Exercício 4: 02/09 Considere duas cargas pontuais idênticas separadas por uma distância finita no vácuo. Faça a integral de superfície do tensor dos estresses de Maxwell sobre o plano dos pontos equidistantes às duas cargas. Deduza, assim, a força de Coulomb entre as duas cargas.

Pelo que vimos até o momento a força pode ser escrita considerando o tensor de estresse me Maxwell e o vetor de Poynting a partir das equações de conservação de momento.

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m = \mathbf{F}_V = \oint da \quad T_{km}n_m - \frac{d}{dt}\int_{V_\infty} d^3r\mathbf{S} \tag{4.1}$$

Como no problema atual não dependemos da evolução temporal do sistema podemos desconsiderar os termos dependentes de t, isto é,

$$\mathbf{F}_V = \oint da \quad T_{km}n_m = \oint da \quad \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} \tag{4.2}$$

Agora, para calcularmos a integral de superfície sobre o tensor de estresse de Maxwell temos que visualizar um pouco da geometria do problema exemplificado pela figura 1.

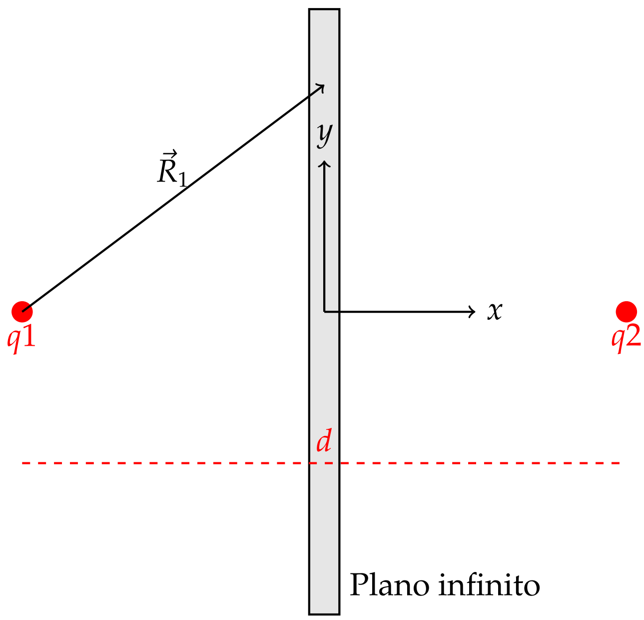

Figura 1: Geometria do problema, $\vec{R}$ é o vetor da posição da carga até o plano.

Temos que encontrar o campo elétrico total da distribuição de cargas, lembrando que

$$\mathbf{E}_{tot} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 \tag{4.3}$$

O campo de uma carga pontual no plano será

$$\mathbf{E}_n = \frac{q_n}{R^2}\hat{\mathbf{r}}_1 \tag{4.4}$$

uma vez que q_n é o módulo da n-ésima carga e R a distância entre o ponto do plano e a carga. Portanto o campo elétrico total do sistema pode ser calculado utilizando 4.4 para as cargas q_1 e q_2 com $q_1 = q_2 = q$.

$$\mathbf{E}_{tot} = \frac{q}{R_1^2}\hat{\mathbf{r}}_1 + \frac{q}{R_2^2}\hat{\mathbf{r}}_2 = q\left(\frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{R_1^2} + \frac{\hat{\mathbf{r}}_2}{R_2^2}\right) \tag{4.5}$$

sendo $\hat{\mathbf{r}_n}$ o vetor unitário da direção de $\mathbf{R}_n$ e R_n o módulo desse vetor. Podemos escrever esses vetores na forma completa:

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}_1}{R_1^2} = \frac{\left(\frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\right)}{\left(\left(\frac{d}{2}\right)^2 + y^2 + z^2\right)^{3/2}} = \frac{\left(\frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\right)}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{4.6}$$

analogamente,

$$\frac{\hat{\mathbf{r}}_2}{R_2^2} = \frac{\left(-\frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\right)}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{4.7}$$

logo podemos encontrar $\mathbf{E}_{tot}$,

$$\mathbf{E}_{tot} = q\left[\frac{\left(\frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\right)}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^{3/2}} + \frac{\left(-\frac{d}{2}\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}\right)}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^{3/2}}\right] = 2q\frac{y\hat{\mathbf{y}} + z\hat{\mathbf{z}}}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^{3/2}} \tag{4.8}$$

Agora podemos calcular o tensor de estresse de Maxwell diretamente! Lembrando que,

$$T_{km} = \frac{1}{4\pi}\left(E_kE_m + B_kB_m - \frac{1}{2}\delta_{km}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)\right) \tag{4.9}$$

logo,

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} E_x - \frac{E^2}{2} & E_xE_y & E_xE_z \\ E_yE_x & E_y - \frac{E^2}{2} & E_yE_z \\ E_zE_x & E_zE_y & E_z - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -\frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & E_y - \frac{E^2}{2} & E_yE_z \\ 0 & E_zE_y & E_z - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix} \tag{4.10}$$

uma vez que não temos componentes de campo magnético e as do campo elétrico estão apenas nas direções y e z. Substituindo em 4.2 podemos calcular o valor da força sobre toda a superfície, lembrando que $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor normal ao plano na direção de x.

$$\overleftrightarrow{\mathbf{T}}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi}\begin{pmatrix} -\frac{E^2}{2} & 0 & 0 \\ 0 & E_y - \frac{E^2}{2} & E_yE_z \\ 0 & E_zE_y & E_z - \frac{E^2}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{E^2}{2}\hat{\mathbf{x}} = \frac{1}{8\pi}4q^2\frac{y^2 + z^2}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^3}\hat{\mathbf{x}} \tag{4.11}$$

Lembrando que,

$$E^2 = \mathbf{E}_{tot}\cdot\mathbf{E}_{tot} = q^2\frac{y^2 + z^2}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^3} \tag{4.12}$$

e substituindo esse resultado na integral temos,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{F}_V = \oint da \quad \overleftrightarrow{\mathbf{T}} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \oint da \quad \frac{q^2}{2\pi} \frac{y^2 + z^2}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^3} \hat{\mathbf{x}} \\
&= \frac{q^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{y^2 + z^2}{\left(\frac{d^2}{4} + y^2 + z^2\right)^3} \hat{\mathbf{x}} \\
&= \frac{q^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} ds\, s \frac{s^2}{\left(\frac{d^2}{4} + s^2\right)^3} \hat{\mathbf{x}} \\
&= \frac{q^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{+\infty} ds \frac{s^3}{\left(\frac{d^2}{4} + s^2\right)^3} \hat{\mathbf{x}}
\end{aligned} \tag{4.13}
$$

Resolvendo com a substituição de $u = s^2$ e $du = 2sds$ temos,

$$
\int_0^{+\infty} \frac{us}{\left(\frac{d^2}{4} + u\right)^3} \frac{du}{2s} = \int_0^{+\infty} \frac{u}{\left(\frac{d^2}{4} + u\right)^3} \frac{du}{2} = \frac{1}{d^2} \tag{4.14}
$$

além de não termos varíaveis em ϕ, logo temos a contruibuição 2π mediante integração. Finalmente temos a força F_V na direção:

$$
\mathbf{F}_V = \frac{q^2}{2\pi} \frac{2\pi}{d^2} \hat{\mathbf{x}} = \frac{q^2}{d^2} \hat{\mathbf{x}} \tag{4.15}
$$