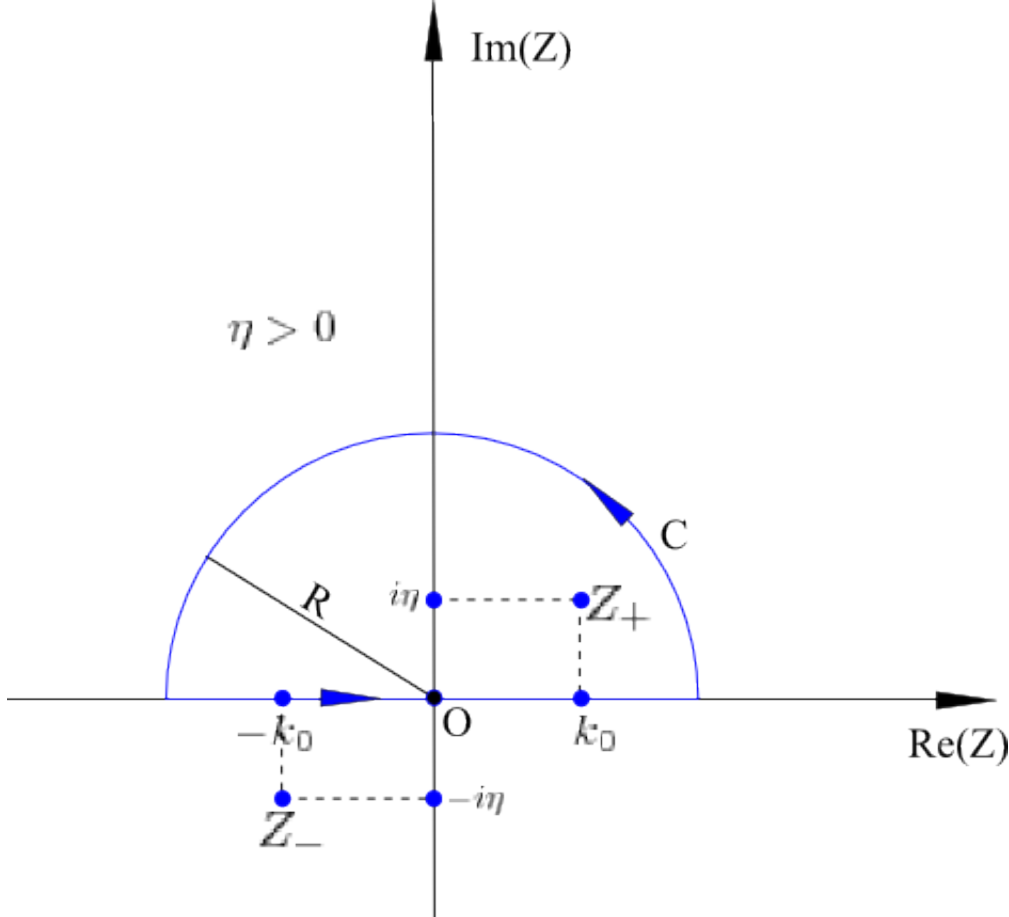


Consideremos a integral no plano complexo:

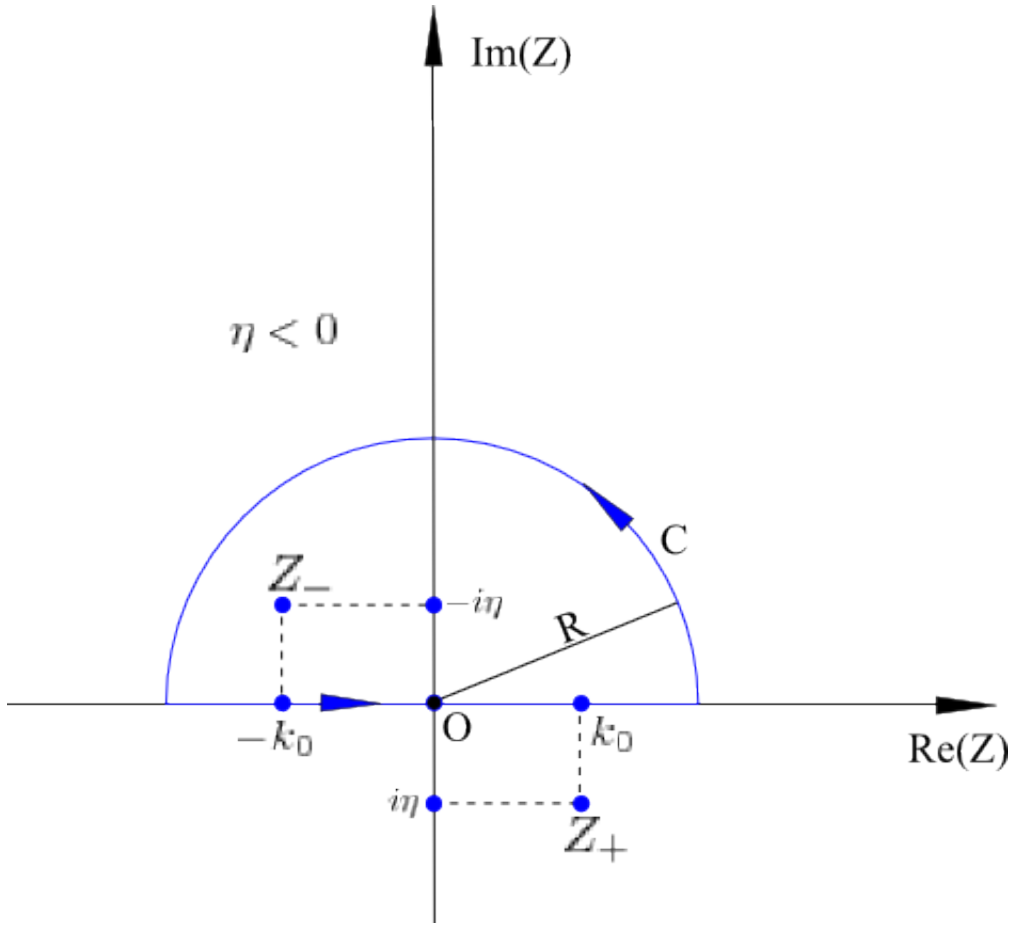
$$\oint_C \frac{Z \exp(irZ)}{(Z - Z_+)(Z - Z_-)} dZ,$$

onde o contorno é fechado sobre o semi-plano complexo superior.



Quando $\eta \rightarrow 0^+$ (veja a figura acima), temos

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \oint_C \frac{Z \exp(irZ)}{(Z - Z_+)(Z - Z_-)} dZ &= 2\pi i \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{Z_+ \exp(irZ_+)}{Z_+ - Z_-} \\ &= \pi i \exp(ik_0 r). \end{aligned}$$



Quando $\eta \rightarrow 0^-$ (veja a figura acima), temos

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^-} \oint_C \frac{Z \exp(irZ)}{(Z - Z_+)(Z - Z_-)} dZ = \pi i \exp(-ik_0 r).$$

Mas, com o contorno fechado sobre o semi-plano complexo superior,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (k_0 + i\eta)^2} dk = \oint_C \frac{Z \exp(irZ)}{(Z - Z_+)(Z - Z_-)} dZ$$

e, portanto,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^\pm} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{k \exp(ikr)}{k^2 - (k_0 + i\eta)^2} dk = \pi i \exp(\pm ik_0 r).$$

Com esses resultados, podemos concluir que

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^\pm} \int d^3k \frac{\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{k^2 - (k_0 + i\eta)^2} = \frac{2\pi^2}{r} \exp(\pm ik_0 r)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r}, t) &\equiv \lim_{\eta \rightarrow 0^{\pm}} G_{\eta}(\mathbf{r}, t) \\
&= -\frac{1}{(2\pi)^4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \frac{2\pi^2}{r} \exp(\pm i k_0 r) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp(-i\omega t) \exp\left(\pm i \frac{\omega}{c} r\right) \\
&= -\frac{1}{8\pi^2 r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp\left[-i\omega \left(t \mp \frac{r}{c}\right)\right] \\
&= -\frac{1}{4\pi r} \delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right).
\end{aligned}$$

Assim, também temos

$$\begin{aligned}
G_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') &= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \\
&= -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right).
\end{aligned}$$

Há, portanto, duas soluções possíveis para o problema:

$$\begin{aligned}
\Psi_{\pm}(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G_{\pm}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') f(\mathbf{r}', t') \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \delta\left(t' - t \pm \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) f(\mathbf{r}', t') \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int d^3 r' \frac{f\left(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.
\end{aligned}$$

Para os campos eletromagnéticos especificamente de distribuições de cargas e correntes dadas, sendo esses campos nulos no caso de termos as fontes também nulas, entendemos que esses campos são causados pelas fontes. Nesse caso, utilizaremos as soluções retardadas e não as avançadas, isto é,

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3 r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3 r' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Equações do eletromagnetismo

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss,

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère & Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Essas equações são a base da teoria do campo eletromagnético. No entanto, em nossas discussões aqui, estaremos utilizando várias outras equações úteis, além das de Maxwell. Uma delas é a equação de movimento para uma partícula carregada, dada em termos da força de Lorentz:

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde q é a carga da partícula, \mathbf{v} é sua velocidade e c é a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Como a carga é sempre conservada, há também a equação da continuidade,

$$\nabla \cdot \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0,$$

que, para recordar, vamos deduzi-la. A carga total em uma região de volume V somente varia se houver fluxo de carga através da superfície S de V . Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = - \oint_S da \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{J},$$

onde o sinal de menos é necessário, pois $\hat{\mathbf{n}}$ é, por convenção, a normal externa à superfície fechada S e a carga Q é a que está na região V . Assim, se a carga aumentar em V , é porque há corrente através de S no sentido de fora para dentro. Podemos utilizar o teorema da divergência e obter:

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{J}.$$

Como o volume V é arbitrário e

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_V d^3r \rho(\mathbf{r}, t) \\ &= \int_V d^3r \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

segue a equação da continuidade:

$$\nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0.$$

Como explicado quando discutimos transformações de calibre, o calibre ou gauge de Lorentz é dado por

$$\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{1}{c} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0.$$

Nesse calibre, os potenciais vetorial e escalar retardados, que sempre vamos utilizar em nossas discussões, são dados por

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \int d^3r' \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int d^3r' \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

conforme deduzimos quando discutimos acima a função de Green para a equação de onda. Com essas soluções dos potenciais, os campos são obtidos destas relações:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

e

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}.$$

A convenção de Einstein para somas

É muito comum termos várias somas iteradas em nossos cálculos em eletromagnetismo. Por exemplo,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \sum_{k=1}^3 \frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\ &= \frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3}. \end{aligned}$$

A notação com índices que estou apresentando aqui é tal que

$$(x_1, x_2, x_3) \equiv (x, y, z),$$

para coordenadas cartesianas. Como uma notação extremamente conveniente, também podemos usar:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \equiv \partial_1,$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} \equiv \partial_2$$

e

$$\frac{\partial}{\partial x_3} \equiv \partial_3.$$

Com isso, podemos escrever

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \sum_{k=1}^3 \partial_k E_k.$$

Tipicamente, nesses cálculos vetoriais, sempre que há uma soma, invariavelmente há dois fatores com o mesmo índice somado em cada termo. Sendo assim, como no exemplo acima, sempre que aparecer, por exemplo, $\partial_k E_k$ em algum termo, também aparecerá o símbolo de soma $\sum_{k=1}^3$. Logo, podemos abolir esse símbolo de nossa notação, subentendendo que dois índices iguais no mesmo termo são somados de 1 a 3. Essa convenção de Einstein simplifica a notação e torna os cálculos mais rápidos por abolir símbolos desnecessários. Com essa convenção, por exemplo, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \partial_k E_k,$$

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{x}}_p x_p,$$

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} = k_l x_l,$$

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{E} &= \hat{\mathbf{x}}_p x_p \partial_k E_k \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \partial_k x_p \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \hat{\mathbf{x}}_p E_k \delta_{kp} \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \hat{\mathbf{x}}_p E_p \\ &= \hat{\mathbf{x}}_p \partial_k (x_p E_k) - \mathbf{E} \\ &= \partial_k (\hat{\mathbf{x}}_p x_p E_k) - \mathbf{E} \\ &= \partial_k (\mathbf{r} E_k) - \mathbf{E}, \end{aligned}$$

etc. É importante notarmos também que, em cada termo, cada índice pode aparecer apenas duas vezes, para não confundirmos quais fatores devem ser somados em pares.