Retornando para o ponto em que estávamos a respeito da susceptibilidade elétrica complexa, usando esse limite, obtemos:

$$\begin{aligned}\chi_c(\omega) &= \frac{1}{2\pi i}\left[\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\frac{\chi_c(\omega')}{\omega'-\omega} + i\pi\chi_c(\omega)\right] \\ &= \frac{1}{2\pi i}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\frac{\chi_c(\omega')}{\omega'-\omega} + \frac{\chi_c(\omega)}{2},\end{aligned}$$

isto é,

$$\chi_c(\omega) = \frac{1}{\pi i}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\frac{\chi_c(\omega')}{\omega'-\omega}.$$

Tomando as partes real e imaginária dessa equação resulta nas relações de Kramers & Kronig:

$$\mathrm{Re}\left[\chi_c(\omega)\right] = \frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\frac{\mathrm{Im}\left[\chi_c(\omega')\right]}{\omega'-\omega}$$

e

$$\mathrm{Im}\left[\chi_c(\omega)\right] = -\frac{1}{\pi}\mathcal{P}\int_{-\infty}^{+\infty} d\omega'\,\frac{\mathrm{Re}\left[\chi_c(\omega')\right]}{\omega'-\omega}.$$

Guias de onda de seção transversal constante

Antes de considerarmos uma aplicação específica, suponhamos um tubo reto, oco e infinito, feito de material condutor ideal, com seção transversal constante. Vamos considerar que o interior desse tubo seja preenchido por um material dielétrico linear, homogêneo e isotrópico, com permissividade elétrica ε e permeabilidade magnética μ. Tomemos o eixo z ao longo do comprimento do tubo e suponhamos que a espessura da parede condutora seja constante. As ondas eletromagnéticas que se propagariam no interior de um tal guia de ondas de seção transversal constante devem satisfazer as equações

$$\nabla^2\boldsymbol{\epsilon} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t^2} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2\boldsymbol{\beta} - \frac{\mu\varepsilon}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{\beta}}{\partial t^2} = \mathbf{0}.$$

Para ondas monocromáticas, tomemos como dependência temporal de nosso ansatz a função $\exp(-i\omega t)$. Com isso, as equações acima escrevem-se

$$\nabla^2\boldsymbol{\epsilon} + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{\epsilon} = \mathbf{0}$$

e

$$\nabla^2\boldsymbol{\beta} + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\boldsymbol{\beta} = \mathbf{0}.$$

Modos TE

Procuremos por modos transversais elétricos, TE, ou seja, imponhamos $\epsilon_z = 0$ dentro do guia de ondas. Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\beta}}{\partial t} \\ &= i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}. \end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \epsilon_z}{\partial y} - \frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c}\beta_x, \\ \frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} - \frac{\partial \epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c}\beta_y, \\ \frac{\partial \epsilon_y}{\partial x} - \frac{\partial \epsilon_x}{\partial y} &= i\frac{\omega}{c}\beta_z. \end{aligned}$$

Para modos TE:

$$-\frac{\partial \epsilon_y}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_x$$

e

$$\frac{\partial \epsilon_x}{\partial z} = i\frac{\omega}{c}\beta_y.$$

Procuremos por ondas que se propaguem ao longo do sentido positivo do eixo z. Assim, tomamos a dependência funcional em z dos campos $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\beta}$ como $\exp(ik_z z)$ e obtemos

$$\epsilon_x = \frac{\omega}{k_z c}\beta_y$$

e

$$\epsilon_y = -\frac{\omega}{k_z c}\beta_x.$$

Da Lei de Ampère & Maxwell obtemos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\epsilon}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \beta_z}{\partial y} - \frac{\partial \beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_x \\ &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{k_z c^2}\beta_y, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\beta_x}{\partial z} - \frac{\partial\beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_y \\
&= i\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{k_z c^2}\beta_x, \\
\frac{\partial\beta_y}{\partial x} - \frac{\partial\beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_z \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Com o ansatz referente à dependência em z, essas equações dão

$$
\frac{\partial\beta_z}{\partial y} - ik_z\beta_y = -i\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{k_z c^2}\beta_y
$$

e

$$
ik_z\beta_x - \frac{\partial\beta_z}{\partial x} = i\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{k_z c^2}\beta_x,
$$

ou ainda,

$$
\begin{aligned}
\beta_x &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\left(\frac{\partial\beta_z}{\partial x}\right) \\
&= -\frac{k_z c}{\omega}\epsilon_y
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
\beta_y &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\left(\frac{\partial\beta_z}{\partial y}\right) \\
&= \frac{k_z c}{\omega}\epsilon_x.
\end{aligned}
$$

Resumindo, se definirmos o operador nabla transversal como

$$
\boldsymbol{\nabla}_t = \hat{\mathbf{x}}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{\mathbf{y}}\frac{\partial}{\partial y},
$$

podemos escrever

$$
\boldsymbol{\beta}_t = -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\boldsymbol{\nabla}_t\beta_z
$$

e

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\epsilon}_t &= -\frac{\omega}{k_z c}\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\beta}_t \\
&= -\frac{\omega}{k_z c}\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\beta},
\end{aligned}
$$

onde definimos os correspondentes campos transversais ao eixo do guia de ondas como

$$
\boldsymbol{\beta}_t = \hat{\mathbf{x}}\beta_x + \hat{\mathbf{y}}\beta_y
$$

e

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y.$$

Dessa forma, se encontrarmos β_z, facilmente obteremos β_x, β_y, ϵ_x e ϵ_y. Para obtermos β_z, utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2\beta_z + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\beta_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z, obtemos a equação para β_z:

$$\frac{\partial^2\beta_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\beta_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\beta_z = 0.$$

Essa equação e as condições de contorno para β_z resolvem o problema para modos TE. Na superfície do guia de ondas, a componente normal de $\boldsymbol{\beta}$ deve ser nula, pois o condutor é ideal e $\boldsymbol{\beta}$ se anula dentro do material condutor. Logo,

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}|_S = 0.$$

Mas como a normal à superfície de um guia de ondas cilíndrico é ortogonal ao eixo do cilindro, podemos escrever

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}|_S &= \hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}_t|_S \\ &= 0,\end{aligned}$$

resultando em

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\beta}_t|_S &= -\frac{ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\,\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_t\beta_z|_S \\ &= 0,\end{aligned}$$

isto é,

$$\hat{\mathbf{n}}\cdot\boldsymbol{\nabla}_t\beta_z|_S = 0$$

é a condição de contorno para modos TE.

Modos TM (como exercíco)

Impondo que $\beta_z = 0$ dentro do guia de ondas, obteremos os modos transversais magnéticos, TM. Da Lei de Ampère-Maxwell obtemos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\beta} &= \frac{\mu\varepsilon}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\epsilon}}{\partial t} \\ &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\epsilon},\end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned}\frac{\partial\beta_z}{\partial y} - \frac{\partial\beta_y}{\partial z} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_x, \\ \frac{\partial\beta_x}{\partial z} - \frac{\partial\beta_z}{\partial x} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_y, \\ \frac{\partial\beta_y}{\partial x} - \frac{\partial\beta_x}{\partial y} &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_z.\end{aligned}$$

Para modos TM:

$$-\frac{\partial \beta_y}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_x$$

e

$$\frac{\partial \beta_x}{\partial z} = -i\mu\varepsilon\frac{\omega}{c}\epsilon_y.$$

Aqui também tomamos a dependência funcional em z dos campos $\boldsymbol{\epsilon}$ e $\boldsymbol{\beta}$ como $\exp(ik_z z)$ e obtemos

$$\beta_y = \mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\epsilon_x$$

e

$$\beta_x = -\mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\epsilon_y.$$

Da Lei de Indução de Faraday temos

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\nabla}\times\boldsymbol{\epsilon} &= -\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{\beta}}{\partial t}\\ &= i\frac{\omega}{c}\boldsymbol{\beta}.\end{aligned}$$

Em termos de componentes cartesianas, essa equação resulta em

$$\begin{aligned}\frac{\partial\epsilon_z}{\partial y}-\frac{\partial\epsilon_y}{\partial z} &= i\frac{\omega}{c}\beta_x,\\ \frac{\partial\epsilon_x}{\partial z}-\frac{\partial\epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c}\beta_y,\\ \frac{\partial\epsilon_y}{\partial x}-\frac{\partial\epsilon_x}{\partial y} &= i\frac{\omega}{c}\beta_z.\end{aligned}$$

Para modos TM e o ansatz de propagação ao longo do eixo do guia de ondas, obtemos

$$\begin{aligned}\frac{\partial\epsilon_z}{\partial y}-ik_z\epsilon_y &= i\frac{\omega}{c}\beta_x\\ &= -i\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{k_z c^2}\epsilon_y\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}ik_z\epsilon_x-\frac{\partial\epsilon_z}{\partial x} &= i\frac{\omega}{c}\beta_y\\ &= i\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{k_z c^2}\epsilon_x,\end{aligned}$$

ou seja,

$$\epsilon_y = \frac{-ik_z}{k_z^2-\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial\epsilon_z}{\partial y}$$

e

$$\epsilon_x = \frac{-ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\frac{\partial\epsilon_z}{\partial x}.$$

Em resumo, portanto,

$$\boldsymbol{\epsilon}_t = \frac{-ik_z}{k_z^2 - \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}}\boldsymbol{\nabla}_t\epsilon_z$$

e

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\beta}_t &= \mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\epsilon}_t \\ &= \mu\varepsilon\frac{\omega}{k_z c}\hat{\mathbf{z}}\times\boldsymbol{\epsilon}.\end{aligned}$$

Dessa forma, se encontrarmos ϵ_z, facilmente obteremos ϵ_x, ϵ_y, β_x e β_y. Para obtermos ϵ_z, utilizamos a equação de onda:

$$\nabla^2\epsilon_z + \mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_z = 0.$$

Com o ansatz para a dependência em z, obtemos a equação para ϵ_z:

$$\frac{\partial^2\epsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\epsilon_z}{\partial y^2} + \left(\mu\varepsilon\frac{\omega^2}{c^2} - k_z^2\right)\epsilon_z = 0.$$

Como a componente tangencial do campo elétrico à superfície do guia de ondas deve ser nula, pois o campo elétrico dentro de um condutor ideal é nulo e a componente tangencial do campo elétrico é contínua, segue que

$$\hat{\mathbf{n}}\times\boldsymbol{\epsilon}\big|_S = \mathbf{0},$$

isto é,

$$\left(n_x\hat{\mathbf{x}} + n_y\hat{\mathbf{y}}\right)\times\left(\hat{\mathbf{x}}\epsilon_x + \hat{\mathbf{y}}\epsilon_y + \hat{\mathbf{z}}\epsilon_z\right)\big|_S = 0,$$

ou seja,

$$\hat{\mathbf{z}}\left(n_x\epsilon_y - n_y\epsilon_x\right) - \hat{\mathbf{y}}n_x\epsilon_z + \hat{\mathbf{x}}n_y\epsilon_z\big|_S = 0$$

e, portanto,

$$n_x\epsilon_y - n_y\epsilon_x\big|_S = 0,$$

$$n_x\epsilon_z\big|_S = 0$$

e

$$n_y\epsilon_z\big|_S = 0.$$

A normal tem apenas as componentes n_x e n_y e

$$n_x^2 + n_y^2 = 1.$$

Logo, porque as componentes da normal, n_x e n_y, não podem ser ambas nulas, segue que a condição de contorno para os modos TM é

$$\epsilon_z\big|_S = 0.$$