou seja, encontramos uma solução particular da equação diferencial que queremos resolver:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt'\, f(\mathbf{r}',t')\,G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t').$$

Podemos fazer a transformada de Fourier sobre a variável t em ambos os membros dessa equação para obter

$$\nabla^2 g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') + \frac{\omega^2}{c^2}g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') = \frac{\exp(i\omega t')}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'),$$

onde usamos a representação integral da função delta de Dirac, isto é,

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp[-i\omega(t-t')]$$

e definimos

$$G(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \exp(-i\omega t) \, g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t').$$

Como explicaremos mais adiante, ao invés de resolvermos a equação diferencial acima, vamos modificá-la:

$$\nabla^2 g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') + (k_0 + i\eta)^2 g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{\exp(i\omega t')}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

onde definimos

$$k_0 = \frac{\omega}{c},$$

que assume valores positivos e negativos, como ω. Podemos agora tomar a transformada de Fourier com relação à variável $\mathbf{r}$ e obter

$$-k^2 \overline{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') + (k_0 + i\eta)^2 \overline{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + i\omega t')}{(2\pi)^4},$$

onde utilizamos

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \, \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')]$$

e definimos

$$g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \int d^3k \, \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \, \overline{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t').$$

Logo,

$$\overline{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}' + i\omega t')}{(2\pi)^4 \left[-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right]}$$

e, portanto,

$$g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \int d^3k \, \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') + i\omega t']}{(2\pi)^4 \left[-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right]}.$$

Notemos que se não tivéssemos modificado a equação original e, portanto, equivalentemente tomado $\eta = 0$, a integral acima não convergiria e não poderíamos encontrar uma função de Green pelo presente método. No entanto, a função de Green, no caso modificado, fica

$$\begin{aligned} G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \exp(-i\omega t) \, g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') - i\omega(t - t')]}{(2\pi)^4 \left[-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right]}, \end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned} G_\eta(\mathbf{r},t) &= \int d^3k \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t)}{(2\pi)^4 \left[-k^2 + (k_0+i\eta)^2\right]} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \, \exp(-i\omega t) \int d^3k \, \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^2 - (k_0+i\eta)^2}. \end{aligned}$$

Em coordenadas polares,

$$\begin{aligned} \int d^3k \, \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^2-(k_0+i\eta)^2} &= \int_0^\infty k^2 dk \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^\pi d\theta_k \, \mathrm{sen}\theta_k \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^2-(k_0+i\eta)^2} \\ &= \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2-(k_0+i\eta)^2} dk \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^\pi d\theta_k \, \mathrm{sen}\theta_k \exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Se escolhermos o eixo z do espaço dos vetores de onda $\mathbf{k}$ como sendo paralelo ao vetor $\mathbf{r}$, teremos

$$\begin{aligned} \int d^3k \, \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^2-(k_0+i\eta)^2} &= \int_0^\infty \frac{k^2}{k^2-(k_0+i\eta)^2} dk \int_0^{2\pi} d\varphi_k \int_0^\pi d\theta_k \, \mathrm{sen}\theta_k \exp(ikr\cos\theta_k) \\ &= \int_0^\infty \frac{2\pi k^2}{k^2-(k_0+i\eta)^2} dk \int_0^\pi d\theta_k \, \mathrm{sen}\theta_k \exp(ikr\cos\theta_k) \\ &= \int_0^\infty \frac{2\pi k^2}{k^2-(k_0+i\eta)^2} dk \int_{-1}^1 du \exp(ikru) \\ &= \int_0^\infty dk \frac{2\pi k^2}{k^2-(k_0+i\eta)^2} \frac{1}{ikr} \left[\exp(ikr) - \exp(-ikr)\right] \\ &= \frac{2\pi}{ir} \int_0^\infty \frac{k}{k^2-(k_0+i\eta)^2} \left[\exp(ikr) - \exp(-ikr)\right] dk, \end{aligned}$$

onde utilizamos a substituição $u = \cos\theta_k$. Como temos

$$\int_0^\infty \frac{k}{k^2-(k_0+i\eta)^2} \exp(-ikr)\, dk = -\int_{-\infty}^0 \frac{k}{k^2-(k_0+i\eta)^2} \exp(ikr)\, dk,$$

podemos escrever

$$\int d^3k \, \frac{\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r})}{k^2-(k_0+i\eta)^2} = \frac{2\pi}{ir} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k\exp(ikr)}{k^2-(k_0+i\eta)^2} dk.$$

Os polos dessa integral são dados por

$$Z_\pm = \pm(k_0+i\eta).$$

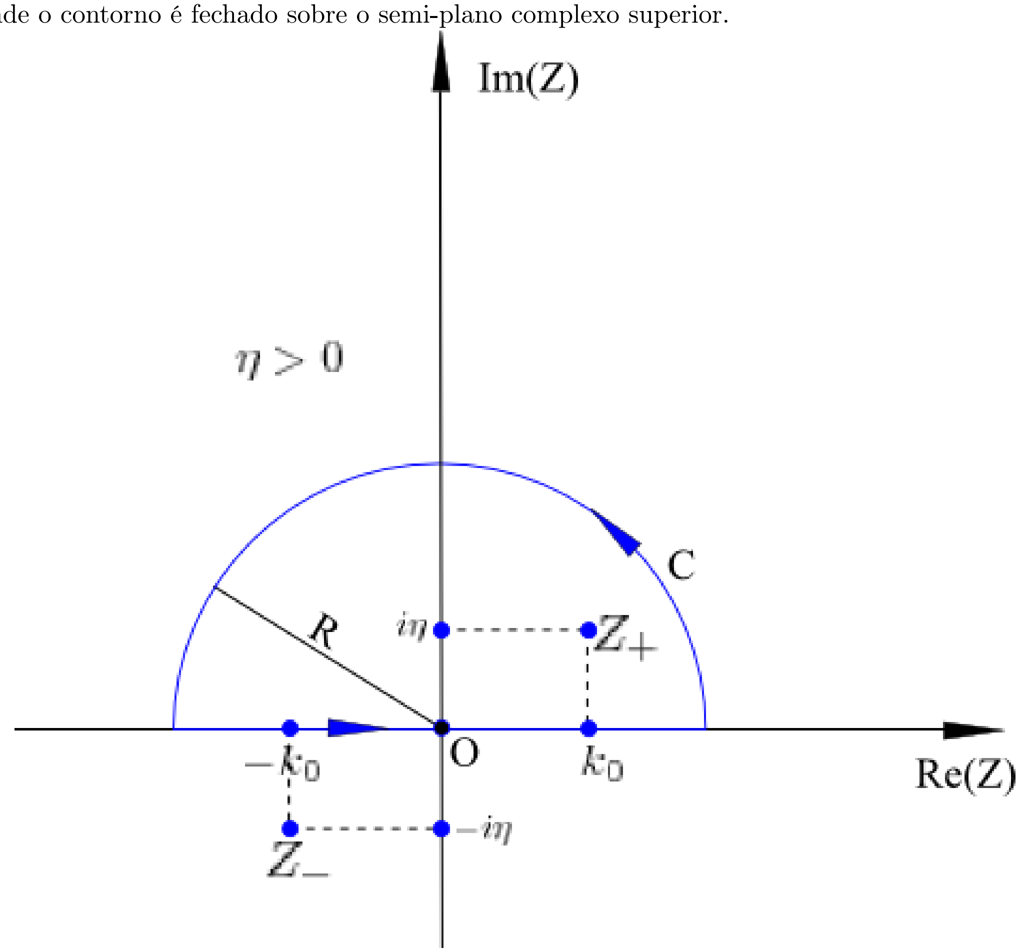
com k_0 dado acima, isto é,

$$k_0 = \frac{\omega}{c}.$$

Consideremos a integral no plano complexo:

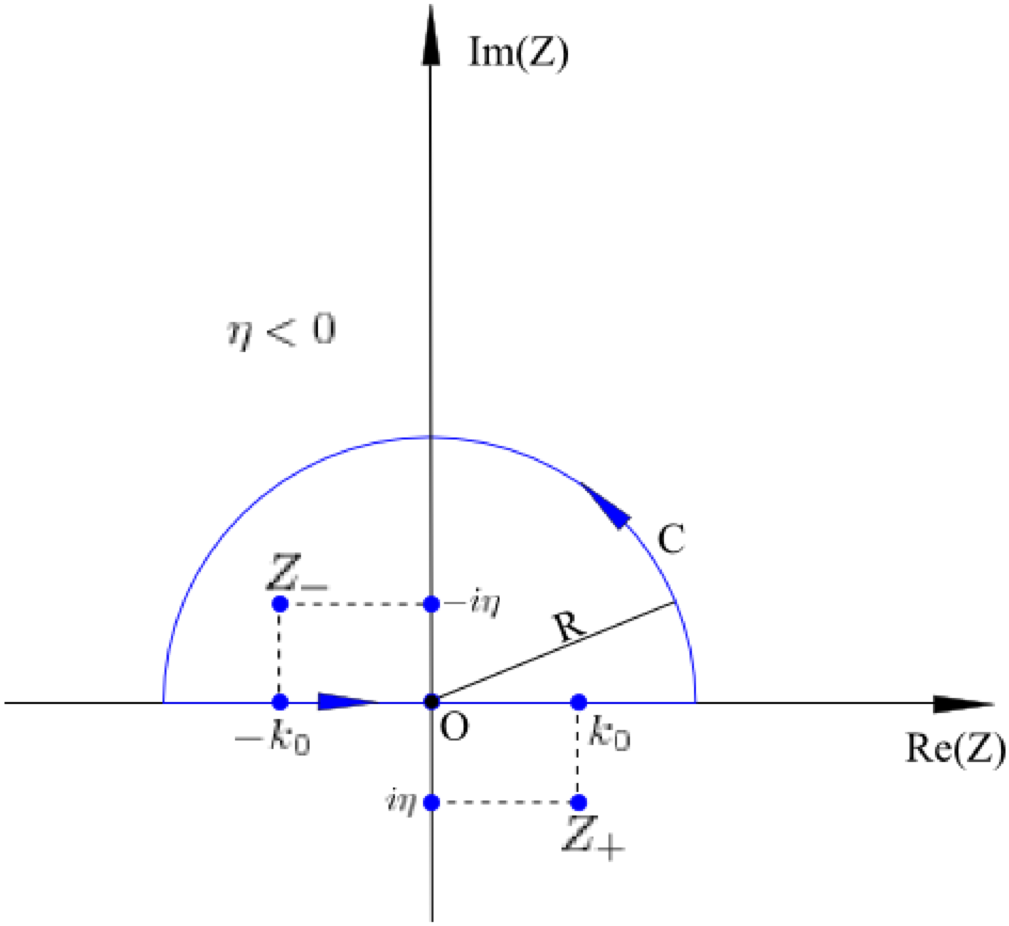
$$\oint_C \frac{Z\exp(irZ)}{(Z-Z_+)(Z-Z_-)}dZ,$$

onde o contorno é fechado sobre o semi-plano complexo superior.



Quando $\eta \to 0^+$ (veja a figura acima), temos

$$\begin{aligned}\lim_{\eta\to 0^+}\oint_C \frac{Z\exp(irZ)}{(Z-Z_+)(Z-Z_-)}dZ &= 2\pi i \lim_{\eta\to 0^+}\frac{Z_+\exp(irZ_+)}{Z_+-Z_-} \\ &= \pi i\exp(ik_0 r)\,.\end{aligned}$$



Quando $\eta \to 0^-$ (veja a figura acima), temos

$$\lim_{\eta \to 0^-} \oint_C \frac{Z \exp(irZ)}{(Z - Z_+)(Z - Z_-)} dZ \quad = \quad \pi i \exp(-ik_0 r).$$

Mas, com o contorno fechado sobre o semi-plano complexo superior,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (k_0 + i\eta)^2} dk \quad = \quad \oint_C \frac{Z \exp(irZ)}{(Z - Z_+)(Z - Z_-)} dZ$$

e, portanto,

$$\lim_{\eta \to 0^\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (k_0 + i\eta)^2} dk \quad = \quad \pi i \exp(\pm ik_0 r).$$

Com esses resultados, podemos concluir que

$$\lim_{\eta \to 0^\pm} \int d^3k \, \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 - (k_0 + i\eta)^2} \quad = \quad \frac{2\pi^2}{r} \exp(\pm ik_0 r)$$

e, portanto,

$$
\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r},t) &\equiv \lim_{\eta\to 0^{\pm}} G_{\eta}(\mathbf{r},t) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp(-i\omega t)\,\frac{2\pi^2}{r}\exp(\pm i k_0 r) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp(-i\omega t)\exp\left(\pm i\frac{\omega}{c}r\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 r}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, \exp\left[-i\omega\left(t\mp\frac{r}{c}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi r}\delta\left(t\mp\frac{r}{c}\right).
\end{aligned}
$$

Assim, também temos

$$
\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t') &= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t-t'\mp\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t'-t\pm\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right).
\end{aligned}
$$

Há, portanto, duas soluções possíveis para o problema:

$$
\begin{aligned}
\Psi_{\pm}(\mathbf{r},t) &= \int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_{\pm}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t-t')\, f(\mathbf{r}',t') \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int \frac{d^3r'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\int_{-\infty}^{+\infty} dt'\delta\left(t'-t\pm\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) f(\mathbf{r}',t') \\
&= -\frac{1}{4\pi}\int d^3r'\,\frac{f\left(\mathbf{r}',t\mp\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.
\end{aligned}
$$

Para os campos eletromagnéticos especificamente de distribuições de cargas e correntes dadas, sendo esses campos nulos no caso de termos as fontes também nulas, entendemos que esses campos são causados pelas fontes. Nesse caso, utilizaremos as soluções retardadas e não as avançadas, isto é,

$$
\phi(\mathbf{r},t) = \int d^3r'\,\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}
$$

e

$$
\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r'\,\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.
$$

Equações do eletromagnetismo

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss,

$$
\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho,
$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère & Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Essas equações são a base da teoria do campo eletromagnético. No entanto, em nossas discussões aqui, estaremos utilizando várias outras equações úteis, além das de Maxwell. Uma delas é a equação de movimento para uma partícula carregada, dada em termos da força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde q é a carga da partícula, $\mathbf{v}$ é sua velocidade e c é a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Como a carga é sempre conservada, há também a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que, para recordar, vamos deduzi-la. A carga total em uma região de volume V somente varia se houver fluxo de carga através da superfície S de V. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = -\oint_S da\, \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J},$$

onde o sinal de menos é necessário, pois $\hat{\mathbf{n}}$ é, por convenção, a normal externa à superfície fechada S e a carga Q é a que está na região V. Assim, se a carga aumentar em V, é porque há corrente através de S no sentido de fora para dentro. Podemos utilizar o teorema da divergência e obter:

$$\frac{dQ}{dt} = -\int_V d^3r\, \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Como o volume V é arbitrário e

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt}\int_V d^3r\, \rho\left(\mathbf{r}, t\right) \\ &= \int_V d^3r\, \frac{\partial \rho\left(\mathbf{r}, t\right)}{\partial t},\end{aligned}$$

segue a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}\left(\mathbf{r}, t\right) + \frac{\partial \rho\left(\mathbf{r}, t\right)}{\partial t} = 0.$$

Como explicado quando discutimos transformações de calibre, o calibre ou gauge de Lorentz é dado por

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{A}+\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0.$$

Nesse calibre, os potenciais vetorial e escalar retardados, que sempre vamos utilizar em nossas discussões, são dados por

$$\phi\left(\mathbf{r},t\right) = \int d^{3}r'\,\frac{\rho\left(\mathbf{r}',t-\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}{c}\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}$$

e

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{1}{c}\int d^{3}r'\,\frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}',t-\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}{c}\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|},$$

conforme deduzimos quando discutimos acima a função de Green para a equação de onda. Com essas soluções dos potenciais, os campos são obtidos destas relações:

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla}\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{A}}{\partial t}.$$

A convenção de Einstein para somas

É muito comum termos várias somas iteradas em nossos cálculos em eletromagnetismo. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_k}{\partial x_k}\\ &= \frac{\partial E_1}{\partial x_1}+\frac{\partial E_2}{\partial x_2}+\frac{\partial E_3}{\partial x_3}.\end{aligned}$$

A notação com índices que estou apresentando aqui é tal que

$$\left(x_1,x_2,x_3\right) \equiv \left(x,y,z\right),$$

para coordenadas cartesianas. Como uma notação extremamente conveniente, também podemos usar:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \partial_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \partial_2$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \partial_3.$$

Com isso, podemos escrever

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \sum_{k=1}^{3} \partial_k E_k.$$

Tipicamente, nesses cálculos vetoriais, sempre que há uma soma, invariavelmente há dois fatores com o mesmo índice somado em cada termo. Sendo assim, como no exemplo acima, sempre que aparecer, por exemplo, $\partial_k E_k$ em algum termo, também aparecerá o símbolo de soma $\sum_{k=1}^{3}$. Logo, podemos abolir esse símbolo de nossa notação, subentendendo que dois índices iguais no mesmo termo são somados de 1 a 3. Essa convenção de Einstein simplifica a notação e torna os cálculos mais rápidos por abolir símbolos desnecessários. Com essa convenção, por exemplo, podemos escrever:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \partial_k E_k,$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}_p x_p,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_l x_l,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{r} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}}_p x_p \partial_k E_k \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k \right) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \partial_k x_p \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k \right) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \delta_{kp} \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k \right) - \hat{\mathbf{x}}_p E_p \\
&= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k \left(x_p E_k \right) - \mathbf{E} \\
&= \partial_k \left(\hat{\mathbf{x}}_p x_p E_k \right) - \mathbf{E} \\
&= \partial_k \left(\mathbf{r} E_k \right) - \mathbf{E},
\end{aligned}$$

etc. É importante notarmos também que, em cada termo, cada índice pode aparecer apenas duas vezes, para não confundirmos quais fatores devem ser somados em pares.