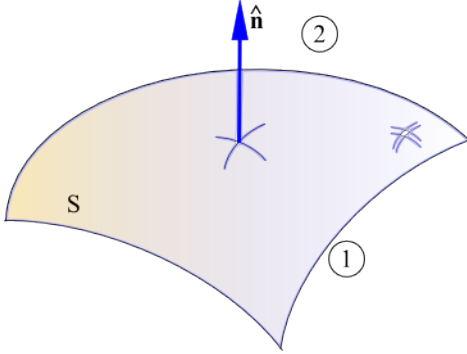


## Condições de contorno para os campos

Quando dois materiais diferentes estão em contato, mesmo que lineares, homogêneos e isotrópicos, na região da interface entre eles pode haver descontinuidades dos campos, pois as susceptibilidades elétrica e magnética podem variar apreciavelmente de um material para outro. A interface entre os meios é representada por uma superfície singular, onde as descontinuidades ocorrem. Para calcularmos os campos na presença de uma interface utilizamos condições de contorno que fornecem, a priori, os valores das descontinuidades dos campos.



Das equações

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho$$

e

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

segue que as condições de contorno para as componentes normais de  $\mathbf{D}$  e  $\mathbf{B}$  são as mesmas que para o caso estático, isto é,

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1)|_S = 4\pi\sigma$$

e

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1)|_S = 0,$$

onde  $\hat{\mathbf{n}}$  é o versor que aponta do meio 1 para o meio 2 e  $S$  é a interface de separação entre os meios.

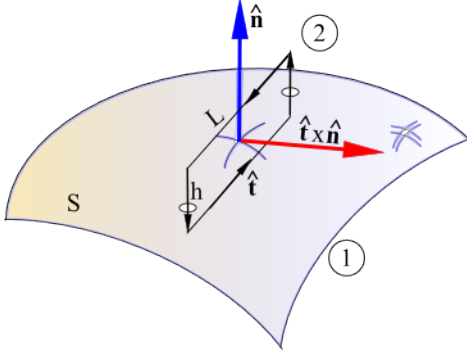
Para as equações

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$$

um pouco mais de cuidado é necessário com as derivadas parciais com relação ao tempo.



Por exemplo, para a Lei de Ampère-Maxwell,

$$\nabla \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

consideramos um ponto sobre a interface  $S$  e fazemos uma circulação plana e retangular, com seu plano contendo a normal à superfície no ponto considerado. Se  $\hat{\mathbf{n}}$  é a normal, seja  $\hat{\mathbf{t}}$  um versor perpendicular à normal no ponto considerado. Então,  $\hat{\mathbf{t}}$  é tangente à superfície  $S$ . O vetor  $\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$  é também um versor e é ortogonal a ambos os versores  $\hat{\mathbf{t}}$  e  $\hat{\mathbf{n}}$ . Com esses três versores, construímos uma circulação em torno do ponto considerado da interface  $S$ . Ao longo de  $\hat{\mathbf{t}}$ , na região 1, traçamos um lado do retângulo de comprimento  $L$ . Ao longo de  $\hat{\mathbf{n}}$ , atravessando a interface da região 1 para a região 2, traçamos outro lado do retângulo de comprimento  $h$ . O retângulo está completo e podemos considerar o Teorema de Stokes para o fluxo do campo intensidade magnética sobre a superfície do retângulo, considerando  $L$  e  $h$  infinitesimais:

$$\begin{aligned} \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) &= \oint d\mathbf{r} \cdot \mathbf{H} \\ &= L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 + \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 \\ &\quad - L\hat{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_2 - \frac{h}{2}\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{H}_1 \\ &= L\hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) \\ &= \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left( \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \\ &= \frac{4\pi}{c} L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} + \frac{1}{c} \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \end{aligned}$$

onde  $\mathbf{j}$  é a corrente livre superficial na interface  $S$ . Aqui nós introduzimos a densidade superficial de corrente elétrica,  $\mathbf{j}$ , que é definida como sendo a quantidade de carga por unidade de tempo e comprimento transversal à direção dessa corrente. Assim, na figura acima, temos uma corrente  $I_L$  que atravessa o retângulo de largura  $L$  e altura  $h$ . Uma superfície, como a considerada acima, fisicamente não existe. Qualquer material por onde essa corrente passa deve ter, fisicamente, alguma espessura não nula. Seja  $\ell$  essa espessura. Nesse caso, podemos considerar que o sentido de  $I_L$  seja dado por  $\hat{\mathbf{e}}$  e, portanto, podemos definir uma densidade de corrente  $\mathbf{J}$  que atravessa a área transversal do retângulo e a corrente  $I_L$  é, então, dada por

$$I_L = \int_{\text{ret}} da (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{J}.$$

Neste caso, como a espessura através da qual a corrente passa, fisicamente, sendo  $\ell$ , teremos  $da = \ell L$ , e a corrente acima fica

$$I_L = \ell L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{J}.$$

Como, para todos os efeitos práticos, já que  $\ell$  é desprezível perante nossa resolução experimental, podemos ocultar essa espessura definindo uma densidade superficial de corrente assim:

$$\mathbf{j} \equiv \mathbf{J}\ell.$$

Com isso, a mesma corrente acima,  $I_L$ , se expressa, em termos dessa nova densidade de corrente “efetiva” como

$$I_L = L (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j}.$$

A condição de contorno nesse caso dá

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_S &= \frac{4\pi}{c} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \mathbf{j} \Big|_S + \frac{1}{c} \int_{\text{ret}} \frac{da}{L} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right), \\ &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{t}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \Big|_S, \end{aligned}$$

pois

$$\int_{\text{ret}} \frac{da}{L} (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \rightarrow 0$$

quando  $h \rightarrow 0$ . Assim, a componente tangencial do campo intensidade magnética não é contínua quando  $\mathbf{j} \neq \mathbf{0}$ . No entanto,  $\hat{\mathbf{t}}$  é arbitrário; vamos então reescrever essa condição de contorno em termos apenas da normal  $\hat{\mathbf{n}}$ . Como  $\hat{\mathbf{t}}$  é arbitrário e tangente a  $S$ , então,  $(\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j})$  deve ser perpendicular a  $\hat{\mathbf{t}}$ , ou seja,

$$\hat{\mathbf{t}} \cdot \left( \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) \Big|_S = 0,$$

isto é,

$$\left( \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) = \alpha \hat{\mathbf{n}} + \beta (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \left( \mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2 - \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j} \right) \Big|_S &= \beta \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}) \\ &= \beta \hat{\mathbf{t}}. \end{aligned}$$

Como  $\hat{\mathbf{t}}$  é arbitrário e o membro esquerdo dessa equação não é arbitrário, segue que  $\beta = 0$  e a condição de contorno fica

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)|_S &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{j}) \\ &= \frac{4\pi}{c} \hat{\mathbf{n}} (\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j}) - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \end{aligned}$$

Como  $\mathbf{j}$  é tangente à interface, segue que

$$\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{j} = 0$$

e, portanto,

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)|_S = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j},$$

como no caso estático. Analogamente, da Lei de Indução de Faraday segue a continuidade da componente tangencial de  $\mathbf{E}$ :

$$\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1)|_S = \mathbf{0}.$$

## O índice de refração de meios dielétricos

Para um meio dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, o índice de refração é definido como a razão entre os valores absolutos da velocidade da luz no vácuo,  $c$ , e da velocidade da luz no meio,  $v$ . As equações de onda para os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$  em um dielétrico assim são

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

A velocidade de propagação da luz no dielétrico tem, portanto, módulo

$$v = \frac{c}{\sqrt{\mu\varepsilon}}.$$

Assim, o índice de refração é dado por

$$\begin{aligned} n &= \frac{c}{v} \\ &= \sqrt{\mu\varepsilon}. \end{aligned}$$

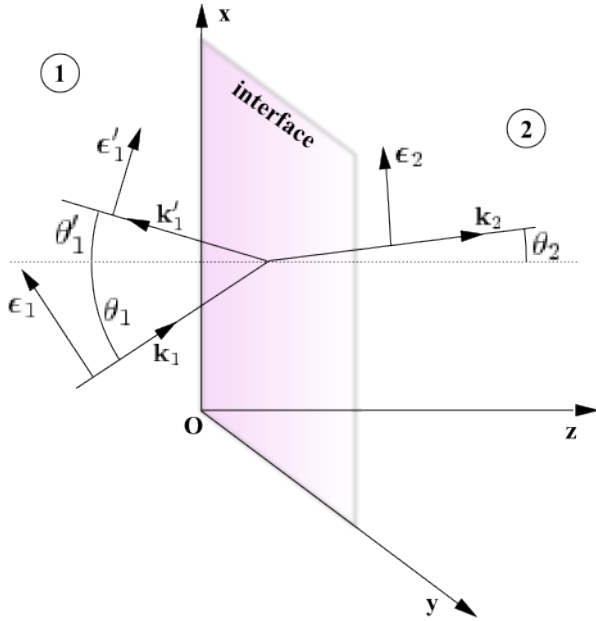
Nesse caso, também temos que o valor absoluto do vetor de onda pode ser escrito como

$$\begin{aligned} k &= \frac{\sqrt{\mu\varepsilon}}{c} \omega \\ &= \frac{\omega}{v} \\ &= \frac{c}{v} \frac{\omega}{c} \\ &= n \frac{\omega}{c}. \end{aligned}$$

# Reflexão e refração de ondas eletromagnéticas em interfaces planas entre dielétricos

Para ilustrar a utilização das condições de contorno para os campos, tratemos a reflexão e a refração de ondas eletromagnéticas planas por interfaces entre dielétricos lineares, homogêneos e isotrópicos. Para não trivializar a discussão, vamos considerar que o vetor de onda incidente não seja paralelo à interface entre os dois meios dielétricos. Há dois casos linearmente independentes que consideramos abaixo.

## Campo elétrico paralelo ao plano de incidência



Nesse caso, escolhemos o sistema de coordenadas de forma que a interface entre os dois meios dielétricos coincida com o plano  $xy$ . Também indexamos os meios dielétricos de modo que o meio 1 tenha  $z < 0$  e o meio 2 tenha  $z > 0$ . Assim, a normal à interface é o versor  $\hat{\mathbf{z}}$ . O plano de incidência é formado pelo vetor de onda incidente,  $\mathbf{k}_1$ , e pela normal à interface,  $\hat{\mathbf{z}}$ . Escolhemos o plano de incidência como o plano  $xz$ . Como a incidência não é normal à interface, temos

$$\mathbf{k}_1 = \hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta_1,$$

onde  $k_1$  é o módulo do vetor  $\mathbf{k}_1$  e  $\theta_1$  é o ângulo de incidência, isto é, o ângulo entre o vetor de onda,  $\mathbf{k}_1$ , e a normal à interface,  $\hat{\mathbf{z}}$ . Escolhemos polarização plana e o campo elétrico incidente paralelo ao plano de incidência, ou seja,

$$\epsilon_1 = (-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{01} \sin \theta_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{01} \cos \theta_1) \exp(izk_1 \cos \theta_1 + ixk_1 \sin \theta_1 - i\omega t).$$

Por isotropia e homogeneidade dos meios dielétricos, as ondas refletida e refratada têm polarizações planas também paralelas ao plano de incidência e podemos escrever

$$\epsilon'_1 = (\hat{\mathbf{z}}\epsilon'_{01} \sin \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon'_{01} \cos \theta'_1) \exp(-izk_1 \cos \theta'_1 + ixk_1 \sin \theta'_1 - i\omega t),$$

para a onda refletida, com

$$\mathbf{k}'_1 = -\hat{\mathbf{z}}k_1 \cos \theta'_1 + \hat{\mathbf{x}}k_1 \sin \theta'_1,$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_2 = (-\hat{\mathbf{z}}\epsilon_{02} \sin \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}\epsilon_{02} \cos \theta_2) \exp(izk_2 \cos \theta_2 + ixk_2 \sin \theta_2 - i\omega t),$$

para a onda refratada, com

$$\mathbf{k}_2 = \hat{\mathbf{z}}k_2 \cos \theta_2 + \hat{\mathbf{x}}k_2 \sin \theta_2.$$

Notemos que já escolhemos os campos elétricos de modo a serem ortogonais aos respectivos vetores de onda. Os ângulos  $\theta'_1$  e  $\theta_2$  são, respectivamente, os ângulos de reflexão e refração.