A conservação de energia em eletromagnetismo

Em mecânica clássica aprendemos a utilizar o conceito de leis de conservação para obter primeiras integrais das equações de movimento. Para cada lei de conservação, podemos eliminar uma equação de movimento. Assim, em mecânica, as leis de conservação são muito importantes para diminuir o número de equações que precisamos resolver. Nem sempre podemos encontrar um número de leis de conservação igual ao de equações de movimento; nesse caso, o sistema dinâmico é dito não integrável. E em eletromagnetismo? As equações de Maxwell juntamente com a força de Lorentz também formam um sistema dinâmico, embora muito complicado, mas que pode tornar-se mais tratável se tivermos leis de conservação. Como vimos anteriormente, a equação da continuidade expressa a conservação da carga elétrica. Poderíamos ter também a energia conservada? A seguir teremos a elucidação dessa questão através da demonstração do teorema de Poynting.

As equações de Maxwell são constituídas pela Lei de Gauss,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = 4\pi\rho,$$

pelo fato de que não há monopolos magnéticos,

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

pela Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e pela Lei de Ampère-Maxwell,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

A força de Lorentz para uma carga puntiforme q é dada por

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B},$$

onde $\mathbf{v}$ é o vetor velocidade da partícula carregada. Essa força vale também para o caso não estático e, portanto, podemos considerá-la para determinar o balanço energético entre uma distribuição de matéria carregada e os campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$. Se a matéria é caracterizada pelas densidades ρ e $\mathbf{J}$, então a força sobre um elemento de volume d^3r de matéria é dada por

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{\rho}{c}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right)$$

e, como

$$\mathbf{J} = \rho\mathbf{v},$$

segue que

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J} \times \mathbf{B}\right).$$

Neste ponto é importante enfatizarmos que $\mathbf{v}$, no caso contínuo, é o campo de velocidades da matéria, isto é, no ponto $\mathbf{r}$ e instante t, temos $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$.

O trabalho que a força elétrica faz sobre a carga $dq = \rho d^3r$ por unidade de tempo é a potência mecânica transferida dos campos para a matéria e é dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{v}\cdot d\mathbf{F} &= \rho\mathbf{v}\cdot\mathbf{E}d^3r \\ &= \mathbf{J}\cdot\mathbf{E}d^3r.\end{aligned}$$

Notemos que a força magnética não executa trabalho sobre a matéria. Da Lei de Ampère & Maxwell segue que a densidade de corrente pode ser expressa em termos dos campos:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} &= \left(\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\cdot\mathbf{E} \\ &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Podemos escrever

$$\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)}{\partial t}.$$

Também, usando a convenção de Einstein, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) &= E_i\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)_i \\ &= E_i\varepsilon_{ijk}\partial_j B_k \\ &= \varepsilon_{ijk}\partial_j\left(E_iB_k\right) - B_k\varepsilon_{ijk}\partial_j E_i \\ &= -\varepsilon_{jik}\partial_j\left(E_iB_k\right) + B_k\varepsilon_{kji}\partial_j E_i \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) + \mathbf{B}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}) \\ &= -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{c}\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},\end{aligned}$$

onde usamos a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}.$$

Podemos também escrever

$$\mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)}{\partial t}.$$

Com esses resultados, obtemos

$$\begin{aligned}\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} &= \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\cdot\left(\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\right) - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \\ &= -\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial\left(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)}{\partial t} - \frac{1}{8\pi}\frac{\partial\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}\right)}{\partial t}\end{aligned}$$

A taxa de variação da energia cinética da matéria carregada é dada pelo trabalho, por unidade de tempo, da força de Lorentz que é exercida sobre as cargas e, portanto,

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{E}_{\mathrm{c}}}{dt} &= \int_V d^3r\,\mathbf{J}\cdot\mathbf{E} \\
&= \int_V d^3r\left[-\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})-\frac{1}{8\pi}\frac{\partial\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)}{\partial t}\right] \\
&= -\frac{c}{4\pi}\int_V d^3r\,\boldsymbol{\nabla}\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B})-\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\,\frac{\partial\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)}{\partial t} \\
&= -\oint_{S(V)} da\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\left(\frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right)-\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\,\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)\right] \\
&= -\oint_{S(V)} da\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S}-\frac{d}{dt}\left(U_{\mathrm{e}}+U_{\mathrm{m}}\right),
\end{aligned}$$

onde $S\left(V\right)$ é a superfície fechada que constitui a fronteira da região V e definimos o vetor de Poynting como

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

Aqui também reconhecemos a energia armazenada no campo elétrico,

$$U_{\mathrm{e}} \equiv \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\,\mathbf{E}\cdot\mathbf{E},$$

e a energia armazenada no campo indução magnética,

$$U_{\mathrm{m}} \equiv \frac{1}{8\pi}\int_V d^3r\,\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}.$$

Logo, o balanço de energia dentro do volume V é dado por

$$\frac{d\left(\mathcal{E}_{\mathrm{c}}+U_{\mathrm{e}}+U_{\mathrm{m}}\right)}{dt} = -\oint_{S(V)} da\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{S}.$$

Em outras palavras, essa equação mostra que, em uma região V do espaço, a energia cinética da matéria somada com a energia total armazenada nos campos será conservada se e somente se o fluxo do vetor de Poynting sobre a fronteira da região for nulo. Essa equação é também conhecida como o Teorema de Poynting.

A conservação de momentum linear em eletromagnetismo

Além do balanço de energia em eletromagnetismo, podemos também deduzir a lei de conservação de momentum linear. Para isso, consideramos um elemento de volume do espaço, d^3r, em que haja uma certa quantidade de carga dada por ρd^3r. Na presença dos campos $\mathbf{E}$ e $\mathbf{B}$, essa carga sofre a ação da força de Lorentz:

$$d\mathbf{F} = d^3r\left(\rho\mathbf{E}+\frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right).$$

Em uma região V do espaço, portanto, a força eletromagnética total sobre a matéria é dada por

$$\begin{aligned}
\mathbf{F}_V &= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E}+\frac{\rho}{c}\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right) \\
&= \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right),
\end{aligned}$$

Essa força nada mais é do que a variação do momentum das cargas dentro da região V, isto é,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V d^3r \left(\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right),$$

onde $\mathbf{P}_m$ é o momentum linear da matéria eletricamente carregada em V. Aqui desconsideraremos a existência de matéria neutra. Podemos expressar o integrando acima apenas em termos dos campos e não das fontes ρ e $\mathbf{J}$. Para isso, tomamos, da Lei de Gauss,

$$\rho = \frac{1}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$$

e, da Lei de Ampère & Maxwell,

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Logo, o integrando aparecendo no membro direito da equação de balanço de momentum fica

$$\begin{aligned}\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B} &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{c}\left(\frac{c}{4\pi}\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B} \\ &= \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B} - \frac{1}{4\pi c}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B}.\end{aligned}$$

Podemos usar a Lei de Indução de Faraday,

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t},$$

para obter

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right)\times\mathbf{B} &= \frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t} - \mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \\ &= \frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t} + c\mathbf{E}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right).\end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\rho\mathbf{E} + \frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B} &= -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{4\pi}\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right)\times\mathbf{B}\frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right) \\ &= -\frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} - \frac{1}{4\pi}\mathbf{E}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right)\frac{1}{4\pi}\mathbf{B}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}\right) - \frac{1}{4\pi c}\frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t}.\end{aligned}$$

Para podermos ter uma lei de balanço análoga à da energia, precisamos reposicionar o operador $\boldsymbol{\nabla}$ ou suas componentes de modo a obtermos, ao invés de uma integral volumétrica, integrais de superfície. Para ilustrar o que queremos, consideremos, primeiramente, os termos com $\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}$ e $\mathbf{E}\times\left(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}\right)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} &= \mathbf{E}\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial E_k}{\partial x_k} \\ &= \sum_{k=1}^{3}\mathbf{E}\frac{\partial E_k}{\partial x_k}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \sum_{k=1}^{3} E_k \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial x_k} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{E}
\end{aligned}
$$

e, como demonstrarei oportunamente,

$$
\mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{E},
$$

dando

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) &= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{E} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) + \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{\nabla} \mathbf{E} \\
&= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) .
\end{aligned}
$$

Com o Lema de Gauss, vem

$$
\begin{aligned}
\int_V d^3 r \left[\mathbf{E} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{E} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) \right] &= \int_V d^3 r \left[\sum_{k=1}^{3} \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\nabla} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right] \\
&= \sum_{k=1}^{3} \int_V d^3 r \frac{\partial \mathbf{E} E_k}{\partial x_k} - \frac{1}{2} \int_V d^3 r \boldsymbol{\nabla} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\
&= \sum_{k=1}^{3} \oint_{S(V)} da\, n_k \mathbf{E} E_k - \frac{1}{2} \oint_{S(V)} da\, \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\
&= \oint_{S(V)} da \left(\sum_{k=1}^{3} n_k E_k \right) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \oint_{S(V)} da\, \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \\
&= \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{E}) \mathbf{E} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{E}) \right] ,
\end{aligned}
$$

onde $S(V)$ é a superfície fechada que constitui a fronteira da região V e $\hat{\mathbf{n}}$ é a normal externa a $S(V)$. De forma análoga, podemos calcular:

$$
\int_V d^3 r \left[-\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \right] = \int_V d^3 r \left[\mathbf{B} \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} - \mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \right] ,
$$

já que não há monopolos magnéticos, isto é,

$$
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0,
$$

e, portanto

$$
\int_V d^3 r \left[-\mathbf{B} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) \right] = \oint_{S(V)} da \left[(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{B}) \mathbf{B} - \frac{1}{2} \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}) \right] .
$$

Agora podemos obter a integral volumétrica de $\rho\mathbf{E}+\mathbf{J}\times\mathbf{B}/c$, pois temos todos os termos levados em conta:

$$\begin{aligned}\int_V d^3r\left[\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right] &= \frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[\mathbf{E}\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}-\mathbf{E}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E})\right]+\frac{1}{4\pi}\int_V d^3r\left[-\mathbf{B}\times(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B})\right]\\ &\quad -\frac{1}{4\pi c}\int_V d^3r\frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t}\\ &= +\frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})\right]\frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right]\\ &- \frac{1}{4\pi c}\frac{d}{dt}\int_V d^3r\mathbf{E}\times\mathbf{B},\end{aligned}$$

já que

$$\int_V d^3r\frac{\partial\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\partial t} = \frac{d}{dt}\int_V d^3r\mathbf{E}\times\mathbf{B}.$$

Voltando à equação de balanço de momentum linear,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = \int_V d^3r\left(\rho\mathbf{E}+\frac{1}{c}\mathbf{J}\times\mathbf{B}\right),$$

encontramos, finalmente,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt} = -\frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E}+(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right]\frac{d}{dt}\int_V d^3r\left(\frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}\right),$$

isto é,

$$\frac{d\mathbf{P}_m}{dt}+\frac{d}{dt}\int_V d^3r\,\mathbf{g} = \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E}+(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right],$$

onde

$$\mathbf{g} \equiv \frac{1}{4\pi c}\mathbf{E}\times\mathbf{B}$$

é a densidade de momentum linear do campo eletromagnético. Portanto, se definirmos o momentum linear do campo eletromagnético como

$$\mathbf{P}_c \equiv \int_V d^3r\,\mathbf{g},$$

então o balanço de momentum linear para o eletromagnetismo é dado por

$$\frac{d\left(\mathbf{P}_m+\mathbf{P}_c\right)}{dt} = \frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E}+(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right],$$

que é conservado na região V se, e somente se,

$$\frac{1}{4\pi}\oint_{S(V)} da\left[(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,\mathbf{E}+(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,\mathbf{B}-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E})-\frac{1}{2}\hat{\mathbf{n}}\,(\mathbf{B}\cdot\mathbf{B})\right] = 0.$$

Caso essa quantidade não seja nula, há transferência de momentum através da superfície da região V e, portanto, podemos interpretar essa quantidade como a integral da força por unidade de área transmitida através da superfície $S(V)$. Se tomarmos uma só componente desse integrando, temos

$$\begin{aligned}
(\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{E})\,E_k + (\hat{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{B})\,B_k - \frac{1}{2}n_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right) &= \sum_{m=1}^{3} n_m\left(E_m E_k + B_m B_k\right) - \frac{1}{2}n_k\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right) \\
&= \sum_{m=1}^{3} 4\pi T_{km} n_m,
\end{aligned}$$

onde

$$T_{km} \equiv \frac{1}{4\pi}\left[E_k E_m + B_k B_m - \frac{1}{2}\delta_{km}\left(\mathbf{E}\cdot\mathbf{E}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\right)\right]$$

é o chamado tensor dos estresses de Maxwell. Com isso, o balanço de momentum linear pode também ser expresso como

$$\frac{d\left(\mathbf{P}_m+\mathbf{P}_c\right)_k}{dt} = \sum_{m=1}^{3}\oint_{S(V)} da\, T_{km} n_m.$$