Os potenciais de Liénard & Wiechert

Vou introduzir os cálculos dos potenciais de Liénard & Wiechert, escalar e vetorial, de uma partícula carregada executando um movimento com trajetória dada. Como queremos os campos causados pela partícula, utilizamos as soluções retardadas dos potenciais no calibre de Lorentz:

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\rho\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c}\int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\mathbf{J}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

Para uma carga q descrevendo uma trajetória $\mathbf{r}_0(t)$, temos

$$\rho(\mathbf{r}',t') = q\delta^{(3)}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t'))$$

e

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}',t') = q\mathbf{v}(t')\,\delta^{(3)}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t')),$$

para quaisquer $\mathbf{r}'$ e t', onde

$$\mathbf{v}(t') = \frac{d\mathbf{r}_0(t')}{dt'}.$$

Assim, o potencial escalar, por exemplo, fica

$$\phi(\mathbf{r},t) = \int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{q\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}.$$

O problema é integrarmos

$$\int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\mathcal{F}\left(\mathbf{r}', t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|},$$

onde por clareza, definimos:

$$\mathcal{F}(\mathbf{r}',t') \equiv \delta^{(3)}(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0(t')).$$

Para tal proeza, há um truque: é óbvio que a integral acima pode ser escrita como

$$\int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}'-\mathbf{r}_0\left(t-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} =$$

$$
\begin{aligned}
\int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\mathcal{F}\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} &= \\
\int_{V_\infty} d^3r' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\mathcal{F}(\mathbf{r}', t')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right) &= \\
\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\delta^{(3)}(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)
\end{aligned}
$$

e, portanto, integrando sobre a variável $\mathbf{r}'$, obtemos

$$
\int_{V_\infty} d^3r' \, \frac{\delta^{(3)}\left(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0\left(t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}{c}\right)\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} = \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta\left(t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}\right)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}.
$$

A seguir, tomamos como fixos $\mathbf{r}$ e t e introduzimos a função

$$
f(t') = t' - t + \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}{c}.
$$

Portanto, temos a seguinte integral para calcular:

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|}.
$$

Usando a propriedade da função delta de Dirac dada por

$$
\delta(f(t')) = \sum_k \frac{\delta(t'-t_k)}{\left|\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_k}},
$$

onde os t_k's são os instantes de tempo em que $f(t_k) = 0$, podemos escrever

$$
\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta(f(t'))}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|} = \sum_k \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t')|} \frac{\delta(t'-t_k)}{\left|\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_k}}.
$$

Em outras palavras, queremos os instantes de tempo t_k's tais que

$$
t_k = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_k)|}{c}.
$$

O fato é que só há um instante de tempo para essa relação valer. Para vermos isso, suponhamos que existam dois instantes, t_1 e t_2, com $t_1 \neq t_2$, tais que

$$
t_1 = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_1)|}{c}
$$

e

$$
t_2 = t - \frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0(t_2)|}{c}.
$$

Sem perda de generalidade, suponhamos que $t_2 > t_1$. Logo,

$$c\,(t_2 - t_1) = |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_1)| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_2)|\,.$$

Mas, usando a desigualdade triangular, sabemos que, para quaisquer vetores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, segue que

$$|\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2| \leqslant |\mathbf{w}_1| + |\mathbf{w}_2|\,.$$

Então, podemos também escrever que

$$|\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2| - |\mathbf{w}_2| \leqslant |\mathbf{w}_1|\,.$$

Seja, agora,

$$\mathbf{w}_3 \equiv \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$$

e, assim,

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_2.$$

Substituindo estas duas identidades na desigualdade acima, vem:

$$|\mathbf{w}_3| - |\mathbf{w}_2| \leqslant |\mathbf{w}_3 - \mathbf{w}_2|\,.$$

Sendo assim, escolhemos

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_1)$$

e

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_2)\,.$$

Então, da desigualdade acima, obtemos:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_1)| - |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_2)| &\leqslant |\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_1) - (\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_2))| \\ &= |\mathbf{r}_0\,(t_2) - \mathbf{r}_0\,(t_1)|\,. \end{aligned}$$

Assim,

$$c \leqslant \frac{|\mathbf{r}_0\,(t_2) - \mathbf{r}_0\,(t_1)|}{t_2 - t_1},$$

implicando que a partícula deveria ir de $\mathbf{r}_0\,(t_1)$ até $\mathbf{r}_0\,(t_2)$ com uma velocidade média maior ou igual à velocidade da luz no vácuo. Como, por hipótese, estamos considerando uma partícula massiva, de massa $m > 0$, concluímos que há, no máximo, um instante de tempo em que a equação

$$t_k = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_k)|}{c}$$

vale e definimos esse instante como o tempo retardado:

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0\,(t_R)|}{c}.$$

O resultado da integral acima pode ser escrito em termos do tempo retardado como

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta\left(f\left(t'\right)\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|} &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt'}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|} \frac{\delta\left(t'-t_R\right)}{\left|\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_R}} \\ &= \frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right| \left|\frac{df(t')}{dt'}\right|_{t'=t_R}}.\end{aligned}$$

Calculemos, explicitamente, a derivada temporal da função f :

$$\begin{aligned}\frac{df\left(t'\right)}{dt'} &= \frac{d}{dt'}\left(t'-t+\frac{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}{c}\right) \\ &= 1+\frac{1}{c}\frac{d\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}{dt'}.\end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned}\frac{d\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}{dt'} &= \frac{1}{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}\frac{d\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|^2}{dt'} \\ &= \frac{1}{2\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}\frac{d\left\{\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right]\cdot\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right]\right\}}{dt'} \\ &= \frac{\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right]}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}\cdot\frac{d\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right]}{dt'} \\ &= -\frac{\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right]}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}\cdot\frac{d\mathbf{r}_0\left(t'\right)}{dt'} \\ &= -\frac{\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right]}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|}\cdot\mathbf{v}\left(t'\right).\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta\left(f\left(t'\right)\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|} = \frac{1}{\left|\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right|-\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right]\cdot\frac{\mathbf{v}(t_R)}{c}\right|}.$$

Como $|\mathbf{v}/c|<1$, temos

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dt' \frac{\delta\left(f\left(t'\right)\right)}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t'\right)\right|} = \frac{1}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right|-\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right]\cdot\frac{\mathbf{v}(t_R)}{c}}$$

e os potenciais podem ser escritos como

$$\phi\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{q}{\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right|-\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right]\cdot\frac{\mathbf{v}(t_R)}{c}}$$

e, analogamente,

$$\mathbf{A}\left(\mathbf{r},t\right) = \frac{q\mathbf{v}\left(t_R\right)}{c\left|\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right|-\left[\mathbf{r}-\mathbf{r}_0\left(t_R\right)\right]\cdot\mathbf{v}\left(t_R\right)},$$

onde

$$t_R = t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R)|}{c}.$$

Esses são os chamados potenciais de Liénard & Wiechert. Para simplificar a notação, definamos

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0(t_R),$$

$$R = |\mathbf{R}|,$$

$$\hat{\mathbf{R}} = \frac{\mathbf{R}}{R},$$

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{v}(t_R) \\ &= \frac{d\mathbf{r}_0(t_R)}{dt_R} \\ &= \dot{\mathbf{r}}_0(t_R) \end{aligned}$$

e

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{v}}{c}.$$

Com essas definições, podemos simplificar as expressões dos potenciais assim:

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{q}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}},$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{q\boldsymbol{\beta}}{R - \mathbf{R} \cdot \boldsymbol{\beta}}$$

e

$$t_R = t - \frac{R}{c}.$$