O mesmo se aplica ao potencial escalar: será uma função par da coordenada z. Essa simetria pode ser vista a partir das expressões para os potenciais complexos no calibre de Lorentz:

$$\phi'(\mathbf{r},t) = \phi'_0(\mathbf{r},t) + \phi'_{-d}(\mathbf{r},t),$$

onde

$$\phi'_0(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, \frac{\sigma_0(x',y')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

com

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2}$$

e

$$\phi'_{-d}(\mathbf{r},t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \, \frac{\sigma_{-d}(x',y')\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

neste caso com

$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z+d)^2}.$$

Fica evidente das expressões para os potenciais acima que

$$\phi'(x,y,-z,t) = \phi'(x,y,z,t),$$

$$A'_x(x,y,-z,t) = A'_x(x,y,z,t)$$

e

$$A'_y(x,y,-z,t) = A'_y(x,y,z,t).$$

Como

$$\mathbf{E}' = -\boldsymbol{\nabla}\phi' + ik\mathbf{A}',$$

segue que

$$E'_x(x,y,-z,t) = E'_x(x,y,z,t)$$

e

$$E'_y(x,y,-z,t) = E'_y(x,y,z,t),$$

já que

$$\frac{\partial\phi'(x,y,-z,t)}{\partial x} = \frac{\partial\phi'(x,y,z,t)}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial\phi'(x,y,-z,t)}{\partial y} = \frac{\partial\phi'(x,y,z,t)}{\partial y}.$$

No entanto,

$$E'_z(x,y,-z,t) = -E'_z(x,y,z,t),$$

pois

$$\frac{\partial\phi'(x,y,-z,t)}{\partial(-z)} = -\frac{\partial\phi'(x,y,z,t)}{\partial z}.$$

Como

$$\mathbf{B}' = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}',$$

temos

$$B'_x = -\frac{\partial A'_y}{\partial z},$$

$$B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z}$$

e

$$B'_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y}.$$

Portanto,

$$B'_x(x,y,-z,t) = -B'_x(x,y,z,t),$$

$$B'_y(x,y,-z,t) = -B'_y(x,y,z,t)$$

e

$$B'_z(x,y,-z,t) = B'_z(x,y,z,t).$$

Em resumo, com relação à coordenada z, E'_x, E'_y e B'_z são funções pares e B'_x, B'_y e E'_z são ímpares.

Difração baseada no campo indução magnética

Para evitar inconsistências na teoria, podemos utilizar condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann sobre S_1. Vamos utilizar a condição de Neumann, assim poderemos expressar o potencial vetorial em termos das componentes do campo indução magnética sobre S_1. Logo, como quando analisamos a teoria escalar da difração, é fácil obter a função de Green de Neumann:

$$G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} + \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|},$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' - 2z'\hat{\mathbf{z}} \\ &= x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} - z'\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Com isso,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = -\int_{S_1} da'\, G_N(\mathbf{r}',\mathbf{r})\, \hat{\mathbf{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\mathbf{A}'(\mathbf{r}',t)\,,$$

onde a normal à superfície S_1 é escolhida ao longo do sentido positivo do eixo z. A integral é, portanto, para ser calculada em $z' = 0^+$. Não há problema com calcular a integral em $z' = 0^+$ mesmo para $z < 0$, pois as componentes do potencial vetorial são pares com relação à coordenada z. Notemos que

$$G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = G_N(\mathbf{r}',\mathbf{r})$$

e, sobre S_1, temos $z' = 0$, implicando em

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}-\mathbf{r}''| &= \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + z^2} \\ &= |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\,, \end{aligned}$$

isto é,

$$G_N(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{2\pi\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Com isso,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2\pi}\int_{S_1} da'\, \frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\mathbf{A}'(\mathbf{r}',t)\,.$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\mathbf{A}'(\mathbf{r}',t) &= \frac{\partial\mathbf{A}'(\mathbf{r}',t)}{\partial z'} \\ &= \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial A'_x(\mathbf{r}',t)}{\partial z'} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial A'_y(\mathbf{r}',t)}{\partial z'} \end{aligned}$$

e, portanto, de $\mathbf{B}' = \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{A}'$, vem

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}}\cdot\boldsymbol{\nabla}'\mathbf{A}'(\mathbf{r}',t) &= \hat{\mathbf{x}}B'_y(\mathbf{r}',t) - \hat{\mathbf{y}}B'_x(\mathbf{r}',t) \\ &= -\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)\,. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{S_1} da'\, \frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)\,.$$

Agora podemos usar essa expressão para obter o campo indução magnética:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\, \frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)\,.$$

Como as componentes B'_x e B'_y são ímpares, segue que o integrando se anula nas aberturas, pois nelas não há descontinuidade na componente tangencial do campo indução magnética. Logo, a integral só não é nula sobre a parte metálica da superfície S_1 e escrevemos

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{\text{metal}} da'\, \frac{\exp(ik\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)\,.$$

O campo elétrico associado a esse campo indução magnética pode ser obtido da Lei de Ampère & Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}' = -ik\mathbf{E}',$$

isto é,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}'(\mathbf{r},t) &= \frac{i}{k}\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r},t) \\ &= \frac{i}{2\pi k}\boldsymbol{\nabla} \times \left[\boldsymbol{\nabla} \times \int_{\text{metal}} da' \, \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)\right]. \end{aligned}$$

Essa abordagem é conveniente quando, ao invés de a parede condutora ter aberturas, tivermos, na região geométrica da parede, uma ou mais placas metálicas delgadas tangenciando o plano xy, como, por exemplo, um disco de raio a. A maior dificuldade está em determinarmos, sobre o metal, o valor das componentes tangentes do campo indução magnética para obtermos o valor de $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}',t)$ que aparece no integrando. Como uma aproximação, podemos usar $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}',t)$.

Difração baseada no campo elétrico

Seria interessante termos uma teoria vetorial da difração mais conveniente para o caso de aberturas, como originalmente encaminhamos a discussão, e não como no caso acima, em que a integral envolvida, ao invés de ser feita sobre as aberturas, é feita sobre o metal. Se, no integrando envolvido em uma tal abordagem alternativa tivermos $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}',t)$, onde $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}'$ é o campo elétrico total, então, porque, como vimos, as componentes tangenciais do campo elétrico se anulam no condutor, a integral deverá ser feita apenas nas aberturas. Para construirmos uma teoria da difração com essa peculiaridade, ao invés de basearmos a abordagem no cálculo do campo indução magnética, como fizemos acima, podemos começar procurando por uma outra solução para o campo elétrico, satisfazendo as equações de Maxwell, mas que tenha algo como $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}',t)$ no integrando. Uma maneira imediata de encontrarmos um campo elétrico espalhado, dado em termos de uma integral com um integrando envolvendo $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}',t)$, decorre da propriedade de o conjunto formado pelas equações de Maxwell no presente contexto ser invariante pela transformação

$$\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{B}'$$

e

$$\mathbf{B}' \rightarrow -\mathbf{E}'.$$

Com isso, a solução obtida anteriormente, para o campo indução magnética, isto é,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla} \times \int_{S_1} da' \, \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}',t) \text{ (abordagem anterior)},$$

se transforma em

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla} \times \int_{S_1} da' \, \frac{\exp(ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}',t)\,, \text{ para, digamos, } z > 0.$$

Ainda não conseguimos, como desejado, $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}',t)$ no integrando e, portanto, ainda não podemos fazer a integral apenas sobre as aberturas da superfície condutora S_1, mas resolveremos isso mais adiante. É importante notarmos, desde já, que esse resultado para o campo elétrico não decorre simplesmente de tomarmos o rotacional do campo indução magnética da abordagem anterior e multiplicá-lo por i/k, que é distinta da presente discussão. Esse campo elétrico, inclusive, fornece um campo indução magnética distinto, obtido da Lei da Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}' = ik\mathbf{B}',$$

isto é,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r},t) = -\frac{i}{2\pi k}\boldsymbol{\nabla}\times\left[\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t)\right],\ \text{para } z>0.$$

Também é importante notarmos que, ao contrário do campo indução magnética da abordagem anterior, o campo elétrico proposto acima deve ter componentes tangenciais pares e componente normal ímpar, com relação à coordenada z. Caso formos calcular o resultado para $z<0$, como a integral é feita para $z'=0^{+}$, segue que a componente z do campo elétrico deve mudar de sinal e propomos, então,

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t),\ \text{para } z<0.$$

Por construção, portanto, $\mathbf{E}'(\mathbf{r},t)$ satisfaz as equações de Maxwell e também possui a simetria requerida com relação à superfície S_1.

Para o cálculo do campo elétrico acima, a integral deve ser feita sobre todo o plano xy. No entanto, como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}+\mathbf{E}',$$

podemos também escrever

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}',t)-\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t),\ \text{para } z>0,$$

e

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}',t)+\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t),\ \text{para } z<0,$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}',t)$ é o campo elétrico total e definimos

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}',t).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico total deve ser contínua e o campo elétrico deve anular-se no interior de um condutor ideal, segue que as integrais envolvendo $\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}$ são nulas em todo o plano xy, exceto nas aberturas. O que significa o campo $\mathbf{E}^{(1)}$? Analogamente ao que fizemos no caso do campo $\mathbf{E}'$, para $z>0$, é evidente que se, ao invés de $\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}'(\mathbf{r}',t)$ no integrando da expressão colocássemos $\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}',t)$, obteríamos, ao invés de $\mathbf{E}'$, o campo não perturbado, $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}',t)$, isto é,

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{S_1} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}',t),\ \text{para } z>0.$$

Logo,

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r},t).$$

Assim, para $z>0$, o campo elétrico total pode ser escrito

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{2\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\int_{\text{Aberturas}} da'\,\frac{\exp\left(ik\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}'\right|}\hat{\mathbf{z}}\times\mathbf{E}(\mathbf{r}',t),\ \text{para } z>0,$$

que é definido como o campo elétrico difratado.