A geometria do espaço-tempo

Uma revisão da cinemática e da dinâmica relativísticas

Uma transformação de Lorentz deixa invariante o intervalo s_{AB}^2 entre dois eventos, A e B, do espaço-tempo. Em um referencial inercial S, o intervalo entre esses dois eventos é definido como

$$s_{AB}^2 = c^2 (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 ,$$

onde o evento A ocorre no instante t_A e no ponto (x_A, y_A, z_A) e o evento B ocorre no instante t_B e no ponto (x_B, y_B, z_B). Assim, em um outro referencial inercial S' o intervalo entre os eventos A e B é também s_{AB}^2, isto é,

$$\begin{aligned} s_{AB}^2 &= c^2 (t_A - t_B)^2 - (x_A - x_B)^2 - (y_A - y_B)^2 - (z_A - z_B)^2 \\ &= c^2 (t'_A - t'_B)^2 - (x'_A - x'_B)^2 - (y'_A - y'_B)^2 - (z'_A - z'_B)^2 , \end{aligned}$$

onde, para os observadores em S', o evento A ocorre no instante t'_A e no ponto (x'_A, y'_A, z'_A), o evento B ocorre no instante t'_B e no ponto (x'_B, y'_B, z'_B) e $c > 0$ é a magnitude da velocidade da luz no vácuo. Um exemplo de transformação de Lorentz muito comum é a chamada boost de Lorentz ao longo do eixo x :

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - \beta ct) , \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{\beta x}{c} \right) , \end{aligned}$$

onde

$$\beta = \frac{v}{c} \text{ e } \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.$$

Aqui, $\mathrm{v} = v\hat{\mathbf{x}}$ é a velocidade relativa entre os referenciais S e S' e, portanto, v pode ser uma constante positiva ou negativa.

A força de Lorentz sobre uma carga q puntiforme é escrita como

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema CGS, ou

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + q\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema MKS, onde

$$\mathbf{r}_q = \mathbf{r}_q (t)$$

é o vetor posição da carga q no instante t. A Segunda Lei de Newton continua válida na dinâmica relativística quando escrevemos

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt},$$

onde

$$\mathbf{p} = m\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}$$

e

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}},$$

com m_0 sendo a massa de repouso da partícula. Portanto, a chamada "parte espacial" da força fica

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema CGS, ou

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\mathbf{E} + q\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B},$$

no sistema MKS. ¿Existe uma "parte temporal" da força, que seja sua "companheira" de transformação de Lorentz, assim como o tempo é o "companheiro" do espaço no "boost" de Lorentz acima?

Para responder a essa questão, consideremos o momentum $\mathbf{p}$ e sua "companheira", a energia U:

$$\begin{aligned} U &= mc^2 \\ &= \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}}. \end{aligned}$$

Notemos que U não é a energia cinética. A energia cinética é $K = U - m_0c^2$. Temos

$$\begin{aligned} \frac{U^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 &= \frac{m_0^2c^2}{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2} - \frac{m_0^2}{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2 \\ &= \frac{m_0^2c^2}{1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}\left[1-\frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2\right] \\ &= m_0^2c^2. \end{aligned}$$

Como $m_0^2c^2$ é um valor fixo em qualquer referencial inercial, concluímos que U/c e $\mathbf{p}$ se transformam exatamente como tempo e posição, respectivamente. Assim, vemos que U/c é a "companheira" do momentum $\mathbf{p}$ em transformações de Lorentz. No entanto,

$$\frac{1}{c}\frac{dU}{dt} \text{ e } \frac{d\mathbf{p}}{dt}$$

não se transformam como U/c e $\mathbf{p}$ pois dt não é invariante por transformações de Lorentz. Como o tempo próprio da partícula, τ, é o mesmo em qualquer referencial inercial, podemos definir o par

$$\frac{1}{c}\frac{dU}{d\tau} \quad \text{e} \quad \frac{d\mathbf{p}}{d\tau}.$$

Essa dupla de quantidades se comporta como tempo e espaço em transformações de Lorentz.

O tempo próprio é o tempo no referencial de repouso instantâneo da partícula, com a origem sobre a partícula. Notemos que o referencial de repouso instantâneo da partícula é aquele que, no instante t de S, tem velocidade dx_q/dt em S, supondo que escolhamos os referenciais S e S' com seus eixos x e x' ao longo da velocidade instantânea da partícula. Fixando o referencial S' com velocidade constante dx_q/dt calculada em t, relativamente a S, podemos utilizar o boost de Lorentz acima e escrever

$$d\tau = \frac{dt - \frac{1}{c^2}\frac{dx_q}{dt}dx_q}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2}}$$

e

$$0 = \frac{dx_q - \frac{dx_q}{dt}dt}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2}},$$

resultando em

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{dx_q}{dt}\right)^2}.$$

Como sempre podemos escolher os eixos dos referenciais ao longo da velocidade da partícula, de forma geral,

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}.$$

Logo,

$$\frac{1}{c}\frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}}\frac{1}{c}\frac{dU}{dt}$$

e

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}}\frac{d\mathbf{p}}{dt}.$$

Para simplificar a notação nesse contexto, sejam

$$\boldsymbol{\beta} = \frac{1}{c}\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}$$

e

$$\begin{aligned}\gamma &= \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\right)^2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}.\end{aligned}$$

Podemos considerar também a derivada

$$\frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau} = \gamma\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}.$$

Obviamente, a "companheira" dessa quantidade em transformações de Lorentz é

$$c\frac{dt}{d\tau} = c\gamma.$$

Temos, portanto, as relações

$$\begin{aligned}\frac{U}{c} &= mc \\ &= m_0\gamma c \\ &= m_0\frac{d\left(ct\right)}{d\tau}\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{p} &= m\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \\ &= m_0\gamma\frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \\ &= m_0\frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau}.\end{aligned}$$

É conveniente definirmos

$$u_0 = \frac{d\left(ct\right)}{d\tau}$$

e

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau}.$$

Logo,

$$\frac{U}{c} = m_0u_0$$

e

$$\mathbf{p} = m_0\mathbf{u}.$$

Com essas definições, podemos escrever

$$\begin{aligned}m_0\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\ &= \gamma\frac{d\mathbf{p}}{dt} \\ &= \gamma\left(q\mathbf{E}+\frac{q}{c}\frac{d\mathbf{r}_q}{dt}\times\mathbf{B}\right) \\ &= q\left(\gamma\mathbf{E}+\frac{1}{c}\frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau}\times\mathbf{B}\right) \\ &= \frac{q}{c}\left(u_0\mathbf{E}+\mathbf{u}\times\mathbf{B}\right),\end{aligned}$$

no sistema CGS, ou

$$\begin{aligned}
m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} &= \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \gamma \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \gamma \left(q\mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{r}_q}{dt} \times \mathbf{B} \right) \\
&= q \left(\gamma \mathbf{E} + \frac{d\mathbf{r}_q}{d\tau} \times \mathbf{B} \right) \\
&= q \left(u_0 \frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right),
\end{aligned}$$

no sistema MKS, onde usamos

$$\begin{aligned}
\gamma &= \frac{dt}{d\tau} \\
&= \frac{u_0}{c}
\end{aligned}$$

Também temos

$$m_0 \frac{du_0}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dU}{d\tau}.$$

Da equação

$$\frac{U^2}{c^2} - \mathbf{p}^2 = m_0^2 c^2,$$

obtida acima, calculamos que

$$\frac{1}{c^2} \frac{dU^2}{d\tau} = \frac{d\mathbf{p}^2}{d\tau},$$

ou seja,

$$\frac{2U}{c^2} \frac{dU}{d\tau} = 2\mathbf{p} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau},$$

resultando em

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{dU}{d\tau} &= \frac{c\mathbf{p}}{U} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \frac{\mathbf{p}}{mc} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \frac{1}{\gamma c} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} \\
&= \frac{1}{c} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{p}}{dt} \\
&= \frac{q}{c} \mathbf{u} \cdot \mathbf{E},
\end{aligned}$$

tanto no sistema CGS como no sistema MKS.

Resumindo, as equações dinâmicas para a partícula podem ser expressas por

$$m_0 \frac{du_0}{d\tau} \quad = \quad q\mathbf{u} \cdot \frac{\mathbf{E}}{c},$$

tanto no sistema CGS como no sistema MKS, e

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \quad = \quad \frac{q}{c} \left(u_0 \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right),$$

no sistema CGS, ou

$$m_0 \frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \quad = \quad q \left(u_0 \frac{\mathbf{E}}{c} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right),$$

no sistema MKS.