Exercício 3: 28/08 Refaça detalhadamente os cálculos sobre a conservação de momentum linear em eletromagnetismo do PDF da aula de hoje.

Do que já sabemos da mecânica clássica, a variação do momento de um sistema é descrito pela força externa que atua sobre o mesmo.

$$\mathbf{F} = \frac{d}{dt}\mathbf{P} \tag{3.1}$$

Queremos nessa etapa, analisar de alguma forma a conservação de momento de um sistema eletromagnético e, para isso, vamos considerar a variação de momentum linear da matéria carregada ($\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m$) igual a força de Lorentz por unidade de área expressa sobre um volume com distribuição de carga ρ

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \tag{3.2}$$

e força total F_V

$$\begin{aligned} F_V &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \\ &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right) = \frac{d}{dt}\mathbf{P}_m \end{aligned} \tag{3.3}$$

Entretanto, não demonstraremos isso em função das fontes, e sim trabalharemos nessa demonstração majoritariamente através das equações de Maxwell. Para isso, vamos apenas fazer um lembrete de todas elas:

Equações de Maxwell

Lei de Gauss

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = 4\pi\rho \tag{3.4}$$

Inexistência de monopolos magnéticos

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \tag{3.5}$$

Lei de indução de Faraday

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \tag{3.6}$$

Lei de Ampére-Maxwell

$$\nabla\times\mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \tag{3.7}$$

Utilizando a lei de Gauss e a lei de Ampére-Maxwell para descrever as fontes temos

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{1}{4\pi}\nabla\cdot\mathbf{E} \\ \mathbf{J} &= \frac{c}{4\pi}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E} \end{aligned} \tag{3.8}$$

podemos então substituir em 3.3.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathbf{P}_m &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right) \\ &= \int_V d^3r\left(\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) \end{aligned} \tag{3.9}$$

Podemos facilmente trabalhar com a Lei de Faraday (3.6) na igualdade acima, a regra do produto nos dá que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) &= \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B} \implies \\ \frac{\partial}{\partial t}\mathbf{E}\times\mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Substituindo em 3.9 e em seguida substituindo a derivada temporal do campo magnético pela Lei de Faraday:

$$\begin{aligned} &\int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \mathbf{E}\times\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{B}\right)\right] \\ &= \int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\nabla\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) + c\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right)\right] \\ &= \int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.11}$$

uma vez que não existem monopolos magnéticos, isto é, $\nabla\cdot B = 0$ podemos acrescentar um termo para fins de simetria da equação. Por isso ficamos com,

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m + \int_V d^3r\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right) = \\ &= \int_V d^3r\left[\frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{E}\right)\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\nabla\cdot\mathbf{B}\right)\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times\left(\nabla\times\mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right] \end{aligned} \tag{3.12}$$

Os termos escalares na realidades são díades na forma $E_i\partial_j E_k$. Utilizando as convenções de Einstein, podemos olhar para os termos rotacionais acima onde temos,

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{E}\times\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)\right]_k &= \epsilon_{kmn}E_m\left(\nabla\times\mathbf{E}\right)_n \\ &= \epsilon_{kmn}E_m\epsilon_{njr}\partial_j E_r \\ &= \epsilon_{kmn}\epsilon_{njr}E_m E_r \\ &= \left(\delta_{kj}\delta_{mr} - \delta_{kr}\delta_{mj}\right)E_m E_r \\ &= \delta_{kj}E_m\partial_j E_m - E_j\partial_j E_k \\ &= \frac{1}{2}\delta_{kj}\mathbf{E}^2 \end{aligned}$$

que possui uma estrutura muito similar à díade falada anteriormente. Para o campo elétrico, se considerarmos o lema de Gauss, temos:

$$\begin{aligned}
&\int_V d^3r \left[\frac{1}{4\pi}(\nabla \cdot \mathbf{E})\,\mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E} \times (\nabla \times \mathbf{E})\right] \\
&= \int_V d^3r \frac{1}{4\pi}\left[\partial_k \mathbf{E} E_k - \frac{1}{2}\delta_{kj}\mathbf{E}^2\right] \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \quad n_k \mathbf{E} E_k - \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \quad \frac{1}{2} n_k E_k^2 \\
&= \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \quad \left[(\hat{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\hat{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E})\right]
\end{aligned} \tag{3.13}$$

analogamente para **B** temos,

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \quad \left[(\hat{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\right] \tag{3.14}$$

finalmente, conseguimos provar as equações para a conservação de momento linear uma vez que consideramos a densidade de momento linear **g** e o tensor de estresse de Maxwell (T_{km}):

$$\frac{d}{dt}\mathbf{P}_m + \int_V d^3r \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}) = \frac{d}{dt}(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c) \tag{3.15}$$

com

$$\mathbf{P}_c = \int_V d^3r \quad \mathbf{g}, \qquad \mathbf{g} \equiv \frac{1}{4\pi c}(\mathbf{E} \times \mathbf{B})$$

portanto,

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c) = \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da \left[(\hat{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\hat{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + (\hat{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B})\right] \\
&\frac{d}{dt}(\mathbf{P}_m + \mathbf{P}_c) = \oint_{S(V)} da T_{km} n_m
\end{aligned} \tag{3.16}$$

com

$$T_{km} \equiv (\hat{n} \cdot \mathbf{E})\mathbf{E} - \frac{1}{2}\hat{n}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + (\hat{n} \cdot \mathbf{B})\mathbf{B} - \frac{1}{2}\hat{n}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}). \tag{3.17}$$

Vale lembrar que, para que tenhamos conservação de momento dentro de um volume, isso acontecerá no caso da integral de superfície do tensor de estresse de maxwell nessa região V for nula, isto é,

$$\oint_{S(V)} da \quad T_{km} n_m = 0 \tag{3.18}$$