Exercício 2: 21/08

- Demonstre o teorema de Helmholtz, isto é, demonstre as Eqs. (6.47), (6.49) e (6.50) da segunda edição do livro de J. D. Jackson ou as Eqs. (6.25), (6.27) e (6.28), da terceira.
- Refaça detalhadamente os cálculos para obter a função de Green para a equação de onda.

Teorema de Helmholtz

Queremos inicialmente provar que

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t \tag{2.1}$$

e escrever $\mathbf{J}_l$ e $\mathbf{J}_t$ em suas formas explícitas sendo o primeiro irrotacional e o segundo transversal, ou seja $\nabla \times \mathbf{J}_l = 0$ e $\nabla \cdot \mathbf{J}_t = 0$. Para fazer essa demonstração vamos nos apoiar na identidade

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{J}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{J}) - \nabla^2 \mathbf{J} \tag{2.2}$$

e na propriedade

$$\nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \nabla^2 \frac{1}{R} = -4\pi \delta^{(3)}(R), \qquad R \equiv |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \tag{2.3}$$

Vamos começar escrevendo a densidade de corrente $\mathbf{J}$ como função de uma delta e aplicar a propriedade do laplaciano do vetor de separação

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \int_V d^3r' \mathbf{J}(\mathbf{r}') \delta^{(3)}(R) \tag{2.4}$$

logo,

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}) = \frac{-1}{4\pi} \nabla^2 \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \tag{2.5}$$

substituindo a identidade 2.2

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{r}) =& \frac{-1}{4\pi} \nabla^2 \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \\
=& \frac{-1}{4\pi} (\nabla\nabla \cdot - \nabla \times \nabla \times) \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \\
=& \frac{-1}{4\pi} \left[\nabla\nabla \cdot \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla \times \nabla \times \int_V d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} \right]
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Vamos agora manipular a primeira integral! Em seguida, utilizar a regra do produto das derivadas.

$$
\begin{aligned}
&\frac{-1}{4\pi}\nabla\nabla\cdot\int_V d^3r'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} = \frac{-1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\mathbf{J}(\mathbf{r}')\nabla\cdot\frac{1}{R}\\
=&\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\nabla'\cdot\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\right) - \frac{1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\frac{(\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'))}{R}\\
=&\frac{1}{4\pi}\nabla\oint_S(V)\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\right)\cdot d\mathbf{a} - \frac{1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\frac{(\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'))}{R}
\end{aligned}
$$

Uma vez que estamos fazendo a integração em todo o espaço, a integral de superfície tende a zero. Por isso, podemos reescrever como:

$$
\frac{1}{4\pi}\nabla\oint_S(V)\left(\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\right)\cdot d\mathbf{a} \to 0
$$

então, finalmente substituindo a integral manipulada em temos,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{r}) &= \frac{-1}{4\pi}\left[\nabla\nabla\cdot\int_V d^3r'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R} - \nabla\times\nabla\times\int_V d^3r'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\right]\\
&= -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\frac{(\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'))}{R} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V d^3r'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{R}\\
&= -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\frac{(\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} + \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V d^3r'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}\\
&= \mathbf{J}_l + \mathbf{J}_t
\end{aligned} \tag{2.7}
$$

uma vez que,

$$
\mathbf{J}_l = -\frac{1}{4\pi}\nabla\int_V d^3r'\frac{(\nabla'\cdot\mathbf{J}(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{2.8}
$$

e

$$
\mathbf{J}_t = \frac{1}{4\pi}\nabla\times\nabla\times\int_V d^3r'\frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}. \tag{2.9}
$$

Função de Green

Agora, queremos encontrar a solução para a equação de onda resultante das transformações por Gauge de Lorentz no qual queremos encontrar a solução particular que satisfaça

$$
\nabla^2\Psi(\mathbf{r},t) - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi = f(\mathbf{r},t) \tag{2.10}
$$

Portanto, queremos encontrar a função de Green que satisfaz a equação 2.10. Das propriedades da função de Green temos

$$
\begin{aligned}
&\nabla^2 G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')\\
&\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t')
\end{aligned} \tag{2.11}
$$

no qual possibilitamos a construção da solução particular Ψ_P

$$\Psi(\mathbf{r},t)_P = \int d^3r \int_{-\infty}^{+\infty} dtG(\mathbf{r},t,\mathbf{r}')f(\mathbf{r}',t') \tag{2.12}$$

Para facilitar nossas contas vamos passar do espaço temporal para o de frequências por meio de transformada de Fourier sobre t

$$G(\mathbf{r},t,\mathbf{r}',t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') \tag{2.13}$$

Substituindo 2.13 em 2.11 podemos calcular explicitamente as derivadas temporais e passar de operadores de derivada temporal para termos geométricos da forma $k_0 = \frac{\omega}{c}$.

$$\begin{aligned} &\left(\nabla^2 - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') \\ &= \left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c^2}\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') \\ &= \left(\nabla^2 + k_0^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') \end{aligned} \tag{2.14}$$

Olhando para o lado direito da equação 2.11 quando tomamos a transformada de Fourier temos que levar em consideração que a delta de Dirac passa a ser escrita também na sua forma transformada.

$$\delta(t-t') = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')} \tag{2.15}$$

Logo, chegamos que

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right)\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega(t-t')}. \tag{2.16}$$

Simplificar essa equação pode nos ajudar a visualizar o problema que vamos trabalhar nesse momento, logo subtraindo o lado direito da equação em ambos os lados e colocando tudo dentro do mesmo integrando com a exponencial de t em evidência

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \quad e^{-i\omega t}\left[\left(\nabla^2 + k_0^2\right) g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') - \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\right] = 0 \tag{2.17}$$

Notemos que essa equação será verdadeira no caso dos termos internos se anularem uma vez que a exponencial dependente de t nunca será nula.

$$\left(\nabla^2 + k_0^2\right) g(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{2.18}$$

Nesse ponto, o que queremos é encontrar o valor da função de Green (G) a partir de g. Nesse caso, temos que levar em consideração a existência de uma singularidade no denominador ao isolarmos g uma vez que a solução do sistema divergiria no eixo dos reais. Para resolver esse problema vamos induzir um polo no semi-espaço dos complexos por meio de uma aproximação g_η na qual

$$g_\eta = g_\eta(\mathbf{r},\omega,\mathbf{r}',t')$$

que resultaria na correção infinitesimal em 2.18 correspondente à

$$\left(\nabla^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.19}$$

Realizando agora a transformada de Fourier da posição para eliminar o operador de derivada temos

$$g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \tag{2.20}$$

que nos dá

$$\int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \left(k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.21}$$

uma vez que

$$\begin{aligned} \nabla^2 g_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') &= \nabla^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ =&(-\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') = -k^2 e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \end{aligned} \tag{2.22}$$

Finalmente podemos encontrar uma equação $\bar{g}_\eta$ que pode está a uma integral de nos dar o resultado para a função de Green desejada desde o início.

$$\left(\nabla^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.23}$$

$$\int d^3k \quad \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.24}$$

Substituindo a delta explicitamente, assim como na equação 2.15

$$\int d^3k \quad \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{2\pi}\frac{1}{(2\pi)^3}\int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')} \tag{2.25}$$

Igualando os integrandos, temos

$$\left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \tag{2.26}$$

logo,

$$\bar{g}_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') = \frac{e^{i\omega t'}}{(2\pi)^4}\frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}}{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} = \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4\left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \tag{2.27}$$

Substituindo $\bar{g}_\eta$ em g_η, em seguida em g_η em G conseguiremos encontrar o valor para G_η

$$\begin{aligned} g_\eta(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') &= \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \bar{g}_\eta(\mathbf{k}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4\left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \end{aligned} \tag{2.28}$$

finalmente,

$$\begin{aligned} G_\eta(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{-i\omega t} g(\mathbf{r}, \omega, \mathbf{r}', t') \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega e^{i\omega t} \int d^3k \quad e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \frac{e^{i\omega t' - i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}'}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \end{aligned} . \tag{2.29}$$

Para obtermos os resultados desejados para a solução, a partir de agora basta realizar as integrações em d^3k e $d\omega$, uma vez que para facilitar podemos escrever a equação da seguinte forma:

$$G_\eta(\mathbf{r}, t, \mathbf{r}', t') = G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3k \quad \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}') - i\omega(t-t')}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \tag{2.30}$$

ou então,

$$G_\eta(\mathbf{r}, t) = G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int d^3k \quad \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \tag{2.31}$$

uma vez que $G_\eta(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t - t') \quad \exists \quad \forall \quad \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ e $t - t'$.

Aplicando a transformação de coordenadas polares para coordenadas esféricas temos

$$\begin{aligned} &\int_V d^3k \quad \frac{e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - i\omega t}}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} \\ &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_1^{-1} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\cos\theta \int_0^R \frac{k^2}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} dk \\ &= (2\pi) \int_1^{-1} e^{ikr\cos\theta} d\cos\theta \int_0^R \frac{k^2}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} dk \\ &= \int_0^R \frac{2\pi\left(-e^{ikr} + e^{-ikr}\right)}{ikr} \frac{k^2}{(2\pi)^4 \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} dk \\ &= \int_{-R}^R \frac{ke^{ikr}}{(2\pi)^3 ir \left(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2\right)} dk \end{aligned} \tag{2.32}$$

No contexto de integrais complexas podemos desconsiderar o caminho que passa fora do eixo dos reais quando fechamos a superfície ao redor dos polos. Isso pode ser facilmente demonstrado quando olhamos para

$$\begin{aligned} z &= Re^{i\theta} = Rcos\theta + iRsin\theta \\ e^{irz} &= e^{ir(Rcos\theta + iRsin\theta)} = e^{irRcos\theta - rRsin\theta} \\ e^{irz} &= e^{irRcos\theta} e^{-rRsin\theta} \end{aligned}$$

Quando tomamos o limite de R tendendo a ∞ temos uma contribuição nula da parte complexa, e fazendo apenas a integral na reta real com η no limite de 0 por dentro da curva. Para finalizar, basta fazermos a integração utilizando o teorema dos resíduos. Vale lembrar que,

$$\oint dz \quad \frac{ze^{izr}}{z^2 - (k_0 + i\eta)^2} = 2\pi i \text{Res}(z_\pm) \tag{2.33}$$

com

$$z^2 - (k_0 + i\eta)^2 = (z - z_+)(z - z_-) \Longleftarrow \begin{cases} z_+ = & k_0 + i\eta \\ z_- = & -k_0 - i\eta \end{cases} \tag{2.34}$$

Calculando os resíduos em z_+ temos,

$$\text{Res}(z_+) = \lim_{\eta \to 0^+} \frac{k_+ e^{iz_+ r}}{z_+ - z_-} = \frac{k_0 e^{ik_0 r}}{k_0 - (-k_0)} = \frac{e^{ik_0 r}}{2} \tag{2.35}$$

já em z_- temos:

$$\text{Res}(z_-) = \lim_{\eta \to 0^-} \frac{k_- e^{iz_- r}}{z_- - z_+} = \frac{-k_0 e^{-ik_0 r}}{-k_0 - k_0} = \frac{e^{-ik_0 r}}{2} \tag{2.36}$$

Por fim, podemos substituir os resultados para os resíduos na função de Green, lembrando de considerar a integral sobre ω e a constante $2\pi i$ enunciada anteriormente no teorema.

$$\begin{aligned} G_\pm(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \int_{-R}^{R} \frac{ke^{ikr}}{(2\pi)^3 ir\,(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)}\, dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{ke^{ikr}}{(-k^2 + (k_0 + i\eta)^2)}\, dk \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \cdot 2\pi i\, \text{Res}(z_\pm) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \cdot 2\pi i \cdot \frac{e^{\pm ik_0 r}}{2} \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{e^{-i\omega t}}{(2\pi)^3 ir} \cdot \pi i\, e^{\pm i \frac{\omega c}{r}} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{r} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega\, e^{-i\omega t} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^3} \frac{\pi}{r} \delta\left(t \mp \frac{r}{c}\right) \end{aligned} \tag{2.37}$$

Substituindo em 2.12 e retornando os tempos e posições $t - t'$ e $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ considerando que definimos essa possibilidade anteriormente, temos:

$$\Psi(\mathbf{r}, t)_\pm = -\int d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \delta\left(t - t' \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) f(\mathbf{r}', t') \tag{2.38}$$

Resolvendo para t,

$$\Psi(\mathbf{r}, t)_\pm = -\int d^3r' \frac{f(\mathbf{r}', t \mp \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c})}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \tag{2.39}$$

Nesse contexto, como temos duas soluções, utilizaremos a solução de tempo retardado, que é definido pelas consequências serem geradas após a interação. A outra escolha é chamado de tempo adiantado, mas pode não ser muito interessante no momento uma vez que estaríamos considerando, por exemplo, uma medida antes de realizar o experimento.

$$\Psi(\mathbf{r},t)_{+} = -\int d^3r' \frac{f(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{4\pi|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.40}$$

Para finalizar, podemos substituir os resultados encontrados nos pares ordenados das fontes discutidos em sala de aula, desta forma encontrando uma solução para evolução temporal com relação as fontes

$$\phi \rightarrow f = -4\pi\rho(\mathbf{r},t)$$

$$\mathbf{A} \rightarrow f = \frac{-4\pi}{c}\mathbf{J}$$

logo,

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int d^3r' \frac{\rho(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.41}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int d^3r' \frac{\mathbf{J}(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c})}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{2.42}$$