A derivada temporal parcial da polarização é dada por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t}\left\langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle \\
&= \frac{\partial}{\partial t}\left[\sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right] \\
&= \sum_n \sum_k q_{kn}\frac{\partial \mathbf{s}_{kn}}{\partial t} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&+ \sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\frac{\partial}{\partial t} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&= \sum_n \sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&- \sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)
\end{aligned}$$

e, dessa forma,

$$\sum_n \sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) = \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} + \sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\left\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + c\boldsymbol{\nabla}\times\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&+ \sum_n \sum_k q_{kn}\left[\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) - \dot{\mathbf{s}}_n\mathbf{s}_{kn} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right] \\
&= \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + c\boldsymbol{\nabla}\times\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&+ \sum_n \sum_k q_{kn}\boldsymbol{\nabla}\times\left[(\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right] \\
&= \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + c\boldsymbol{\nabla}\times\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle + \frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&+ \boldsymbol{\nabla}\times\left[\sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right],
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{c}\left\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle &\approx \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&+ 4\pi\boldsymbol{\nabla}\times\left[\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle + \frac{1}{c}\sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right].
\end{aligned}$$

Comparemos os termos entre colchetes:

$$\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle + \sum_n \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\frac{\dot{\mathbf{s}}_n}{c} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) = \sum_n \mathbf{m}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)$$

$$\begin{aligned}
&+ \quad \frac{1}{c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&= \quad \frac{1}{2c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&+ \quad \frac{1}{c}\left(\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_n\right) f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Vamos supor também que o material não esteja em movimento, de forma que as velocidades das moléculas, $\dot{\mathbf{s}}_n$, sejam muito menores, em valor absoluto médio, do que as velocidades das cargas em cada molécula, $\dot{\mathbf{s}}_{kn}$, também em valor absoluto médio. Com isso, podemos desprezar o segundo termo da equação acima e escrever

$$\begin{aligned}
\frac{4\pi}{c}\left\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle &\approx \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&+ 4\pi\boldsymbol{\nabla}\times\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle.
\end{aligned}$$

A equação de Ampère-Maxwell, então, em média espacial, fica

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle = \frac{4\pi}{c}\left\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle+\frac{1}{c}\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right\rangle,$$

isto é,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}(\mathbf{r},t) &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{4\pi}{c}\frac{\partial \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \\
&+ 4\pi\boldsymbol{\nabla}\times\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t},
\end{aligned}$$

ou ainda,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\left[\mathbf{B}(\mathbf{r},t)-4\pi\left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle\right] &= \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r},t) \\
&+ \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}[\mathbf{E}(\mathbf{r},t)+4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r},t)].
\end{aligned}$$

Definindo

$$\mathbf{M}(\mathbf{r},t) \equiv \left\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\right\rangle,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{B}(\mathbf{r},t)-4\pi\mathbf{M}(\mathbf{r},t)$$

e reconhecendo o campo deslocamento elétrico

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}(\mathbf{r},t)+4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r},t),$$

obtemos

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

que é a equação de Ampère-Maxwell macroscópica.

As equações de Maxwell para meios não condutores, lineares, homogêneos e isotrópicos

Mesmo no caso não estático, quando os campos e as fontes podem depender do tempo, ainda assim as equações de Maxwell macroscópicas podem ser escritas como

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{D} = 4\pi\rho,$$

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t},$$

onde

$$\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}$$

e

$$\mathbf{H} = \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M}.$$

Aqui, é claro, $\mathbf{P}$ é a polarização e $\mathbf{M}$ é a magnetização. Para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico,

$$\mathbf{P} = \chi_e\mathbf{E}$$

e

$$\mathbf{M} = \chi_m\mathbf{H},$$

onde χ_e e χ_m são as susceptibilidades elétrica e magnética, respectivamente. O meio é não condutor porque, mesmo havendo campo elétrico aplicado ao meio, não há corrente livre. O meio é linear porque a polarização e a magnetização dependem linearmente dos campos elétrico e intensidade magnética, respectivamente. O meio é homogêneo porque as susceptibilidades não dependem da posição no meio. Como as direções da polarização e da magnetização induzidas são paralelas, respectivamente, aos campos elétrico e intensidade magnética, o meio é dito isotrópico; será dito anisotrópico quando a polarização for ao longo de uma direção não paralela ao campo elétrico ou quando a magnetização for ao longo de uma direção não paralela ao campo intensidade magnética.

Para um meio não condutor, linear, homogêneo e isotrópico,

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \mathbf{E} + 4\pi\mathbf{P}\\ &= \mathbf{E} + 4\pi\chi_e\mathbf{E}\\ &= (1 + 4\pi\chi_e)\,\mathbf{E}\\ &= \varepsilon\mathbf{E},\end{aligned}$$

onde definimos a permissividade elétrica do meio como

$$\varepsilon \equiv 1 + 4\pi\chi_e,$$

e

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \mathbf{B} - 4\pi\mathbf{M} \\ &= \mathbf{B} - 4\pi\chi_m\mathbf{H},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \mathbf{H} + 4\pi\chi_m\mathbf{H} \\ &= \left(1 + 4\pi\chi_m\right)\mathbf{H} \\ &= \mu\mathbf{H},\end{aligned}$$

onde definimos a permeabilidade magnética do meio como

$$\mu \equiv 1 + 4\pi\chi_m.$$

Substituindo

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}$$

e

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu}$$

nas equações de Maxwell macroscópicas acima, obtemos

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\rho,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\times\left(\frac{\mathbf{B}}{\mu}\right) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J} + \frac{1}{c}\frac{\partial\left(\varepsilon\mathbf{E}\right)}{\partial t},$$

que, como estamos supondo ε e μ constantes na região do meio, também podem ser escritas como

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E} = 4\pi\frac{\rho}{\varepsilon},$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B} = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B} = \frac{4\pi\mu}{c}\mathbf{J} + \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}.$$

Revisão: as equações de onda no vácuo

Tomando o rotacional de ambos os membros da Lei de Indução de Faraday, que, como vimos é

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}) = -\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})}{\partial t}.$$

Considerando uma região do espaço onde não haja cargas ou correntes livres, então $\rho = 0$, $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ e as Leis de Gauss e de Ampère-Maxwell ficam

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} &= 0, \\
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Logo, a equação acima,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B})}{\partial t},$$

pode ser reescrita como

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Essa é a equação de onda para o campo elétrico.

Podemos também obter a equação de onda para o campo indução magnética. Para isso, podemos tomar o rotacional de ambos os membros da Lei de Ampère-Maxwell com $\rho = 0$ e $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ para obter

$$\boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{B}) = \frac{1}{c}\boldsymbol{\nabla} \times \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\right),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}(\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}) - \nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c}\frac{\partial (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E})}{\partial t}.$$

Usando o fato de não haver monopolos magnéticos e a Lei de Indução de Faraday, isto é,

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$

obtemos

$$\nabla^2 \mathbf{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = \mathbf{0},$$

que é a equação de onda para o campo indução magnética.