

Ondas planas em meios não condutores, lineares, homogêneos e isotrópicos

As equações de Maxwell macoscópicas para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico são escritas como

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 4\pi \frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c} \mathbf{J} + \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Considerando uma região do meio com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$, podemos proceder analogamente ao caso do vácuo e obter as equações de onda para os campos elétrico e indução magnética:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Há campos $\mathbf{E} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$ que satisfazem essas equações? Para responder a essa questão, consideremos inicialmente somente a componente x de \mathbf{E} :

$$\nabla^2 E_x(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

É óbvio que podemos escrever a identidade

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \int_{V_\infty} d^3r' \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') E_x(\mathbf{r}', t).$$

Uma representação para a função delta de Dirac é

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}').]$$

Assim,

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \int_{V_\infty} d^3r' \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k \exp[i\mathbf{k} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')] E_x(\mathbf{r}', t) \\ &= \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left[\frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_\infty} d^3r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') E_x(\mathbf{r}', t) \right] \\ &= \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) f_x(\mathbf{k}, t), \end{aligned}$$

onde

$$f_x(\mathbf{k}, t) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{V_\infty} d^3 r' \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}') E_x(\mathbf{r}', t).$$

Aplicando o operador

$$\nabla^2 - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

à expressão acima para E_x dá

$$\begin{aligned} \nabla^2 E_x(\mathbf{r}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 E_x(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} &= \int d^3 k f_x(\mathbf{k}, t) \nabla^2 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \\ &- \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} \\ &= \int d^3 k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left[-k^2 f_x(\mathbf{k}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} \right] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Logo,

$$-k^2 f_x(\mathbf{k}, t) - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 f_x(\mathbf{k}, t)}{\partial t^2} = 0.$$

A solução geral dessa equação pode ser escrita como:

$$f_x(\mathbf{k}, t) = a_x(\mathbf{k}) \exp(ikct/\sqrt{\mu\varepsilon}) + b_x(\mathbf{k}) \exp(-ikct/\sqrt{\mu\varepsilon}),$$

onde $a_x(\mathbf{k})$ e $b_x(\mathbf{k})$ são funções arbitrárias de \mathbf{k} . Assim, a solução geral para E_x é dada por

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \int d^3 k a_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3 k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Como $E_x(\mathbf{r}, t)$ é uma grandeza real, devemos ter

$$[E_x(\mathbf{r}, t)]^* = E_x(\mathbf{r}, t),$$

isto é,

$$\begin{aligned} \int d^3 k [a_x(\mathbf{k})]^* \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &+ \\ \int d^3 k [b_x(\mathbf{k})]^* \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &= \int d^3 k a_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3 k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]. \end{aligned}$$

Trocando a variável de integração \mathbf{k} por $-\mathbf{k}$ no primeiro membro dessa equação fornece

$$\begin{aligned} \int d^3k [a_x(-\mathbf{k})]^* \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &+ \\ \int d^3k [b_x(-\mathbf{k})]^* \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] &= \int d^3k a_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \end{aligned}$$

e, portanto, independência linear entre as funções exponenciais complexas implica em

$$[a_x(-\mathbf{k})]^* = b_x(\mathbf{k})$$

e

$$[b_x(-\mathbf{k})]^* = a_x(\mathbf{k}).$$

Em particular, podemos escrever

$$a_x(-\mathbf{k}) = [b_x(\mathbf{k})]^*.$$

Assim, a forma geral de $E_x(\mathbf{r}, t)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned} E_x(\mathbf{r}, t) &= \int d^3k a_x(-\mathbf{k}) \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &= \int d^3k [b_x(\mathbf{k})]^* \exp \left[-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \\ &+ \int d^3k b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \end{aligned}$$

e, portanto,

$$E_x(\mathbf{r}, t) = \text{Re} \left\{ \int d^3k 2b_x(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right] \right\}.$$

As funções escalares

$$\psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}, t) = \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]$$

satisfazem a equação de onda para todo \mathbf{k} . Dessa forma, definimos

$$\epsilon(\mathbf{k}; \mathbf{r}, t) = \hat{\epsilon}_0(\mathbf{k}) \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{kct}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \right]$$

como as funções vetoriais que formam a base funcional para os campos. Essas funções representam ondas planas, pois, em uma frente de onda, o valor de $\epsilon(\mathbf{k}; \mathbf{r}, t)$ fica fixo e isso ocorre somente quando

$$\exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{ickt}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right]$$

é constante, resultando em uma equação do plano:

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \frac{ickt}{\sqrt{\mu\epsilon}} = d,$$

onde d é uma constante.

Aqui, vamos sempre utilizar as funções de onda plana complexas, como acima. Os campos devem ser obtidos tomando as partes reais das combinações lineares de ondas complexas. Por exemplo, escrevemos

$$\epsilon = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp(ik_z z - i\omega t),$$

com E_0 real e $\omega = kc/\sqrt{\mu\epsilon}$. O campo elétrico associado é

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \text{Re}(\epsilon) \\ &= \hat{\mathbf{x}}E_0 \cos(k_z z - \omega t). \end{aligned}$$

E o campo \mathbf{B} ? Isto é, supondo dado um campo elétrico cuja representação complexa seja

$$\epsilon = \hat{\epsilon}_0 \exp \left[i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i \frac{ickt}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right],$$

como podemos encontrar o campo \mathbf{B} ? Primeiro, escrevemos

$$\mathbf{B} = \text{Re}(\beta),$$

onde β é a onda plana magnética dada por

$$\beta = \hat{\epsilon}'_0 \exp \left[i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r} - i \frac{k'ct}{\sqrt{\mu\epsilon}} \right],$$

já que tanto ϵ como β satisfazem a mesma equação de onda. Com as equações de Maxwell na ausência de fontes, fica óbvio que

$$\mathbf{k}' = \mathbf{k},$$

pois as equações que acoplam ϵ e β devem ser satisfeitas em todo ponto do espaço e em todo instante de tempo. Portanto, calculemos:

$$\nabla \times \epsilon = i\mathbf{k} \times \epsilon$$

e

$$\frac{\partial \beta}{\partial t} = -i\omega\beta,$$

onde, como é usual, definimos

$$\omega = \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Utilizando a Lei de Indução de Faraday, obtemos

$$\begin{aligned}\beta &= \frac{c\mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}}{\omega} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}$$

Analogamente, a Lei de Ampère-Maxwell na ausência de corrente livre fornece

$$\begin{aligned}\nabla \times \beta - \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} &= i\mathbf{k} \times \beta + i\frac{\mu\varepsilon}{c} \omega \boldsymbol{\epsilon} \\ &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\epsilon} = -\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} \hat{\mathbf{k}} \times \beta.$$

Assim, vemos que tanto $\boldsymbol{\epsilon}$ como β são ortogonais ao vetor de onda \mathbf{k} e entre si. É desnecessário dizer que essa mesma conclusão vale para suas respectivas partes reais, \mathbf{E} e \mathbf{B} .

Na ausência de cargas livres, a Lei de Gauss dá

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} &= i\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon} \\ &= 0,\end{aligned}$$

mais uma vez levando à conclusão de que $\boldsymbol{\epsilon}$ é ortogonal a \mathbf{k} . O mesmo vale para o divergente de β :

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \beta &= i\mathbf{k} \cdot \beta \\ &= 0.\end{aligned}$$

A polarização da luz

Se tivermos, por exemplo,

$$\boldsymbol{\epsilon} = (E_x \hat{\mathbf{x}} + iE_y \hat{\mathbf{y}}) \exp(ik_z z - i\omega t),$$

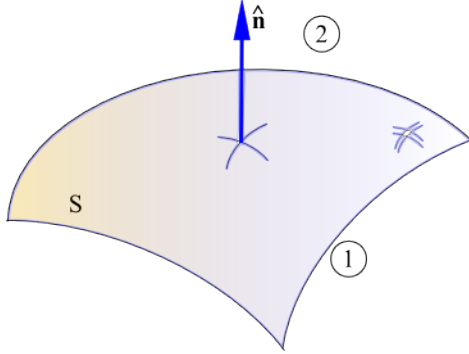
teremos luz polarizada. Se $|E_x| = |E_y|$, teremos polarização circular. Se $|E_x| \neq |E_y|$, a polarização é dita elíptica. Para vermos porque isso acontece, tomemos a parte real da onda plana acima:

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \text{Re}[(E_x \hat{\mathbf{x}} + iE_y \hat{\mathbf{y}}) \exp(ik_z z - i\omega t)] \\ &= E_x \hat{\mathbf{x}} \cos(k_z z - \omega t) - E_y \hat{\mathbf{y}} \sin(k_z z - \omega t).\end{aligned}$$

No plano $z = z_0$, com z_0 constante, o vetor campo elétrico descreve uma elipse conforme o tempo passa; a elipse é uma circunferência se $|E_x| = |E_y|$.

Condições de contorno para os campos

Quando dois materiais diferentes estão em contato, mesmo que lineares, homogêneos e isotrópicos, na região da interface entre eles pode haver descontinuidades dos campos, pois as susceptibilidades elétrica e magnética podem variar apreciavelmente de um material para outro. A interface entre os meios é representada por uma superfície singular, onde as descontinuidades ocorrem. Para calcularmos os campos na presença de uma interface utilizamos condições de contorno que fornecem, a priori, os valores das descontinuidades dos campos.



Das equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

segue que as condições de contorno para as componentes normais de \mathbf{D} e \mathbf{B} são as mesmas que para o caso estático, isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_S = 4\pi\sigma$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_S = 0,$$

onde $\hat{\mathbf{n}}$ é o versor que aponta do meio 1 para o meio 2 e S é a interface de separação entre os meios.

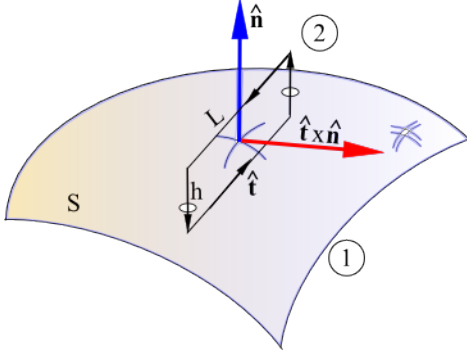
Para as equações

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

um pouco mais de cuidado é necessário com as derivadas parciais com relação ao tempo.



Por exemplo, para a Lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

consideramos um ponto sobre a interface S e fazemos uma circulação plana e retangular, com seu plano contendo a normal à superfície no ponto considerado. Se $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal, seja $\hat{\mathbf{t}}$ um versor perpendicular à normal no ponto considerado. Então, $\hat{\mathbf{t}}$ é tangente à superfície S . O vetor $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$ é também um versor e é ortogonal a ambos os versores $\hat{\mathbf{t}}$ e $\hat{\mathbf{n}}$. Com esses três versores, construíamos uma circulação em torno do ponto considerado da interface S . Ao longo de $\hat{\mathbf{t}}$, na região 1, tracemos um lado do retângulo de comprimento L . Ao longo de $\hat{\mathbf{n}}$, atravessando a interface da região 1 para a região 2, tracemos outro lado do retângulo de comprimento h . O retângulo está completo e podemos considerar o Teorema de Stokes para o fluxo do campo intensidade magnética sobre a superfície do retângulo, considerando L e h infinitesimais:

$$\begin{aligned} \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} \\ &= L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 \\ &\quad - L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= L\hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\ &= \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

onde \mathbf{j} é a corrente livre superficial na interface S . Aqui nós introduzimos a densidade superficial de corrente elétrica, \mathbf{j} , que é definida como sendo a quantidade de carga por unidade de tempo e comprimento transversal à direção dessa corrente. Assim, na figura acima, temos uma corrente I_L que atravessa o retângulo de largura L e altura h . Uma superfície, como a considerada acima, fisicamente não existe. Qualquer material por onde essa corrente passa deve ter, fisicamente, alguma espessura não nula. Seja ℓ essa espessura. Nesse caso, podemos considerar que o sentido de I_L seja dado por $\hat{\mathbf{e}}$ e, portanto, podemos definir uma densidade de corrente \mathbf{J} que atravessa a área transversal do retângulo e a corrente I_L é, então, dada por

$$I_L = \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{J}.$$

Neste caso, como a espessura através da qual a corrente passa, fisicamente, sendo ℓ , teremos $da = \ell L$, e a corrente acima fica

$$I_L = \ell L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{J}.$$

Como, para todos os efeitos práticos, já que ℓ é desprezível perante nossa resolução experimental, podemos ocultar essa espessura definindo uma densidade superficial de corrente assim:

$$\mathbf{j} \equiv \mathbf{J}\ell.$$

Com isso, a mesma corrente acima, I_L , se expressa, em termos dessa nova densidade de corrente “efetiva” como

$$I_L = L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j}.$$

A condição de contorno nesse caso dá

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_S &= \frac{4\pi}{c} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} \Big|_S + \frac{1}{c} \int_{\text{ret}} \frac{da}{L} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \\ &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \Big|_S, \end{aligned}$$

pois

$$\int_{\text{ret}} \frac{da}{L} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \rightarrow 0$$

quando $h \rightarrow 0$. Assim, a componente tangencial do campo intensidade magnética não é contínua quando $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. No entanto, $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário; vamos então reescrever essa condição de contorno em termos apenas da normal $\hat{\mathbf{n}}$. Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e tangente a S , então, $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j})$ deve ser perpendicular a $\hat{\mathbf{t}}$, ou seja,

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) \Big|_S = 0,$$

isto é,

$$\left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) = \alpha \hat{\mathbf{n}} + \beta (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \left(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) \Big|_S &= \beta \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ &= \beta \hat{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Como $\hat{\mathbf{t}}$ é arbitrário e o membro esquerdo dessa equação não é arbitrário, segue que $\beta = 0$ e a condição de contorno fica

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_S &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Como \mathbf{j} é tangente à interface, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$$

e, portanto,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_S = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

como no caso estático. Analogamente, da Lei de Indução de Faraday segue a continuidade da componente tangencial de \mathbf{E} :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_S = \mathbf{0}.$$

O índice de refração de meios dielétricos

Para um meio dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, o índice de refração é definido como a razão entre os valores absolutos da velocidade da luz no vácuo, c , e da velocidade da luz no meio, v . As equações de onda para os campos \mathbf{E} e \mathbf{B} em um dielétrico assim são

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

A velocidade de propagação da luz no dielétrico tem, portanto, módulo

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Assim, o índice de refração é dado por

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{v} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}. \end{aligned}$$

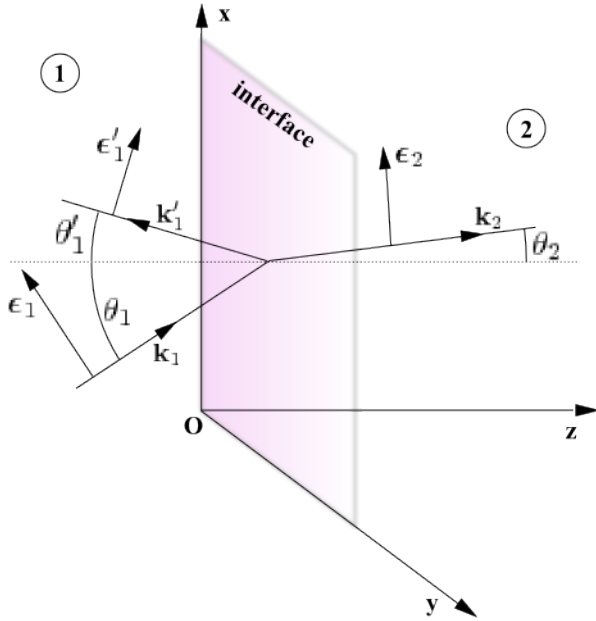
Nesse caso, também temos que o valor absoluto do vetor de onda pode ser escrito como

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \omega \\ &= \frac{\omega}{v} \\ &= \frac{c}{v} \frac{\omega}{c} \\ &= n \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

Reflexão e refração de ondas eletromagnéticas em interfaces planas entre dielétricos

Para ilustrar a utilização das condições de contorno para os campos, tratemos a reflexão e a refração de ondas eletromagnéticas planas por interfaces entre dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos. Para não trivializar a discussão, vamos considerar que o vetor de onda incidente não seja paralelo à interface entre os dois meios dielétricos. Há dois casos linearmente independentes que consideramos abaixo.

Campo elétrico paralelo ao plano de incidência



Nesse caso, escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a interface entre os dois meios dielétricos coincida com o plano xy . Também indexamos os meios dielétricos de modo que o meio 1 tenha $z < 0$ e o meio 2 tenha $z > 0$. Assim, a normal à interface é o versor $\hat{\mathbf{z}}$. O plano de incidência é formado pelo vetor de onda incidente, \mathbf{k}_1 , e pela normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos o plano de incidência como o plano xz . Como a incidência não é normal à interface, temos

$$\mathbf{k}_1 = \hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta_1,$$

onde k_1 é o módulo do vetor \mathbf{k}_1 e θ_1 é o ângulo de incidência, isto é, o ângulo entre o vetor de onda, \mathbf{k}_1 , e a normal à interface, $\hat{\mathbf{z}}$. Escolhemos polarização plana e o campo elétrico incidente paralelo ao plano de incidência, ou seja,

$$\epsilon_1 = (-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01} \sin \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01} \cos \theta_1) \exp(izk_1 \cos \theta_1 + ixk_1 \sin \theta_1 - i\omega t).$$

Por isotropia e homogeneidade dos meios dielétricos, as ondas refletida e refratada têm polarizações planas também paralelas ao plano de incidência e podemos escrever

$$\epsilon'_1 = (\hat{\mathbf{z}}\epsilon'_{01} \sin \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon'_{01} \cos \theta'_1) \exp(-izk_1 \cos \theta'_1 + ixk_1 \sin \theta'_1 - i\omega t),$$

para a onda refletida, com

$$\mathbf{k}'_1 = -\hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta'_1,$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = (-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{02} \sin \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{02} \cos \theta_2) \exp(izk_2 \cos \theta_2 + ixk_2 \sin \theta_2 - i\omega t),$$

para a onda refratada, com

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}}k_2 \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2 \sin \theta_2.$$

Notemos que já escolhemos os campos elétricos de modo a serem ortogonais aos respectivos vetores de onda. Os ângulos θ'_1 e θ_2 são, respectivamente, os ângulos de reflexão e refração.

Utilizando a Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \epsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

e a definição de índice de refração, obtemos

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \frac{c\mathbf{k}_1}{\omega} \times \epsilon_1 \\ &= n_1 \epsilon_{01} (\hat{\mathbf{z}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}} \sin \theta_1) \times (-\hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1 + \hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1) \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \\ &= n_1 \epsilon_{01} (\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} \cos^2 \theta_1 - \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} \sin^2 \theta_1) \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \\ &= \hat{\mathbf{y}} n_1 \epsilon_{01} \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t). \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \beta'_1 &= n_1 \epsilon'_{01} (-\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{x}} \cos \theta'_1 \cos \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{z}} \sin \theta'_1 \sin \theta'_1) \exp(i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \\ &= -\hat{\mathbf{y}} n_1 \epsilon'_{01} \exp(i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \end{aligned}$$

e

$$\beta_2 = \hat{\mathbf{y}} n_2 \epsilon_{02} \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t).$$

Na ausência de cargas e correntes livres, devemos ter

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\epsilon_2 \epsilon_2 - \epsilon_1 \epsilon_1 - \epsilon_1 \epsilon'_1)|_{z=0} = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} 0 &= -\epsilon_2 \epsilon_{02} \sin \theta_2 \exp(ik_2 \sin \theta_2) + \epsilon_1 \epsilon_{01} \sin \theta_1 \exp(ik_1 \sin \theta_1) \\ &\quad - \epsilon_1 \epsilon'_{01} \sin \theta'_1 \exp(ik_1 \sin \theta'_1) \end{aligned}$$

para todo valor de x . Pela independência linear de exponenciais com argumentos distintos, concluímos que

$$k_1 \sin \theta'_1 = k_1 \sin \theta_1,$$

$$k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1$$

e, portanto,

$$-\epsilon_2 \epsilon_{02} \sin \theta_2 + \epsilon_1 \epsilon_{01} \sin \theta_1 - \epsilon_1 \epsilon'_{01} \sin \theta_1 = 0.$$

A equação

$$k_1 \sin \theta'_1 = k_1 \sin \theta_1$$

dá a lei de reflexão, isto é,

$$\theta'_1 = \theta_1.$$

A equação

$$k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1$$

dá a Lei de Refração de Snell-Descartes, ou seja,

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1.$$

Como a componente tangente à interface do campo intensidade magnética é contínua no presente caso, obtemos

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \beta_2 - \frac{1}{\mu_1} \beta_1 - \frac{1}{\mu_1} \beta'_1 \right) \Big|_{z=0} = \mathbf{0}.$$

Para simplificar, vamos supor que os dielétricos sejam tais que $\mu_1 = \mu_2 = 1$, isto é, que os dielétricos sejam materiais não magnéticos. Assim,

$$\hat{\mathbf{z}} \times \hat{\mathbf{y}} (n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon'_{01}) = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon'_{01} = 0.$$

Usando a Lei de Snell-Descartes,

$$k_2 \sin \theta_2 = k_1 \sin \theta_1,$$

vemos que as equações

$$-\varepsilon_2 \epsilon_{02} \sin \theta_2 + \varepsilon_1 \epsilon_{01} \sin \theta_1 - \varepsilon_1 \epsilon'_{01} \sin \theta_1 = 0$$

e

$$n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon'_{01} = 0$$

são linearmente dependentes. Como a continuidade da componente normal do campo indução magnética está automaticamente satisfeita, resta-nos utilizar a continuidade da componente tangencial do campo elétrico:

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon'_1) \Big|_{z=0} = \mathbf{0}.$$

Essa equação nos dá

$$\epsilon_{02} \cos \theta_2 - \epsilon_{01} \cos \theta_1 - \epsilon'_{01} \cos \theta_1 = 0.$$

Resolvendo o sistema de equações

$$n_2 \epsilon_{02} - n_1 \epsilon_{01} + n_1 \epsilon'_{01} = 0$$

e

$$\epsilon_{02} \cos \theta_2 - \epsilon_{01} \cos \theta_1 - \epsilon'_{01} \cos \theta_1 = 0,$$

obtemos

$$\epsilon'_{01} = \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \epsilon_{01}$$

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} \epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

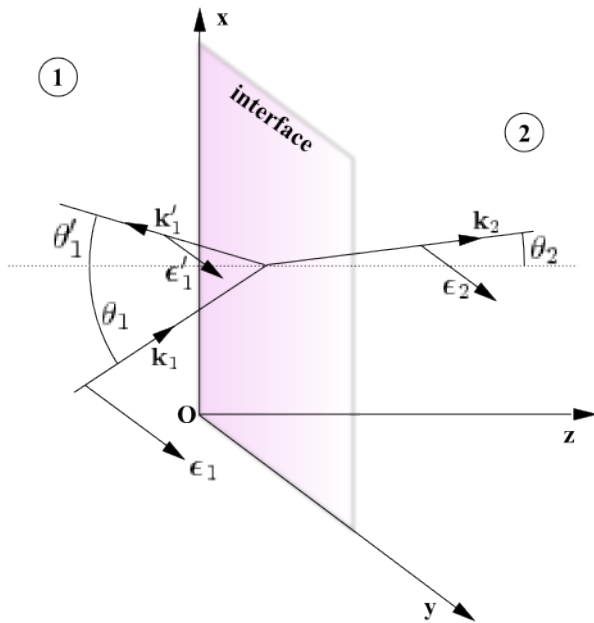
$$\begin{aligned} r_{12p} &= \frac{\epsilon'_{01}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned} t_{12p} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2}, \end{aligned}$$

para transmissão.

Campo elétrico perpendicular ao plano de incidência



Nesse caso, tomamos

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_1 &= \hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta_1, \\ \mathbf{k}'_1 &= -\hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta_1, \\ \mathbf{k}_2 &= \hat{\mathbf{z}}k_2 \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2 \sin \theta_2,\end{aligned}$$

como no caso anterior, mas escolhemos os campos elétricos polarizados ao longo do eixo y , isto é,

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01} \exp(izk_1 \cos \theta_1 + ixk_1 \sin \theta_1 - i\omega t), \\ \epsilon'_1 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon'_{01} \exp(-izk_1 \cos \theta_1 + ixk_1 \sin \theta_1 - i\omega t), \\ \epsilon_2 &= \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{02} \exp(izk_2 \cos \theta_2 + ixk_2 \sin \theta_2 - i\omega t),\end{aligned}$$

onde já estamos adiantando que vale a lei de reflexão. Assim, usando a Lei de Indução de Faraday,

$$\nabla \times \epsilon = -\frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{c\mathbf{k}_1}{\omega} \times \epsilon_1 \\ &= n_1 (\hat{\mathbf{z}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}} \sin \theta_1) \times \hat{\mathbf{y}}\epsilon_{01} \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t) \\ &= n_1 (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1) \epsilon_{01} \exp(i\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t),\end{aligned}$$

$$\beta'_1 = n_1 (\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_1) \epsilon'_{01} \exp(i\mathbf{k}'_1 \cdot \mathbf{r} - i\omega t)$$

e

$$\beta_2 = n_1 (-\hat{\mathbf{x}} \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{z}} \sin \theta_2) \epsilon_{02} \exp(i\mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{r} - i\omega t).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico é contínua na interface, temos

$$\hat{\mathbf{z}} \times (\epsilon_2 - \epsilon_1 - \epsilon'_1)|_{z=0} = \mathbf{0},$$

ou seja,

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon'_{01} = 0.$$

Também impomos que a componente tangencial do campo intensidade magnética seja contínua, obtendo

$$\hat{\mathbf{z}} \times \left(\frac{1}{\mu_2} \beta_2 - \frac{1}{\mu_1} \beta_1 - \frac{1}{\mu_1} \beta'_1 \right) \Big|_{z=0} = \mathbf{0},$$

isto é, supondo meios não magnéticos, ou seja, $\mu_1 = \mu_2 = 1$, vem

$$-n_2 \cos \theta_2 \epsilon_{02} + n_1 \cos \theta_1 \epsilon_{01} - n_1 \cos \theta_1 \epsilon'_{01} = 0.$$

Agora resolvemos as equações

$$\epsilon_{02} - \epsilon_{01} - \epsilon'_{01} = 0$$

e

$$-n_2 \cos \theta_2 \epsilon_{02} + n_1 \cos \theta_1 \epsilon_{01} - n_1 \cos \theta_1 \epsilon'_{01} = 0$$

e concluímos que

$$\epsilon'_{01} = \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \epsilon_{01}$$

e

$$\epsilon_{02} = \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} \epsilon_{01}.$$

Os coeficientes de Fresnel para esse caso são definidos como

$$\begin{aligned} r_{12s} &= \frac{\epsilon'_{01}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \end{aligned}$$

para reflexão, e

$$\begin{aligned} t_{12s} &= \frac{\epsilon_{02}}{\epsilon_{01}} \\ &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2}, \end{aligned}$$

para transmissão.

Reflectância e transmitância

Os vetores de Poynting médios (no CGS) para as diversas ondas do exemplo acima são dados por

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S}_1 \rangle &= \frac{c}{8\pi c\mu} \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon}_1 \times \boldsymbol{\beta}_1^*) \\ &= \frac{n_1}{8\pi\mu_1} \hat{\mathbf{z}} |\epsilon_{01}|^2, \end{aligned}$$

$$\langle \mathbf{S}'_1 \rangle = -\frac{n_1}{8\pi\mu_1} \hat{\mathbf{z}} |\epsilon'_{01}|^2$$

e

$$\langle \mathbf{S}_2 \rangle = \frac{n_2}{8\pi\mu_2} \hat{\mathbf{z}} |\epsilon_{02}|^2.$$

No caso em que temos incidência normal à interface, cuja normal nesse caso é $\hat{\mathbf{z}}$, a reflectância e a transmitância são definidas, respectivamente, por

$$R = \frac{|\hat{\mathbf{z}} \cdot \langle \mathbf{S}'_1 \rangle|}{|\hat{\mathbf{z}} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle|}$$

e

$$T = \left| \frac{\hat{\mathbf{z}} \cdot \langle \mathbf{S}_2 \rangle}{\hat{\mathbf{z}} \cdot \langle \mathbf{S}_1 \rangle} \right|,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} R &= \frac{|\epsilon'_{01}|^2}{|\epsilon_{01}|^2} \\ &= r_{12}^2 \\ &= \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} T &= \frac{\mu_1 n_2 |\epsilon_{02}|^2}{\mu_2 n_1 |\epsilon_{01}|^2} \\ &= \frac{\mu_0 n_2}{\mu_0 n_1} t_{12}^2 \\ &= \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2}. \end{aligned}$$

Assim, verificamos, neste caso particular, que a reflectância somada à transmitância é igual à unidade:

$$\begin{aligned} R + T &= \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 + \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Reflexão interna total e polarização por reflexão

Ângulo crítico

Agora que temos os resultados para os coeficientes de Fresnell no caso da reflexão e transmissão de ondas planas na interface entre dois meios dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos, podemos analisar o que acontece quando $n_1 > n_2$. Nesse caso, da Lei de Snell-Descartes, temos

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_1}. \end{aligned}$$

Como temos liberdade de escolher a direção de propagação da onda incidente, podemos tomar $\theta_1 > \theta_c$, onde θ_c é o chamado ângulo crítico, definido pela expressão

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2} \right)^2 \sin^2 \theta_c = 0,$$

ou seja,

$$\sin \theta_c = \frac{n_2}{n_1}.$$

Como estamos supondo $n_1 > n_2$, no caso em que $\theta_1 > \theta_c$ temos

$$1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_1 < 1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_c,$$

ou seja,

$$\cos^2 \theta_2 < 0.$$

Como

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}}k_2 \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2 \sin \theta_2,$$

segue que a solução para a onda transmitida adquire uma parte imaginária no vetor de onda, ao longo da direção $\hat{\mathbf{z}}$. Isso implica em uma onda transmitida que se propaga apenas ao longo do eixo x , mas evanesce ao longo do eixo z .

Ângulo de Brewster

Considerando $n_2 > n_1$, podemos perguntar: quando a luz é refletida de uma superfície, uma de suas componentes de polarização pode ser suprimida para algum ângulo de incidência? Para responder a essa pergunta, primeiro consideramos impor que

$$r_{12s} = 0,$$

ou seja,

$$\frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = 0.$$

Assim,

$$\cos \theta_1 = \frac{n_2}{n_1} \cos \theta_2$$

e, portanto,

$$1 - \sin^2 \theta_1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \sin^2 \theta_2.$$

Usando a Lei de Snell-Descartes, obtemos

$$1 = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2.$$

Como estamos supondo $n_2 > n_1$, vemos que a reflexão da onda com polarização do campo elétrico perpendicular ao plano de incidência não pode ser eliminada com a escolha de um ângulo de incidência especial.

Já para a polarização do campo elétrico paralela ao plano de incidência, vemos que quando a incidência ocorre com o ângulo de Brewster, definido por

$$\tan \theta_B = \frac{n_2}{n_1},$$

temos

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \sin^2 \theta_2} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \sin^2 \theta_B} \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \cos \theta_2 &= \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2 \theta_B} \\ &= \sqrt{1 - \cos^2 \theta_B} \\ &= \sin \theta_B. \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} r_{12p} &= \frac{n_1 \cos \theta_2 - n_2 \cos \theta_B}{n_2 \cos \theta_B + n_1 \cos \theta_2} \\ &= \frac{n_1 \sin \theta_B - n_2 \cos \theta_B}{n_2 \cos \theta_B + n_1 \cos \theta_2}. \end{aligned}$$

Mas, da definição do ângulo de Brewster, acima, obtemos

$$\sin^2 \theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 \cos^2 \theta_B,$$

isto é,

$$\sin^2 \theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 (1 - \sin^2 \theta_B),$$

ou seja,

$$\left[1 + \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2\right] \sin^2 \theta_B = \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2,$$

ou ainda,

$$\sin \theta_B = \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Também obtemos

$$\cos \theta_B = \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}r_{12p} &= \frac{n_1 \sin \theta_B - n_2 \cos \theta_B}{n_2 \cos \theta_B + n_1 \cos \theta_2} \\&= \frac{1}{n_2 \cos \theta_B + n_1 \cos \theta_2} \left(n_1 \frac{n_2}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} - n_2 \frac{n_1}{\sqrt{n_1^2 + n_2^2}} \right) \\&= 0.\end{aligned}$$

Assim, a incidência de luz não polarizada, fazendo o ângulo de Brewster com a normal à interface entre os meios dielétricos, resulta em luz refletida polarizada com o campo elétrico perpendicular ao plano de incidência.

O modelo harmônico de Drude & Lorentz

O modelo de Drude & Lorentz para a matéria é uma simplificação. Supomos um núcleo fixo e um elétron preso harmonicamente ao núcleo. O modelo de Drude trata de um gás de elétrons na banda de condução, enquanto que o de Lorentz trata o caso de elétrons harmonicamente ligados aos seus respectivos átomos. Como a presente formulação pode descrever ambos os casos, é chamada de modelo de Drude & Lorentz. Além disso, também supomos que o elétron sofra uma força de fricção proporcional à sua velocidade. De acordo com a Segunda Lei de Newton, na presença de um campo eletromagnético a derivada temporal do momentum linear do elétron é igual à força de Lorentz, somada à força harmônica que prende o elétron ao núcleo e à força dissipativa proporcional à velocidade do elétron. Assim, a equação de movimento do elétron, considerando um movimento não relativístico, é dada por

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -e \mathbf{E} - \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} - m\gamma \frac{d\mathbf{r}}{dt} - m\omega_0^2 \mathbf{r},$$

onde a carga eletrônica é dada por $-e < 0$, γ é uma constante positiva e ω_0 é a frequência natural de oscilação do elétron em torno do núcleo, de acordo com o presente modelo. Como essa equação de movimento é linear em \mathbf{r} , podemos considerar sua versão complexa, escrevendo

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -e\epsilon - m\gamma \frac{d\mathbf{R}}{dt} - m\omega_0^2 \mathbf{R},$$

onde

$$\mathbf{r} = \text{Re}(\mathbf{R})$$

e

$$\mathbf{E} = \text{Re}(\epsilon).$$

Aqui, desprezamos a força magnética por considerarmos o valor absoluto da velocidade do elétron muito menor do que o módulo da velocidade da luz. Em outras palavras, se compararmos as magnitudes das forças magnética e elétrica, teremos

$$\frac{\left| \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right|}{|e\mathbf{E}|} \sim \frac{1}{c} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|}$$

e, como para uma onda plana, por exemplo,

$$\epsilon = -\frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} \hat{\mathbf{k}} \times \beta,$$

segue que, no vácuo,

$$\epsilon = -\hat{\mathbf{k}} \times \beta,$$

pois

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \beta &= i\mathbf{k} \cdot \beta \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} |\epsilon| &= \left| \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\beta} \right| \\ &= \left| \hat{\mathbf{k}} \right| |\boldsymbol{\beta}| \\ &= |\boldsymbol{\beta}|. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\frac{|\mathbf{B}|}{|\mathbf{E}|} \sim 1$$

e concluímos que

$$\frac{\left| \frac{e}{c} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{B} \right|}{|e\mathbf{E}|} \sim \frac{1}{c} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \ll 1$$

para um elétron não relativístico.

Agora suponhamos que uma onda plana monocromática incida sobre o átomo. A onda pode ser representada por seu campo elétrico complexo como

$$\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{E}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t).$$

Para frequências ópticas, da ordem de 10^{15} Hz, e para $r \approx 1\text{\AA}$,

$$kr = \frac{\omega}{c} r \sim 2\pi \frac{10^{15}}{3 \times 10^8} \times 10^{-10} \ll 2\pi.$$

Logo,

$$\boldsymbol{\epsilon} \approx \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)$$

é uma boa aproximação para frequências ópticas. Com essa aproximação e ignorando qualquer efeito transiente, um ansatz para a equação

$$m \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = -e\boldsymbol{\epsilon} - m\gamma \frac{d\mathbf{R}}{dt} - m\omega_0^2 \mathbf{R}$$

pode ser escrito como

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 \exp(-i\omega t)$$

e, substituindo, dá

$$-m\omega^2 \mathbf{R}_0 = -e\mathbf{E}_0 + im\gamma\omega \mathbf{R}_0 - m\omega_0^2 \mathbf{R}_0,$$

ou seja,

$$\mathbf{R}_0 = \frac{e\mathbf{E}_0}{m(\omega^2 - \omega_0^2 + i\gamma\omega)}.$$

Com isso, a solução fica

$$\mathbf{R} = \frac{-e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}.$$

O momento dipolar elétrico do elétron é dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= -e\mathbf{r} \\ &= -e\text{Re}(\mathbf{R}).\end{aligned}$$

Com a solução obtida acima, temos

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= -e\text{Re}\left(\frac{-e\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}\right) \\ &= \text{Re}\left(\frac{e^2\mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{m(\omega_0^2 - \omega^2 - i\gamma\omega)}\right).\end{aligned}$$

Se, ao invés de um átomo com um só elétron, o material for feito de moléculas com mais do que um elétron, então, se houver n_k elétrons do tipo k por molécula, o momento dipolar elétrico induzido na molécula ficará

$$\mathbf{p} = \text{Re}\left(\sum_k \frac{n_k e^2 \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)}\right).$$

Os elétrons, claramente, são todos iguais individualmente. Referimo-nos acima a elétrons do tipo k para indicar que esses elétrons têm, na molécula, a mesma frequência ω_k e o mesmo coeficiente de dissipação γ_k . Supondo que haja N moléculas por unidade de volume, a polarização do meio pode ser escrita como

$$\mathbf{P} = \text{Re}\left(\sum_k \frac{N n_k e^2 \mathbf{E}_0 \exp(-i\omega t)}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)}\right).$$

Notemos que essa polarização não é proporcional ao campo elétrico, diferentemente do caso eletrostático. Há uma defasagem na polarização com relação ao campo elétrico aplicado, implicando a existência de um atraso para a indução de polarização no meio material. Podemos escrever

$$\begin{aligned}\text{Re}\left(\frac{\exp(-i\omega t)}{\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega}\right) &= \text{Re}\left\{\frac{[\cos(\omega t) - i\sin(\omega t)](\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega)}{(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)(\omega_k^2 - \omega^2 + i\gamma_k \omega)}\right\} \\ &= \frac{(\omega_k^2 - \omega^2) \cos(\omega t) + \gamma_k \omega \sin(\omega t)}{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k \omega)^2} \\ &= \frac{\cos \varphi_k \cos(\omega t) + \sin \varphi_k \sin(\omega t)}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k \omega)^2}},\end{aligned}$$

onde definimos

$$\cos \varphi_k = \frac{\omega_k^2 - \omega^2}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k \omega)^2}}$$

e

$$\text{sen}\varphi_k = \frac{\gamma_k \omega}{\sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k \omega)^2}}.$$

Assim,

$$\mathbf{P} = \sum_k \frac{N n_k e^2 \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \varphi_k)}{m \sqrt{(\omega_k^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_k \omega)^2}},$$

supondo que $\mathbf{E}_0 \in \mathbb{R}^3$.

A dispersão normal e a dispersão anômala

Quando estudamos o modelo de Drude-Lorentz, vimos que a polarização não é proporcional ao campo elétrico, nesse modelo. No entanto, podemos definir a polarização complexa, \mathcal{P} , que é proporcional ao campo elétrico complexo:

$$\mathcal{P} \equiv \left[\sum_k \frac{N n_k e^2}{m (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)} \right] \mathbf{E}_0 \exp(-i \omega t),$$

onde, analogamente ao campo elétrico, a polarização física é dada pela parte real da polarização complexa:

$$\mathbf{P} = \text{Re}(\mathcal{P}).$$

Continuando a analogia com o caso eletrostático, podemos definir uma susceptibilidade elétrica complexa como

$$\chi_c = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)}.$$

Notemos, no entanto, que não podemos afirmar que a parte real dessa quantidade dá a susceptibilidade física do meio, pois, como vimos, a polarização física não é proporcional ao campo elétrico físico.

Com essas definições, também faz sentido falarmos de um campo deslocamento complexo, definido por

$$\begin{aligned} \mathcal{D} &= \epsilon + 4\pi \mathcal{P} \\ &= (1 + 4\pi \chi_c) \epsilon \\ &= K_c \epsilon, \end{aligned}$$

onde também definimos a constante dielétrica complexa,

$$K_c = 1 + 4\pi \chi_c. \quad (1)$$

Supondo que o meio não seja magnético, podemos escrever a Lei de Ampère & Maxwell complexa como

$$\nabla \times \beta = \frac{K_c}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t}.$$

Essa equação e as outras equações de Maxwell para os campos complexos fornecem a equação de onda

$$\nabla^2 \epsilon - \frac{K_c}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Essa é a equação de onda para o campo elétrico complexo macroscópico que se propaga no meio dispersivo. Uma onda plana propagando-se ao longo do eixo z tem o campo elétrico dado, por exemplo, por

$$\epsilon = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp(ikz - i\omega t), \quad (2)$$

onde, em virtude da equação de onda acima,

$$\begin{aligned} k^2 &= K_c \frac{\omega^2}{c^2} \\ &= (1 + 4\pi\chi_c) \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Logo, essa é uma onda evanescente, pois k é um número complexo. Sendo assim, podemos escrever

$$\epsilon = \hat{\mathbf{x}} E_0 \exp(-k_i z) \exp(ik_r z - i\omega t),$$

onde

$$\begin{aligned} k_r &= \text{Re}(k), \\ k_i &= \text{Im}(k). \end{aligned}$$

Agora fica fácil constatar que a parte imaginária de k está relacionada à absorção da energia da luz incidente pelo meio e a parte real de k está relacionada à dispersão da luz no meio. Podemos definir o índice de refração, portanto, como

$$n = \frac{c}{\omega} k_r,$$

já que a velocidade de propagação da onda plana evanescente acima é dada por ω/k_r .

Para calcularmos o índice de refração, podemos escrever

$$\begin{aligned} k^2 &= k_r^2 - k_i^2 + 2ik_r k_i \\ &= (1 + 4\pi\chi_c) \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Assim, devemos resolver o sistema de equações:

$$\begin{aligned} k_r^2 - k_i^2 &= [1 + 4\pi\text{Re}(\chi_c)] \frac{\omega^2}{c^2}, \\ 2k_r k_i &= 4\pi\text{Im}(\chi_c) \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Para simplificar nossa análise e, ao mesmo tempo, manter a física do problema intacta, suponhamos que estejamos bem próximos da primeira ressonância na expressão

$$\chi_c = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)},$$

isto é,

$$\omega \approx \omega_1.$$

Nesse caso, mantendo apenas o termo mais importante, podemos escrever

$$\begin{aligned}\chi_c &\approx \frac{Nn_1e^2}{m(\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1\omega)} \\ &= a + bi,\end{aligned}\tag{4}$$

com

$$a = \frac{Nn_1e^2(\omega_1^2 - \omega^2)}{m[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2]}\tag{5}$$

e

$$b = \frac{Nn_1e^2\gamma_1\omega}{m[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1\omega)^2]}.\tag{6}$$

Notemos que

$$a = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{\gamma_1\omega}b.$$

Para tornar essas expressões ainda mais simples, podemos utilizar a chamada frequência de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Nn_1e^2}{m}.\tag{7}$$

Resolvamos agora:

$$\begin{aligned}k_r^2 - k_i^2 &= (1 + 4\pi a) \frac{\omega^2}{c^2}, \\ 2k_r k_i &= 4\pi b \frac{\omega^2}{c^2}.\end{aligned}$$

Temos

$$k_r^2 - \frac{1}{4k_r^2} \left(4\pi b \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 = (1 + 4\pi a) \frac{\omega^2}{c^2},$$

ou seja,

$$k_r^4 - (1 + 4\pi a) \frac{\omega^2}{c^2} k_r^2 - \frac{1}{4} \left(4\pi b \frac{\omega^2}{c^2}\right)^2 = 0,$$

cujas soluções são

$$k_r^2 = (1 + 4\pi a) \frac{\omega^2}{2c^2} \pm \frac{\omega^2}{2c^2} \sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}.$$

Como $k_r \in \mathbb{R}$, a solução aceitável é

$$k_r^2 = (1 + 4\pi a) \frac{\omega^2}{2c^2} + \frac{\omega^2}{2c^2} \sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2},$$

isto é,

$$k_r = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{1 + 4\pi a + \sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}}{2}}.$$

Como

$$n = \frac{c}{\omega} k_r,$$

temos

$$n = \sqrt{\frac{1 + 4\pi a + \sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}}{2}}. \quad (8)$$

Leitura: O índice de refração do sódio

A luz, ao passar através de um meio material transparente, como um gás, por exemplo, sofre dispersão pelas moléculas do meio. Sempre há, no entanto, além da dispersão, uma certa absorção da luz pelo meio. A dispersão faz com que diferentes cores de luz tenham diferentes velocidades de propagação no meio e, portanto, o índice de refração do meio é uma função da frequência da luz. Como vimos na seção, A dispersão normal e a dispersão anômala, o índice de refração no modelo de Drude-Lorentz foi calculado como sendo

$$n = \sqrt{\frac{1 + 4\pi a + \sqrt{(1 + 4\pi a)^2 + (4\pi b)^2}}{2}},$$

onde

$$b = \frac{N n_1 e^2 \gamma_1 \omega}{m \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2 \right]}$$

e

$$a = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{\gamma_1 \omega} b.$$

Aqui vou apenas fazer um exemplo do cálculo numérico do índice de refração como função da frequência, em torno da frequência de ressonância, ω_1 . Para isso, vou considerar um gás de sódio, como aquele dentro de uma lâmpada de sódio. Em uma lâmpada de sódio de baixa pressão, encontrei que a pressão parcial do sódio é de 0,13Pa a 1,3Pa (veja o link: http://www.daviddarling.info/encyclopedia/L/AE_low-pressure_sodium_lamp.html). Agora,

$$1\text{Pa} = 9,8692 \times 10^{-6} \text{atm}.$$

Então, tomando a pressão mais alta, temos:

$$\begin{aligned} 1,3\text{Pa} &= 1,3 \times 9,8692 \times 10^{-6} \text{atm} \\ &= 12,82996 \times 10^{-6} \text{atm} \approx 1,3 \times 10^{-5} \text{atm}. \end{aligned}$$

Se considerarmos que, nessa baixa pressão, o sódio é um gás ideal, podemos escrever

$$P = Nk_B T,$$

com N sendo o número de átomos por unidade de volume, ou seja,

$$N = \frac{P}{k_B T}.$$

Vou usar, então, as unidades CGS e escrever

$$k_B = 1,38 \times 10^{-16} \text{erg/K}.$$

Também vou utilizar que

$$1 \text{atm} = 1012950 \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2}.$$

Então, podemos calcular:

$$N = \frac{P}{k_B T} = \frac{1,3 \times 10^{-5} \times 1012950 \text{ átomos}}{555,55 \times 1,38 \times 10^{-16} \text{ cm}^3} \approx 1,7 \times 10^{14} \frac{\text{átomos}}{\text{cm}^3}.$$

A carga do elétron, em módulo, é dada por

$$e = 4,8 \times 10^{-10} \text{statC}$$

e sua massa é dada por

$$m = 9,1 \times 10^{-28} \text{g}.$$

Para o caso do sódio, há $n_1 = 1$ elétron ativo para cada átomo e, portanto,

$$\begin{aligned} b &= \frac{N n_1 e^2 \gamma_1 \omega}{m \left[(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2 \right]} \\ &= \left[\frac{1,7 \times 10^{14} \times (4,8 \times 10^{-10})^2 (\text{statC})^2}{9,1 \times 10^{-28} \text{ g} \cdot \text{cm}^3} \right] \frac{\gamma_1 \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2}. \end{aligned}$$

Mas,

$$1 (\text{statC})^2 = \text{erg} \cdot \text{cm} = \text{dyn} \cdot \text{cm}^2 = \text{g} \cdot \frac{\text{cm}}{\text{s}^2} \cdot \text{cm}^2 = \frac{\text{g} \cdot \text{cm}^3}{\text{s}^2}.$$

Logo,

$$b = \left[\frac{1,7 \times 10^{14} \times (4,8 \times 10^{-10})^2}{9,1 \times 10^{-28}} \text{s}^{-2} \right] \frac{\gamma_1 \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2},$$

isto é,

$$b = (4,3 \times 10^{22} \text{s}^{-2}) \frac{\gamma_1 \omega}{(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2}.$$

Vou usar, aqui, a frequência da linha D_1 do sódio, isto é,

$$\omega_1 = 2\pi \times (508,333\text{THz}) \approx 3,2 \times 10^{15}\text{s}^{-1}.$$

O tempo de vida do estado excitado, $3^2P_{1/2}$, é dado por

$$\tau_1 = 16,3\text{ns}$$

e, portanto, temos

$$\gamma_1 = \frac{1}{\tau_1} = \frac{1}{16,3 \times 10^{-9}}\text{s}^{-1} = 6,1 \times 10^7\text{s}^{-1}.$$

Vou considerar a forma funcional do índice de refração para a frequência ω próxima da ressonância, isto é,

$$\omega \approx \omega_1.$$

Então, para simplificar a fórmula para b , seja

$$\Delta x = \frac{\omega - \omega_1}{\gamma_1}$$

e, portanto,

$$\omega = \omega_1 + \gamma_1 \Delta x.$$

Assim, o denominador da expressão para b pode ser escrito em termos de Δx como

$$(\omega_1^2 - \omega^2)^2 + (\gamma_1 \omega)^2 = (\omega_1 + \omega)^2 (\omega_1 - \omega)^2 + (\gamma_1 \omega)^2 = (2\omega_1 + \gamma_1 \Delta x)^2 (\gamma_1 \Delta x)^2 + (\gamma_1 \omega_1 + \gamma_1^2 \Delta x)^2.$$

Então,

$$b = (4,3 \times 10^{22}\text{s}^{-2}) \frac{\gamma_1 \omega_1 + \gamma_1^2 \Delta x}{(2\omega_1 + \gamma_1 \Delta x)^2 (\gamma_1 \Delta x)^2 + (\gamma_1 \omega_1 + \gamma_1^2 \Delta x)^2},$$

isto é,

$$b = (4,3 \times 10^{22}\text{s}^{-2}) \frac{\gamma_1 \omega_1}{(\gamma_1 \omega_1)^2} \frac{1 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}}{\left(2 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(1 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}\right)^2},$$

ou seja,

$$b = \frac{4,3 \times 10^{22}\text{s}^{-2}}{\gamma_1 \omega_1} \frac{1 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}}{\left(2 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}\right)^2 (\Delta x)^2 + \left(1 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}\right)^2}.$$

Colocando os números acima, obtemos

$$\gamma_1 \omega_1 = (6,1 \times 10^7\text{s}^{-1}) (3,2 \times 10^{15}\text{s}^{-1}) = 2,0 \times 10^{23}\text{s}^{-2}$$

e

$$\frac{\gamma_1}{\omega_1} = \frac{6,1 \times 10^7 \text{s}^{-1}}{3,2 \times 10^{15} \text{s}^{-1}} = 1,9 \times 10^{-8}.$$

Com esses valores, podemos reescrever a expressão de b como

$$b = \frac{4,3 \times 10^{22} \text{s}^{-2}}{2,0 \times 10^{23} \text{s}^{-2}} \frac{1 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x}{(2 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x)^2 (\Delta x)^2 + (1 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x)^2},$$

isto é,

$$b = 0,215 \frac{1 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x}{(2 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x)^2 (\Delta x)^2 + (1 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x)^2}.$$

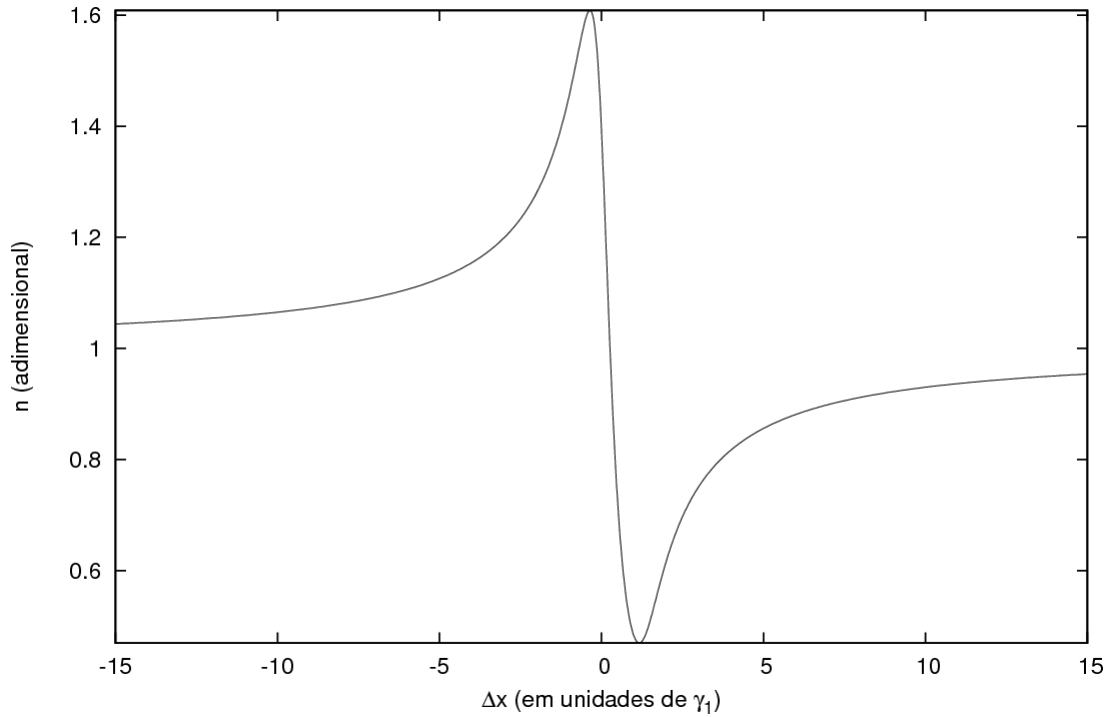
Então,

$$a = \frac{(\omega_1^2 - \omega^2)}{\gamma_1 \omega} b = -\frac{(2\omega_1 + \gamma_1 \Delta x) \gamma_1 \Delta x}{\gamma_1 (\omega_1 + \gamma_1 \Delta x)} b = -\frac{\left(2 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}\right) \Delta x}{1 + \frac{\gamma_1 \Delta x}{\omega_1}} b,$$

isto é,

$$a = -\frac{(2 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x) \Delta x}{1 + 1,9 \times 10^{-8} \Delta x} b.$$

Fazendo um gráfico do índice de refração com esses números, obtive o seguinte resultado:



A Condutividade Elétrica

No modelo de dispersão da luz em meios materiais de Drude & Lorentz, calculamos a susceptibilidade elétrica complexa, considerando a resposta dos n_k elétrons do tipo k por molécula, em um meio com N moléculas por unidade de volume, onde a constante de amortecimento para os elétrons do tipo k é γ_k e a frequência de ressonância para esse tipo é escrita ω_k , na presença de uma onda eletromagnética monocromática de frequência ω . O resultado escreve-se

$$\chi_c(\omega) = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)},$$

onde a soma é sobre os diferentes tipos de elétrons em cada molécula. Agora, vamos supor que haja um certo número N_0 de elétrons livres por unidade de volume do meio material. Também vamos supor que esses elétrons livres estejam distribuídos uniformemente pelo material e, portanto, para cada molécula, haverá

$$n_0 = \frac{N_0}{N}$$

elétrons livres, já que N é o número de moléculas por unidade de volume. Dessa forma, para incluirmos esses elétrons livres no modelo, vamos modificar a susceptibilidade complexa acima de forma a termos

$$\begin{aligned} \chi'_c(\omega) &= \sum_k \frac{N n_k e^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)} + \frac{N n_0 e^2}{m(-\omega^2 - i\gamma_0 \omega)} \\ &= \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega(\omega + i\gamma_0)}, \end{aligned}$$

onde, para elétrons livres,

$$\omega_0 = 0$$

e a constante de amortecimento é escrita como γ_0 . Para um meio não magnético, isto é, com

$$\mu = 1,$$

a Lei de Ampère & Maxwell é escrita como

$$\nabla \times \boldsymbol{\beta} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t},$$

onde, segundo o modelo que estamos adotando, o campo deslocamento elétrico complexo é dado por

$$\mathcal{D} = \epsilon + 4\pi \mathcal{P},$$

com

$$\mathcal{P} = \chi'_c(\omega) \epsilon.$$

Notemos também que \mathbf{J} indica a presença de cargas livres em movimento que estejam no material. No entanto, essa densidade de corrente teria que ser justificada justamente pela quantidade de elétrons N_0 por unidade de volume que estamos modelando microscopicamente. Com isso, vamos usar, ao invés da equação acima, a equação

$$\nabla \times \boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t}$$

e ver se nossos elétrons livres deste modelo microscópico introduz uma densidade de corrente na equação. Assim,

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{1}{c} [1 + 4\pi\chi'_c(\omega)] \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\
&= -i\frac{\omega}{c} \left[1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{4\pi N n_0 e^2}{m\omega(\omega + i\gamma_0)} \right] \boldsymbol{\epsilon} \\
&= i\frac{\omega}{c} \frac{4\pi N n_0 e^2}{m\omega(\omega + i\gamma_0)} \boldsymbol{\epsilon} - i\frac{\omega}{c} [1 + 4\pi\chi_c(\omega)] \boldsymbol{\epsilon} \\
&= \frac{4\pi}{c} \left[\frac{N n_0 e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)} \boldsymbol{\epsilon} \right] + \frac{1}{c} [1 + 4\pi\chi_c(\omega)] \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Concluimos, portanto, que quando há elétrons do material que podem se mover livremente, a densidade de corrente deste modelo é proporcional ao campo elétrico aplicado e a constante de proporcionalidade é dada por

$$\sigma = \frac{N n_0 e^2}{m(\gamma_0 - i\omega)}.$$

Esse tipo de material é chamado ôhmico e a densidade de corrente produzida pela presença do campo elétrico é dada pela Lei de Ohm:

$$\mathbf{J}_{\text{Ohm}} = \sigma \boldsymbol{\epsilon}.$$

No modelo que estamos considerando, a condutividade elétrica, para frequências suficientemente baixas, fica

$$\sigma \approx \frac{N n_0 e^2}{m\gamma_0},$$

essencialmente real e, portanto, em fase com o campo elétrico. Para o cobre, por exemplo, com uma condutividade da ordem de $5.9 \times 10^7 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ e 8×10^{28} átomos/ m^3 , obtemos $\gamma_0/n_0 \approx 4 \times 10^{13} \text{s}^{-1}$. Supondo apenas um elétron livre por molécula, essa pequena análise mostra que a condutividade pode ser considerada essencialmente real para frequências abaixo de cerca de 10^{11}s^{-1} (microondas, por exemplo).

A densidade e o fluxo de energia

Como já é corriqueiro em nossas discussões eletromagnéticas, vamos utilizar a notação

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t), \\
\boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega_k t),
\end{aligned}$$

onde

$$\omega_k \equiv \frac{kc}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathbf{E} &= \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon}), \\
\mathbf{B} &= \text{Re}(\boldsymbol{\beta}).
\end{aligned}$$

Assim, as equações de Maxwell na ausência de cargas e correntes livres dão

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} &= 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 = 0, \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\beta} &= 0 \Rightarrow \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\beta}_0 = 0, \\ \nabla \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \boldsymbol{\epsilon}_0 = \frac{\omega_k}{c} \boldsymbol{\beta}_0, \\ \nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \Rightarrow \mathbf{k} \times \boldsymbol{\beta}_0 = -\mu \varepsilon \frac{\omega_k}{c} \boldsymbol{\epsilon}_0.\end{aligned}$$

Em resumo,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\epsilon}_0 &= -\frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\beta}_0, \\ \boldsymbol{\beta}_0 &= \sqrt{\mu \varepsilon} \hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0.\end{aligned}$$

A densidade de energia é dada por

$$\begin{aligned}u &= \frac{1}{8\pi} (\mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) \\ &= \frac{\varepsilon}{8\pi} [\text{Re}(\boldsymbol{\epsilon})] \cdot [\text{Re}(\boldsymbol{\epsilon})] + \frac{1}{8\pi\mu} [\text{Re}(\boldsymbol{\beta})] \cdot [\text{Re}(\boldsymbol{\beta})].\end{aligned}$$

O fluxo de energia é dado pelo vetor de Poynting:

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{H} \\ &= \frac{c}{4\pi\mu} [\text{Re}(\boldsymbol{\epsilon})] \times [\text{Re}(\boldsymbol{\beta})].\end{aligned}$$

Se tomamos $[\text{Re}(\boldsymbol{\epsilon})] \times [\text{Re}(\boldsymbol{\beta})]$, por exemplo, obtemos o seguinte:

$$\begin{aligned}[\text{Re}(\boldsymbol{\epsilon})] \times [\text{Re}(\boldsymbol{\beta})] &= \frac{1}{4} (\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^*) \times (\boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta}^*) \\ &= \frac{1}{4} \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^* + \frac{1}{4} \boldsymbol{\epsilon}^* \times \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\epsilon}^* \times \boldsymbol{\beta}^* \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*) + \frac{1}{4} \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta} + \frac{1}{4} \boldsymbol{\epsilon}^* \times \boldsymbol{\beta}^*.\end{aligned}$$

Como \mathbf{k} e ω_k são quantidades reais, então

$$(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*) = (\boldsymbol{\epsilon}_0 \times \boldsymbol{\beta}_0^*)$$

não depende do tempo e não depende do espaço. A média temporal dos termos oscilantes restantes dá zero. Por exemplo,

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta} \rangle &\equiv (\boldsymbol{\epsilon}_0 \times \boldsymbol{\beta}_0) \exp(2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \frac{\omega_k}{2\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega_k}} dt \exp(-2i\omega_k t) \\ &= \mathbf{0}.\end{aligned}$$

Assim,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*).$$

Procedendo similarmente para o caso da densidade de energia, obtemos a média temporal

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{16\pi\mu} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^*.$$

Como \mathbf{k} e ω_k são quantidades reais, então

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* &= \mu\varepsilon \left(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0 \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0^* \right) \\ &= \mu\varepsilon \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\boldsymbol{\epsilon}_0 \times \left(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0^* \right) \right] \\ &= \mu\varepsilon \hat{\mathbf{k}} \cdot \left[\hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* - \boldsymbol{\epsilon}_0^* \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 \right] \\ &= \mu\varepsilon \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*, \\ \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^* &= \sqrt{\mu\varepsilon} \boldsymbol{\epsilon}_0 \times \left(\hat{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0^* \right) \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon} \left(\hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* - \boldsymbol{\epsilon}_0^* \hat{\mathbf{k}} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0 \right) \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*. \end{aligned}$$

Resumindo,

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{1}{16\pi\mu} \mu\varepsilon \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* = \frac{\varepsilon}{8\pi} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*$$

e

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} \sqrt{\mu\varepsilon} \hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* = \frac{c}{8\pi} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*.$$

É interessante notarmos que, a partir dessas equações, também temos

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle \frac{c\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

onde

$$\frac{c\hat{\mathbf{k}}}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

é a velocidade com que as ondas monocromáticas se propagam, isto é, é a velocidade de fase. Essa relação é análoga à relação entre a densidade de corrente e a densidade de carga:

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}.$$

Quando o meio dielétrico possui uma condutividade σ finita, isto é, é um meio condutor, temos

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Nesse caso, a equação de onda para \mathbf{E} é dada por:

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Também temos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

As respectivas versões complexas dessas equações de onda são

$$\nabla^2 \boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \boldsymbol{\beta} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{\beta}}{\partial t^2} - \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} = \mathbf{0}.$$

Se tomamos o ansatz

$$\boldsymbol{\epsilon} = \boldsymbol{\epsilon}_0 \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - i\omega t),$$

obtemos

$$-\mathbf{k} \cdot \mathbf{k} + \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \omega^2 + i \frac{4\pi}{c^2} \mu\sigma \omega = 0.$$

Assim, se ω é real, segue que \mathbf{k} é um vetor complexo. Dessa forma, escrevemos

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_r + i\mathbf{k}_i,$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_r &= \text{Re}(\mathbf{k}), \\ \mathbf{k}_i &= \text{Im}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\epsilon} &= \boldsymbol{\epsilon}_0 \exp(-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - i\omega t), \\ \boldsymbol{\beta} &= \boldsymbol{\beta}_0 \exp(-\mathbf{k}_i \cdot \mathbf{r}) \exp(i\mathbf{k}_r \cdot \mathbf{r} - i\omega t). \end{aligned}$$

Então, novamente, mesmo nesse caso,

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{16\pi\mu} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^*$$

e

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*).$$

Para verificarmos essas relações, façamos:

$$\begin{aligned} \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon}) \cdot \text{Re}(\boldsymbol{\epsilon}) &= \frac{\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^*}{2} \cdot \frac{\boldsymbol{\epsilon} + \boldsymbol{\epsilon}^*}{2} \\ &= \frac{1}{4} (\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon} + 2\boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*). \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \text{Re}(\epsilon) \cdot \text{Re}(\epsilon) \rangle = \frac{1}{2} \epsilon \cdot \epsilon^*.$$

Analogamente,

$$\langle \text{Re}(\beta) \cdot \text{Re}(\beta) \rangle = \frac{1}{2} \beta \cdot \beta^*.$$

Com isso, obtemos

$$\langle u \rangle = \frac{\varepsilon}{16\pi} \epsilon \cdot \epsilon^* + \frac{1}{16\pi\mu} \beta \cdot \beta^*$$

Finalmente, para o fluxo de energia, temos

$$\begin{aligned} \text{Re}(\epsilon) \times \text{Re}(\beta) &= \frac{\epsilon + \epsilon^*}{2} \times \frac{\beta + \beta^*}{2} \\ &= \frac{1}{4} (\epsilon \times \beta + \epsilon \times \beta^* + \epsilon^* \times \beta + \epsilon^* \times \beta^*) \end{aligned}$$

e, portanto,

$$\begin{aligned} \langle \text{Re}(\epsilon) \times \text{Re}(\beta) \rangle &= \frac{1}{4} (\epsilon \times \beta^* + \epsilon^* \times \beta) \\ &= \frac{1}{2} \text{Re}(\epsilon \times \beta^*). \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re}(\epsilon \times \beta^*),$$

como já tínhamos deduzido acima sem mencionar explicitamente o fator evanescente das ondas monocromáticas.

Frequência de Plasma

No modelo de dispersão da luz em meios materiais de Drude & Lorentz, definimos, então como uma mera conveniência, a chamada frequência de plasma,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi N n_1 e^2}{m},$$

onde N representa o número de moléculas por unidade de volume, n é o número de elétrons do tipo 1 em cada molécula, e é a carga de um elétron e m é sua massa. Aqui vou mencionar a razão de chamarmos essa quantidade de frequência de plasma. Para um meio condutor, a susceptibilidade elétrica complexa escreve-se

$$\begin{aligned} \chi'_c(\omega) &= \sum_k \frac{N n_k e^2}{m(\omega_k^2 - \omega^2 - i\gamma_k \omega)} + \frac{N n_0 e^2}{m(-\omega^2 - i\gamma_0 \omega)} \\ &= \chi_c(\omega) - \frac{N n_0 e^2}{m\omega(\omega + i\gamma_0)} \end{aligned}$$

e, para frequências suficientemente altas, podemos desprezar γ_0 frente a ω e escrever

$$\chi'_c(\omega) \approx \chi_c(\omega) - \frac{Nn_0e^2}{m\omega^2}.$$

Com isso, a constante dielétrica complexa pode ser expressa por

$$\begin{aligned} K_c &= 1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{4\pi Nn_0e^2}{m\omega^2} \\ &= 1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}. \end{aligned}$$

Como a equação de onda para o campo elétrico nessas circunstâncias é dada por

$$\nabla^2 \epsilon - \frac{K_c}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

segue que uma onda plana propagando-se ao longo do eixo z tem o campo elétrico dado, por exemplo, por

$$\epsilon = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp(ikz - i\omega t),$$

onde, em virtude da equação de onda acima, segue que

$$\begin{aligned} k^2 &= K_c \frac{\omega^2}{c^2} \\ &= \left(1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega^2}{c^2}. \end{aligned}$$

Logo, essa é uma onda evanescente, pois k é um número complexo. Sendo assim, podemos escrever

$$\epsilon = \hat{\mathbf{x}}E_0 \exp(-k_i z) \exp(ik_r z - i\omega t),$$

onde

$$\begin{aligned} k_r &= \text{Re}(k), \\ k_i &= \text{Im}(k). \end{aligned}$$

Se k for imaginário, então a onda não poderá propagar-se no meio, sendo refletida após uma pequena penetração. Isso acontece se ω for suficientemente menor do que ω_p para termos a parte real de

$$k = \sqrt{\left(1 + 4\pi\chi_c(\omega) - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega^2}{c^2}}$$

desprezível. Esse é um comportamento típico de metais para frequências ópticas. No entanto, para frequências na região ultravioleta do espectro eletromagnético, os metais voltam a ter k_r não desprezível e as ondas são propagadas no meio condutor. Esse fenômeno é conhecido como a “transparência ultravioleta dos metais”.

A razão de utilizarmos o nome “frequência de plasma” vem do fato de que em um plasma, onde todas as cargas estão livres e não há amortecimento, escrevemos

$$k = \sqrt{\left(1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}\right) \frac{\omega^2}{c^2}},$$

pois, nesse caso,

$$\begin{aligned}\chi'_c(\omega) &= -\sum_k \frac{Nn_k e^2}{m\omega^2} - \frac{Nn_0 e^2}{m\omega^2} \\ &= -\frac{Ne^2}{m\omega^2} \left(\sum_k n_k + n_0 \right).\end{aligned}$$

Mas, como no lugar de cada molécula, nesse caso, há um elétron,

$$\sum_k n_k + n_0 = 1$$

e, com isso,

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi Ne^2}{m}.$$

Portanto,

$$kc = \sqrt{\omega^2 - \omega_p^2},$$

que é imaginário puro quando $\omega < \omega_p$, mas torna-se real quando $\omega > \omega_p$. Vemos, assim, que o caso de um condutor nas circunstâncias que tratamos acima exhibe um comportamento similar ao de um plasma. Nada mais natural, portanto, do que definirmos uma frequência de plasma para condutores.

Ondas planas em meios condutores

Em meios lineares, isotrópicos, homogêneos e ôhmicos com condutividade σ , temos

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}.$$

Vamos considerar que uma onda plana incida normalmente sobre uma interface entre um meio dielétrico e um meio condutor, adentrando o meio condutor. Para o presente objetivo, vamos apenas considerar a propagação da onda transmitida no interior do meio condutor. Supondo que a interface coincida com o plano xy e que o meio condutor tenha coordenadas $z > 0$, o vetor de onda no meio dielétrico tem o sentido do versor $\hat{\mathbf{z}}$. Considerando a isotropia dos dois meios, esperamos que a onda que penetra o meio condutor continue a se propagar ao longo do mesmo sentido e direção que a onda incidente, de modo que, dentro do material condutor, escrevemos

$$\mathbf{k} = k\hat{\mathbf{z}}.$$

Com essa hipótese, adotamos o seguinte ansatz para os campos ϵ e β :

$$\epsilon = \epsilon_0 \exp(ikz - i\omega t)$$

e

$$\beta = \beta_0 \exp(ikz - i\omega t),$$

onde ω é uma frequência que supomos dada. Segue da Lei de Indução de Faraday que

$$k\hat{\mathbf{z}} \times \epsilon_0 = \frac{\omega}{c}\beta_0.$$

Ao mesmo tempo, também segue da Lei de Ampère & Maxwell,

$$\nabla \times \beta = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J} + \frac{\mu\epsilon}{c}\frac{\partial \epsilon}{\partial t},$$

que

$$ik\hat{\mathbf{z}} \times \beta_0 = \frac{4\pi\mu}{c}\sigma\epsilon_0 - i\frac{\mu\epsilon}{c}\omega\epsilon_0,$$

ou seja,

$$\epsilon_0 = \frac{ikc\hat{\mathbf{z}} \times \beta_0}{\mu(4\pi\sigma - i\epsilon\omega)}.$$

Logo,

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot \epsilon_0 = 0.$$

Assim, usando a equação obtida anteriormente, isto é,

$$k\hat{\mathbf{z}} \times \epsilon_0 = \frac{\omega}{c}\beta_0,$$

na expressão logo acima para ϵ_0 , obtemos

$$\begin{aligned}\epsilon_0 &= \frac{ikc\hat{\mathbf{z}} \times (ck\hat{\mathbf{z}} \times \epsilon_0)}{\mu\omega(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega)} \\ &= \frac{ik^2c^2(\hat{\mathbf{z}}\hat{\mathbf{z}} \cdot \epsilon_0 - \epsilon_0)}{\mu\omega(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega)}.\end{aligned}$$

Temos, portanto,

$$\epsilon_0 = -\frac{ik^2c^2\epsilon_0}{\mu\omega(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega)},$$

ou seja,

$$ik^2c^2 + \mu\omega(4\pi\sigma - i\varepsilon\omega) = 0,$$

ou, simplificando,

$$k^2c^2 = \mu\varepsilon\omega^2 + i4\pi\sigma\mu\omega.$$

Logo, k é um número complexo e, como tal, podemos escrever

$$k = k_r + ik_i,$$

onde

$$k_r = \text{Re}(k)$$

e

$$k_i = \text{Im}(k).$$

Escrevamos:

$$\begin{aligned}k^2 &= (k_r + ik_i)^2 \\ &= (k_r^2 - k_i^2) + 2ik_rk_i.\end{aligned}$$

Então, devemos ter

$$k_r^2 - k_i^2 = \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}$$

e

$$2k_rk_i = 4\pi\sigma\mu\frac{\omega}{c^2}.$$

Substituindo k_i da segunda dessas equações na primeira, resulta na equação

$$k_r^4 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}k_r^2 - \frac{(4\pi\sigma\mu\omega)^2}{4c^4} = 0.$$

A solução para essa equação é dada por

$$k_r^2 = \frac{\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2 + (4\pi\sigma\mu\omega)^2}}{2c^2},$$

já que $k_r^2 \geq 0$. Como estamos supondo que a onda transmitida se propaga na direção positiva do eixo z , obtemos

$$\begin{aligned} k_r &= \sqrt{\frac{1}{2c^2} \left(\mu\varepsilon\omega^2 + \sqrt{(\mu\varepsilon\omega^2)^2 + (4\pi\sigma\mu\omega)^2} \right)} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Dessa solução para k_r e da equação

$$2k_r k_i = 4\pi\sigma\mu \frac{\omega}{c^2},$$

obtemos

$$\begin{aligned} k_i &= \frac{4\pi\sigma\mu\omega}{2k_rc^2} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu c}{\sqrt{2}c^2\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}}{\sqrt{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}}{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}}{\sqrt{\left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}} \\ &= \frac{4\pi\sigma\mu}{\sqrt{2}c\sqrt{\mu\varepsilon}} \frac{\sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}}{\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon}} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon} \frac{\omega}{c\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1}. \end{aligned}$$

Notemos que a onda é evanescente, pois

$$\exp(ikz - i\omega t) = \exp(-k_i z) \exp(ik_r z - i\omega t),$$

com

$$k_i > 0$$

quando $\sigma \neq 0$. Isso significa que uma onda eletromagnética penetra apenas até um certo ponto em um meio condutor, sendo que essa profundidade de penetração, chamada de “profundidade da pele”, do inglês "skin depth", é dada por

$$\delta = \frac{1}{k_i}.$$

O fluxo de energia médio no meio condutor é dado pelo vetor de Poynting médio:

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{c}{8\pi\mu} \text{Re} (\boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\beta}^*) \\ &= \frac{c^2 \exp(-2k_i z)}{8\pi\mu\omega} \text{Re} [\boldsymbol{\epsilon}_0 \times (k\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0)^*] \\ &= \frac{c^2 \exp(-2k_i z)}{8\pi\mu\omega} \text{Re} (k^* \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*) \\ &= \frac{k_r c^2 \exp(-2k_i z)}{8\pi\mu\omega} \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*. \end{aligned}$$

Assim, a energia da onda diminui à medida que penetra no condutor. Também é interessante notarmos que se a condutividade for muito grande, a penetração será muito pequena e, portanto, para um condutor ideal, a onda incidente será totalmente refletida.

Também podemos calcular a densidade de energia eletromagnética média dentro do material condutor. Então,

$$\begin{aligned} \langle u \rangle &= \frac{\varepsilon}{16\pi} \boldsymbol{\epsilon} \cdot \boldsymbol{\epsilon}^* + \frac{1}{16\pi\mu} \boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}^* \\ &= \frac{\varepsilon}{16\pi} \exp(-2k_i z) \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{1}{16\pi\mu} \exp(-2k_i z) \boldsymbol{\beta}_0 \cdot \boldsymbol{\beta}_0^* \\ &= \frac{1}{16\pi} \exp(-2k_i z) \left[\varepsilon \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* + \frac{k k^* c^2}{\mu \omega^2} (\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0) \cdot (\hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_0^*) \right] \\ &= \frac{1}{16\pi} \exp(-2k_i z) \left[\varepsilon + \frac{k k^* c^2}{\mu \omega^2} \right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\ &= \frac{1}{16\pi} \exp(-2k_i z) \left[\varepsilon + \frac{k_r^2 + k_i^2}{\mu \omega^2} c^2 \right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*. \end{aligned}$$

Notemos que

$$\begin{aligned} k_r^2 + k_i^2 &= \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} - 1 \right] \\ &= \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\langle u \rangle = \frac{1}{16\pi} \exp(-2k_i z) \left[\varepsilon + \frac{1}{\mu \omega^2} \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} c^2 \right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\varepsilon}{16\pi} \exp(-2k_i z) \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{4\pi\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2} \right] \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{\varepsilon}{16\pi} \exp(-2k_i z) \frac{2c^2 k_r^2}{\mu\varepsilon\omega^2} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \frac{1}{8\pi\mu} \exp(-2k_i z) \frac{c^2 k_r^2}{\omega^2} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*.
\end{aligned}$$

Dessa expressão e da equação para o fluxo médio de energia, isto é,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \frac{k_r c^2 \exp(-2k_i z)}{8\pi\mu\omega} \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^*,$$

segue que

$$\begin{aligned}
\frac{k_r}{\omega} \langle \mathbf{S} \rangle &= \frac{k_r^2 c^2 \exp(-2k_i z)}{8\pi\mu\omega^2} \hat{\mathbf{z}} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \hat{\mathbf{z}} \frac{1}{8\pi\mu} \exp(-2k_i z) \frac{c^2 k_r^2}{\omega^2} \boldsymbol{\epsilon}_0 \cdot \boldsymbol{\epsilon}_0^* \\
&= \hat{\mathbf{z}} \langle u \rangle,
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \hat{\mathbf{z}} \frac{\omega}{k_r} \langle u \rangle.$$

Como a onda que se propaga no interior do condutor é proporcional à exponencial

$$\begin{aligned}
\exp(ikz - i\omega t) &= \exp(-k_i z) \exp(ik_r z - i\omega t) \\
&= \exp(-k_i z) \exp \left[ik_r \left(z - \frac{\omega}{k_r} t \right) \right],
\end{aligned}$$

vemos que a velocidade de fase da onda no meio condutor, \mathbf{v} , é ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}$ e de módulo ω/k_r , ou seja,

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\omega}{k_r}$$

e, portanto, o fluxo de energia eletromagnética, em cada z , é dado por

$$\langle \mathbf{S} \rangle = \langle u \rangle \mathbf{v},$$

em analogia com

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{v}$$

para densidades de carga e corrente.

Relações de Kramers & Kronig ou relações de dispersão

Da análise do modelo de Drude & Lorentz segue que a polarização em um meio dispersivo não é proporcional ao campo elétrico. No entanto, definimos a polarização complexa, \mathcal{P} , que é proporcional ao campo elétrico complexo, isto é,

$$\mathcal{P} = \chi_c \epsilon,$$

onde

$$\chi_c = \chi_c(\omega)$$

é a susceptibilidade elétrica complexa e que depende da frequência. Sendo assim, o campo deslocamento elétrico complexo é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{D} &= \epsilon + 4\pi\mathcal{P} \\ &= (1 + 4\pi\chi_c)\epsilon \\ &= K_c\epsilon,\end{aligned}$$

onde também definimos a constante dielétrica complexa,

$$K_c = 1 + 4\pi\chi_c.$$

Sendo assim, o campo deslocamento elétrico real não é, em geral, proporcional ao campo elétrico real, pois

$$\begin{aligned}\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \text{Re}[\mathcal{D}(\mathbf{r}, t)] \\ &= \text{Re}[K_c\epsilon(\mathbf{r}, t)].\end{aligned}$$

Essa análise tem sido feita para ondas monocromáticas, mas vale também para um pacote de ondas com uma distribuição finita de frequências, que passamos a considerar a seguir.

Podemos pensar, no caso geral, que $\mathbf{D}(\mathbf{r}, t)$ é um pacote de ondas monocromáticas e escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t).$$

Ora, $\tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$ é um campo monocromático, de frequência ω , e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\omega; \mathbf{r}, t) &= \tilde{\mathbf{D}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t) \\ &= K_c(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)\end{aligned}$$

para um campo elétrico complexo monocromático dado por

$$\epsilon(\omega; \mathbf{r}, t) = \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t)$$

que, integrado sobre ω , resulta no campo elétrico real:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t).$$

Logo, para um meio dispersivo, podemos escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega K_c(\omega) \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) \exp(-i\omega t).$$

Da transformada de Fourier inversa para o campo elétrico real acima, temos

$$\tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp(i\omega t').$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega K_c(\omega) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp(i\omega t') \exp(-i\omega t) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [1 + 4\pi\chi_c(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[-i\omega(t - t')] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \exp[-i\omega(t - t')] \right\} \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[-i\omega(t - t')] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \delta(t - t') \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \mathbf{E}(\mathbf{r}, t') \exp[-i\omega(t - t')] \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \\ &+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \exp[-i\omega(t - t')] \right\} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'), \end{aligned}$$

isto é,

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} dt' G(t - t') \mathbf{E}(\mathbf{r}, t'),$$

onde definimos

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \exp(-i\omega\tau).$$

Com a substituição de variável definida por

$$\tau = t - t',$$

podemos também escrever

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau).$$

Fica claro, assim, que o campo deslocamento elétrico não é proporcional ao campo elétrico no mesmo instante de tempo, pois recebe contribuições do campo elétrico em outros tempos, isto é, a relação acima, entre \mathbf{D} e \mathbf{E} , não é local no tempo.

Usando o modelo harmônico de Drude & Lorentz, a dispersão em meios materiais é caracterizada por uma susceptibilidade elétrica complexa dada por

$$\chi_c = \sum_k \frac{N n_k e^2}{m (\omega_k^2 - \omega^2 - i \gamma_k \omega)},$$

onde n_k é o número de elétrons do tipo k por molécula, N é o número de moléculas por unidade de volume, e é a carga eletrônica, m é a massa do elétron, γ_k é o coeficiente de dissipação, ω_k é a frequência natural de oscilação dos elétrons do tipo k e ω é a frequência da onda eletromagnética incidente. Seguindo o livro de J. D. Jackson, vamos utilizar o fato de que χ_c pode ser aproximada por

$$\chi_c \approx \frac{N n_1 e^2}{m (\omega_1^2 - \omega^2 - i \gamma_1 \omega)},$$

se $\omega \approx \omega_1$. Nesse caso,

$$\begin{aligned} G(\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{4\pi N n_1 e^2}{m (\omega_1^2 - \omega^2 - i \gamma_1 \omega)} \exp(-i\omega\tau) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega^2 - i \gamma_1 \omega} \exp(-i\omega\tau), \end{aligned}$$

onde ω_p é a frequência de plasma do material. Essa integral pode ser calculada se usarmos o teorema dos Resíduos. Para isso, consideremos a integral no plano complexo:

$$I(C) = \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i \gamma_1 z} \exp(-iz\tau).$$

Os polos do integrando dessa integral ocorrem quando

$$\omega_1^2 - z^2 - i \gamma_1 z = 0,$$

isto é,

$$z^2 + i \gamma_1 z - \omega_1^2 = 0,$$

ou seja,

$$z_{\pm} = \frac{-i \gamma_1 \pm \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2}.$$

Mesmo quando

$$4\omega_1^2 - \gamma_1^2 < 0,$$

se $\omega_1 \neq 0$, ambos os polos localizam-se no semi-plano complexo com $\text{Im}(z) < 0$, supondo, como sempre, que $\gamma_1 > 0$. Portanto, para $\tau < 0$ podemos tomar o contorno C no semi-plano complexo superior e obter

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i \gamma_1 z} \exp(-iz\tau) \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, para $\tau < 0$,

$$\begin{aligned} \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i\gamma_1 z} \exp(-iz\tau) &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - \omega^2 - i\gamma_1 \omega} \exp(-i\omega\tau) \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto,

$$G(\tau) = 0, \text{ para } \tau < 0.$$

Já para $\tau > 0$ o contorno deve ser fechado no semi-plano complexo inferior e, nesse caso, o Teorema dos Resíduos dá

$$\begin{aligned} I(C) &= \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{\omega_1^2 - z^2 - i\gamma_1 z} \exp(-iz\tau) \\ &= - \oint_C dz \frac{\omega_p^2}{z^2 + i\gamma_1 z - \omega_1^2} \exp(-iz\tau) \\ &= 2\pi i \frac{\omega_p^2 \exp(-iz_- \tau)}{z_- - z_+} + 2\pi i \frac{\omega_p^2 \exp(-iz_+ \tau)}{z_+ - z_-} \\ &= 2\pi i \omega_p^2 \frac{\exp(-iz_+ \tau) - \exp(-iz_- \tau)}{z_+ - z_-} \\ &= 4\pi i \omega_p^2 \frac{\exp\left(-i \frac{-i\gamma_1 + \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right) - \exp\left(-i \frac{-i\gamma_1 - \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right)}{-i\gamma_1 + \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2} + i\gamma_1 + \sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \\ &= 2\pi i \frac{\omega_p^2}{\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \left[\exp\left(\frac{-\gamma_1 - i\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right) - \exp\left(\frac{-\gamma_1 + i\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}}{2} \tau\right) \right] \\ &= 2\pi i \frac{\omega_p^2}{\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{2} \tau\right) \left[\exp\left(-i\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right) - \exp\left(i\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right) \right] \\ &= 4\pi \frac{\omega_p^2}{\sqrt{4\omega_1^2 - \gamma_1^2}} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{2} \tau\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right). \end{aligned}$$

Assim,

$$G(\tau) = \frac{\omega_p^2}{\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}}} \exp\left(-\frac{\gamma_1}{2} \tau\right) \operatorname{sen}\left(\sqrt{\omega_1^2 - \frac{\gamma_1^2}{4}} \tau\right), \text{ para } \tau > 0.$$

Logo, $G(\tau)$ só não é zero para $\tau > 0$ e, portanto, podemos escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau). \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau), \end{aligned}$$

mostrando que, neste modelo, o campo deslocamento elétrico depende apenas dos valores do campo elétrico anteriores ao tempo presente, de acordo com o princípio de causalidade. A relação

$$\mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^\infty d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau),$$

pode ser tomada como sendo válida apenas porque o princípio de causalidade é válido, independentemente do particular modelo de susceptibilidade elétrica que utilizamos. Assim, mesmo sem realmente conhecermos $G(\tau)$, sabemos que, por causalidade, a relação entre \mathbf{D} e \mathbf{E} deve ser dada como acima. Além disso,

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega [4\pi\chi_c(\omega)] \exp(-i\omega\tau)$$

e, invertendo, podemos escrever

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp(i\omega\tau) \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [4\pi\chi_c(\omega')] \exp(-i\omega'\tau) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [4\pi\chi_c(\omega')] \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \exp[i(\omega - \omega')\tau] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' [4\pi\chi_c(\omega')] \delta(\omega - \omega') \\ &= 4\pi\chi_c(\omega), \end{aligned}$$

isto é,

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau)$$

e, como

$$G(\tau) = 0, \text{ para } \tau < 0,$$

segue que

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau),$$

independentemente da escolha do modelo; apenas o princípio de causalidade está presente nessa expressão para a susceptibilidade elétrica.

Vamos agora tomar a continuação analítica da susceptibilidade e escrever, para z complexo,

$$\chi_c(z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(iz\tau).$$

Como \mathbf{D} e \mathbf{E} são reais,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau) \\ &= \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) + \int_0^{+\infty} d\tau G^*(\tau) \mathbf{E}(\mathbf{r}, t - \tau), \end{aligned}$$

implicando que

$$G^*(\tau) = G(\tau),$$

já que a relação acima é suposta valer para quaisquer campos \mathbf{D} e \mathbf{E} que existem na natureza. Portanto,

$$\begin{aligned}\chi_c(z^*) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(iz^*\tau) \\ &= \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G^*(\tau) \exp(-iz\tau) \right]^* \\ &= \left[\frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(-iz\tau) \right]^* \\ &= [\chi_c(-z)]^*,\end{aligned}$$

ou seja,

$$[\chi_c(z^*)]^* = \chi_c(-z),$$

que é mais um critério que um modelo fisicamente aceitável de susceptibilidade elétrica deve satisfazer.

Como $\exp(-iz\tau)$ é uma função analítica, segue que $\chi_c(z)$ será analítica no semi-plano complexo superior se $G(\tau)$ for finita para todo τ . No entanto, é necessário que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 0 \quad (1)$$

para que $\chi_c(z)$ também seja analítica sobre o eixo real. Para ver isso, suponha que, conforme τ cresce acima de um certo valor, $G(\tau)$ assuma um valor finito diferente de zero. Supondo que $\chi_c(z)$ seja analítica em cada ponto do eixo real mesmo com $G(\tau)$ finita, então é necessário que $\chi_c(z)$ seja contínua no eixo real, isto é,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \chi_c(a + i\eta) = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \chi_c(a + i\eta),$$

com $a \in \mathbb{R}$. Então,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp[i(a + i\eta)\tau] = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp[i(a + i\eta)\tau],$$

isto é,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(ia\tau - \eta\tau) = \lim_{\eta \rightarrow 0^-} \int_0^\infty d\tau G(\tau) \exp(ia\tau - \eta\tau),$$

ou seja,

$$'' \lim_{\eta \rightarrow 0^+} (\text{algo finito})'' = '' \lim_{\eta \rightarrow 0^-} (\pm\infty)'' ,$$

que é uma contradição. Logo, temos que a Eq. (1) deve ser válida para que $\chi_c(z)$ seja analítica no eixo real.

A Eq. (1), de fato, é verdade para dielétricos, mas não é verdade para condutores, para os quais $G(\tau) \rightarrow 4\pi\sigma$ quando $\tau \rightarrow \infty$. Assim, para dielétricos, sem condutividade alguma, $\chi_c(z)$ é analítica no semi-plano complexo superior e sobre o eixo real. Então, do teorema de Cauchy decorre que

$$\chi_c(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{\chi_c(z')}{z' - z},$$

se C for um contorno que contenha um intervalo do eixo real e feche-se no semi-plano complexo superior. Também é importante notarmos que

$$\begin{aligned}\chi_c(\omega) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \exp(i\omega\tau) \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \exp(i\omega\tau) \\ &= \frac{1}{4\pi i\omega} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\ &\quad - \frac{1}{4\pi i\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \exp(i\omega\tau),\end{aligned}$$

onde

$$G'(\tau) = \frac{dG(\tau)}{d\tau}.$$

Notemos que, como vimos, no modelo ilustrativo acima,

$$\lim_{\tau \rightarrow 0^-} G(\tau) = 0.$$

Também notamos que

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{\eta}^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)]_{\eta}^{+\infty} \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} [-G(\eta) \exp(i\omega\eta)] \\ &= - \lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta),\end{aligned}$$

pois, para dielétricos,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} G(\tau) = 0.$$

Por continuidade de $G(\tau)$, devemos ter

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} G(\eta) = \lim_{\tau \rightarrow 0^-} G(\tau)$$

e, portanto,

$$\int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G(\tau) \exp(i\omega\tau)] = 0,$$

implicando em

$$\chi_c(\omega) = \frac{i}{4\pi\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \exp(i\omega\tau).$$

Podemos repetir esse procedimento *ad infinitum* e obter

$$\begin{aligned}
\chi_c(\omega) &= \frac{i}{4\pi\omega} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau G'(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \exp(i\omega\tau) \\
&= \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G'(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau G''(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} \\
&\quad - \frac{1}{4\pi\omega^2} \int_0^{+\infty} d\tau G''(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} \\
&\quad + \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau G''(\tau) \frac{\partial}{\partial\tau} \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} \\
&\quad + \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau \frac{\partial}{\partial\tau} [G''(\tau) \exp(i\omega\tau)] \\
&\quad - \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau G'''(\tau) \exp(i\omega\tau) \\
&= -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} + \frac{iG''(0^+)}{4\pi\omega^3} \\
&\quad - \frac{i}{4\pi\omega^3} \int_0^{+\infty} d\tau G'''(\tau) \exp(i\omega\tau),
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\chi_c(\omega) = -\frac{G'(0^+)}{4\pi\omega^2} + \frac{iG''(0^+)}{4\pi\omega^3} - \frac{G'''(0^+)}{4\pi\omega^4} + \dots$$

Esse resultado mostra que

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \chi_c(\omega) = 0.$$

Então, a continuação analítica da susceptibilidade elétrica, isto é,

$$\chi_c(z) = -\frac{G'(0^+)}{4\pi z^2} + \frac{iG''(0^+)}{4\pi z^3} - \frac{G'''(0^+)}{4\pi z^4} + \dots,$$

também fornece

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \chi_c(z) = 0.$$

Desse resultado, segue que

$$\chi_c(z') \rightarrow 0$$

quando o raio do contorno no semi-plano complexo superior tender a infinito e, portanto,

$$\begin{aligned}\chi_c(z) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C dz' \frac{\chi_c(z')}{z' - z} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - z}.\end{aligned}$$

Seja η uma quantidade real, positiva e infinitesimal. Então, tomando

$$z = \omega + i\eta,$$

podemos escrever

$$\chi_c(\omega + i\eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}$$

e, portanto,

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta}.$$

Há uma maneira bastante útil de reescrever esse limite:

$$\begin{aligned}\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega - i\eta} &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega} \\ &+ i\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \chi_c(\omega') \delta(\omega' - \omega) \\ &= \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi \chi_c(\omega).\end{aligned}$$

Digressão: uma relação útil para denominadores singulares

Consideremos a função complexa

$$f_\eta(x) = \frac{1}{x - i\eta},$$

onde η é uma quantidade real, positiva e infinitesimal. Tipicamente, essa função aparece dentro de integrais como, por exemplo,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' f_\eta(x' - x) g(x') = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta},$$

onde $g(x)$ é uma função de x real, com a e b reais tais que

$$a < x < b.$$

Olhemos, agora, esta representação da função delta de Dirac:

$$\delta(x - x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[ik(x - x')].$$

Podemos manipular o membro direito dessa expressão assim:

$$\begin{aligned} \delta(x - x') &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} dk \exp[-\eta|k| + ik(x - x')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^0 dk \exp[\eta k + ik(x - x')] \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_0^{+\infty} dk \exp[-\eta k + ik(x - x')] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta + i(x - x')} + \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{\eta - i(x - x')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \left[\frac{1}{\eta + i(x - x')} + \frac{1}{\eta - i(x - x')} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{2\eta}{\eta^2 + (x - x')^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\eta^2 + (x - x')^2}, \end{aligned}$$

isto é,

$$\delta(x - x') = \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{\eta}{\pi [\eta^2 + (x - x')^2]}.$$

Como

$$\begin{aligned} \frac{1}{x' - x - i\eta} &= \frac{x' - x + i\eta}{(x' - x)^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} + i \frac{\eta}{(x' - x)^2 + \eta^2} \\ &= \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} + i\pi \left\{ \frac{\eta}{\pi [\eta^2 + (x - x')^2]} \right\}, \end{aligned}$$

segue que

$$\begin{aligned} \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta} &= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') \left[\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} \right] \\ &\quad + \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') i\pi \left\{ \frac{\eta}{\pi [\eta^2 + (x - x')^2]} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') \left[\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} \right] \\
&+ \int_a^b dx' g(x') i\pi \delta(x - x').
\end{aligned}$$

Resta entendermos o significado do primeiro integrando do membro direito dessa equação. Sempre que

$$x' \neq x,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} &\approx \frac{(x' - x)}{(x' - x)^2} \\
&= \frac{1}{x' - x},
\end{aligned}$$

quando $\eta \rightarrow 0^+$. No entanto, no único ponto em que

$$x' = x,$$

temos

$$\begin{aligned}
\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} &= \frac{0}{0^2 + \eta^2} \\
&= 0
\end{aligned}$$

e, portanto,

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' g(x') \left[\frac{(x' - x)}{(x' - x)^2 + \eta^2} \right] = \mathcal{P} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x},$$

onde o símbolo \mathcal{P} indica que se deve tomar apenas a parte principal da integral que o segue. Com isso, o limite que procuramos pode ser escrito como

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta} = \mathcal{P} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x} + \int_a^b dx' g(x') i\pi \delta(x - x'),$$

que, com um certo abuso notacional, pode ser indicado assim:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \int_a^b dx' \frac{g(x')}{x' - x - i\eta} = \int_a^b dx' g(x') \left[\mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x - x') \right].$$

Abusando ainda mais, podemos até mesmo escrever a fórmula útil:

$$\lim_{\eta \rightarrow 0^+} \frac{1}{x' - x - i\eta} = \mathcal{P} \frac{1}{x' - x} + i\pi \delta(x - x').$$

Fim da digressão

Retornando para o ponto em que estávamos a respeito da susceptibilidade elétrica complexa, usando esse limite, obtemos:

$$\begin{aligned}\chi_c(\omega) &= \frac{1}{2\pi i} \left[\mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega} + i\pi\chi_c(\omega) \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega} + \frac{\chi_c(\omega)}{2},\end{aligned}$$

isto é,

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{\pi i} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\chi_c(\omega')}{\omega' - \omega}.$$

Tomando as partes real e imaginária dessa equação resulta nas relações de Kramers & Kronig:

$$\text{Re}[\chi_c(\omega)] = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Im}[\chi_c(\omega')]}{\omega' - \omega}$$

e

$$\text{Im}[\chi_c(\omega)] = -\frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega' \frac{\text{Re}[\chi_c(\omega')]}{\omega' - \omega}.$$

Guias de onda de seção transversal constante

Antes de considerarmos uma aplicação específica, suponhamos um tubo reto, oco e infinito, feito de material condutor ideal, com seção transversal constante. Vamos considerar que o interior desse tubo seja preenchido por um material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ . Tomemos o eixo z ao longo do comprimento do tubo e suponhamos que a espessura da parede condutora seja constante. As ondas eletromagnéticas que se propagariam no interior de um tal guia de ondas de seção transversal constante devem satisfazer as equações

$$\nabla^2 \epsilon - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \epsilon}{\partial t^2} = 0$$

e

$$\nabla^2 \beta - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} = 0.$$

Para ondas monocromáticas, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Com isso, as equações acima escrevem-se

$$\nabla^2 \epsilon + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = 0$$

e

$$\nabla^2 \beta + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta = 0.$$

Modos TE

Procuremos por modos transversais elétricos, TE, ou seja, imponhamos $\epsilon_z = 0$ dentro do guia de ondas. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} \beta_z.\end{aligned}$$

Para modos TE:

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_y.$$

Procuremos por ondas que se propaguem ao longo do sentido positivo do eixo z . Assim, tomamos a dependência funcional em z dos campos $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\beta}$ como $\exp(ik_z z)$ e obtemos

$$\epsilon_x = \frac{\omega}{k_z c} \beta_y$$

e

$$\epsilon_y = -\frac{\omega}{k_z c} \beta_x.$$

Da Lei de Ampère & Maxwell obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu \varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x \\ &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_y,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y \\
&= i\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_x, \\
\frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Com o ansatz referente à dependência em z , essas equações dão

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - ik_z \beta_y = -i\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_y$$

e

$$ik_z \beta_x - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} = i\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \beta_x,$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\beta_x &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right) \\
&= -\frac{k_z c}{\omega} \epsilon_y
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\beta_y &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right) \\
&= \frac{k_z c}{\omega} \epsilon_x.
\end{aligned}$$

Resumindo, se definirmos o operador nabla transversal como

$$\nabla_t = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y},$$

podemos escrever

$$\beta_t = -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \nabla_t \beta_z$$

e

$$\begin{aligned}
\epsilon_t &= -\frac{\omega}{k_z c} \hat{\mathbf{z}} \times \beta_t \\
&= -\frac{\omega}{k_z c} \hat{\mathbf{z}} \times \beta,
\end{aligned}$$

onde definimos os correspondentes campos transversais ao eixo do guia de ondas como

$$\beta_t = \hat{\mathbf{x}} \beta_x + \hat{\mathbf{y}} \beta_y$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y.$$

Dessa forma, se encontrarmos β_z , facilmente obteremos β_x , β_y , ϵ_x e ϵ_y . Para obtermos β_z , utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \beta_z + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z , obtemos a equação para β_z :

$$\frac{\partial^2 \beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \beta_z = 0.$$

Essa equação e as condições de contorno para β_z resolvem o problema para modos TE. Na superfície do guia de ondas, a componente normal de $\boldsymbol{\beta}$ deve ser nula, pois o condutor é ideal e $\boldsymbol{\beta}$ se anula dentro do material condutor. Logo,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}|_S = 0.$$

Mas como a normal à superfície de um guia de ondas cilíndrico é ortogonal ao eixo do cilindro, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}|_S &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}_t|_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\beta}_t|_S &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t \beta_z|_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t \beta_z|_S = 0$$

é a condição de contorno para modos TE.

Modos TM (**como exercício**)

Impondo que $\beta_z = 0$ dentro do guia de ondas, obteremos os modos transversais magnéticos, TM. Da Lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x, \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y, \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z. \end{aligned}$$

Para modos TM:

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y.$$

Aqui também tomamos a dependência funcional em z dos campos ϵ e β como $\exp(ik_z z)$ e obtemos

$$\beta_y = \mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon_x$$

e

$$\beta_x = -\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon_y.$$

Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= i \frac{\omega}{c} \beta. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} \beta_z. \end{aligned}$$

Para modos TM e o ansatz de propagação ao longo do eixo do guia de ondas, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - ik_z \epsilon_y &= i \frac{\omega}{c} \beta_x \\ &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \epsilon_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} ik_z \epsilon_x - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \beta_y \\ &= i\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{k_z c^2} \epsilon_x, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\epsilon_y = \frac{-ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y}$$

e

$$\epsilon_x = \frac{-ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial\epsilon_z}{\partial x}.$$

Em resumo, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \frac{-ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}} \nabla_t \epsilon_z$$

e

$$\begin{aligned} \beta_t &= \mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}_t \\ &= \mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \hat{\mathbf{z}} \times \boldsymbol{\epsilon}. \end{aligned}$$

Dessa forma, se encontrarmos ϵ_z , facilmente obteremos ϵ_x , ϵ_y , β_x e β_y . Para obtermos ϵ_z , utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \epsilon_z + \mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z , obtemos a equação para ϵ_z :

$$\frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \epsilon_z = 0.$$

Como a componente tangencial do campo elétrico à superfície do guia de ondas deve ser nula, pois o campo elétrico dentro de um condutor ideal é nulo e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\epsilon}|_S = \mathbf{0},$$

isto é,

$$(n_x \hat{\mathbf{x}} + n_y \hat{\mathbf{y}}) \times (\hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y + \hat{\mathbf{z}}\epsilon_z)|_S = 0,$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{z}}(n_x \epsilon_y - n_y \epsilon_x) - \hat{\mathbf{y}}n_x \epsilon_z + \hat{\mathbf{x}}n_y \epsilon_z|_S = 0$$

e, portanto,

$$n_x \epsilon_y - n_y \epsilon_x|_S = 0,$$

$$n_x \epsilon_z|_S = 0$$

e

$$n_y \epsilon_z|_S = 0.$$

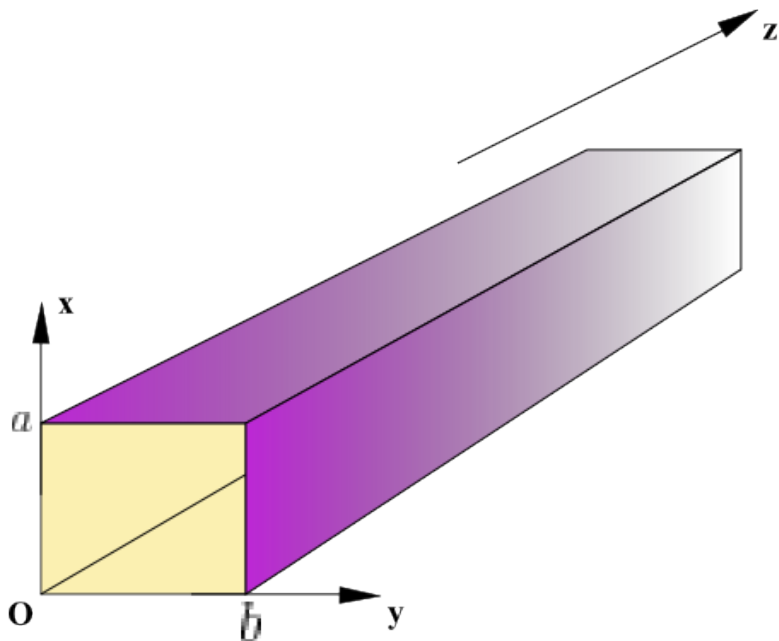
A normal tem apenas as componentes n_x e n_y e

$$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

Logo, porque as componentes da normal, n_x e n_y , não podem ser ambas nulas, segue que a condição de contorno para os modos TM é

$$\epsilon_z|_S = 0.$$

Exemplo: modos TE em um guia de ondas de seção transversal retangular constante (como exercício)



Consideremos um guia de ondas retangular, cuja seção transversal tem a forma de um retângulo cujos vértices, no plano xy , são dados pelos pontos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) e $(0,b)$. A solução da equação de onda para β_z é facilmente verificada como sendo

$$\beta_z = \exp(ik_z z - i\omega t) [\lambda_1 \cos(k_x x) + \lambda_2 \sin(k_x x)] [\lambda_3 \cos(k_y y) + \lambda_4 \sin(k_y y)],$$

onde k_z , k_x e k_y devem satisfazer

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Além dessa condição, k_x e k_y , assim como λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 , também devem ser determinadas pelas condições de contorno. Em $x = 0$ e $x = a$, a componente do campo elétrico tangencial à parede condutora deve ser nula. Como $\epsilon_z = 0$ por hipótese (modos TE), segue que $\epsilon_y = 0$, ou seja, como

$$\epsilon_y = \frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right),$$

segue que

$$\left[\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right]_{x=0,a} = 0.$$

Mas,

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial x} = \exp(ik_z z - i\omega t) [-\lambda_1 k_x \text{sen}(k_x x) + \lambda_2 k_x \cos(k_x x)] [\lambda_3 \cos(k_y y) + \lambda_4 \text{sen}(k_y y)].$$

Impondo a condição de contorno acima para $x = 0$ resulta em

$$\lambda_2 = 0.$$

Em $x = a$, a condição e o resultado acima implicam em:

$$\text{sen}(k_x a) = 0,$$

ou seja,

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a}, \text{ para } n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Analogamente, em $y = 0$ e $y = b$, a componente do campo elétrico tangencial à parede condutora deve ser nula. Como $\epsilon_z = 0$ por hipótese (modos TE), segue que $\epsilon_x = 0$, ou seja, como

$$\epsilon_x = -\frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right),$$

segue que

$$\left[\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right]_{y=0,b} = 0.$$

Mas,

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} = \exp(ik_z z - i\omega t) [\lambda_1 \cos(k_x x) + \lambda_2 \text{sen}(k_x x)] [-\lambda_3 k_y \text{sen}(k_y y) + \lambda_4 k_y \cos(k_y y)].$$

Impondo a condição de contorno acima para $y = 0$ resulta em

$$\lambda_4 = 0.$$

Em $y = b$, a condição e o resultado acima implicam em

$$\text{sen}(k_y b) = 0,$$

ou seja,

$$k_y = \frac{n_y \pi}{b}, \text{ para } n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, definindo a amplitude arbitrária $\beta_0 = \lambda_1 \lambda_3$, obtemos

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right).$$

Notemos que se escolhermos $n_x = n_y = 0$, ficaremos com

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t).$$

Mesmo que tomemos $k_z = \omega/c$ como requerido pela equação

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2},$$

teremos, necessariamente,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right) \\ &= 0 \\ &= \frac{\omega}{k_z c} \beta_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right) \\ &= 0 \\ &= -\frac{\omega}{k_z c} \beta_x. \end{aligned}$$

A componente z da Lei de Indução de Faraday então implica em

$$\begin{aligned} i\frac{\omega}{c} \beta_z &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, a solução para $n_x = n_y = 0$ é $\epsilon = \mathbf{0}$ e $\beta = \mathbf{0}$. Logo, a solução acima, isto é,

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right),$$

só não é trivial quando $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$. Esses modos são indicados assim: TE_{n_x, n_y} .

Modos TEM

Por que, ao tratarmos guias de ondas cilíndricos, procuramos por modos transversais elétricos (TE) e transversais magnéticos (TM), mas não procuramos por modos transversais eletromagnéticos (TEM)? Os modos TEM têm ϵ_z e β_z ambos nulos em guias de ondas. Suponhamos, portanto, que

$$\epsilon_z = 0$$

e

$$\beta_z = 0$$

no interior de um guia e tentemos resolver as equações. Como fizemos anteriormente, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla \times \boldsymbol{\epsilon}_t + \nabla \times (\hat{\mathbf{z}}\epsilon_z) = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t + i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{z}}\beta_z,$$

ou seja,

$$\nabla \times \boldsymbol{\epsilon}_t = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t,$$

ou ainda,

$$\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_t}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t.$$

Multiplicando essa igualdade escalarmente por $\hat{\mathbf{z}}$ resulta em

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t) = 0$$

e, como $\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t$ só tem componente ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}$, segue que

$$\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}.$$

Também sabemos que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$$

dentro do guia de ondas e, portanto,

$$\left(\nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t = 0,$$

isto é,

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t = 0.$$

Temos, portanto, um problema em duas dimensões, pois, usando o ansatz para a dependência em z como fizemos para os modos TE e TM, podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \exp(ik_z z) \boldsymbol{\epsilon}'_t,$$

onde

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \boldsymbol{\epsilon}'_t(x, y).$$

O problema bidimensional é, então, especificado pelas equações eletrostáticas:

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}'_t = 0$$

e

$$\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{0}.$$

Porque $\boldsymbol{\epsilon}'_t$ é irrotacional, segue que existe uma função escalar

$$\phi_t = \phi_t(x, y)$$

tal que

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = -\nabla_t \phi_t.$$

Logo,

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}'_t = 0$$

implica em

$$\nabla_t^2 \phi_t = 0$$

no interior de cada uma das seções retas transversais do guia de ondas. A fronteira a uma seção transversal é uma equipotencial de ϕ_t e, portanto, do teorema da unicidade das soluções em eletrostática, segue que $\phi_t = \text{constante}$ é a solução do problema, implicando que

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{0}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}$$

para modos transversais eletromagnéticos. Como

$$\nabla \times \boldsymbol{\epsilon}_t = i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta}_t,$$

segue que

$$\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.$$

Assim, vemos que não há como termos modos TEM em guias ocos. A única maneira de propagarmos ondas transversais em guias de ondas cilíndricos é quando não forem ocos, como no caso de cabos coaxiais, por exemplo.

Cavidades Ressonantes

Podemos construir uma cavidade ressonante a partir de um guia de ondas cilíndrico simplesmente adicionando tampas transversais ao longo do eixo do guia. Assim, escolhamos o eixo z no interior do guia de ondas e paralelo ao seu eixo. Consideremos duas tampas condutoras, feitas com o mesmo material das paredes do guia, colocadas transversalmente ao eixo do guia, uma em $z = 0$ e a outra em $z = d$, com $d > 0$. Para tratar o presente problema, procedemos como para o caso de guias de ondas cilíndricos, exceto que o ansatz para a dependência dos campos com a coordenada z deve ser apropriada a uma onda estacionária, ao invés de uma onda viajante. Dessa forma, para cada uma das componentes dos campos, propomos que essa dependência seja uma combinação linear de $\sin(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$.

Vamos considerar que o interior da cavidade ressonante seja preenchido por um material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ . Para ondas monocromáticas armazenadas dentro da cavidade ressonante, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Com isso, como para guias de ondas cilíndricos, as equações de onda escrevem-se

$$\nabla^2 \epsilon + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = 0$$

e

$$\nabla^2 \beta + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta = 0.$$

Modos TE

Analogamente ao que fizemos no caso de um guia de ondas cilíndrico, procuremos por modos transversais elétricos, TE, ou seja, imponhamos $\epsilon_z = 0$ dentro da cavidade ressonante. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= i \frac{\omega}{c} \beta. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} \beta_z. \end{aligned}$$

Para modos TE:

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_y.$$

Como explicado acima, procuramos por ondas estacionárias ao longo do eixo z . Assim, tomamos a dependência funcional em z do campo ϵ como uma combinação linear de $\sin(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$. No entanto, para os modos TE as componentes

não nulas de ϵ tangenciam as tampas condutoras e, como condição de contorno, devem ser nulas em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, necessariamente devemos ter

$$\epsilon_t = \sin(k_z z) \epsilon'_t,$$

onde definimos

$$\epsilon_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y,$$

$$\epsilon'_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon'_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon'_y$$

e

$$\epsilon'_t = \epsilon'_t(x, y, t),$$

com

$$k_z = \frac{p\pi}{d}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

já que $p \neq 0$ para soluções não triviais. Com isso, as equações

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_y$$

fornecem

$$\beta_y = -i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_x \cos(k_z z)$$

e

$$\beta_x = i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_y \cos(k_z z).$$

Da Lei de Ampère & Maxwell obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \beta &= \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \\ &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_x \sin(k_z z) \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_y \sin(k_z z) \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com o ansatz referente à dependência em z , essas equações dão

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_x \text{sen}(k_z z) = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_x \text{sen}(k_z z)$$

e

$$-i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_y \text{sen}(k_z z) - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_y \text{sen}(k_z z),$$

o que implica que

$$\beta_z = \beta'_z \text{sen}(k_z z),$$

com

$$\beta'_z = \beta'_z(x, y, t).$$

Logo, das equações acima, concluímos que podemos obter as componentes não nulas do campo elétrico em termos de derivadas espaciais de β'_z :

$$\frac{\partial \beta'_z}{\partial y} - i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_x = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_x$$

e

$$-i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_y - \frac{\partial \beta'_z}{\partial x} = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_y,$$

isto é,

$$\epsilon'_x = \frac{-i\omega}{c(k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2})} \frac{\partial \beta'_z}{\partial y}$$

e

$$\epsilon'_y = \frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2})} \frac{\partial \beta'_z}{\partial x}.$$

Também temos

$$\begin{aligned} \beta_y &= -i \frac{k_z c}{\omega} \epsilon'_x \cos(k_z z) \\ &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \beta'_z}{\partial y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_x &= i \frac{k_z c}{\omega} \epsilon'_y \cos(k_z z) \\ &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \beta'_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Resumindo, se definirmos o operador nabla transversal como

$$\nabla_t = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y}$$

podemos escrever

$$\beta_t = -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \nabla_t \beta'_z,$$

onde definimos

$$\beta_t = \hat{\mathbf{x}} \beta_x + \hat{\mathbf{y}} \beta_y,$$

e

$$\epsilon_t = \frac{i\omega \text{sen}(k_z z)}{c(k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \beta'_z.$$

Dessa forma, se encontrarmos β'_z , facilmente obteremos β_x , β_y , β_z , ϵ_x e ϵ_y . Para obtermos β'_z , utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \beta_z + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z , que resulta em

$$\beta_z = \beta'_z \text{sen}(k_z z),$$

obtemos a equação para β'_z :

$$\frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial y^2} + \left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \beta'_z = 0.$$

Essa equação e as condições de contorno para β_z resolvem o problema para modos TE. Na superfície lateral da cavidade ressonante, a componente normal de β deve ser nula, pois o condutor é ideal e β se anula dentro do material condutor. Logo,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \beta|_S = 0.$$

Mas como a normal à superfície da cavidade ressonante cilíndrica é ortogonal ao eixo z que definimos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta|_S &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta_t|_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta_t|_S &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t \beta'_z|_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t \beta'_z|_S = 0$$

é a condição de contorno para modos TE.

Modos TM (como exercício)

Impondo que $\beta_z = 0$ dentro da cavidade ressonante, obteremos os modos transversais magnéticos, TM. Da Lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x, \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y, \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z.\end{aligned}$$

Para modos TM:

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y.$$

Aqui também tomamos a dependência funcional em z do campo $\boldsymbol{\epsilon}$ como uma combinação linear de $\sin(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$. Novamente observamos que as componentes de $\boldsymbol{\epsilon}$ que tangenciam as tampas condutoras, como condição de contorno, devem ser nulas em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, necessariamente devemos ter, mesmo para modos TM,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \sin(k_z z) \boldsymbol{\epsilon}'_t,$$

com

$$k_z = \frac{p\pi}{d}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

já que $p = 0$ implica em $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}$, mas, como veremos abaixo, não necessariamente implica em $\epsilon_z = 0$ para modos TM. Assim,

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_y.$$

O ansatz para $\boldsymbol{\beta}_t$ que faz sentido à luz dessas equações é

$$\boldsymbol{\beta}_t = \cos(k_z z) \boldsymbol{\beta}'_t$$

e, portanto,

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_x$$

fornece

$$k_z \sin(k_z z) \beta'_y = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_y$$

dá

$$-k_z \sin(k_z z) \beta'_x = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_y,$$

isto é,

$$\beta'_x = i\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_y$$

e

$$\beta'_y = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_x.$$

Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i\frac{\omega}{c} \beta_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para modos TM e usando o ansatz para a dependência em z acima, obtemos

$$\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - k_z \cos(k_z z) \epsilon'_y = i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_x,$$

e

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_x - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_y,$$

ou seja,

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_y + i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_x = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y}$$

e

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_x - i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_y = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x},$$

ou ainda,

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_y + i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) i \mu \varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_y = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},$$

que dá

$$\cos(k_z z) \epsilon'_y = \frac{k_z}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},$$

e

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_x + i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) i \mu \varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_x = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x},$$

que fornece

$$\cos(k_z z) \epsilon'_x = \frac{k_z}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x}.$$

Vemos dessas equações que

$$\epsilon_z = \cos(k_z z) \epsilon'_z,$$

com

$$\epsilon'_z = \epsilon'_z(x, y, t).$$

Em resumo, portanto,

$$\epsilon_t = \frac{k_z \sin(k_z z)}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \nabla_t \epsilon'_z$$

e

$$\begin{aligned} \beta_t &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \cos(k_z z) \hat{\mathbf{z}} \times \epsilon'_t \\ &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \frac{\cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \epsilon'_z \end{aligned}$$

Dessa forma, se encontrarmos ϵ'_z , facilmente obteremos ϵ_x , ϵ_y , $\epsilon_z = \cos(k_z z) \epsilon'_z$, β_x e β_y . Para obtermos ϵ_z , utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \epsilon_z + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z , obtemos a equação para ϵ'_z :

$$\frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial y^2} + \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \epsilon'_z = 0.$$

Como a componente tangencial do campo elétrico à superfície lateral da cavidade ressonante deve ser nula, pois o campo elétrico dentro de um condutor ideal é nulo e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\epsilon}|_S = \mathbf{0},$$

isto é,

$$(n_x \hat{\mathbf{x}} + n_y \hat{\mathbf{y}}) \times (\hat{\mathbf{x}} \epsilon_x + \hat{\mathbf{y}} \epsilon_y + \hat{\mathbf{z}} \epsilon_z)|_S = 0,$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{z}} (n_x \epsilon_y - n_y \epsilon_x) - \hat{\mathbf{y}} n_x \epsilon_z + \hat{\mathbf{x}} n_y \epsilon_z|_S = 0$$

e, portanto,

$$n_x \epsilon_y - n_y \epsilon_x|_S = 0,$$

$$n_x \epsilon_z|_S = 0$$

e

$$n_y \epsilon_z|_S = 0.$$

A normal tem apenas as componentes n_x e n_y e

$$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

Logo, porque as componentes da normal, n_x e n_y , não podem ser ambas nulas, segue que a condição de contorno para os modos TM é

$$\epsilon_z|_S = 0,$$

isto é,

$$\cos(k_z z) \epsilon'_z|_S = 0.$$

ou seja, como essa igualdade deve valer na superfície lateral para todo z entre 0 e d , segue que

$$\epsilon'_z|_S = 0.$$

Frequências de ressonância

Das equações de onda

$$\frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial y^2} + \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \beta'_z = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial y^2} + \left(\mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \epsilon'_z = 0,$$

como para modos TE e TM

$$k_z = \frac{p\pi}{d},$$

com $p = 0, 1, 2, \dots$ para modos TM e $p = 1, 2, \dots$ para modos TE, segue

$$k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2 = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}.$$

As equações acima juntamente com suas respectivas condições de contorno representam problemas de Sturm-Liouville, ou seja, problemas de auto-vetores e auto-valores. Assim, para cada auto-função teremos um valor discreto correspondente para $k_x^2 + k_y^2$, que podemos denotar como λ_m^2 , onde $m = 0, 1, 2, \dots$ são os índices escolhidos para designar os correspondentes auto-valores. Logo, a cavidade ressonante somente poderá conter ondas eletromagnéticas estacionárias com frequências discretas dadas por

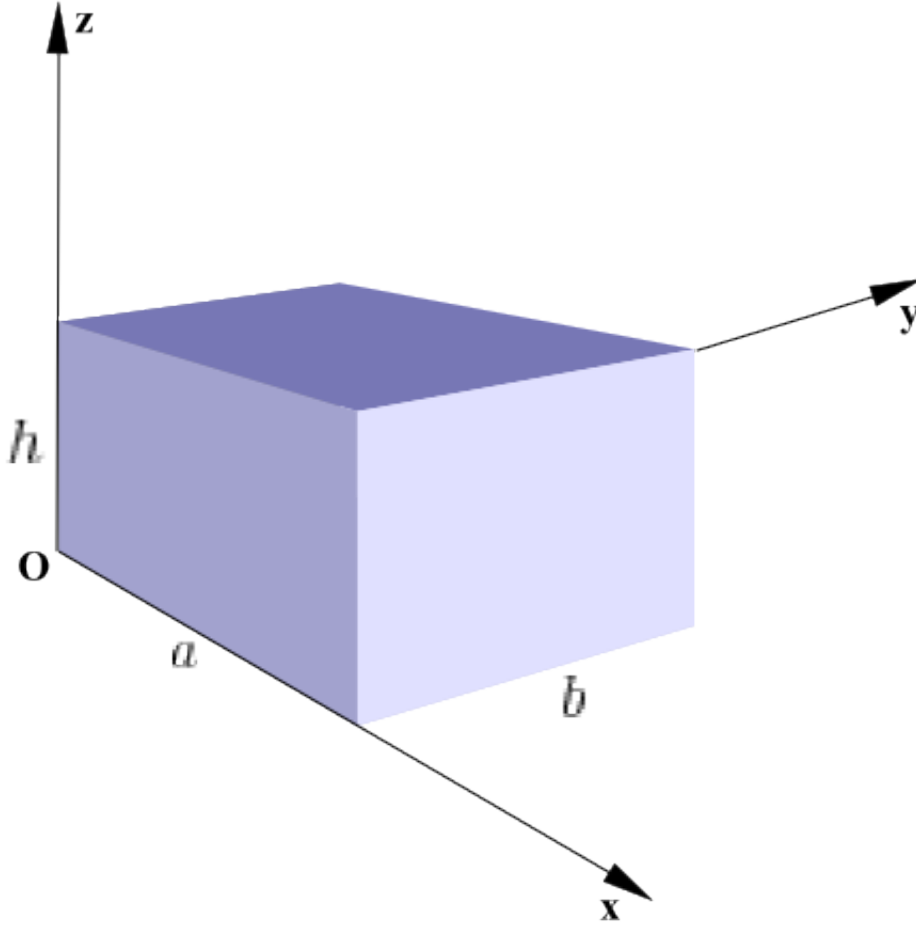
$$\omega_{p,m} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2}.$$

Essas são as chamadas frequências de ressonância da cavidade. É importante notarmos que essas frequências correspondem a linhas espectrais da cavidade infinitamente estreitas para um condutor ideal. Na prática, no entanto, como a condutividade de um material condutor é sempre finita, há absorção da energia das ondas eletromagnéticas pelas paredes da cavidade. Esse fato implica em uma largura finita para as linhas espectrais da cavidade.

Uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo (como exercício)

Quando abordamos guias de ondas consideramos o que se passa quando confinamos ondas eletromagnéticas em duas dimensões. Nesse caso, as ondas eletromagnéticas podem se propagar ao longo da direção que não foi restringida. Agora vamos considerar o que acontece quando temos uma caixa fechada, em forma de paralelepípedo, com suas superfícies internas feitas de material condutor ideal. Uma tal região do espaço é conhecida como uma cavidade ressonante. Vamos ver que, obviamente, não há como ter ondas propagantes, já que todas as direções do espaço são delimitadas por condutores. No entanto, ainda assim podem formar-se ondas estacionárias para certas frequências determinadas pela geometria interna da cavidade. Essas frequências são chamadas frequências de ressonância da cavidade ressonante. Vamos analisar o exemplo de uma cavidade em forma de paralelepípedo para simplificar os cálculos, mas há cavidades ressonantes das mais variadas formas.

Quando há condutividade finita nas paredes internas da cavidade, o campo eletromagnético no seu interior acaba sendo gradativamente absorvido pelo material da cavidade, isto é, a energia eletromagnética armazenada na cavidade é dissipada por efeito Joule nas paredes condutoras. Quanto maior a condutividade, menor a absorção da energia eletromagnética pelas paredes. Por essa razão, dizemos que uma cavidade de maior condutividade tem uma melhor qualidade e que o chamado fator de qualidade, Q , é alto. O fator de qualidade mede, essencialmente, a razão entre a energia armazenada na cavidade e a energia perdida por ciclo, na frequência de ressonância daquela energia armazenada (supondo campos aproximadamente monocromáticos). Mas, aqui, como não trataremos o caso dissipativo, não vamos nos deter com a definição exata do fator de qualidade.



Consideremos uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo, escavada em um material condutor ideal. Seja o paralelepípedo que dá forma à cavidade definido pelos seguintes vértices: $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(a, b, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, b, h)$, $(0, 0, h)$, $(a, 0, h)$ e (a, b, h) . Nesse caso, as ondas no interior da cavidade não são propagantes; são estacionárias. Tomemos uma dependência temporal dada por $\exp(-i\omega t)$ e tentemos o ansatz:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= E_1 f_1(x) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_y &= E_2 \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) f_2(y) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_z &= E_3 \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) f_3(z) \exp(-i\omega t),\end{aligned}$$

para $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$, pois, como as paredes da cavidade são idealmente condutoras e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, ϵ_x deve se anular para $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ e $z = h$, ϵ_y deve se anular para $x = 0$, $x = a$,

$z = 0$ e $z = h$ e ϵ_z deve se anular para $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$. Supomos E_1 , E_2 e E_3 reais por simplicidade e devemos encontrar as funções f_1 , f_2 e f_3 . Como no interior da cavidade não há cargas por hipótese, a divergência do campo elétrico deve ser nula e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} &= E_1 \frac{df_1(x)}{dx} \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \\ &+ E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \frac{df_2(y)}{dy} \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \\ &+ E_3 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \frac{df_3(z)}{dz} \exp(-i\omega t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Essa igualdade deve ser verdadeira para todo valor de n_x, n_y, n_z , x , y e z . Tomando um caso em que n_x, n_y, n_z , x , y e z são não nulos e dividindo essa equação pelo produto $\operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t)$, obtemos

$$\frac{E_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right)} \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{E_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)} \frac{df_2(y)}{dy} + \frac{E_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right)} \frac{df_3(z)}{dz} = 0.$$

A única forma de satisfazer essa condição para todo ponto dentro da cavidade é escolhermos cada um dos termos acima igual a uma constante:

$$\begin{aligned}\frac{E_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right)} \frac{df_1(x)}{dx} &= C_1, \\ \frac{E_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)} \frac{df_2(y)}{dy} &= C_2, \\ \frac{E_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right)} \frac{df_3(z)}{dz} &= C_3,\end{aligned}$$

com

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}f_1(x) &= -\frac{C_1}{E_1} \frac{a}{n_x \pi} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right), \\ f_2(y) &= -\frac{C_2}{E_2} \frac{b}{n_y \pi} \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right), \\ f_3(z) &= -\frac{C_3}{E_3} \frac{h}{n_z \pi} \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right).\end{aligned}$$

Notemos que poderíamos ter adicionado uma constante a cada uma das funções acima, mas o caso constante já está incluído se considerarmos n_x, n_y, n_z também assumindo o valor 0. Logo, a solução para este problema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -C_1 \frac{a}{n_x \pi} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_y &= -C_2 \frac{b}{n_y \pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_z &= -C_3 \frac{h}{n_z \pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t),\end{aligned}$$

com

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

Essa solução, como está expressa, implica em ignorarmos os casos em que um dos n 's é nulo. Para podermos incluir esses casos também, dada a arbitrariedade das constantes introduzidas acima, escolhemos

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -C_1 \frac{a}{n_x \pi}, \\ E_{0y} &= -C_2 \frac{b}{n_y \pi}, \\ E_{0z} &= -C_3 \frac{h}{n_z \pi}. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= E_{0x} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_y &= E_{0y} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_z &= E_{0z} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \end{aligned}$$

com

$$E_{0x} \frac{n_x}{a} + E_{0y} \frac{n_y}{b} + E_{0z} \frac{n_z}{h} = 0$$

e $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$, exceto os casos em que pelo menos dois n 's são nulos.

Agora, calculemos β . Da lei de Faraday, temos:

$$\beta = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \epsilon,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\frac{i}{\omega} \left[\frac{n_y \pi}{b} E_{0z} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_z \pi}{h} E_{0y} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= -\frac{i}{\omega} \left(\frac{n_y \pi}{b} E_{0z} - \frac{n_z \pi}{h} E_{0y} \right) \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \beta_y &= -\frac{i}{\omega} \left[\frac{n_z \pi}{h} E_{0x} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_x \pi}{a} E_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= -\frac{i}{\omega} \left(\frac{n_z \pi}{h} E_{0x} - \frac{n_x \pi}{a} E_{0z} \right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_z &= -\frac{i}{\omega} \left[\frac{n_x \pi}{a} E_{0y} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_y \pi}{b} E_{0x} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= -\frac{i}{\omega} \left(\frac{n_x \pi}{a} E_{0y} - \frac{n_y \pi}{b} E_{0x} \right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Forma alternativa de tratar este problema (**como exercício**)

Este mesmo problema pode ser resolvido considerando as soluções para o exemplo do guia de ondas de seção transversal retangular constante, mas com tampas nas extremidades. Assim, para os modos TE do guia de ondas temos

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right),$$

que só não é trivial quando $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$. Para uma cavidade construída a partir desse guia, como há reflexão nas tampas, devemos considerar a superposição

$$\beta_z^{\text{cav}} = \beta_{z1} + \beta_{z2},$$

onde definimos

$$\beta_{z1} = \beta_1 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)$$

e

$$\beta_{z2} = \beta_2 \exp(-ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)$$

Como os modos são, por hipótese, TE, temos $\epsilon_z^{\text{cav}} = 0$ e, da continuidade da componente tangencial do campo elétrico, também devemos impor $\epsilon_x^{\text{cav}} = \epsilon_y^{\text{cav}} = 0$ em $z = 0$ e $z = h$.

Mas, de acordo com o exemplo de um guia de ondas de seção transversal retangular constante,

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{\text{cav}} &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z1}}{\partial y} \right) - \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z2}}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_y^{\text{cav}} &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z1}}{\partial x} \right) + \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z2}}{\partial x} \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

de forma que devemos impor

$$\left[\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} \right]_{z=0,h} = 0$$

e

$$\left[\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} \right]_{z=0,h} = 0.$$

Aqui, c é a magnitude de propagação da luz no vácuo, isto é,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

No entanto, todos os resultados obtidos aqui também valem quando, dentro da cavidade, há um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, caracterizado pelas constantes μ e ε . Nesse caso, basta trocar c , nas equações acima, pela velocidade de propagação no meio dielétrico, isto é,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

As derivadas de β_z^{cav} que precisamos são calculadas assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} &= -\frac{n_x \pi}{a} \beta_1 \exp(ik_z z - i\omega t) \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \\ &\quad - \frac{n_x \pi}{a} \beta_2 \exp(-ik_z z - i\omega t) \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} &= -\frac{n_y \pi}{b} \beta_1 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \\ &\quad - \frac{n_y \pi}{b} \beta_2 \exp(-ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right). \end{aligned}$$

Impondo as condições acima, concluímos que:

$$\beta_2 = -\beta_1$$

e

$$k_z = \frac{n_z \pi}{h}, \text{ para } n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo, escolhendo

$$\beta_{0z} = 2i\beta_1,$$

obtemos

$$\beta_z^{\text{cav}} = \beta_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t)$$

e, para não termos solução trivial, devemos ter $n_z \neq 0$, isto é,

$$n_z = 1, 2, 3, \dots$$

Calculemos, portanto, o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{\text{cav}} &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} \right) \\ &= \frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_y \pi}{b} \beta_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_y^{\text{cav}} &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_x \pi}{a} \beta_{0z} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Dessas equações verificamos que as amplitudes que calculamos anteriormente escrevem-se

$$E_{0x} = \frac{i\omega}{\left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_y\pi}{b} \beta_{0z}$$

e

$$E_{0y} = -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_x\pi}{a} \beta_{0z}.$$

Da relação que obtivemos anteriormente,

$$E_{0x} \frac{n_x}{a} + E_{0y} \frac{n_y}{b} + E_{0z} \frac{n_z}{h} = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} E_{0z} \frac{n_z}{h} &= -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{n_y\pi}{b} \frac{n_x}{a} - \frac{n_x\pi}{a} \frac{n_y}{b} \right) \beta_{0z} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa análise, concluímos que obtivemos modos TE, já que $n_z \neq 0$ e, portanto,

$$E_{0z} = 0.$$

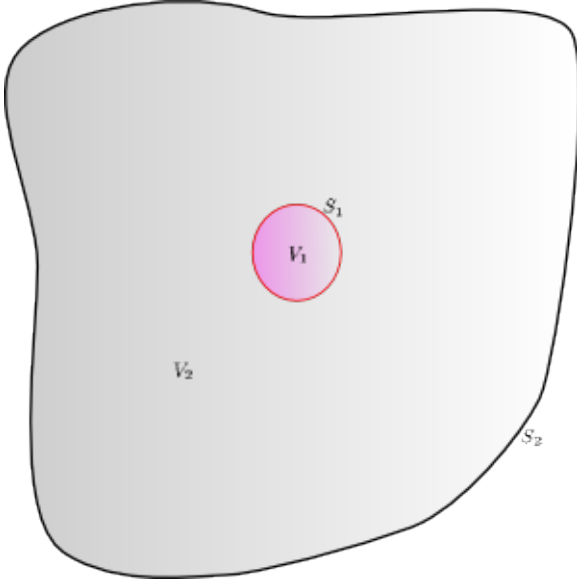
Finalmente, notamos que as frequências possíveis são obtidas da equação de onda:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2.$$

Teoria Escalar da Difração

Em óptica geométrica, o comprimento de onda da luz é desprezível e os raios de luz não contornam obstáculos, mas propagam-se sempre em linha reta. A difração acontece quando o comprimento de onda da luz, perante obstáculos, não pode mais ser considerado completamente desprezível. Aqui vamos considerar a teoria de difração para um campo escalar, pois a teoria vetorial é mais complicada e será tratada posteriormente.

Seja $\psi(\mathbf{r}, t)$ um campo conhecido em uma região V_1 do espaço, como mostra a figura abaixo. Portanto, seja o espaço separado em duas regiões: V_1 e V_2 , com S_1 sendo a superfície de separação entre as duas regiões. Suponhamos, também, que a outra parte da fronteira da região V_2 , que denotaremos por S_2 , esteja muito distante da superfície S_1 (que também é parte da fronteira de V_2), isto é, seja S_2 uma superfície infinitamente distante da região V_1 , que não, necessariamente, deva ser considerada limitada.



Vamos considerar também que a dependência temporal de $\psi(\mathbf{r}, t)$ seja harmônica, com frequência ω , isto é, $\exp(-i\omega t)$. Além disso, suponhamos que $\psi(\mathbf{r}, t)$ satisfaça a equação de onda na região V_2 , ou seja,

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

que, com o ansatz temporal que adotamos, resulta na equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + k^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

onde, como usualmente, definimos

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

No espaço vazio, a função de Green, $G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, para a equação de Helmholtz, que satisfaz

$$\nabla^2 G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

é dada por

$$G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

No entanto, não podemos utilizar essa função de Green para obter o propagador do campo $\psi(\mathbf{r}, t)$, pois não estamos considerando o espaço vazio, mas uma região do espaço com uma fronteira em S_1 e outra em S_2 , embora S_2 seja infinitamente distante. Voltaremos a considerar a função de Green adequada para nosso problema depois que formularmos a teoria de difração; no momento apenas consideremos conhecida a função de Green adequada, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Derivemos agora o Teorema de Green no contexto formulado acima. Seja o campo vetorial auxiliar:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r}, t).$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss,

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{S(V)} da \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

onde V é uma região arbitrária do espaço e $S(V)$ é a fronteira de V . Aqui, \mathbf{n}_{ext} é a normal externa à região V . Notemos que ∇ opera em \mathbf{r} e não em \mathbf{r}' ; no presente contexto, \mathbf{r}' é um vetor fixo que, por hipótese, tomaremos sempre dentro da região V . Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \\ &= G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] + [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \\ &= G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_V d^3r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \int_V d^3r [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] = \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t).$$

Seguindo um procedimento análogo, é fácil deduzir também que

$$\int_V d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int_V d^3r [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \cdot [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

A subtração membro a membro dessas duas equações resulta no Teorema de Green no presente contexto:

$$\begin{aligned} \int_V d^3r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \int_V d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \\ &\quad - \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Como

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + k^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

por hipótese, e

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

pois $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é uma função de Green para a equação de Helmholtz, segue, do Teorema de Green, que

$$\int_V d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

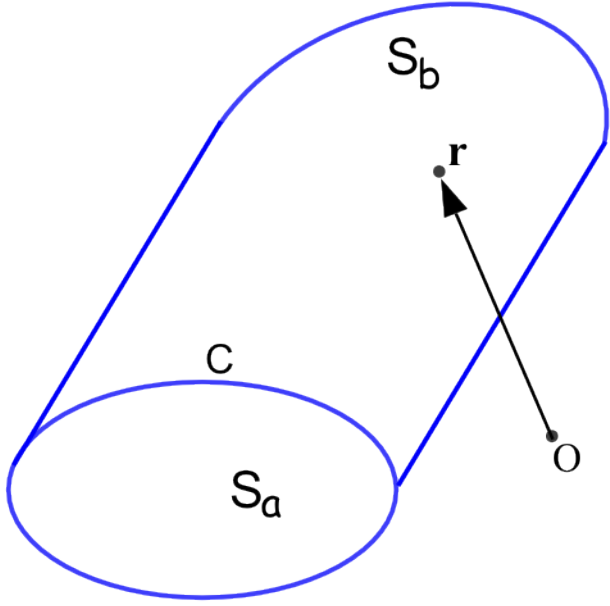
isto é,

$$\psi(\mathbf{r}', t) = \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

se \mathbf{r}' for um ponto da região V que, por hipótese, é. Trocando a notação, podemos também escrever

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \oint_{S(V)} da' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \oint_{S(V)} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}),$$

para \mathbf{r} em V .



Essa expressão é interessante porque com ela podemos mostrar que $\psi(\mathbf{r}, t) = 0$ em todo lugar se, sobre alguma região S_a da superfície fechada $S(V)$, tivermos, simultaneamente,

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0$$

e

$$\mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Para apreendermos isso, vejamos uma situação simples. Suponhamos que a superfície fechada S seja a união de duas superfícies abertas, S_a e S_b , com as quantidades $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ e $\mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ ambas nulas sobre S_a . Usando o Teorema de Green, no interior de S temos

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= \oint_S da' \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\ &= \int_{S_a} da' \mathbf{n}'_a \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\ &\quad + \int_{S_b} da' \mathbf{n}'_b \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \end{aligned}$$

onde \mathbf{n}'_a é a normal sobre S_a , e \mathbf{n}'_b é a normal sobre S_b . Sobre S_a , as quantidades $G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ e $\mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})$ são nulas. Logo,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{S_b} da' \mathbf{n}'_b \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})].$$

Seja C a fronteira entre S_a e S_b . Sobre a superfície S_b e sua vizinhança, exceto sobre o ponto \mathbf{r} , temos

$$\begin{aligned}\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

Como também temos que

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) = -k^2 \psi(\mathbf{r}, t),$$

segue que, exceto sobre \mathbf{r} ,

$$\begin{aligned}\nabla' \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] &= [\nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \cdot [\nabla' \psi(\mathbf{r}', t)] + G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla'^2 \psi(\mathbf{r}', t) \\ &- [\nabla' \psi(\mathbf{r}', t)] \cdot [\nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla'^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= -k^2 G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}', t) + k^2 \psi(\mathbf{r}', t) G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= 0\end{aligned}$$

e, portanto, existe um campo vetorial $\mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)$ tal que

$$G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = \nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t).$$

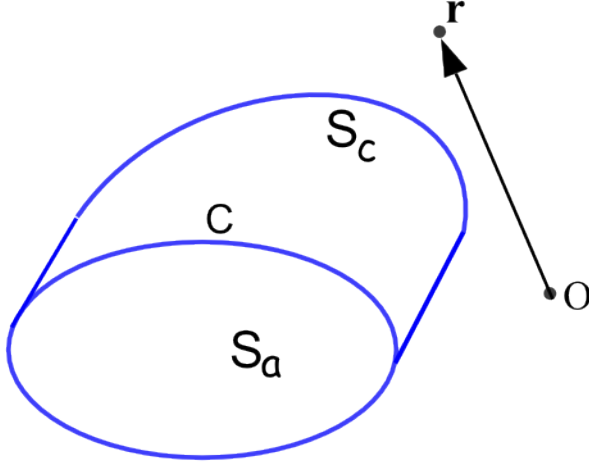
Logo,

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \int_{S_b} da' \mathbf{n}'_b \cdot [\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)].$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t),$$

onde $d\mathbf{r}'$ é o elemento de caminho da curva fechada C . Escolhamos outra superfície, S_c , que também tem a fronteira C com a superfície S_a , tal que $S_a \cup S_c$ seja fechada. Mas, seja S_c tal que o ponto \mathbf{r} agora fique fora da região cuja superfície é $S_a \cup S_c$.



Podemos usar novamente o Teorema de Green e escrever

$$\begin{aligned}
 0 &= \oint_{S_a \cup S_c} da' \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\
 &= \int_{S_a} da' \mathbf{n}'_a \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\
 &\quad + \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})],
 \end{aligned}$$

onde \mathbf{n}'_c é a normal sobre S_c . Como o integrando é nulo sobre a superfície S_a , por hipótese, segue que

$$\begin{aligned}
 \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)] &= \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \psi(\mathbf{r}', t) \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Usando o Teorema de Stokes, obtemos

$$\begin{aligned}
 \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t) &= \int_{S_c} da' \mathbf{n}'_c \cdot [\nabla' \times \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t)] \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

Como já obtivemos, usando a superfície S_b ao invés de S_c , que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \oint_C d\mathbf{r}' \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}', \mathbf{r}, t),$$

segue, finalmente, que

$$\psi(\mathbf{r}, t) = 0$$

para todo \mathbf{r} .

Dessa análise concluímos que, para um campo não ser nulo em todo espaço, não podemos impor condições de contorno em que, simultaneamente, a função de Green tenha seu valor e sua derivada normal nulos em nenhuma parte da superfície fechada da região de interesse. Podemos, no entanto, obter uma solução não trivial para o campo escalar se impusermos condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann. A seguir, apenas o caso de condição de contorno de Dirichlet será apresentado; o caso de Neumann é análogo.

Condição de contorno de Dirichlet

No caso de termos a condição de contorno de Dirichlet, tomamos a função de Green de Dirichlet, $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, satisfazendo

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0, \text{ para } \mathbf{r}' \text{ sobre } S.$$

Nesse caso, escrevemos

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) &= - \oint_S da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= - \int_{S_1} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &\quad - \int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}). \end{aligned}$$

Como estamos supondo que S_2 seja uma superfície infinitamente distante, vamos também supor que o campo satisfaça uma condição de radiação, isto é, para r muito grande,

$$\psi(\mathbf{r}, t) \rightarrow f(\theta, \varphi) \frac{\exp(ikr)}{r}$$

e que, em virtude disso,

$$\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Logo, queremos encontrar uma solução que seja dada por

$$\psi(\mathbf{r}, t) = - \int_{S_1} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}).$$

Depois de encontrarmos explicitamente a função de Green de Dirichlet, deveremos verificar se, de fato, teremos, de forma consistente,

$$\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Até agora ainda não explicitamos qual é a forma da superfície S_1 . Isso depende especificamente do problema que queiramos resolver. Há, porém, um caso importante, em que S_1 possa ser aproximada por um plano infinito, com

aberturas através das quais o campo penetra a região de fronteira $S = S_1 \cup S_2$. Nesse caso, tomando S_1 como o plano xy e S_2 como um plano paralelo ao plano xy localizado infinitamente distante da origem, mas no lado positivo do eixo z , através do método das imagens, é fácil ver que a função de Green de Dirichlet é dada por

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|},$$

onde

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' - 2z'\hat{\mathbf{z}} \\ &= x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} - z'\hat{\mathbf{z}}.\end{aligned}$$

Portanto, na região de interesse, isto é, quando $z > 0$ e $z' > 0$,

$$\begin{aligned}\nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla^2 \left\{ \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right\} - \nabla^2 \left\{ \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right\} \\ &= -k^2 \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\ &+ k^2 \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} + \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'')\end{aligned}$$

e, como $z > 0$ e $z' > 0$, segue que

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'') = 0.$$

Portanto,

$$\nabla^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

e

$$G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0$$

se \mathbf{r}' estiver sobre o plano xy . Logo, essa é a forma da função de Green para a condição de Dirichlet. Incidentalmente, também vemos que $G_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ se anula sobre S_2 , como deveria ser.

Falta agora verificarmos a consistência de nossa hipótese acerca da igualdade

$$\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = 0.$$

Para isso, sobre S_2 , temos

$$\begin{aligned}\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &- \int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right].\end{aligned}$$

Mas,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \\ &= \left[ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right] \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial z'}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2} \\ &= -\frac{(z - z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}}.\end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] &= \frac{\partial}{\partial z'} \left[\frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] \\ &= \left[ik - \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \right] \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|} \frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}{\partial z'}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\frac{\partial |\mathbf{r} - \mathbf{r}''|}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z'} \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2} \\ &= \frac{(z + z')}{\sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + z')^2}}.\end{aligned}$$

No limite em que z' torna-se infinitamente grande,

$$\begin{aligned}\int_{S_2} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= \frac{1}{z'} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \psi(\mathbf{r}', t) ik \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi} \\ &- \frac{1}{z'} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \psi(\mathbf{r}', t) ik \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi} \\ &= 0,\end{aligned}$$

como esperado.

A teoria escalar da difração com condição de contorno de Dirichlet é dada em termos da equação

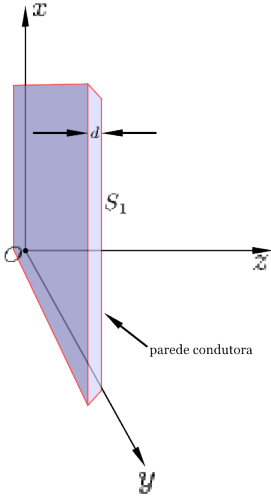
$$\psi(\mathbf{r}, t) = - \int_{S_1} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}' \cdot \nabla' G_D(\mathbf{r}', \mathbf{r}).$$

Logo acima, como exemplo concreto, tomamos um caso especial com a função de Green de uma superfície plana infinita, mas, para qualquer outro problema, a prescrição é usar a equação acima com a função de Green de Dirichlet adequada. Além de escolher a função de Green adequada, a aproximação que normalmente é feita consiste em supor que o campo é nulo em todo ponto da superfície S_1 , exceto nas aberturas, onde o valor do campo é tomado como aquele da onda incidente na região da abertura.

Teoria Vetorial da Difração

Depois de termos visto a a teoria escalar da difração, de forma didática, vamos formular uma teoria vetorial de difração para ondas eletromagnéticas. Teremos que tomar cuidado com as inconsistências que podem aparecer, no caso vetorial, envolvendo as condições de contorno que os campos devem satisfazer. Aqui vamos seguir o livro de J. D. Jackson e, para

evitar situações complicadas, vamos considerar que uma superfície plana idealmente condutora, S_1 , coincida com o plano xy . As fontes dos campos serão supostas apenas em $z < 0$. A região $z \geq 0$ será tomada como a região de difração. A figura abaixo ilustra a situação. Note que a superfície S_1 é apenas a superfície que define a fronteira da região de difração, isto é, constitui apenas uma das superfícies condutoras da suposta parede condutora separando a região $z < 0$, onde as fontes dos campos se encontram, da região de difração $z \geq 0$. Como mostra a figura, essa parede de separação tem uma espessura d e os campos totais no interior do material condutor ideal que compõe a parede são nulos. Então, para sermos precisos, vamos supor que as fontes estejam na região $z < -d$, sendo que haverá também cargas e correntes induzidas na superfície em $z = -d$, que **não** serão consideradas como fontes dos campos existentes na região $z < 0$. A teoria a ser desenvolvida a seguir prevê os campos na região $z \geq 0$, incluindo a superfície S_1 . Enfatizamos, portanto, que a superfície S_1 é uma entidade matemática e não uma parede condutora infinitamente fina, embora os argumentos abaixo sobre a simetria dos potenciais vetorial e escalar valham apenas quando tomarmos d infinitesimal.



Sejam $\mathbf{E}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$ os campos que seriam produzidos pelas fontes na ausência da parede condutora e, portanto, na ausência da superfície S_1 (em $z = 0$) e da superfície em $z = -d$. Em outras palavras, os campos $\mathbf{E}^{(0)}$ e $\mathbf{B}^{(0)}$ são os devidos a apenas as fontes em $z < -d$. Assim, os campos totais podem ser escritos:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}'$$

e

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}',$$

onde \mathbf{E}' e \mathbf{B}' são os campos espalhados pelas cargas e correntes induzidas na parede condutora, de espessura infinitesimal d .

Sejam a corrente e a densidade superficiais complexas induzidas na superfície S_1 dadas por $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\sigma(x, y, 0)$, respectivamente. Analogamente, sejam a corrente e a densidade superficiais complexas induzidas na superfície $z = -d$ dadas por $\mathbf{j}(x, y, -d)$ e $\sigma(x, y, -d)$, respectivamente. O potencial vetorial total, produzido pelas correntes superficiais $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\mathbf{j}(x, y, -d)$, terá componente z nula, já que as correntes superficiais só não se anulam em direções paralelas ao plano xy . Escrevamos, portanto,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

onde $\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t)$ é o potencial vetorial complexo resultante das correntes induzidas e $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$ e $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ são os potenciais vetoriais complexos induzidos, cada um, por cada uma das respectivas correntes $\mathbf{j}(x, y, 0)$ e $\mathbf{j}(x, y, -d)$. Então, é fácil

veremos que, no caso da superfície S_1 , por simetria, as componentes do vetor potencial $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$ serão funções pares da coordenada z . Para vermos isso basta escrever a expressão do potencial vetorial complexo no calibre de Lorentz:

$$\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{j}(x', y', 0) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}.$$

Veja que a troca de z por $-z$ não altera o valor de $\mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t)$.

De forma análoga, as componentes do vetor potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ serão funções simétricas com relação ao plano $z = -d$, como pode ser visto a partir da expressão:

$$\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\mathbf{j}(x', y', -d) \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

onde, neste caso,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + d)^2}.$$

Note que a troca de $z + d$ por $-d - z$ não altera o valor de $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$. Então, um ponto P , de coordenada z , dista $z + d$ do plano $z = -d$. O ponto simétrico ao plano $z = -d$ deve estar à mesma distância deste plano que o ponto P , mas do outro lado. Logo, a coordenada z desse ponto simétrico deve ser dada, em termos da coordenada z do ponto P , por $-d - z$. Como vemos na expressão acima, o potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ é simétrico com relação a essa troca. No entanto, como d é infinitesimal, o plano $z = -d$ tende para o plano xy e, portanto, nesse limite, o potencial $\mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t)$ torna-se simétrico com relação ao plano xy . Então, a soma de duas funções pares com relação à coordenada z é também par com relação a essa coordenada. Logo, o potencial vetorial complexo total,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}'_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

é par com relação à coordenada z .

O mesmo se aplica ao potencial escalar: será uma função par da coordenada z . Essa simetria pode ser vista a partir das expressões para os potenciais complexos no calibre de Lorentz:

$$\phi'(\mathbf{r}, t) = \phi'_0(\mathbf{r}, t) + \phi'_{-d}(\mathbf{r}, t),$$

onde

$$\phi'_0(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\sigma_0(x', y') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

com

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2}$$

e

$$\phi'_{-d}(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} dx' \int_{-\infty}^{\infty} dy' \frac{\sigma_{-d}(x', y') \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| - i\omega t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|},$$

neste caso com

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z + d)^2}.$$

Fica evidente das expressões para os potenciais acima que

$$\phi'(x, y, -z, t) = \phi'(x, y, z, t),$$

$$A'_x(x, y, -z, t) = A'_x(x, y, z, t)$$

e

$$A'_y(x, y, -z, t) = A'_y(x, y, z, t).$$

Como

$$\mathbf{E}' = -\nabla\phi' + ik\mathbf{A}',$$

segue que

$$E'_x(x, y, -z, t) = E'_x(x, y, z, t)$$

e

$$E'_y(x, y, -z, t) = E'_y(x, y, z, t),$$

já que

$$\frac{\partial\phi'(x, y, -z, t)}{\partial x} = \frac{\partial\phi'(x, y, z, t)}{\partial x}$$

e

$$\frac{\partial\phi'(x, y, -z, t)}{\partial y} = \frac{\partial\phi'(x, y, z, t)}{\partial y}.$$

No entanto,

$$E'_z(x, y, -z, t) = -E'_z(x, y, z, t),$$

pois

$$\frac{\partial \phi'(x, y, -z, t)}{\partial(-z)} = -\frac{\partial \phi'(x, y, z, t)}{\partial z}.$$

Como

$$\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}',$$

temos

$$B'_x = -\frac{\partial A'_y}{\partial z},$$

$$B'_y = \frac{\partial A'_x}{\partial z}$$

e

$$B'_z = \frac{\partial A'_y}{\partial x} - \frac{\partial A'_x}{\partial y}.$$

Portanto,

$$B'_x(x, y, -z, t) = -B'_x(x, y, z, t),$$

$$B'_y(x, y, -z, t) = -B'_y(x, y, z, t)$$

e

$$B'_z(x, y, -z, t) = B'_z(x, y, z, t).$$

Em resumo, com relação à coordenada z , E'_x , E'_y e B'_z são funções pares e B'_x , B'_y e E'_z são ímpares.

Difração baseada no campo indução magnética

Para evitar inconsistências na teoria, podemos utilizar condições de contorno de Dirichlet ou de Neumann sobre S_1 . Vamos utilizar a condição de Neumann, assim poderemos expressar o potencial vetorial em termos das componentes do campo indução magnética sobre S_1 . Logo, como quando analisamos a teoria escalar da difração, é fácil obter a função de Green de Neumann:

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}''|},$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'' &= \mathbf{r}' - 2z'\hat{\mathbf{z}} \\ &= x'\hat{\mathbf{x}} + y'\hat{\mathbf{y}} - z'\hat{\mathbf{z}}. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = - \int_{S_1} da' G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t),$$

onde a normal à superfície S_1 é escolhida ao longo do sentido positivo do eixo z . A integral é, portanto, para ser calculada em $z' = 0^+$. Não há problema com calcular a integral em $z' = 0^+$ mesmo para $z < 0$, pois as componentes do potencial vetorial são pares com relação à coordenada z . Notemos que

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G_N(\mathbf{r}', \mathbf{r})$$

e, sobre S_1 , temos $z' = 0$, implicando em

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}''| &= \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \\ &= |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|, \end{aligned}$$

isto é,

$$G_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{2\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

Com isso,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t).$$

Sabemos que

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t) &= \frac{\partial \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t)}{\partial z'} \\ &= \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial A'_x(\mathbf{r}', t)}{\partial z'} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial A'_y(\mathbf{r}', t)}{\partial z'} \end{aligned}$$

e, portanto, de $\mathbf{B}' = \nabla \times \mathbf{A}'$, vem

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{z}} \cdot \nabla' \mathbf{A}'(\mathbf{r}', t) &= \hat{\mathbf{x}} B'_y(\mathbf{r}', t) - \hat{\mathbf{y}} B'_x(\mathbf{r}', t) \\ &= -\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t). \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathbf{A}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).$$

Agora podemos usar essa expressão para obter o campo indução magnética:

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).$$

Como as componentes B'_x e B'_y são ímpares, segue que o integrando se anula nas aberturas, pois nelas não há descontinuidade na componente tangencial do campo indução magnética. Logo, a integral só não é nula sobre a parte metálica da superfície S_1 e escrevemos

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{\text{metal}} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t).$$

O campo elétrico associado a esse campo indução magnética pode ser obtido da Lei de Ampère & Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{B}' = -ik\mathbf{E}',$$

isto é,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) &= \frac{i}{k} \nabla \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) \\ &= \frac{i}{2\pi k} \nabla \times \left[\nabla \times \int_{\text{metal}} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) \right].\end{aligned}$$

Essa abordagem é conveniente quando, ao invés de a parede condutora ter aberturas, tivermos, na região geométrica da parede, uma ou mais placas metálicas delgadas tangenciando o plano xy , como, por exemplo, um disco de raio a . A maior dificuldade está em determinarmos, sobre o metal, o valor das componentes tangentes do campo indução magnética para obtermos o valor de $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t)$ que aparece no integrando. Como uma aproximação, podemos usar $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^{(0)}(\mathbf{r}', t)$.

Difração baseada no campo elétrico

Seria interessante termos uma teoria vetorial da difração mais conveniente para o caso de aberturas, como originalmente encaminhamos a discussão, e não como no caso acima, em que a integral envolvida, ao invés de ser feita sobre as aberturas, é feita sobre o metal. Se, no integrando envolvido em uma tal abordagem alternativa tivermos $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$, onde $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}'$ é o campo elétrico total, então, porque, como vimos, as componentes tangenciais do campo elétrico se anulam no condutor, a integral deverá ser feita apenas nas aberturas. Para construirmos uma teoria da difração com essa peculiaridade, ao invés de basearmos a abordagem no cálculo do campo indução magnética, como fizemos acima, podemos começar procurando por uma outra solução para o campo elétrico, satisfazendo as equações de Maxwell, mas que tenha algo como $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ no integrando. Uma maneira imediata de encontrarmos um campo elétrico espalhado, dado em termos de uma integral com um integrando envolvendo $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t)$, decorre da propriedade de o conjunto formado pelas equações de Maxwell no presente contexto ser invariante pela transformação

$$\mathbf{E}' \rightarrow \mathbf{B}'$$

e

$$\mathbf{B}' \rightarrow -\mathbf{E}'.$$

Com isso, a solução obtida anteriormente, para o campo indução magnética, isto é,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}'(\mathbf{r}', t) \quad (\text{abordagem anterior}),$$

se transforma em

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t), \quad \text{para, digamos, } z > 0.$$

Ainda não conseguimos, como desejado, $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ no integrando e, portanto, ainda não podemos fazer a integral apenas sobre as aberturas da superfície condutora S_1 , mas resolveremos isso mais adiante. É importante notarmos, desde já, que esse resultado para o campo elétrico não decorre simplesmente de tomarmos o rotacional do campo indução magnética da

abordagem anterior e multiplicá-lo por i/k , que é distinta da presente discussão. Esse campo elétrico, inclusive, fornece um campo indução magnética distinto, obtido da Lei da Indução de Faraday,

$$\nabla \times \mathbf{E}' = ik\mathbf{B}',$$

isto é,

$$\mathbf{B}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{i}{2\pi k} \nabla \times \left[\nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t) \right], \text{ para } z > 0.$$

Também é importante notarmos que, ao contrário do campo indução magnética da abordagem anterior, o campo elétrico proposto acima deve ter componentes tangenciais pares e componente normal ímpar, com relação à coordenada z . Caso formos calcular o resultado para $z < 0$, como a integral é feita para $z' = 0^+$, segue que a componente z do campo elétrico deve mudar de sinal e propomos, então,

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t), \text{ para } z < 0.$$

Por construção, portanto, $\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)$ satisfaz as equações de Maxwell e também possui a simetria requerida com relação à superfície S_1 .

Para o cálculo do campo elétrico acima, a integral deve ser feita sobre todo o plano xy . No entanto, como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}',$$

podemos também escrever

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) - \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t), \text{ para } z > 0,$$

e

$$\mathbf{E}'(\mathbf{r}, t) = -\frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t) + \mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t), \text{ para } z < 0,$$

onde $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ é o campo elétrico total e definimos

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t).$$

Como a componente tangencial do campo elétrico total deve ser contínua e o campo elétrico deve anular-se no interior de um condutor ideal, segue que as integrais envolvendo $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}$ são nulas em todo o plano xy , exceto nas aberturas. O que significa o campo $\mathbf{E}^{(1)}$? Analogamente ao que fizemos no caso do campo \mathbf{E}' , para $z > 0$, é evidente que se, ao invés de $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}'(\mathbf{r}', t)$ no integrando da expressão colocássemos $\hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t)$, obteríamos, ao invés de \mathbf{E}' , o campo não perturbado, $\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t)$, isto é,

$$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{S_1} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}', t), \text{ para } z > 0.$$

Logo,

$$\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r}, t).$$

Assim, para $z > 0$, o campo elétrico total pode ser escrito

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \nabla \times \int_{\text{Aberturas}} da' \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}', t), \text{ para } z > 0,$$

que é definido como o campo elétrico difratado.

A geometria do espaço-tempo

Uma revisão da cinemática e da dinâmica relativísticas

Uma transformação de Lorentz deixa invariante o intervalo s_{AB}^2 entre dois eventos, A e B , do espaço-tempo. Em um referencial inercial S , o intervalo entre esses dois eventos é definido como

$$s_{AB}^2 = c^2 (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2,$$

onde o evento A ocorre no instante t_A e no ponto (x_A, y_A, z_A) e o evento B ocorre no instante t_B e no ponto (x_B, y_B, z_B) . Assim, em um outro referencial inercial S' o intervalo entre os eventos A e B é também s_{AB}^2 , isto é,

$$\begin{aligned} s_{AB}^2 &= c^2 (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 \\ &= c^2 (t'_A - t'_B)^2 - (x'_A - x'_B)^2 - (y'_A - y'_B)^2 - (z'_A - z'_B)^2, \end{aligned}$$

onde, para os observadores em S' , o evento A ocorre no instante t'_A e no ponto (x'_A, y'_A, z'_A) , o evento B ocorre no instante t'_B e no ponto (x'_B, y'_B, z'_B) e $c > 0$ é a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Um exemplo de transformação de Lorentz muito comum é a chamada boost de Lorentz ao longo do eixo x :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right), \end{aligned}$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c} \text{ e } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Aqui, $v = v\hat{\mathbf{x}}$ é a velocidade relativa entre os referenciais S e S' e, portanto, v pode ser uma constante positiva ou negativa.

A força de Lorentz sobre uma carga q puntiforme é escrita como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema CGS, ou

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema MKS, onde

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_q(t)$$

é o vetor posição da carga q no instante t . A Segunda Lei de Newton continua válida na dinâmica relativística quando escrevemos

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

onde

$$\mathbf{p} = m \frac{d\mathbf{r}_q}{dt}$$

e

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2}},$$

com m_0 sendo a massa de repouso da partícula. Portanto, a chamada “parte espacial” da força fica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema CGS, ou

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema MKS. Existe uma “parte temporal” da força, que seja sua “companheira” de transformação de Lorentz, assim como o tempo é o “companheiro” do espaço no “boost” de Lorentz acima?

Para responder a essa questão, consideremos o momentum \mathbf{p} e sua “companheira”, a energia U :

$$\begin{aligned} U &= mc^2 \\ &= \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2}}. \end{aligned}$$

Notemos que U não é a energia cinética. A energia cinética é $K = U - m_0 c^2$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 &= \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2} - \frac{m_0^2}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2 \\ &= \frac{m_0^2 c^2}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2} \left[1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2 \right] \\ &= m_0^2 c^2. \end{aligned}$$

Como $m_0^2 c^2$ é um valor fixo em qualquer referencial inercial, concluímos que U/c e \mathbf{p} se transformam exatamente como tempo e posição, respectivamente. Assim, vemos que U/c é a “companheira” do momentum \mathbf{p} em transformações de Lorentz. No entanto,

$$\frac{1}{c} \frac{dU}{dt} \text{ e } \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

não se transformam como U/c e \mathbf{p} pois dt não é invariante por transformações de Lorentz. Como o tempo próprio da partícula, τ , é o mesmo em qualquer referencial inercial, podemos definir o par

$$\frac{1}{c} \frac{dU}{d\tau} \text{ e } \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}.$$

Essa dupla de quantidades se comporta como tempo e espaço em transformações de Lorentz.

O tempo próprio é o tempo no referencial de repouso instantâneo da partícula, com a origem sobre a partícula. Notemos que o referencial de repouso instantâneo da partícula é aquele que, no instante t de S , tem velocidade dx_q/dt em S , supondo que escolhamos os referenciais S e S' com seus eixos x e x' ao longo da velocidade instantânea da partícula. Fixando o referencial S' com velocidade constante dx_q/dt calculada em t , relativamente a S , podemos utilizar o boost de Lorentz acima e escrever

$$d\tau = \frac{dt - \frac{1}{c^2} \frac{dx_q}{dt} dx_q}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_q}{dt} \right)^2}}$$

e

$$0 = \frac{dx_q - \frac{dx_q}{dt} dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_q}{dt} \right)^2}},$$

resultando em

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{dx_q}{dt} \right)^2}.$$

Como sempre podemos escolher os eixos dos referenciais ao longo da velocidade da partícula, de forma geral,

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{c} \frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2}} \frac{1}{c} \frac{dU}{dt}$$

e

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2}} \frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Para simplificar a notação nesse contexto, sejam

$$\beta = \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}_q}{dt}$$

e

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned}$$

Podemos considerar também a derivada

$$\frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau} = \gamma \frac{d\mathbf{r}_q}{dt}.$$

Obviamente, a “companheira” dessa quantidade em transformações de Lorentz é

$$c \frac{dt}{d\tau} = c\gamma.$$

Temos, portanto, as relações

$$\begin{aligned} \frac{U}{c} &= mc \\ &= m_0 \gamma c \\ &= m_0 \frac{d(ct)}{d\tau} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= m \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \\ &= m_0 \gamma \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \\ &= m_0 \frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau}. \end{aligned}$$

É conveniente definirmos

$$u_0 = \frac{d(ct)}{d\tau}$$

e

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau}.$$

Logo,

$$\frac{U}{c} = m_0 u_0$$

e

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u}.$$

Com essas definições, podemos escrever

$$\begin{aligned} m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\ &= \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \gamma \left(q\mathbf{E} + \frac{q}{c} \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B} \right) \\ &= q \left(\gamma\mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau} \times \mathbf{B} \right) \\ &= \frac{q}{c} (u_0\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}), \end{aligned}$$

no sistema CGS, ou

$$\begin{aligned}
m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \gamma \left(q\mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B} \right) \\
&= q \left(\gamma \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau} \times \mathbf{B} \right) \\
&= q \left(u_0 \frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right),
\end{aligned}$$

no sistema MKS, onde usamos

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{u_0}{c}
\end{aligned}$$

Também temos

$$m_0 \frac{du_0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dU}{d\tau}.$$

Da equação

$$\frac{U^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2,$$

obtida acima, calculamos que

$$\frac{1}{c^2} \frac{dU^2}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}^2}{d\tau},$$

ou seja,

$$\frac{2U}{c^2} \frac{dU}{d\tau} = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau},$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{dU}{d\tau} &= \frac{c\mathbf{p}}{U} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \frac{\mathbf{p}}{mc} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \frac{1}{\gamma c} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \frac{1}{c} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \frac{q}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{E},
\end{aligned}$$

tanto no sistema CGS como no sistema MKS.

Resumindo, as equações dinâmicas para a partícula podem ser expressas por

$$m_0 \frac{du_0}{d\tau} = q \mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{E}}{c},$$

tanto no sistema CGS como no sistema MKS, e

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = \frac{q}{c} (u_0 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}),$$

no sistema CGS, ou

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} = q \left(u_0 \frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right),$$

no sistema MKS.