

Essa expressão é interessante porque com ela podemos mostrar que $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ em todo lugar se, sobre alguma região S_a da superfície fechada $S(V)$, tivermos, simultaneamente,

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$$

e

$$\mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Para apreendermos isso, vejamos uma situação simples. Suponhamos que a superfície fechada S seja a união de duas superfícies abertas, S_a e S_b , com as quantidades $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ e $\mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ ambas nulas sobre S_a . Usando o Teorema de Green, no interior de S temos

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \oint_S da' \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\ &= \int_{S_a} da' \mathbf{n}'_a \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\ &\quad + \int_{S_b} da' \mathbf{n}'_b \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \end{aligned}$$

onde \mathbf{n}'_a é a normal sobre S_a , e \mathbf{n}'_b é a normal sobre S_b . Sobre S_a , as quantidades $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ e $\mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ são nulas. Logo,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{S_b} da' \mathbf{n}'_b \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})].$$

Seja C a fronteira entre S_a e S_b . Sobre a superfície S_b e sua vizinhança, exceto sobre o ponto \mathbf{r} , temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Como também temos que

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = -k^2 \psi(\mathbf{r}, t),$$

segue que, exceto sobre \mathbf{r} ,

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] &= [\nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \cdot [\nabla' \psi(\mathbf{r}', t)] + G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}', t) \\ &- [\nabla' \psi(\mathbf{r}', t)] \cdot [\nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla'^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= -k^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}', t) + k^2 \psi(\mathbf{r}', t) G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= 0\end{aligned}$$

e, portanto, existe um campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$ tal que

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t).$$

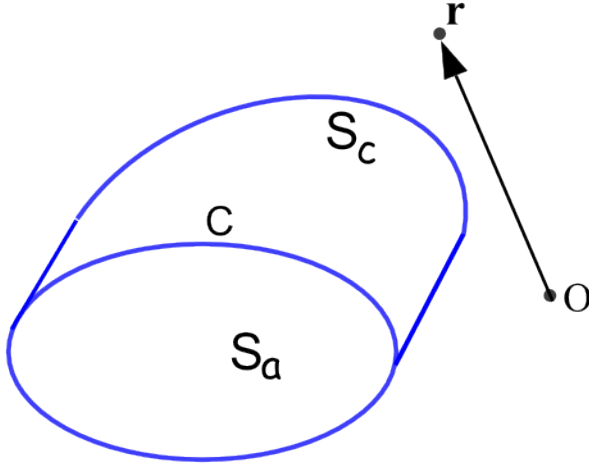
Logo,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{S_b} da' \mathbf{n}'_b \cdot [\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)].$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t),$$

onde $d\mathbf{r}'$ é o elemento de caminho da curva fechada C . Escolhamos outra superfície, S_c , que também tem a fronteira C com a superfície S_a , tal que $S_a \cup S_c$ seja fechada. Mas, seja S_c tal que o ponto \mathbf{r} agora fique fora da região cuja superfície é $S_a \cup S_c$.



Podemos usar novamente o Teorema de Green e escrever

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{S_a \cup S_c} da' \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\
 &= \int_{S_a} da' \mathbf{n}'_a \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\
 &\quad + \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})],
 \end{aligned}$$

onde \mathbf{n}'_c é a normal sobre S_c . Como o integrando é nulo sobre a superfície S_a , por hipótese, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)] &= \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) &= \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Como já obtivemos, usando a superfície S_b ao invés de S_c , que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t),$$

segue, finalmente, que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

para todo \mathbf{r} .

Dessa análise concluímos que, para um campo não ser nulo em todo espaço, não podemos impor condições de contorno em que, simultaneamente, a função de Green tenha seu valor e sua derivada normal nulos em nenhuma parte da superfície fechada da região de interesse. Podemos, no entanto, obter uma solução não trivial para o campo escalar se impusermos condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann. A seguir, apenas o caso de condição de contorno de Dirichlet será apresentado; o caso de Neumann é análogo.

Condição de contorno de Dirichlet

No caso de termos a condição de contorno de Dirichlet, tomamos a função de Green de Dirichlet, $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, satisfazendo

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \text{ para } \mathbf{r}' \text{ sobre } S.$$

Nesse caso, escrevemos

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= - \oint_S da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= - \int_{S_1} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &\quad - \int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Como estamos supondo que S_2 seja uma superfície infinitamente distante, vamos também supor que o campo satisfaça uma condição de radiação, isto é, para r muito grande,

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

e que, em virtude disso,

$$\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Logo, queremos encontrar uma solução que seja dada por

$$\psi(\mathbf{r}, t) = - \int_{S_1} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}).$$

Depois de encontrarmos explicitamente a função de Green de Dirichlet, deveremos verificar se, de fato, teremos, de forma consistente,

$$\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Até agora ainda não explicitamos qual é a forma da superfície S_1 . Isso depende especificamente do problema que queiramos resolver. Há, porém, um caso importante, em que S_1 possa ser aproximada por um plano infinito, com

aberturas através das quais o campo penetra a região de fronteira $S = S_1 \cup S_2$. Nesse caso, tomando S_1 como o plano xy e S_2 como um plano paralelo ao plano xy localizado infinitamente distante da origem, mas no lado positivo do eixo z , através do método das imagens, é fácil ver que a função de Green de Dirichlet é dada por

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|},$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' - 2z'\hat{\mathbf{z}} \\ &= x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} - z'\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Portanto, na região de interesse, isto é, quando $z > 0$ e $z' > 0$,

$$\begin{aligned}\nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla^2 \left\{ \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} - \nabla^2 \left\{ \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right\} \\ &= -k^2 \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &+ k^2 \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')\end{aligned}$$

e, como $z > 0$ e $z' > 0$, segue que

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') = 0.$$

Portanto,

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

e

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

se \mathbf{r}' estiver sobre o plano xy . Logo, essa é a forma da função de Green para a condição de Dirichlet. Incidentalmente, também vemos que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se anula sobre S_2 , como deveria ser.

Falta agora verificarmos a consistência de nossa hipótese acerca da igualdade

$$\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Para isso, sobre S_2 , temos

$$\begin{aligned}\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &- \int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right].\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \left[ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial z'}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ &= -\frac{(z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] \\ &= \left[ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}{\partial z'}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2} \\ &= \frac{(z + z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}.\end{aligned}$$

No limite em que z' torna-se infinitamente grande,

$$\begin{aligned}\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \frac{1}{z'} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \psi(\mathbf{r}', t) ik \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi} \\ &- \frac{1}{z'} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \psi(\mathbf{r}', t) ik \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi} \\ &= 0,\end{aligned}$$

como esperado.

A teoria escalar da difração com condição de contorno de Dirichlet é dada em termos da equação

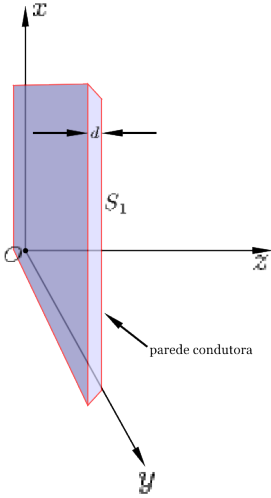
$$\psi(\mathbf{r}, t) = - \int_{S_1} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}).$$

Logo acima, como exemplo concreto, tomamos um caso especial com a função de Green de uma superfície plana infinita, mas, para qualquer outro problema, a prescrição é usar a equação acima com a função de Green de Dirichlet adequada. Além de escolher a função de Green adequada, a aproximação que normalmente é feita consiste em supor que o campo é nulo em todo ponto da superfície S_1 , exceto nas aberturas, onde o valor do campo é tomado como aquele da onda incidente na região da abertura.

Teoria Vetorial da Difração

Depois de termos visto a a teoria escalar da difração, de forma didática, vamos formular uma teoria vetorial de difração para ondas eletromagnéticas. Teremos que tomar cuidado com as inconsistências que podem aparecer, no caso vetorial, envolvendo as condições de contorno que os campos devem satisfazer. Aqui vamos seguir o livro de J. D. Jackson e, para

evitar situações complicadas, vamos considerar que uma superfície plana idealmente condutora, S_1 , coincida com o plano xy . As fontes dos campos serão supostas apenas em $z < 0$. A região $z \geq 0$ será tomada como a região de difração. A figura abaixo ilustra a situação. Note que a superfície S_1 é apenas a superfície que define a fronteira da região de difração, isto é, constitui apenas uma das superfícies condutoras da suposta parede condutora separando a região $z < 0$, onde as fontes dos campos se encontram, da região de difração $z \geq 0$. Como mostra a figura, essa parede de separação tem uma espessura d e os campos totais no interior do material condutor ideal que compõe a parede são nulos. Então, para sermos precisos, vamos supor que as fontes estejam na região $z < -d$, sendo que haverá também cargas e correntes induzidas na superfície em $z = -d$, que **não** serão consideradas como fontes dos campos existentes na região $z < 0$. A teoria a ser desenvolvida a seguir prevê os campos na região $z \geq 0$, incluindo a superfície S_1 . Enfatizamos, portanto, que a superfície S_1 é uma entidade matemática e não uma parede condutora infinitamente fina, embora os argumentos abaixo sobre a simetria dos potenciais vetorial e escalar valham apenas quando tomarmos d infinitesimal.



Sejam $\mathbf{E}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$ os campos que seriam produzidos pelas fontes na ausência da parede condutora e, portanto, na ausência da superfície S_1 (em $z = 0$) e da superfície em $z = -d$. Em outras palavras, os campos $\mathbf{E}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$ são os devidos a apenas as fontes em $z < -d$. Assim, os campos totais podem ser escritos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}'$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}',$$

onde \mathbf{E}' e \mathbf{B}' são os campos espalhados pelas cargas e correntes induzidas na parede condutora, de espessura infinitesimal d .

Sejam a corrente e a densidade superficiais complexas induzidas na superfície S_1 dadas por $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\sigma(x, y, 0)$, respectivamente. Analogamente, sejam a corrente e a densidade superficiais complexas induzidas na superfície $z = -d$ dadas por $\mathbf{j}(x, y, -d)$ e $\sigma(x, y, -d)$, respectivamente. O potencial vetorial total, produzido pelas correntes superficiais $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\mathbf{j}(x, y, -d)$, terá componente z nula, já que as correntes superficiais só não se anulam em direções paralelas ao plano xy . Escrevamos, portanto,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetorial complexo resultante das correntes induzidas e $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ são os potenciais vetoriais complexos induzidos, cada um, por cada uma das respectivas correntes $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\mathbf{j}(x, y, -d)$. Então, é fácil

veremos que, no caso da superfície S_1 , por simetria, as componentes do vetor potencial $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$ serão funções pares da coordenada z . Para vermos isso basta escrever a expressão do potencial vetorial complexo no calibre de Lorentz:

$$\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{j}(x', y', 0) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}.$$

Veja que a troca de z por $-z$ não altera o valor de $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$.

De forma análoga, as componentes do vetor potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ serão funções simétricas com relação ao plano $z = -d$, como pode ser visto a partir da expressão:

$$\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{j}(x', y', -d) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde, neste caso,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + d)^2}.$$

Note que a troca de $z + d$ por $-d - z$ não altera o valor de $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$. Então, um ponto P , de coordenada z , dista $z + d$ do plano $z = -d$. O ponto simétrico ao plano $z = -d$ deve estar à mesma distância deste plano que o ponto P , mas do outro lado. Logo, a coordenada z desse ponto simétrico deve ser dada, em termos da coordenada z do ponto P , por $-d - z$. Como vemos na expressão acima, o potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ é simétrico com relação a essa troca. No entanto, como d é infinitesimal, o plano $z = -d$ tende para o plano xy e, portanto, nesse limite, o potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ torna-se simétrico com relação ao plano xy . Então, a soma de duas funções pares com relação à coordenada z é também par com relação a essa coordenada. Logo, o potencial vetorial complexo total,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

é par com relação à coordenada z .