A Condutividade Elétrica

No modelo de dispersão da luz em meios materiais de Drude & Lorentz, calculamos a susceptibilidade elétrica complexa,considerando a resposta dos n_k elétrons do tipo k por molécula, em um meio com N moléculas por unidade de volume, onde a constante de amortecimento para os elétrons do tipo k é γ_k e a frequência de ressonância para esse tipo é escrita ω_k, na presença de uma onda eletromagnética monocromática de frequência ω. O resultado escreve-se

$$\chi_c(\omega) = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega\right)},$$

onde a soma é sobre os diferentes tipos de elétrons em cada molécula. Agora, vamos supor que haja um certo número N_0 de elétrons livres por unidade de volume do meio material. Também vamos supor que esses elétrons livres estejam distribuídos uniformemente pelo material e, portanto, para cada molécula, haverá

$$n_0 = \frac{N_0}{N}$$

elétrons livres, já que N é o número de moléculas por unidade de volume. Dessa forma, para incluirmos esses elétrons livres no modelo, vamos modificar a susceptibilidade complexa acima de forma a termos

$$\begin{aligned}\chi_c'(\omega) &= \sum_k \frac{N n_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k\omega\right)} + \frac{N n_0 e^2}{m\left(-\omega^2 - i\gamma_0\omega\right)} \\ &= \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega\left(\omega + i\gamma_0\right)},\end{aligned}$$

onde, para elétrons livres,

$$\omega_0 = 0$$

e a constante de amortecimento é escrita como γ_0. Para um meio não magnético, isto é, com

$$\mu = 1,$$

a Lei de Ampère & Maxwell é escrita como

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t},$$

onde, segundo o modelo que estamos adotando, o campo deslocamento elétrico complexo é dado por

$$\boldsymbol{\mathcal{D}} = \boldsymbol{\epsilon} + 4\pi\boldsymbol{\mathcal{P}},$$

com

$$\boldsymbol{\mathcal{P}} = \chi_c'(\omega)\,\boldsymbol{\epsilon}.$$

Notemos também que $\mathbf{J}$ indica a presença de cargas livres em movimento que estejam no material. No entanto, essa densidade de corrente teria que ser justificada justamente pela quantidade de elétrons N_0 por unidade de volume que estamos modelando microscopicamente. Com isso, vamos usar, ao invés da equção acima, a equação

$$\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\mathcal{D}}}{\partial t}$$

e ver se nossos elétrons livres deste modelo microscópico introduz uma densidade de corrente na equação. Assim,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{c}\left[1+4\pi\chi_c'(\omega)\right]\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}\\
&= -i\frac{\omega}{c}\left[1+4\pi\chi_c(\omega)-\frac{4\pi Nn_0e^2}{m\omega(\omega+i\gamma_0)}\right]\boldsymbol{\epsilon}\\
&= i\frac{\omega}{c}\frac{4\pi Nn_0e^2}{m\omega(\omega+i\gamma_0)}\boldsymbol{\epsilon}-i\frac{\omega}{c}\left[1+4\pi\chi_c(\omega)\right]\boldsymbol{\epsilon}\\
&= \frac{4\pi}{c}\left[\frac{Nn_0e^2}{m(\gamma_0-i\omega)}\boldsymbol{\epsilon}\right]+\frac{1}{c}\left[1+4\pi\chi_c(\omega)\right]\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que quando há elétrons do material que podem se mover livremente, a densidade de corrente deste modelo é proporcional ao campo elétrico aplicado e a constante de proporcionalidade é dada por

$$\sigma = \frac{Nn_0e^2}{m(\gamma_0-i\omega)}.$$

Esse tipo de material é chamado ôhmico e a densidade de corrente produzida pela presença do campo elétrico é dada pela Lei de Ohm:

$$\mathbf{J}_{\text{Ohm}} = \sigma\boldsymbol{\epsilon}.$$

No modelo que estamos considerando, a condutividade elétrica, para frequências suficientemente baixas, fica

$$\sigma \approx \frac{Nn_0e^2}{m\gamma_0},$$

essencialmente real e, portanto, em fase com o campo elétrico. Para o cobre, por exemplo, com uma condutividade da ordem de $5.9\times10^7\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ e 8×10^{28} átomos/m^3, obtemos $\gamma_0/n_0\approx4\times10^{13}\text{s}^{-1}$. Supondo apenas um elétron livre por molécula, essa pequena análise mostra que a condutividade pode ser considerada essencialmente real para frequências abaixo de cerca de 10^{11}s^{-1} (microondas, por exemplo).

A densidade e o fluxo de energia

Como já é corriqueiro em nossas discussões eletromagnéticas, vamos utilizar a notação

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_0\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega_kt\right),\\
\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_0\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega_kt\right),
\end{aligned}$$

onde

$$\omega_k \equiv \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \text{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right),\\
\mathbf{B} &= \text{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right).
\end{aligned}$$

Assim, as equações de Maxwell na ausência de cargas e correntes livres dão

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\epsilon}=0 &\quad\Rightarrow\quad \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0=0,\\
\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\beta}=0 &\quad\Rightarrow\quad \mathbf{k}\cdot\boldsymbol{\beta}_0=0,\\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t} &\quad\Rightarrow\quad \mathbf{k}\times\boldsymbol{\epsilon}_0=\frac{\omega_k}{c}\boldsymbol{\beta}_0,\\
\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta}=\frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} &\quad\Rightarrow\quad \mathbf{k}\times\boldsymbol{\beta}_0=-\mu\varepsilon\frac{\omega_k}{c}\boldsymbol{\epsilon}_0.
\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_0 &= -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\beta}_0,\\
\boldsymbol{\beta}_0 &= \sqrt{\mu\varepsilon}\,\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}_0.
\end{aligned}$$

A densidade de energia é dada por

$$\begin{aligned}
u &= \frac{1}{8\pi}\left(\mathbf{D}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{H}\cdot\mathbf{B}\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{8\pi}\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)\right]\cdot\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)\right]+\frac{1}{8\pi\mu}\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right]\cdot\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right].
\end{aligned}$$

O fluxo de energia é dado pelo vetor de Poynting:

$$\begin{aligned}
\mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{H}\\
&= \frac{c}{4\pi\mu}\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)\right]\times\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right].
\end{aligned}$$

Se tomamos $\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)\right]\times\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right]$, por exemplo, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}
\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)\right]\times\left[\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\beta}\right)\right] &= \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\epsilon}^*\right)\times\left(\boldsymbol{\beta}+\boldsymbol{\beta}^*\right)\\
&= \frac{1}{4}\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{4}\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}^*+\frac{1}{4}\boldsymbol{\epsilon}^*\times\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{4}\boldsymbol{\epsilon}^*\times\boldsymbol{\beta}^*\\
&= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}^*\right)+\frac{1}{4}\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}+\frac{1}{4}\boldsymbol{\epsilon}^*\times\boldsymbol{\beta}^*.
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{k}$ e ω_k são quantidades reais, então

$$\left(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}^*\right) = \left(\boldsymbol{\epsilon}_0\times\boldsymbol{\beta}_0^*\right)$$

não depende do tempo e não depende do espaço. A média temporal dos termos oscilantes restantes dá zero. Por exemplo,

$$\begin{aligned}
\left\langle\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}\right\rangle &\equiv \left(\boldsymbol{\epsilon}_0\times\boldsymbol{\beta}_0\right)\exp\left(2i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}\right)\frac{\omega_k}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}}dt\,\exp\left(-2i\omega_k t\right)\\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$\left\langle\mathbf{S}\right\rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}^*\right).$$

Procedendo similarmente para o caso da densidade de energia, obtemos a média temporal

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{16\pi\mu}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*.$$

Como $\mathbf{k}$ e ω_k são quantidades reais, então

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^* &= \mu\varepsilon\left(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}_0\right)\cdot\left(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}_0^*\right)\\
&= \mu\varepsilon\hat{\mathbf{k}}\cdot\left[\boldsymbol{\epsilon}_0\times\left(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}_0^*\right)\right]\\
&= \mu\varepsilon\hat{\mathbf{k}}\cdot\left[\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* - \boldsymbol{\epsilon}_0^*\hat{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0\right]\\
&= \mu\varepsilon\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^*,\\
\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}^* &= \sqrt{\mu\varepsilon}\boldsymbol{\epsilon}_0\times\left(\hat{\mathbf{k}}\times\boldsymbol{\epsilon}_0^*\right)\\
&= \sqrt{\mu\varepsilon}\left(\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* - \boldsymbol{\epsilon}_0^*\hat{\mathbf{k}}\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0\right)\\
&= \sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}$$

Resumindo,

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{1}{16\pi\mu}\mu\varepsilon\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* = \frac{\varepsilon}{8\pi}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^*$$

e

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\sqrt{\mu\varepsilon}\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^* = \frac{c}{8\pi}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\,\hat{\mathbf{k}}\boldsymbol{\epsilon}_0\cdot\boldsymbol{\epsilon}_0^*.$$

É interessante notarmos que, a partir dessas equações, também temos

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle \frac{c\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

onde

$$\frac{c\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

é a velocidade com que as ondas monocromáticas se propagam, isto é, é a velocidade de fase. Essa relação é análoga à relação entre a densidade de corrente e a densidade de carga:

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v}.$$

Quando o meio dielétrico possui uma condutividade σ finita, isto é, é um meio condutor, temos

$$\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}.$$

Nesse caso, a equação de onda para $\mathbf{E}$ é dada por:

$$\nabla^2\mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Também temos

$$\nabla^2\mathbf{B}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}-\frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

As respectivas versões complexas dessas equações de onda são

$$\nabla^2\boldsymbol{\epsilon}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t^2}-\frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2\boldsymbol{\beta}-\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\beta}}{\partial t^2}-\frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Se tomamos o ansatz

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0\exp\left(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t\right),$$

obtemos

$$-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}+\frac{\mu\varepsilon}{c^2}\omega^2+i\frac{4\pi}{c^2}\mu\sigma\omega = 0.$$

Assim, se ω é real, segue que $\mathbf{k}$ é um vetor complexo. Dessa forma, escrevemos

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_r+i\mathbf{k}_i,$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_r &= \mathrm{Re}\left(\mathbf{k}\right),\\ \mathbf{k}_i &= \mathrm{Im}\left(\mathbf{k}\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_0\exp\left(-\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}\right)\exp\left(i\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-i\omega t\right),\\ \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_0\exp\left(-\mathbf{k}_i\cdot\mathbf{r}\right)\exp\left(i\mathbf{k}_r\cdot\mathbf{r}-i\omega t\right).\end{aligned}$$

Então, novamente, mesmo nesse caso,

$$\langle u\rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi}\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*+\frac{1}{16\pi\mu}\boldsymbol{\beta}\cdot\boldsymbol{\beta}^*$$

e

$$\langle\mathbf{S}\rangle = \frac{c}{8\pi\mu}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\times\boldsymbol{\beta}^*\right).$$

Para verificarmos essas relações, façamos:

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right)\cdot\mathrm{Re}\left(\boldsymbol{\epsilon}\right) &= \frac{\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\epsilon}^*}{2}\cdot\frac{\boldsymbol{\epsilon}+\boldsymbol{\epsilon}^*}{2}\\ &= \frac{1}{4}\left(\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}+2\boldsymbol{\epsilon}\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*+\boldsymbol{\epsilon}^*\cdot\boldsymbol{\epsilon}^*\right).\end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon}) \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*.$$

Analogamente,

$$\langle \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\beta}) \cdot \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\beta}) \rangle = \frac{1}{2} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^*.$$

Com isso, obtemos

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{16\pi\mu} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^*$$

Finalmente, para o fluxo de energia, temos

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon}) \times \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\beta}) &= \frac{\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^*}{2} \times \frac{\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^*}{2} \\ &= \frac{1}{4} \left(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\epsilon}^* \times \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\epsilon}^* \times \boldsymbol{\beta}^* \right) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon}) \times \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\beta}) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^* + \boldsymbol{\epsilon}^* \times \boldsymbol{\beta} \right) \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*)\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} \mathrm{Re}\,(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*)\,,$$

como já tínhamos deduzido acima sem mencionar explicitamente o fator evanescente das ondas monocromáticas.

Frequência de Plasma

No modelo de dispersão da luz em meios materiais de Drude & Lorentz, definimos, então como uma mera conveniência, a chamada frequência de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N n_1 e^2}{m},$$

onde N representa o número de moléculas por unidade de volume, n é o número de elétrons do tipo 1 em cada molécula, e é a carga de um elétron e m é sua massa. Aqui vou mencionar a razão de chamarmos essa quantidade de frequência de plasma. Para um meio condutor, a susceptibilidade elétrica complexa escreve-se

$$\begin{aligned} \chi_c'(\omega) &= \sum_k \frac{N n_k e^2}{m\left(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega\right)} + \frac{N n_0 e^2}{m\left(-\omega^2 - i\gamma_0 \omega\right)} \\ &= \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega\left(\omega + i\gamma_0\right)} \end{aligned}$$

e, para frequências suficientemente altas, podemos desprezar γ_0 frente a ω e escrever

$$\chi_c'(\omega) \approx \chi_c(\omega) - \frac{Nn_0e^2}{m\omega^2}.$$

Com isso, a constante dielétrica complexa pode ser expressa por

$$\begin{aligned} K_c &= 1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{4\pi Nn_0e^2}{m\omega^2} \\ &= 1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Como a equação de onda para o campo elétrico nessas circunstâncias é dada por

$$\nabla^2\boldsymbol{\epsilon} - \frac{K_c}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

segue que uma onda plana propagando-se ao longo do eixo z tem o campo elétrico dado, por exemplo, por

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}}E_0\exp(ikz - i\omega t),$$

onde, em virtude da equação de onda acima, segue que

$$\begin{aligned} k^2 &= K_c\frac{\omega^2}{c^2} \\ &= \left(1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Logo, essa é uma onda evanescente, pois k é um número complexo. Sendo assim, podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon} = \hat{\mathbf{x}}E_0\exp(-k_iz)\exp(ik_rz - i\omega t),$$

onde

$$\begin{aligned} k_r &= \mathrm{Re}(k), \\ k_i &= \mathrm{Im}(k). \end{aligned}$$

Se k for imaginário, então a onda não poderá propagar-se no meio, sendo refletida após uma pequena penetração. Isso acontece se ω for suficientemente menor do que ω_p para termos a parte real de

$$k = \sqrt{\left(1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}}$$

desprezível. Esse é um comportamento típico de metais para frequências ópticas. No entanto, para frequências na região ultravioleta do espectro eletromagnético, os metais voltam a ter k_r não desprezível e as ondas são propagadas no meio condutor. Esse fenômeno é conhecido como a "transparência ultravioleta dos metais".

A razão de utilizarmos o nome "frequência de plasma" vem do fato de que em um plasma, onde todas as cargas estão livres e não há amortecimento, escrevemos

$$k = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right)\frac{\omega^2}{c^2}},$$

pois, nesse caso,

$$\begin{aligned}\chi_c'(\omega) &= -\sum_k \frac{Nn_k e^2}{m\omega^2} - \frac{Nn_0 e^2}{m\omega^2} \\ &= -\frac{Ne^2}{m\omega^2}\left(\sum_k n_k + n_0\right).\end{aligned}$$

Mas, como no lugar de cada molécula, nesse caso, há um elétron,

$$\sum_k n_k + n_0 = 1$$

e, com isso,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}.$$

Portanto,

$$kc = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2},$$

que é imaginário puro quando $\omega < \omega_p$, mas torna-se real quando $\omega > \omega_p$. Vemos, assim, que o caso de um condutor nas circunstâncias que tratamos acima exibe um comportamento similar ao de um plasma. Nada mais natural, portanto, do que definirmos uma frequência de plasma para condutores.