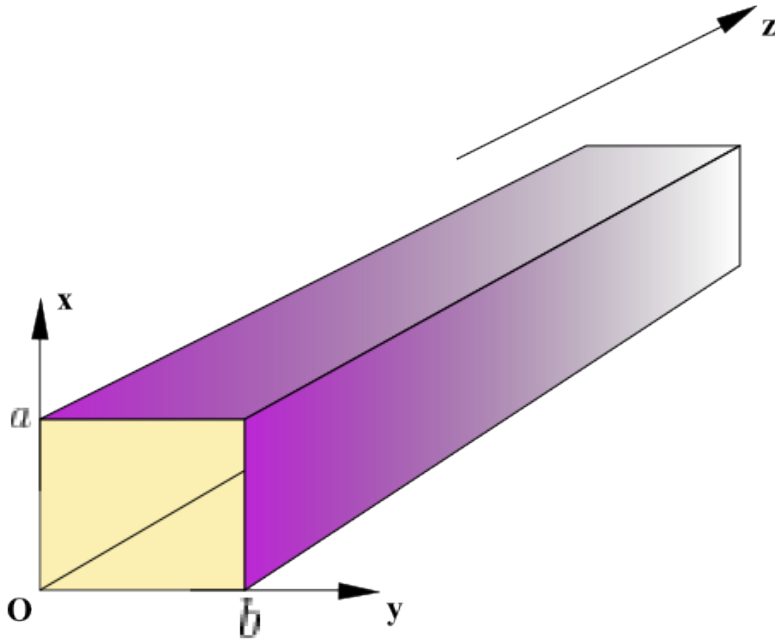


Exemplo: modos TE em um guia de ondas de seção transversal retangular constante (como exercício)



Consideremos um guia de ondas retangular, cuja seção transversal tem a forma de um retângulo cujos vértices, no plano xy , são dados pelos pontos $(0,0)$, $(a,0)$, (a,b) e $(0,b)$. A solução da equação de onda para β_z é facilmente verificada como sendo

$$\beta_z = \exp(ik_z z - i\omega t) [\lambda_1 \cos(k_x x) + \lambda_2 \sin(k_x x)] [\lambda_3 \cos(k_y y) + \lambda_4 \sin(k_y y)],$$

onde k_z , k_x e k_y devem satisfazer

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}.$$

Além dessa condição, k_x e k_y , assim como λ_1 , λ_2 , λ_3 e λ_4 , também devem ser determinadas pelas condições de contorno. Em $x = 0$ e $x = a$, a componente do campo elétrico tangencial à parede condutora deve ser nula. Como $\epsilon_z = 0$ por hipótese (modos TE), segue que $\epsilon_y = 0$, ou seja, como

$$\epsilon_y = \frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right),$$

segue que

$$\left[\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right]_{x=0,a} = 0.$$

Mas,

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial x} = \exp(ik_z z - i\omega t) [-\lambda_1 k_x \text{sen}(k_x x) + \lambda_2 k_x \cos(k_x x)] [\lambda_3 \cos(k_y y) + \lambda_4 \text{sen}(k_y y)].$$

Impondo a condição de contorno acima para $x = 0$ resulta em

$$\lambda_2 = 0.$$

Em $x = a$, a condição e o resultado acima implicam em:

$$\text{sen}(k_x a) = 0,$$

ou seja,

$$k_x = \frac{n_x \pi}{a}, \text{ para } n_x = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Analogamente, em $y = 0$ e $y = b$, a componente do campo elétrico tangencial à parede condutora deve ser nula. Como $\epsilon_z = 0$ por hipótese (modos TE), segue que $\epsilon_x = 0$, ou seja, como

$$\epsilon_x = -\frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right),$$

segue que

$$\left[\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right]_{y=0,b} = 0.$$

Mas,

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} = \exp(ik_z z - i\omega t) [\lambda_1 \cos(k_x x) + \lambda_2 \text{sen}(k_x x)] [-\lambda_3 k_y \text{sen}(k_y y) + \lambda_4 k_y \cos(k_y y)].$$

Impondo a condição de contorno acima para $y = 0$ resulta em

$$\lambda_4 = 0.$$

Em $y = b$, a condição e o resultado acima implicam em

$$\text{sen}(k_y b) = 0,$$

ou seja,

$$k_y = \frac{n_y \pi}{b}, \text{ para } n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Portanto, definindo a amplitude arbitrária $\beta_0 = \lambda_1 \lambda_3$, obtemos

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right).$$

Notemos que se escolhermos $n_x = n_y = 0$, ficaremos com

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t).$$

Mesmo que tomemos $k_z = \omega/c$ como requerido pela equação

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2},$$

teremos, necessariamente,

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= -\frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial y} \right) \\ &= 0 \\ &= \frac{\omega}{k_z c} \beta_y \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_y &= \frac{i\omega}{c(k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \left(\frac{\partial \beta_z}{\partial x} \right) \\ &= 0 \\ &= -\frac{\omega}{k_z c} \beta_x. \end{aligned}$$

A componente z da Lei de Indução de Faraday então implica em

$$\begin{aligned} i\frac{\omega}{c} \beta_z &= \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e, portanto, a solução para $n_x = n_y = 0$ é $\epsilon = \mathbf{0}$ e $\beta = \mathbf{0}$. Logo, a solução acima, isto é,

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right),$$

só não é trivial quando $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$. Esses modos são indicados assim: TE_{n_x, n_y} .

Modos TEM

Por que, ao tratarmos guias de ondas cilíndricos, procuramos por modos transversais elétricos (TE) e transversais magnéticos (TM), mas não procuramos por modos transversais eletromagnéticos (TEM)? Os modos TEM têm ϵ_z e β_z ambos nulos em guias de ondas. Suponhamos, portanto, que

$$\epsilon_z = 0$$

e

$$\beta_z = 0$$

no interior de um guia e tentemos resolver as equações. Como fizemos anteriormente, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta},\end{aligned}$$

isto é,

$$\nabla \times \boldsymbol{\epsilon}_t + \nabla \times (\hat{\mathbf{z}}\epsilon_z) = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t + i\frac{\omega}{c}\hat{\mathbf{z}}\beta_z,$$

ou seja,

$$\nabla \times \boldsymbol{\epsilon}_t = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t,$$

ou ainda,

$$\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t + \hat{\mathbf{z}} \times \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}_t}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}_t.$$

Multiplicando essa igualdade escalarmente por $\hat{\mathbf{z}}$ resulta em

$$\hat{\mathbf{z}} \cdot (\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t) = 0$$

e, como $\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t$ só tem componente ao longo do versor $\hat{\mathbf{z}}$, segue que

$$\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}.$$

Também sabemos que

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\epsilon} = 0$$

dentro do guia de ondas e, portanto,

$$\left(\nabla_t + \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t = 0,$$

isto é,

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}_t = 0.$$

Temos, portanto, um problema em duas dimensões, pois, usando o ansatz para a dependência em z como fizemos para os modos TE e TM, podemos escrever

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \exp(ik_z z) \boldsymbol{\epsilon}'_t,$$

onde

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \boldsymbol{\epsilon}'_t(x, y).$$

O problema bidimensional é, então, especificado pelas equações eletrostáticas:

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}'_t = 0$$

e

$$\nabla_t \times \boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{0}.$$

Porque $\boldsymbol{\epsilon}'_t$ é irrotacional, segue que existe uma função escalar

$$\phi_t = \phi_t(x, y)$$

tal que

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = -\nabla_t \phi_t.$$

Logo,

$$\nabla_t \cdot \boldsymbol{\epsilon}'_t = 0$$

implica em

$$\nabla_t^2 \phi_t = 0$$

no interior de cada uma das seções retas transversais do guia de ondas. A fronteira a uma seção transversal é uma equipotencial de ϕ_t e, portanto, do teorema da unicidade das soluções em eletrostática, segue que $\phi_t = \text{constante}$ é a solução do problema, implicando que

$$\boldsymbol{\epsilon}'_t = \mathbf{0}$$

e, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}$$

para modos transversais eletromagnéticos. Como

$$\nabla \times \boldsymbol{\epsilon}_t = i \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta}_t,$$

segue que

$$\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{0}.$$

Assim, vemos que não há como termos modos TEM em guias ocos. A única maneira de propagarmos ondas transversais em guias de ondas cilíndricos é quando não forem ocos, como no caso de cabos coaxiais, por exemplo.

Cavidades Ressonantes

Podemos construir uma cavidade ressonante a partir de um guia de ondas cilíndrico simplesmente adicionando tampas transversais ao longo do eixo do guia. Assim, escolhamos o eixo z no interior do guia de ondas e paralelo ao seu eixo. Consideremos duas tampas condutoras, feitas com o mesmo material das paredes do guia, colocadas transversalmente ao eixo do guia, uma em $z = 0$ e a outra em $z = d$, com $d > 0$. Para tratar o presente problema, procedemos como para o caso de guias de ondas cilíndricos, exceto que o ansatz para a dependência dos campos com a coordenada z deve ser apropriada a uma onda estacionária, ao invés de uma onda viajante. Dessa forma, para cada uma das componentes dos campos, propomos que essa dependência seja uma combinação linear de $\sin(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$.

Vamos considerar que o interior da cavidade ressonante seja preenchido por um material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ . Para ondas monocromáticas armazenadas dentro da cavidade ressonante, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Com isso, como para guias de ondas cilíndricos, as equações de onda escrevem-se

$$\nabla^2 \epsilon + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon = 0$$

e

$$\nabla^2 \beta + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta = 0.$$

Modos TE

Analogamente ao que fizemos no caso de um guia de ondas cilíndrico, procuremos por modos transversais elétricos, TE, ou seja, imponhamos $\epsilon_z = 0$ dentro da cavidade ressonante. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \epsilon &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \beta}{\partial t} \\ &= i \frac{\omega}{c} \beta. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i \frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i \frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i \frac{\omega}{c} \beta_z. \end{aligned}$$

Para modos TE:

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i \frac{\omega}{c} \beta_y.$$

Como explicado acima, procuramos por ondas estacionárias ao longo do eixo z . Assim, tomamos a dependência funcional em z do campo ϵ como uma combinação linear de $\sin(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$. No entanto, para os modos TE as componentes

não nulas de ϵ tangenciam as tampas condutoras e, como condição de contorno, devem ser nulas em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, necessariamente devemos ter

$$\epsilon_t = \sin(k_z z) \epsilon'_t,$$

onde definimos

$$\epsilon_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y,$$

$$\epsilon'_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon'_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon'_y$$

e

$$\epsilon'_t = \epsilon'_t(x, y, t),$$

com

$$k_z = \frac{p\pi}{d}, \quad p = 1, 2, \dots,$$

já que $p \neq 0$ para soluções não triviais. Com isso, as equações

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_y$$

forneem

$$\beta_y = -i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_x \cos(k_z z)$$

e

$$\beta_x = i\frac{k_z c}{\omega}\epsilon'_y \cos(k_z z).$$

Da Lei de Ampère & Maxwell obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \beta &= \frac{\mu\epsilon}{c} \frac{\partial \epsilon}{\partial t} \\ &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_x \sin(k_z z) \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_y \sin(k_z z) \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\epsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Com o ansatz referente à dependência em z , essas equações dão

$$\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_x \text{sen}(k_z z) = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_x \text{sen}(k_z z)$$

e

$$-i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_y \text{sen}(k_z z) - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_y \text{sen}(k_z z),$$

o que implica que

$$\beta_z = \beta'_z \text{sen}(k_z z),$$

com

$$\beta'_z = \beta'_z(x, y, t).$$

Logo, das equações acima, concluímos que podemos obter as componentes não nulas do campo elétrico em termos de derivadas espaciais de β'_z :

$$\frac{\partial \beta'_z}{\partial y} - i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_x = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_x$$

e

$$-i \frac{k_z^2 c}{\omega} \epsilon'_y - \frac{\partial \beta'_z}{\partial x} = -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon'_y,$$

isto é,

$$\epsilon'_x = \frac{-i \omega}{c(k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \frac{\partial \beta'_z}{\partial y}$$

e

$$\epsilon'_y = \frac{i \omega}{c(k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \frac{\partial \beta'_z}{\partial x}.$$

Também temos

$$\begin{aligned} \beta_y &= -i \frac{k_z c}{\omega} \epsilon'_x \cos(k_z z) \\ &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \beta'_z}{\partial y} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_x &= i \frac{k_z c}{\omega} \epsilon'_y \cos(k_z z) \\ &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \beta'_z}{\partial x}. \end{aligned}$$

Resumindo, se definirmos o operador nabla transversal como

$$\nabla_t = \hat{\mathbf{x}} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}} \frac{\partial}{\partial y}$$

podemos escrever

$$\beta_t = -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \nabla_t \beta'_z,$$

onde definimos

$$\beta_t = \hat{\mathbf{x}} \beta_x + \hat{\mathbf{y}} \beta_y,$$

e

$$\epsilon_t = \frac{i\omega \text{sen}(k_z z)}{c(k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2})} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \beta'_z.$$

Dessa forma, se encontrarmos β'_z , facilmente obteremos β_x , β_y , β_z , ϵ_x e ϵ_y . Para obtermos β'_z , utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \beta_z + \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} \beta_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z , que resulta em

$$\beta_z = \beta'_z \text{sen}(k_z z),$$

obtemos a equação para β'_z :

$$\frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial y^2} + \left(\mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \beta'_z = 0.$$

Essa equação e as condições de contorno para β_z resolvem o problema para modos TE. Na superfície lateral da cavidade ressonante, a componente normal de β deve ser nula, pois o condutor é ideal e β se anula dentro do material condutor. Logo,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \beta|_S = 0.$$

Mas como a normal à superfície da cavidade ressonante cilíndrica é ortogonal ao eixo z que definimos, podemos escrever

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta|_S &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta_t|_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \cdot \beta_t|_S &= -\frac{k_z \cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu\epsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t \beta'_z|_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \nabla_t \beta'_z|_S = 0$$

é a condição de contorno para modos TE.

Modos TM (como exercício)

Impondo que $\beta_z = 0$ dentro da cavidade ressonante, obteremos os modos transversais magnéticos, TM. Da Lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\begin{aligned}\nabla \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x, \\ \frac{\partial \beta_x}{\partial z} - \frac{\partial \beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y, \\ \frac{\partial \beta_y}{\partial x} - \frac{\partial \beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_z.\end{aligned}$$

Para modos TM:

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \epsilon_y.$$

Aqui também tomamos a dependência funcional em z do campo $\boldsymbol{\epsilon}$ como uma combinação linear de $\sin(k_z z)$ e $\cos(k_z z)$. Novamente observamos que as componentes de $\boldsymbol{\epsilon}$ que tangenciam as tampas condutoras, como condição de contorno, devem ser nulas em $z = 0$ e $z = d$. Portanto, necessariamente devemos ter, mesmo para modos TM,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \sin(k_z z) \boldsymbol{\epsilon}'_t,$$

com

$$k_z = \frac{p\pi}{d}, \quad p = 0, 1, 2, \dots,$$

já que $p = 0$ implica em $\boldsymbol{\epsilon}_t = \mathbf{0}$, mas, como veremos abaixo, não necessariamente implica em $\epsilon_z = 0$ para modos TM. Assim,

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_y.$$

O ansatz para $\boldsymbol{\beta}_t$ que faz sentido à luz dessas equações é

$$\boldsymbol{\beta}_t = \cos(k_z z) \boldsymbol{\beta}'_t$$

e, portanto,

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_x$$

fornece

$$k_z \sin(k_z z) \beta'_y = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_y$$

dá

$$-k_z \sin(k_z z) \beta'_x = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{c} \sin(k_z z) \epsilon'_y,$$

isto é,

$$\beta'_x = i\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_y$$

e

$$\beta'_y = -i\mu\varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_x.$$

Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c} \boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c} \beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c} \beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i\frac{\omega}{c} \beta_z \\ &= 0. \end{aligned}$$

Para modos TM e usando o ansatz para a dependência em z acima, obtemos

$$\frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - k_z \cos(k_z z) \epsilon'_y = i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_x,$$

e

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_x - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} = i\frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_y,$$

ou seja,

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_y + i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_x = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y}$$

e

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_x - i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) \beta'_y = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x},$$

ou ainda,

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_y + i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) i \mu \varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_y = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},$$

que dá

$$\cos(k_z z) \epsilon'_y = \frac{k_z}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y},$$

e

$$k_z \cos(k_z z) \epsilon'_x + i \frac{\omega}{c} \cos(k_z z) i \mu \varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \epsilon'_x = \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x},$$

que fornece

$$\cos(k_z z) \epsilon'_x = \frac{k_z}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x}.$$

Vemos dessas equações que

$$\epsilon_z = \cos(k_z z) \epsilon'_z,$$

com

$$\epsilon'_z = \epsilon'_z(x, y, t).$$

Em resumo, portanto,

$$\epsilon_t = \frac{k_z \sin(k_z z)}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \nabla_t \epsilon'_z$$

e

$$\begin{aligned} \beta_t &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{k_z c} \cos(k_z z) \hat{\mathbf{z}} \times \epsilon'_t \\ &= -i \mu \varepsilon \frac{\omega}{c} \frac{\cos(k_z z)}{k_z^2 - \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2}} \hat{\mathbf{z}} \times \nabla_t \epsilon'_z \end{aligned}$$

Dessa forma, se encontrarmos ϵ'_z , facilmente obteremos ϵ_x , ϵ_y , $\epsilon_z = \cos(k_z z) \epsilon'_z$, β_x e β_y . Para obtermos ϵ_z , utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2 \epsilon_z + \mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} \epsilon_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z , obtemos a equação para ϵ'_z :

$$\frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial y^2} + \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \epsilon'_z = 0.$$

Como a componente tangencial do campo elétrico à superfície lateral da cavidade ressonante deve ser nula, pois o campo elétrico dentro de um condutor ideal é nulo e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \times \boldsymbol{\epsilon}|_S = \mathbf{0},$$

isto é,

$$(n_x \hat{\mathbf{x}} + n_y \hat{\mathbf{y}}) \times (\hat{\mathbf{x}} \epsilon_x + \hat{\mathbf{y}} \epsilon_y + \hat{\mathbf{z}} \epsilon_z)|_S = 0,$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{z}} (n_x \epsilon_y - n_y \epsilon_x) - \hat{\mathbf{y}} n_x \epsilon_z + \hat{\mathbf{x}} n_y \epsilon_z|_S = 0$$

e, portanto,

$$n_x \epsilon_y - n_y \epsilon_x|_S = 0,$$

$$n_x \epsilon_z|_S = 0$$

e

$$n_y \epsilon_z|_S = 0.$$

A normal tem apenas as componentes n_x e n_y e

$$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

Logo, porque as componentes da normal, n_x e n_y , não podem ser ambas nulas, segue que a condição de contorno para os modos TM é

$$\epsilon_z|_S = 0,$$

isto é,

$$\cos(k_z z) \epsilon'_z|_S = 0.$$

ou seja, como essa igualdade deve valer na superfície lateral para todo z entre 0 e d , segue que

$$\epsilon'_z|_S = 0.$$

Frequências de ressonância

Das equações de onda

$$\frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \beta'_z}{\partial y^2} + \left(\mu \varepsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \beta'_z = 0$$

e

$$\frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \epsilon'_z}{\partial y^2} + \left(\mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2 \right) \epsilon'_z = 0,$$

como para modos TE e TM

$$k_z = \frac{p\pi}{d},$$

com $p = 0, 1, 2, \dots$ para modos TM e $p = 1, 2, \dots$ para modos TE, segue

$$k_x^2 + k_y^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2 = \mu \epsilon \frac{\omega^2}{c^2}.$$

As equações acima juntamente com suas respectivas condições de contorno representam problemas de Sturm-Liouville, ou seja, problemas de auto-vetores e auto-valores. Assim, para cada auto-função teremos um valor discreto correspondente para $k_x^2 + k_y^2$, que podemos denotar como λ_m^2 , onde $m = 0, 1, 2, \dots$ são os índices escolhidos para designar os correspondentes auto-valores. Logo, a cavidade ressonante somente poderá conter ondas eletromagnéticas estacionárias com frequências discretas dadas por

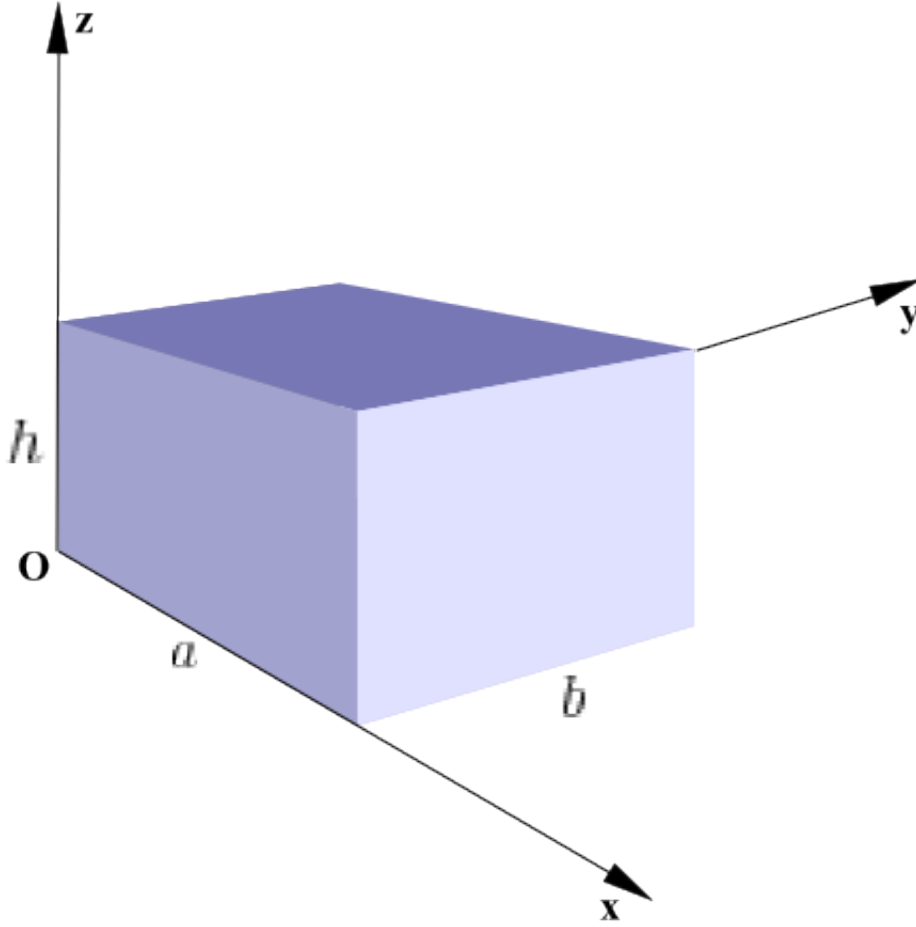
$$\omega_{p,m} = \frac{c}{\sqrt{\mu \epsilon}} \sqrt{\lambda_m^2 + \left(\frac{p\pi}{d} \right)^2}.$$

Essas são as chamadas frequências de ressonância da cavidade. É importante notarmos que essas frequências correspondem a linhas espectrais da cavidade infinitamente estreitas para um condutor ideal. Na prática, no entanto, como a condutividade de um material condutor é sempre finita, há absorção da energia das ondas eletromagnéticas pelas paredes da cavidade. Esse fato implica em uma largura finita para as linhas espectrais da cavidade.

Uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo (como exercício)

Quando abordamos guias de ondas consideramos o que se passa quando confinamos ondas eletromagnéticas em duas dimensões. Nesse caso, as ondas eletromagnéticas podem se propagar ao longo da direção que não foi restringida. Agora vamos considerar o que acontece quando temos uma caixa fechada, em forma de paralelepípedo, com suas superfícies internas feitas de material condutor ideal. Uma tal região do espaço é conhecida como uma cavidade ressonante. Vamos ver que, obviamente, não há como ter ondas propagantes, já que todas as direções do espaço são delimitadas por condutores. No entanto, ainda assim podem formar-se ondas estacionárias para certas frequências determinadas pela geometria interna da cavidade. Essas frequências são chamadas frequências de ressonância da cavidade ressonante. Vamos analisar o exemplo de uma cavidade em forma de paralelepípedo para simplificar os cálculos, mas há cavidades ressonantes das mais variadas formas.

Quando há condutividade finita nas paredes internas da cavidade, o campo eletromagnético no seu interior acaba sendo gradativamente absorvido pelo material da cavidade, isto é, a energia eletromagnética armazenada na cavidade é dissipada por efeito Joule nas paredes condutoras. Quanto maior a condutividade, menor a absorção da energia eletromagnética pelas paredes. Por essa razão, dizemos que uma cavidade de maior condutividade tem uma melhor qualidade e que o chamado fator de qualidade, Q , é alto. O fator de qualidade mede, essencialmente, a razão entre a energia armazenada na cavidade e a energia perdida por ciclo, na frequência de ressonância daquela energia armazenada (supondo campos aproximadamente monocromáticos). Mas, aqui, como não trataremos o caso dissipativo, não vamos nos deter com a definição exata do fator de qualidade.



Consideremos uma cavidade ressonante em forma de paralelepípedo, escavada em um material condutor ideal. Seja o paralelepípedo que dá forma à cavidade definido pelos seguintes vértices: $(0, 0, 0)$, $(a, 0, 0)$, $(a, b, 0)$, $(0, b, 0)$, $(0, b, h)$, $(0, 0, h)$, $(a, 0, h)$ e (a, b, h) . Nesse caso, as ondas no interior da cavidade não são propagantes; são estacionárias. Tomemos uma dependência temporal dada por $\exp(-i\omega t)$ e tentemos o ansatz:

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= E_1 f_1(x) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_y &= E_2 \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) f_2(y) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_z &= E_3 \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) f_3(z) \exp(-i\omega t),\end{aligned}$$

para $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$, pois, como as paredes da cavidade são idealmente condutoras e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, ϵ_x deve se anular para $y = 0$, $y = b$, $z = 0$ e $z = h$, ϵ_y deve se anular para $x = 0$, $x = a$,

$z = 0$ e $z = h$ e ϵ_z deve se anular para $x = 0$, $x = a$, $y = 0$ e $y = b$. Supomos E_1 , E_2 e E_3 reais por simplicidade e devemos encontrar as funções f_1 , f_2 e f_3 . Como no interior da cavidade não há cargas por hipótese, a divergência do campo elétrico deve ser nula e, portanto,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \epsilon_x}{\partial x} + \frac{\partial \epsilon_y}{\partial y} + \frac{\partial \epsilon_z}{\partial z} &= E_1 \frac{df_1(x)}{dx} \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \\ &+ E_2 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \frac{df_2(y)}{dy} \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \\ &+ E_3 \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \frac{df_3(z)}{dz} \exp(-i\omega t) \\ &= 0.\end{aligned}$$

Essa igualdade deve ser verdadeira para todo valor de n_x, n_y, n_z , x , y e z . Tomando um caso em que n_x, n_y, n_z , x , y e z são não nulos e dividindo essa equação pelo produto $\operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t)$, obtemos

$$\frac{E_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right)} \frac{df_1(x)}{dx} + \frac{E_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)} \frac{df_2(y)}{dy} + \frac{E_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right)} \frac{df_3(z)}{dz} = 0.$$

A única forma de satisfazer essa condição para todo ponto dentro da cavidade é escolhermos cada um dos termos acima igual a uma constante:

$$\begin{aligned}\frac{E_1}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right)} \frac{df_1(x)}{dx} &= C_1, \\ \frac{E_2}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)} \frac{df_2(y)}{dy} &= C_2, \\ \frac{E_3}{\operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right)} \frac{df_3(z)}{dz} &= C_3,\end{aligned}$$

com

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

Assim,

$$\begin{aligned}f_1(x) &= -\frac{C_1}{E_1} \frac{a}{n_x \pi} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right), \\ f_2(y) &= -\frac{C_2}{E_2} \frac{b}{n_y \pi} \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right), \\ f_3(z) &= -\frac{C_3}{E_3} \frac{h}{n_z \pi} \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right).\end{aligned}$$

Notemos que poderíamos ter adicionado uma constante a cada uma das funções acima, mas o caso constante já está incluído se considerarmos n_x, n_y, n_z também assumindo o valor 0. Logo, a solução para este problema pode ser escrita como

$$\begin{aligned}\epsilon_x &= -C_1 \frac{a}{n_x \pi} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_y &= -C_2 \frac{b}{n_y \pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_z &= -C_3 \frac{h}{n_z \pi} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t),\end{aligned}$$

com

$$C_1 + C_2 + C_3 = 0.$$

Essa solução, como está expressa, implica em ignorarmos os casos em que um dos n 's é nulo. Para podermos incluir esses casos também, dada a arbitrariedade das constantes introduzidas acima, escolhemos

$$\begin{aligned} E_{0x} &= -C_1 \frac{a}{n_x \pi}, \\ E_{0y} &= -C_2 \frac{b}{n_y \pi}, \\ E_{0z} &= -C_3 \frac{h}{n_z \pi}. \end{aligned}$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= E_{0x} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_y &= E_{0y} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \epsilon_z &= E_{0z} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \end{aligned}$$

com

$$E_{0x} \frac{n_x}{a} + E_{0y} \frac{n_y}{b} + E_{0z} \frac{n_z}{h} = 0$$

e $n_x, n_y, n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$, exceto os casos em que pelo menos dois n 's são nulos.

Agora, calculemos β . Da lei de Faraday, temos:

$$\beta = -\frac{i}{\omega} \nabla \times \epsilon,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \beta_x &= -\frac{i}{\omega} \left[\frac{n_y \pi}{b} E_{0z} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_z \pi}{h} E_{0y} \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= -\frac{i}{\omega} \left(\frac{n_y \pi}{b} E_{0z} - \frac{n_z \pi}{h} E_{0y} \right) \sin\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t), \\ \beta_y &= -\frac{i}{\omega} \left[\frac{n_z \pi}{h} E_{0x} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_x \pi}{a} E_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= -\frac{i}{\omega} \left(\frac{n_z \pi}{h} E_{0x} - \frac{n_x \pi}{a} E_{0z} \right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \cos\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \beta_z &= -\frac{i}{\omega} \left[\frac{n_x \pi}{a} E_{0y} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right. \\ &\quad \left. - \frac{n_y \pi}{b} E_{0x} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \right] \\ &= -\frac{i}{\omega} \left(\frac{n_x \pi}{a} E_{0y} - \frac{n_y \pi}{b} E_{0x} \right) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \sin\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Forma alternativa de tratar este problema (**como exercício**)

Este mesmo problema pode ser resolvido considerando as soluções para o exemplo do guia de ondas de seção transversal retangular constante, mas com tampas nas extremidades. Assim, para os modos TE do guia de ondas temos

$$\beta_z = \beta_0 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right),$$

que só não é trivial quando $n_x, n_y = 0, 1, 2, 3, \dots$ e $n_x^2 + n_y^2 \neq 0$. Para uma cavidade construída a partir desse guia, como há reflexão nas tampas, devemos considerar a superposição

$$\beta_z^{\text{cav}} = \beta_{z1} + \beta_{z2},$$

onde definimos

$$\beta_{z1} = \beta_1 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)$$

e

$$\beta_{z2} = \beta_2 \exp(-ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right)$$

Como os modos são, por hipótese, TE, temos $\epsilon_z^{\text{cav}} = 0$ e, da continuidade da componente tangencial do campo elétrico, também devemos impor $\epsilon_x^{\text{cav}} = \epsilon_y^{\text{cav}} = 0$ em $z = 0$ e $z = h$.

Mas, de acordo com o exemplo de um guia de ondas de seção transversal retangular constante,

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{\text{cav}} &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z1}}{\partial y} \right) - \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z2}}{\partial y} \right) \\ &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} \right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_y^{\text{cav}} &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z1}}{\partial x} \right) + \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_{z2}}{\partial x} \right) \\ &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} \right), \end{aligned}$$

de forma que devemos impor

$$\left[\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} \right]_{z=0,h} = 0$$

e

$$\left[\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} \right]_{z=0,h} = 0.$$

Aqui, c é a magnitude de propagação da luz no vácuo, isto é,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

No entanto, todos os resultados obtidos aqui também valem quando, dentro da cavidade, há um dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, caracterizado pelas constantes μ e ε . Nesse caso, basta trocar c , nas equações acima, pela velocidade de propagação no meio dielétrico, isto é,

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}}.$$

As derivadas de β_z^{cav} que precisamos são calculadas assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} &= -\frac{n_x \pi}{a} \beta_1 \exp(ik_z z - i\omega t) \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \\ &\quad - \frac{n_x \pi}{a} \beta_2 \exp(-ik_z z - i\omega t) \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} &= -\frac{n_y \pi}{b} \beta_1 \exp(ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \\ &\quad - \frac{n_y \pi}{b} \beta_2 \exp(-ik_z z - i\omega t) \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right). \end{aligned}$$

Impondo as condições acima, concluímos que:

$$\beta_2 = -\beta_1$$

e

$$k_z = \frac{n_z \pi}{h}, \text{ para } n_z = 0, 1, 2, 3, \dots$$

Logo, escolhendo

$$\beta_{0z} = 2i\beta_1,$$

obtemos

$$\beta_z^{\text{cav}} = \beta_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t)$$

e, para não termos solução trivial, devemos ter $n_z \neq 0$, isto é,

$$n_z = 1, 2, 3, \dots$$

Calculemos, portanto, o campo elétrico:

$$\begin{aligned} \epsilon_x^{\text{cav}} &= -\frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial y} \right) \\ &= \frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_y \pi}{b} \beta_{0z} \cos\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \epsilon_y^{\text{cav}} &= \frac{i\omega}{k_z^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{\partial \beta_z^{\text{cav}}}{\partial x} \right) \\ &= -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z \pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_x \pi}{a} \beta_{0z} \operatorname{sen}\left(\frac{n_x \pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n_y \pi}{b} y\right) \operatorname{sen}\left(\frac{n_z \pi}{h} z\right) \exp(-i\omega t). \end{aligned}$$

Dessas equações verificamos que as amplitudes que calculamos anteriormente escrevem-se

$$E_{0x} = \frac{i\omega}{\left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_y\pi}{b} \beta_{0z}$$

e

$$E_{0y} = -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \frac{n_x\pi}{a} \beta_{0z}.$$

Da relação que obtivemos anteriormente,

$$E_{0x} \frac{n_x}{a} + E_{0y} \frac{n_y}{b} + E_{0z} \frac{n_z}{h} = 0,$$

obtemos

$$\begin{aligned} E_{0z} \frac{n_z}{h} &= -\frac{i\omega}{\left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2 - \frac{\omega^2}{c^2}} \left(\frac{n_y\pi}{b} \frac{n_x}{a} - \frac{n_x\pi}{a} \frac{n_y}{b} \right) \beta_{0z} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Dessa análise, concluímos que obtivemos modos TE, já que $n_z \neq 0$ e, portanto,

$$E_{0z} = 0.$$

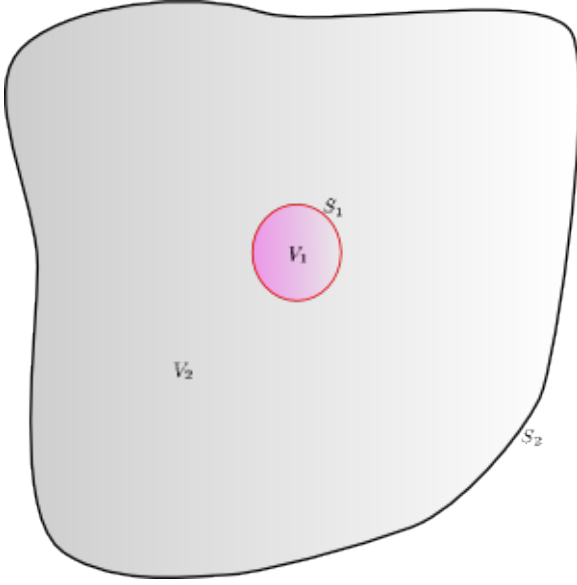
Finalmente, notamos que as frequências possíveis são obtidas da equação de onda:

$$\frac{\omega^2}{c^2} = \left(\frac{n_x\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n_y\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{n_z\pi}{h}\right)^2.$$

Teoria Escalar da Difração

Em óptica geométrica, o comprimento de onda da luz é desprezível e os raios de luz não contornam obstáculos, mas propagam-se sempre em linha reta. A difração acontece quando o comprimento de onda da luz, perante obstáculos, não pode mais ser considerado completamente desprezível. Aqui vamos considerar a teoria de difração para um campo escalar, pois a teoria vetorial é mais complicada e será tratada posteriormente.

Seja $\psi(\mathbf{r}, t)$ um campo conhecido em uma região V_1 do espaço, como mostra a figura abaixo. Portanto, seja o espaço separado em duas regiões: V_1 e V_2 , com S_1 sendo a superfície de separação entre as duas regiões. Suponhamos, também, que a outra parte da fronteira da região V_2 , que denotaremos por S_2 , esteja muito distante da superfície S_1 (que também é parte da fronteira de V_2), isto é, seja S_2 uma superfície infinitamente distante da região V_1 , que não, necessariamente, deva ser considerada limitada.



Vamos considerar também que a dependência temporal de $\psi(\mathbf{r}, t)$ seja harmônica, com frequência ω , isto é, $\exp(-i\omega t)$. Além disso, suponhamos que $\psi(\mathbf{r}, t)$ satisfaça a equação de onda na região V_2 , ou seja,

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \psi(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0,$$

que, com o ansatz temporal que adotamos, resulta na equação de Helmholtz:

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + k^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

onde, como usualmente, definimos

$$k = \frac{\omega}{c}.$$

No espaço vazio, a função de Green, $G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, para a equação de Helmholtz, que satisfaz

$$\nabla^2 G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

é dada por

$$G_{\text{vazio}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}.$$

No entanto, não podemos utilizar essa função de Green para obter o propagador do campo $\psi(\mathbf{r}, t)$, pois não estamos considerando o espaço vazio, mas uma região do espaço com uma fronteira em S_1 e outra em S_2 , embora S_2 seja infinitamente distante. Voltaremos a considerar a função de Green adequada para nosso problema depois que formularmos a teoria de difração; no momento apenas consideremos conhecida a função de Green adequada, $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$.

Derivemos agora o Teorema de Green no contexto formulado acima. Seja o campo vetorial auxiliar:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r}, t).$$

Pelo Teorema da Divergência de Gauss,

$$\int_V d^3r \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \oint_{S(V)} da \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

onde V é uma região arbitrária do espaço e $S(V)$ é a fronteira de V . Aqui, \mathbf{n}_{ext} é a normal externa à região V . Notemos que ∇ opera em \mathbf{r} e não em \mathbf{r}' ; no presente contexto, \mathbf{r}' é um vetor fixo que, por hipótese, tomaremos sempre dentro da região V . Obtemos, portanto,

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \nabla \cdot [G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \\ &= G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] + [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \\ &= G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)]. \end{aligned}$$

Então,

$$\int_V d^3r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + \int_V d^3r [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] = \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t).$$

Seguindo um procedimento análogo, é fácil deduzir também que

$$\int_V d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \int_V d^3r [\nabla \psi(\mathbf{r}, t)] \cdot [\nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}').$$

A subtração membro a membro dessas duas equações resulta no Teorema de Green no presente contexto:

$$\begin{aligned} \int_V d^3r G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) - \int_V d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) \\ &\quad - \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'). \end{aligned}$$

Como

$$\nabla^2 \psi(\mathbf{r}, t) + k^2 \psi(\mathbf{r}, t) = 0,$$

por hipótese, e

$$\nabla^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

pois $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ é uma função de Green para a equação de Helmholtz, segue, do Teorema de Green, que

$$\int_V d^3r \psi(\mathbf{r}, t) \delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

isto é,

$$\psi(\mathbf{r}', t) = \oint_{S(V)} da G(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla \psi(\mathbf{r}, t) - \oint_{S(V)} da \psi(\mathbf{r}, t) \mathbf{n}_{\text{ext}} \cdot \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'),$$

se \mathbf{r}' for um ponto da região V que, por hipótese, é. Trocando a notação, podemos também escrever

$$\psi(\mathbf{r}, t) = \oint_{S(V)} da' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' \psi(\mathbf{r}', t) - \oint_{S(V)} da' \psi(\mathbf{r}', t) \mathbf{n}'_{\text{ext}} \cdot \nabla' G(\mathbf{r}', \mathbf{r}),$$

para \mathbf{r} em V .