Exercício 1: 19/08 Considere uma casca esférica não condutora uniformemente carregada. Suponha que a espessura da casca é desprezível. Calcule o campo eletrostático devido a essa distribuição de carga em um ponto da superfície da esfera. Calcule a força por unidade de área em um ponto da superfície esférica.

O fluxo sobre uma superfície fechada pode ser descrito pela lei de Gauss:

$$\begin{aligned}\oiint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{s} &= 4\pi Q_{int} = 4\pi\sigma 4\pi R^2 = 16\pi^2\sigma R^2 \\ &= E4\pi r^2 = 16\pi^2\sigma R^2 \implies E = 4\pi\sigma\frac{R^2}{r^2}.\end{aligned} \tag{1.1}$$

Sendo R o raio da casca esférica e r o raio da superfície Gaussiana sobre a esfera. Uma vez que o campo elétrico é paralelo à r temos:

$$\mathbf{E} = 4\pi\sigma\frac{R^2}{r^2}\hat{r} \tag{1.2}$$

Como queremos calcular o campo elétrico sujeito a um elemento de área na superfície da esfera temos que considerar o campo médio entre os campos. Nesse caso, como não temos cargas no interior da esfera podemos considerar a contribuição interna do campo elétrico como nula, logo

$$\mathbf{E}_{med} = \left(\frac{\mathbf{E}_{int}+\mathbf{E}_{ext}}{2}\right) \implies \mathbf{E}_{med} = \frac{\mathbf{E}_{ext}}{2}; \qquad \mathbf{E}_{ext} = \mathbf{E} \tag{1.3}$$

Finalmente, para calcularmos a força gerada pelo campo elétrico podemos considera $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$, no caso para considerarmos um elemento de área dA temos '

$$\frac{dq}{dA} = \sigma \implies dq = \sigma dA \tag{1.4}$$

$$d\mathbf{F} = \mathbf{E}_{med}dA = \mathbf{E}_{med}\sigma dA \tag{1.5}$$

substituindo 1.2 e 1.3 em 1.5 temos

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = \frac{1}{2}\sigma 4\pi\frac{R^2}{r^2}\sigma\hat{r} = 2\pi\sigma^2\frac{R^2}{r^2}\hat{r} \tag{1.6}$$

para que tomemos os resultados na superfície da esfera consideramos o limite em que $r \to R$. Portanto:

$$\frac{d\mathbf{F}}{dA} = 2\pi\sigma^2\hat{r} \tag{1.7}$$

.