Exercício 1: 21/08

- Demonstre o teorema de Helmholtz, isto é, demonstre as Eqs. (6.47), (6.49) e (6.50) da segunda edição do livro de J. D. Jackson ou as Eqs. (6.25), (6.27) e (6.28), da terceira.
- Refaça detalhadamente os cálculos para obter a função de Green para a equação de onda.

Queremos encontrar a solução para a equação de onda resultante das transformações por Gauge de Lorentz no qual queremos encontrar a solução particular que satisfaça

$$\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = f(\mathbf{r},t) \tag{1.1}$$

Portanto, queremos encontrar a função de Green que satisfaz a equação 1.1. Das propriedades da função de Green temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\\ \left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\end{aligned} \tag{1.2}$$

no qual possibilitamos a construção da solução particular Ψ_P

$$\Psi(\mathbf{r},t)_P = \int d^3r \int_{-\infty}^{+\infty} dt G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}')f(\mathbf{r}',t') \tag{1.3}$$

Para facilitar nossas contas vamos passar do espaço temporal para o de frequências por meio de transformada de Fourier sobre t

$$G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') \tag{1.4}$$

Substituindo 1.4 em 1.2 podemos calcular explicitamente as derivadas temporais e passar de operadores de derivada temporal para termos geométricos da forma $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

$$\begin{aligned}&\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t')\\ &= \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t')\\ &= \left(\nabla^2 + k_0^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t')\end{aligned} \tag{1.5}$$

Olhando para o lado direito da equação 1.2 quando tomamos a transformada de Fourier temos que levar em consideração que a delta de Dirac passa a ser escrita também na sua forma transformada.

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \tag{1.6}$$

Logo, chegamos que

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}. \tag{1.7}$$

Simplificar essa equação pode nos ajudar a visualizar o problema que vamos trabalhar nesse momento, logo subtraindo o lado direito da equação em ambos os lados e colocando tudo dentro do mesmo integrando com a exponencial de t em evidência

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \quad e^{-i\omega t} \left[\left(\nabla^2 + k_0^2\right) g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') - \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\right] = 0 \tag{1.8}$$

Notemos que essa equação será verdadeira no caso dos termos internos se anularem uma vez que a exponencial dependente de t nunca será nula.

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right) g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.9}$$

Nesse ponto, o que queremos é encontrar o valor da função de Green (G) a partir de g. Nesse caso, temos que levar em consideração a existência de uma singularidade no denominador ao isolarmos g uma vez que a solução do sistema divergiria no eixo dos reais. Para resolver esse problema vamos induzir um polo no semi-espaço dos complexos por meio de uma aproximação g_η na qual

$$g_\eta = g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t')$$

que resultaria na correção infinitesimal em 1.9 correspondente à

$$\left(\nabla^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.10}$$

Realizando agora a transformada de Fourier da posição para eliminar o operador de derivada temos

$$g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \tag{1.11}$$

que nos dá

$$\int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.12}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') &= \nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ =&(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = -k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \end{aligned} \tag{1.13}$$

Finalmente podemos encontrar uma equação $\bar{g}_\eta$ que pode está a uma integral de nos dar o resultado para a função de Green desejada desde o início.

$$\left(\nabla^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.14}$$

$$\int d^3k \quad \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.15}$$

Substituindo a delta explicitamente, assim como na equação 1.6

$$\int d^3k \quad \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \tag{1.16}$$

Igualando os integrandos, temos

$$\left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{1.17}$$

logo,

$$\bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{(2\pi)^4} \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} = \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \tag{1.18}$$

Substituindo $\bar{g}_\eta$ em g_η, em seguida em g_η em G conseguiremos encontrar o valor para G_η

$$\begin{aligned} g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') &= \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \end{aligned} \tag{1.19}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} G_\eta(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \end{aligned} . \tag{1.20}$$

Para obtermos os resultados desejados para a solução, a partir de agora basta realizar as integrações em d^3k e $d\omega$, uma vez que para facilitar podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$G_\eta(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3k \quad \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\omega(t-t')}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \tag{1.21}$$

ou então,

$$G_\eta(\mathbf{r}, t) = G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3k \quad \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \tag{1.22}$$

uma vez que $G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad \exists \quad \forall \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ e $t - t'$.

Aplicando a transformação de coordenadas polares para coordenadas esféricas temos

$$\begin{aligned}
&\int_V d^3k \quad \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}-i\omega t}}{(2\pi)^4\left(-k^2+(k_0+i\eta)^2\right)} \\
=&\int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\cos\theta \int_0^R \frac{k^2}{(2\pi)^4\left(-k^2+(k_0+i\eta)^2\right)} dk \\
=&(2\pi)\int_1^{-1} e^{ikr\cos\theta} d\cos\theta \int_0^R \frac{k^2}{(2\pi)^4\left(-k^2+(k_0+i\eta)^2\right)} dk \\
=&\int_0^R \frac{2\pi\left(-e^{ikr}+e^{-ikr}\right)}{ikr} \frac{k^2}{(2\pi)^4\left(-k^2+(k_0+i\eta)^2\right)} dk \\
=&\int_{-R}^R \frac{ke^{ikr}}{(2\pi)^3 ir\left(-k^2+(k_0+i\eta)^2\right)} dk
\end{aligned} \tag{1.23}$$

No contexto de integrais complexas podemos desconsiderar o caminho que passa fora do eixo dos reais quando fechamos a superfície ao redor dos polos. Isso pode ser facilmente demonstrado quando olhamos para

$$\begin{aligned}
&z = Re^{i\theta} = Rcos\theta + iRsin\theta \\
&e^{irz} = e^{ir(Rcos\theta+iRsin\theta)} = e^{irRcos\theta-rRsin\theta} \\
&e^{irz} = e^{irRcos\theta}e^{-rRsin\theta}
\end{aligned}$$

Quando tomamos o limite de R tendendo a ∞ temos uma contribuição nula da parte complexa, e fazendo apenas a integral na reta real com η no limite de 0 por dentro da curva. Para finalizar, basta fazermos a integração utilizando o teorema dos resíduos. Vale lembrar que,

$$\oint dz \quad \frac{ze^{izr}}{z^2-(k_0+i\eta)^2} = 2\pi i \mathrm{Res}(z_\pm) \tag{1.24}$$

com

$$z^2-(k_0+i\eta)^2 = (z-z_+)(z-z_-) \iff \begin{cases} z_+ = & k_0+i\eta \\ z_- = & -k_0-i\eta \end{cases} \tag{1.25}$$

Calculando os resíduos em z_+ temos,

$$\mathrm{Res}(z_+) = \lim_{\eta\to 0^+} \frac{k_+e^{iz_+r}}{z_+-z_-} = \frac{k_0e^{ik_0r}}{k_0-(-k_0)} = \frac{e^{ik_0r}}{2} \tag{1.26}$$

já em z_- temos:

$$\mathrm{Res}(z_-) = \lim_{\eta\to 0^-} \frac{k_-e^{iz_-r}}{z_--z_+} = \frac{-k_0e^{-ik_0r}}{-k_0-k_0} = \frac{e^{-ik_0r}}{2} \tag{1.27}$$

Por fim, podemos substituir os resultados para os resíduos na função de Green, lembrando de considerar a integral sobre ω e a constante $2\pi i$ enunciada anteriormente no teorema.

$$
\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r},t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \int_{-R}^{R} \frac{ke^{ikr}}{(2\pi)^3 ir\,(-k^2+(k_0+i\eta)^2)}\,dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikr}}{(-k^2+(k_0+i\eta)^2)}\,dk \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \cdot 2\pi i\,\mathrm{Res}(z_{\pm}) \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{\pm ik_0 r}}{2} \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \cdot \pi i\, e^{\pm i\frac{\omega c}{r}} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{r}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^3}\frac{\pi}{r}\delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right)
\end{aligned}
\tag{1.28}
$$

Substituindo em 1.3 e retornando os tempos e posições $t - t'$ e $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ considerando que definimos essa possibilidade anteriormente, temos:

$$
\Psi(\mathbf{r},t)_{\pm} = -\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) f(\mathbf{r}',t') \tag{1.29}
$$

Resolvendo para t,

$$
\Psi(\mathbf{r},t)_{\pm} = -\int d^3r' \frac{f(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.30}
$$

Nesse contexto, como temos duas soluções, utilizaremos a solução de tempo retardado, que é definido pelas consequências serem geradas após a interação. A outra escolha é chamado de tempo adiantado, mas pode não ser muito interessante no momento uma vez que estaríamos considerando, por exemplo, uma medida antes de realizar o experimento.

$$
\Psi(\mathbf{r},t)_{+} = -\int d^3r' \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.31}
$$

Para finalizar, podemos substituir os resultados encontrados nos pares ordenados das fontes discutidos em sala de aula, desta forma encontrando uma solução para evolução temporal com relação as fontes

$$
\phi \rightarrow f = -4\pi\rho(\mathbf{r},t)
$$

$$
\mathbf{A} \rightarrow f = \frac{-4\pi}{c}\mathbf{J}
$$

logo,

$$
\phi(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{1.32}
$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{1.33}$$

O vetor potencial satisfaz a equação de onda não homogênea

$$\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\nabla\frac{\partial\phi}{\partial t} \tag{1.34}$$

por isso, desde que estejamos envolvendo um operador gradiente temos um termo irrotacional. Por isso, deve cancelar com outra componente correspondente da densidade de corrente satisfazendo então,

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t \tag{1.35}$$

uma vez que $\nabla \times \mathbf{J}_l = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$

Exercício 2: 28/08 Refaça detalhadamente os cálculos sobre a conservação de momentum linear em eletromagnetismo do PDF da aula de hoje.

Do que já sabemos da mecânica clássica, a variação do momento de um sistema é descrito pela força externa que atua sobre o mesmo.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{P} \tag{2.1}$$

Queremos nessa etapa, analisar de alguma forma a conservação de momento de um sistema eletromagnético e, para isso, vamos considerar a variação de momentum linear da matéria carregada ($\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m$) igual a força de Lorentz por unidade de área expressa sobre um volume com distribuição de carga ρ

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \tag{2.2}$$

e força total F_V

$$\begin{aligned} F_V &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \\ &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right) = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_m \end{aligned} \tag{2.3}$$

Entretanto, não demonstraremos isso em função das fontes, e sim trabalharemos nessa demonstração majoritariamente através das equações de Maxwell. Para isso, vamos apenas fazer um lembrete de todas elas:

Equações de Maxwell

Lei de Gauss

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{2.4}$$

Inexistência de monopolos magnéticos

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{2.5}$$

Lei de indução de Faraday

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{2.6}$$

Lei de Ampére-Maxwell

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \tag{2.7}$$

Utilizando a lei de Gauss e a lei de Ampére-Maxwell para descrever as fontes temos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\mathbf{E} \\ \mathbf{J} &= \frac{c}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{2.8}$$

podemos então substituir em 2.3.

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right) \\
&= \int_V d^3r\left(\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)
\end{aligned}
\tag{2.9}
$$

Podemos facilmente trabalhar com a Lei de Faraday (2.6) na igualdade acima, a regra do produto nos dá que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) = \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \implies \\
\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\times\mathbf{B} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}.
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Substituindo em 2.9 e em seguida substituindo a derivada temporal do campo magnético pela Lei de Faraday:

$$
\begin{aligned}
&\int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right)\right] \\
&= \int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) + c\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right)\right] \\
&= \int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\right]
\end{aligned}
\tag{2.11}
$$

Exercício 3: 02/09 Considere duas cargas pontuais idênticas separadas por uma distância finita no vácuo. Faça a integral de superfície do tensor dos estresses de Maxwell sobre o plano dos pontos equidistantes às duas cargas. Deduza, assim, a força de Coulomb entre as duas cargas.