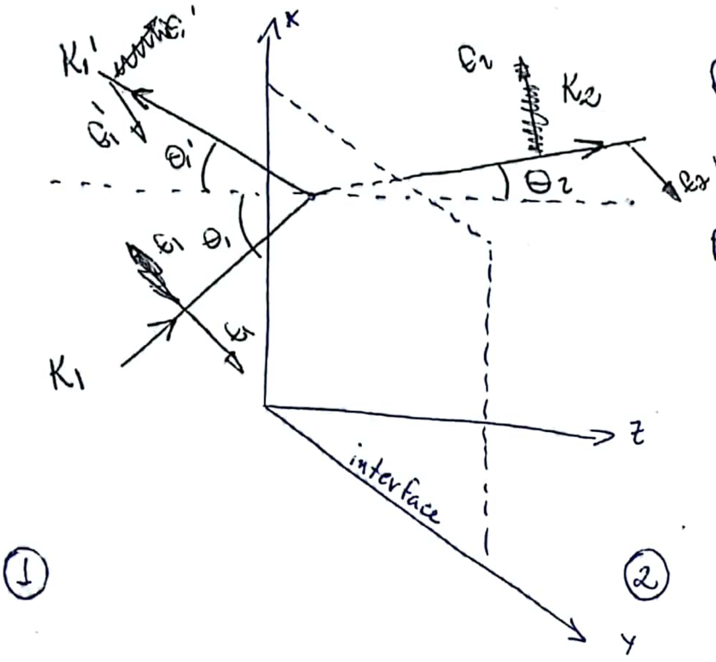
Vamos considerar a onda incidente



Queremos trabalhar com os campos elétricos $\mathcal{E}$ perpendiculares ao plano de incidencia (xz).

Por isso temos $\mathcal{E}$ na direção $\hat{y}$.

Temos os vetores de onda K's como:

$$K_1 = \hat{z} K_1 \cos\theta_1 + \hat{x} K_1 \sin\theta_1$$
$$K_1' = -\hat{z} K_1 \cos\theta_1 + \hat{x} K_1 \sin\theta_1$$
$$K_2 = \hat{z} K_2 \cos\theta_2 + \hat{x} K_2 \sin\theta_2$$

Temos por definição o campo elétrico complexo descrito por

$$\vec{e} \equiv \cancel{E_0 \exp(ik_2 z - i\omega t)},\ \mathcal{E}_0(\vec{K}) \exp\left(i\vec{K}\cdot\vec{r} - \frac{i\cancel{k}ct}{\sqrt{\mu\epsilon}}\right)$$

onde

$$\vec{E} \equiv \mathrm{Re}(\epsilon).$$

No nosso sistema podemos então escrever os campos elétricos por

$$\mathcal{E}_1 = \hat{y}\, \mathcal{E}_{01} \exp(iz K_1 \cos\theta_1 + ix K_1 \sin\theta_1 - i\omega t)$$
$$\mathcal{E}_1' = \hat{y}\, \mathcal{E}_{01}' \exp(-iz k_1 \cos\theta_1 + ix k_1 \sin\theta_1 - i\omega t)$$
$$\mathcal{E}_2 = \hat{y}\, \mathcal{E}_{02} \exp(iz K_2 \cos\theta_2 + iz K_2 \sin\theta_2 - i\omega t)$$

Usando a lei de indução de Faraday, temos:

$$\vec{\nabla} \times \vec{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{\beta}}{\partial t}$$

que nos dá facilmente o resultado

$$\beta = \frac{c\vec{k_1}}{\omega} \times \vec{\mathcal{E}_1} = \frac{cK_1}{\omega}\hat{K}_1 \times \vec{\mathcal{E}_1} = n_1 \hat{K}_1 \times \mathcal{E}_1$$

Resolvendo

$$\vec{K}_1 \times \vec{E}_1 = (\hat{z}\cos\theta_1 + \hat{x}\sin\theta)\times\hat{y}E_{01}\exp(\sim)$$
$$= -\hat{x}\cos\theta_1 E_{01}\exp(\sim) + \hat{z}\sin\theta_1 E_{01}\exp(\sim)$$
$$= (-\hat{x}\cos\theta_1 + \hat{z}\sin\theta_1)E_{01}\exp(\sim)$$

Analogamente temos

$$B_1' \propto (-\hat{z}\cos\theta_1 + \hat{x}\sin\theta_1)\times\hat{y} = (\hat{x}\cos\theta_1 + \hat{z}\sin\theta_1)$$
$$B_2 \propto (\hat{z}\cos\theta_2 + \hat{x}\sin\theta_2)\times\hat{y} = (-\hat{x}\cos\theta_2 + \hat{z}\sin\theta_2)$$

Aqui vamos utilizar a condição de contorno definida em classe onde consideramos a componente tangencial contínua na interface isto é, ↳ campo elétrico!

$$\hat{z}\times(\vec{E}_2 - \vec{E}_1 - \vec{E}_1')\Big|_{z=0} = \vec{0}$$

por isso,

$$E_2 - E_1 - E_1' = 0$$

O mesmo para o campo intensidade magnética.

$$\hat{z}\times\left(\frac{B_2}{\mu_2} - \frac{B_1}{\mu_1} - \frac{B_1'}{\mu_1'}\right)\Big|_{z=0} = \vec{0}$$

supomos então $\mu_1 = \mu_2 = 1$. (Meios não magnéticos!) Portanto

$$\begin{cases} -n_2\cos\theta_2 E_{02} + n_1\cos\theta_1 E_{01} - n_1\cos\theta_1 E_{01}' = 0 \\ E_{02} - E_{01} - E_{01}' = 0 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema:

$$-n_2\cos\theta_2 E_{02} + n_1\cos\theta_1 E_{01} - n_1\cos\theta_1 E_{01}' = 0$$

$$E_{02} - E_{01} - E_{01}' = 0$$

$$\underline{E_{01}' = E_{02} - E_{01}}$$

$$-n_2\cos\theta_2 E_{02} + n_1\cos\theta_1 E_{01} - n_1\cos\theta_1 (E_{02} - E_{01}) = 0 =$$

$$-n_2\cos\theta_2 E_{02} + n_1\cos\theta_1 E_{01} - n_1\cos\theta_1 E_{02} + n_1\cos\theta_1 E_{01} = 0$$

$$-n_2\cos\theta_2 E_{02} - n_1\cos\theta_1 E_{02} = -n_1\cos\theta_1 E_{01} - n_1\cos\theta_1 E_{01}$$

$$E_{02}(n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1) = E_{01}(n_1\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_1)$$

Logo

$$E_{02} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{(n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1)} E_{01}$$

$$\underline{E_{02} = E_{01} + E_{01}'}$$

$$(E_{01} + E_{01}')(n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1) = E_{01}(n_1\cos\theta_1 + n_1\cos\theta_1)$$

$$E_{01}'(n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1) = E_{01}(n_1\cos\theta_1 + \cancel{n_1\cos\theta_1} - n_2\cos\theta_2 - \cancel{n_1\cos\theta_1})$$

$$E_{01}'(n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1) = E_{01}(n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2)$$

$$E_{01}' = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1} E_{01}$$

Dos definições dos coeficientes de Fresnell

Reflexão:

$$r_{12s} = \frac{E_{01}'}{E_{01}} = \frac{n_1\cos\theta_1 - n_2\cos\theta_2}{n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1}$$

Transmissão:

$$t_{12s} = \frac{E_{02}}{E_{01}} = \frac{2n_1\cos\theta_1}{n_2\cos\theta_2 + n_1\cos\theta_1}$$