As Equações de Maxwell Macroscópicas

Dentro da matéria há moléculas por toda parte. Em cada molécula, há átomos compostos por núcleos positivos orbitados por elétrons negativos. Sobre cada uma dessas minúsculas partículas, se consideradas puntiformes, o campo elétromagnético diverge, assumindo valores infinitos. Mas, nessa afirmação, estamos falando do campo eletromagnético microscópico, que não pode ser medido por uma ponta de prova, que, por sua vez, também é composta por átomos. Precisamos, então, formular uma maneira de tratar o campo eletromagnético dentro da matéria que seria observável através de medições feitas por um aparato macroscópico. No vácuo, as equações de Maxwell são as que já temos considerado:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho_{mic}(\mathbf{r},t),$$

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t) = 0,$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t}$$

e

$$\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)+\frac{1}{c}\frac{\partial\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t},$$

onde adicionei o subscrito *mic* para indicar que essas são equações microscópicas. Entre um elétron e um próton, por exemplo, os campos são os microscópicos; não há outro meio senão o vácuo entre eles. O problema é que, para medir os campos, as cargas e as correntes, utilizamos instrumentos macroscópicos. Não há como medirmos diretamente as grandezas microscópicas. Assim, um aparato macroscópico mede sempre um valor efetivo médio, no espaço e no tempo, das grandezas eletromagnéticas. Vamos, portanto, seguir o livro de J. D. Jackson e fazer uma média espacial das equações acima para deduzir as equações de Maxwell macroscópicas.

Seja $f(\mathbf{r})$ uma função centrada na origem e esfericamente simétrica, mas que se anule exponencialmente para distâncias suficientemente grandes. Por exemplo, como a luz visível não mostra a natureza granular da matéria, mas os raios X mostram, podemos convencionar como o limite macroscópico uma distância típica que divida o âmbito visível do âmbito de raios X, digamos, como Jackson, cerca de 100Å. Isso significa que podemos supor que $f(\mathbf{r})$ se anule para distâncias da ordem de 100Å. As médias espaciais das grandezas eletromagnéticas, então, ficam

$$\langle\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t),$$

$$\langle\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t),$$

$$\langle\rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\rho_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)$$

e

$$\langle\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t),$$

onde as integrais são sobre todo o espaço. Os campos macroscópicos são definidos como as médias dos respectivos campos microscópicos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) \equiv \langle\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle$$

e

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) \equiv \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle ,$$

onde as quantidades macroscópicas não têm o subscrito *mic*.

Agora, tomando as médias das equações de Maxwell microscópicas, obtemos

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = 4\pi \langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle ,$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = 0,$$

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = -\frac{1}{c}\left\langle \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right\rangle$$

e

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = \frac{4\pi}{c}\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle + \frac{1}{c}\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right\rangle .$$

No entanto,

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = \boldsymbol{\nabla}\cdot \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle ,$$

pois, como $\boldsymbol{\nabla}$ opera apenas sobre $\mathbf{r}$ e não sobre $\mathbf{r}'$,

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t).
\end{aligned}$$

De maneira análoga, também temos

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= \boldsymbol{\nabla}\times \langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \\
&= \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{E}(\mathbf{r},t),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= \boldsymbol{\nabla}\cdot \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \\
&= \boldsymbol{\nabla}\cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
\langle \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= \boldsymbol{\nabla}\times \langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \\
&= \boldsymbol{\nabla}\times \mathbf{B}(\mathbf{r},t).
\end{aligned}$$

Como a derivada parcial com relação ao tempo não opera sobre $\mathbf{r}$ e nem sobre $\mathbf{r}'$, segue que

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right\rangle &= \int d^3r'\, f(\mathbf{r}') \frac{\partial \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t)}{\partial t} \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \int d^3r'\, f(\mathbf{r}') \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) \\
&= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t) \right\rangle \\
&= \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r},t)}{\partial t}
\end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{\partial \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t)}{\partial t} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \mathbf{B}_{mic}(\mathbf{r},t) \right\rangle \\
&= \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.
\end{aligned}$$

Assim, as duas equações macroscópicas homogêneas de Maxwell já estão deduzidas:

$$\boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r},t) = 0$$

e

$$\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r},t)}{\partial t}.$$

Ainda precisamos calcular $\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t) \rangle$ e $\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t) \rangle$. Vamos supor que haja N cargas em cada molécula do material e, para simplificar sem perder a generalidade, vamos supor também que o material seja uma substância pura, isto é, composto por moléculas idênticas. Seja $\mathbf{s}_n$ a posição da n-ésima molécula, medida com relação a um núcleo atômico específico. Assim, cada carga q_{kn}, da n-ésima molécula fica no ponto $\mathbf{s}_{kn}$, com relação ao vetor posição da molécula, $\mathbf{s}_n$. Isso quer dizer que, com relação à origem do sistema de coordenadas, a posição da carga q_{kn} é dada por $\mathbf{s}_{kn} + \mathbf{s}_n$. Também vamos imaginar que haja cargas livres, q_m, nas posições $\mathbf{r}_m$. Como há movimento dessas cargas todas, todas as posições mencionadas devem ser consideradas como funções do tempo. Assim,

$$\rho_{mic}(\mathbf{r},t) = \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t) \rangle &= \int d^3r'\, f(\mathbf{r}') \rho_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) \\
&= \int d^3r'\, f(\mathbf{r}') \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}_m) \\
&+ \int d^3r'\, f(\mathbf{r}') \sum_n \sum_k q_{kn} \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n) \\
&= \sum_m q_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Tipicamente, $|\mathbf{s}_{kn}|$ é da ordem de alguns angströms apenas e, portanto, $f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n)$ não difere apreciavelmente de $f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)$. Podemos, portanto, aproximar:

$$f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n) \quad \approx \quad f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)-\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)+\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla})^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)$$

e, com essa aproximação, obtemos

$$\begin{aligned}
\langle\rho_m(\mathbf{r},t)\rangle \quad &\approx \quad \sum_m q_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)+\sum_n\sum_k q_{kn}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)-\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&+ \quad \sum_n\sum_k q_{kn}\frac{1}{2}(\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla})^2 f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&= \quad \sum_m q_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)+\sum_n\sum_k q_{kn}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)-\boldsymbol{\nabla}\cdot\sum_n\left(\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\right)f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&+ \quad \frac{1}{6}\sum_n\boldsymbol{\nabla}\cdot\left[\left(3\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\mathbf{s}_{kn}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right].
\end{aligned}$$

O dipolo elétrico da n-ésima molécula é

$$\mathbf{p}_n \quad = \quad \sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}$$

e definimos também o momento quadrupolar elétrico da n-ésima molécula como

$$\overleftrightarrow{Q}_n \quad \equiv \quad 3\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\mathbf{s}_{kn}.$$

Para simplificar nossos cálculos abaixo, suponhamos que

$$\overleftrightarrow{Q}_n \quad = \quad \overleftrightarrow{0},$$

ou seja, que as moléculas do material tenham momento quadrupolar elétrico nulo. A polarização do meio fica, então,

$$\mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r},t) \quad = \quad \sum_n \mathbf{p}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n),$$

já que a n-ésima molécula tem um dipolo instantâneo $\mathbf{p}_n$. Com essas observações, concluímos que

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \quad &= \quad \left\langle\sum_n \mathbf{p}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right\rangle\\
&= \quad \sum_n \mathbf{p}_n\int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{s}_n)\\
&= \quad \sum_n \mathbf{p}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&= \quad \sum_n\left(\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\right)f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)
\end{aligned}$$

e, reconhecendo essa quantidade na expressão de $\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle$ acima, vem

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \approx \sum_m q_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle .$$

Supondo que cada molécula seja neutra, temos

$$\sum_k q_{kn} = 0$$

e, consequentemente,

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \approx \sum_m q_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle .$$

A densidade de carga livre é, naturalmente, definida como

$$\begin{aligned}\rho(\mathbf{r},t) &\equiv \left\langle \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\right\rangle \\ &= \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}_m) \\ &= \sum_m q_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\end{aligned}$$

e, definindo

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) \equiv \langle \mathbf{P}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle ,$$

podemos escrever

$$\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \approx \rho(\mathbf{r},t) - \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r},t),$$

analogamente ao caso eletrostático. A Lei de Gauss macroscópica fica, então,

$$\langle \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle = 4\pi\langle \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle ,$$

isto é,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho(\mathbf{r},t) - 4\pi\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{P}(\mathbf{r},t),$$

ou seja,

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{D}(\mathbf{r},t) = 4\pi\rho(\mathbf{r},t),$$

onde definimos o vetor deslocamento como

$$\mathbf{D}(\mathbf{r},t) \equiv \mathbf{E}(\mathbf{r},t) + 4\pi\mathbf{P}(\mathbf{r},t).$$

Calculemos, agora, $\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle$. Da própria definição de $\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)$ temos

$$\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t) \equiv \rho_{mic}(\mathbf{r},t)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r},t),$$

onde $\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r},t)$ é o campo de velocidades das cargas do meio material. Mas, como vimos,

$$\rho_{mic}(\mathbf{r},t) = \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n)$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t) &= \sum_m q_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r},t) + \sum_n \sum_k q_{kn}\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r},t) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n)\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n),\end{aligned}$$

onde, por exemplo,

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r},t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}_m,t)$$

e o campo de velocidades das cargas calculado exatamente sobre a m-ésima carga livre dá o valor de sua velocidade, ou seja,

$$\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r}_m,t) = \dot{\mathbf{r}}_m,$$

com

$$\dot{\mathbf{r}}_m \equiv \frac{d\mathbf{r}_m}{dt}.$$

Analogamente,

$$\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{r},t) = \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n)\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{s}_{kn}+\mathbf{s}_n,t).$$

Mas o vetor $\mathbf{s}_{kn}+\mathbf{s}_n$ indica a posição da k-ésima carga da n-ésima molécula. Logo, o campo de velocidades das cargas calculado exatamente sobre a posição da k-ésima carga da n-ésima molécula dá sua velocidade, ou seja,

$$\mathbf{v}_{mic}(\mathbf{s}_{kn}+\mathbf{s}_n,t) = \dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n,$$

onde

$$\dot{\mathbf{s}}_{kn} \equiv \frac{d\mathbf{s}_{kn}}{dt}$$

e

$$\dot{\mathbf{s}}_n \equiv \frac{d\mathbf{s}_n}{dt}.$$

Com esses resultados, podemos escrever

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}-\mathbf{r}',t) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}_m) \\ &+ \sum_n \sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n)\int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n) \\ &= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m) + \sum_n \sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n).\end{aligned}$$

Podemos aproximar, novamente,

$$f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_{kn}-\mathbf{s}_n) \quad \approx \quad f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)-\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)$$

e definir, naturalmente, a densidade macroscópica de corrente livre,

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}(\mathbf{r},t) &\equiv \left\langle \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m)\right\rangle \\
&= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m \int d^3r'\, f(\mathbf{r}')\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{r}'-\mathbf{r}_m) \\
&= \sum_m q_m \dot{\mathbf{r}}_m f(\mathbf{r}-\mathbf{r}_m).
\end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r},t)+\sum_n\sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n) f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&- \sum_n\sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n)\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Como estamos trabalhando agora para obter a equação de Ampère-Maxwell macroscópica, precisamos fazer aparecer, nos resultados acima, o rotacional da magnetização, além da derivada temporal da polarização. A magnetização é dada por

$$\mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t) \quad = \quad \sum_n \mathbf{m}_n \delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n),$$

onde $\mathbf{m}_n$ é o momento dipolar magnético da n-ésima molécula, definido como

$$\mathbf{m}_n \quad \equiv \quad \frac{1}{2c}\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_{kn}.$$

Assim, queremos reconhecer, na expressão para $\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle$, o rotacional de $\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= \boldsymbol{\nabla}\times\left\langle \sum_n \mathbf{m}_n\delta^{(3)}(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\right\rangle \\
&= \boldsymbol{\nabla}\times\sum_n \mathbf{m}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&= -\sum_n \mathbf{m}_n\times\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&= -\frac{1}{2c}\sum_n\sum_k q_{kn}(\mathbf{s}_{kn}\times\dot{\mathbf{s}}_{kn})\times\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&= -\frac{1}{2c}\sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) \\
&+ \frac{1}{2c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Como

$$\dot{\mathbf{s}}_{kn}\mathbf{s}_{kn} \;=\; -\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn} + \frac{d}{dt}(\mathbf{s}_{kn}\mathbf{s}_{kn}),$$

segue que

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\nabla}\times\langle\mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &= -\frac{1}{2c}\sum_n\left[\sum_k q_{kn}\frac{d}{dt}(\mathbf{s}_{kn}\mathbf{s}_{kn})\right]\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&+ \frac{1}{c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&= -\frac{1}{6c}\sum_n\left[\frac{d}{dt}(3\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\mathbf{s}_{kn})\right]\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&+ \frac{1}{c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&= -\frac{1}{6c}\sum_n\left(\frac{d\overleftrightarrow{Q}_n}{dt}\right)\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&+ \frac{1}{c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Mas como estamos supondo que

$$\overleftrightarrow{Q}_n \;=\; \overleftrightarrow{0},$$

vem

$$\boldsymbol{\nabla}\times\langle\mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \;=\; \frac{1}{c}\sum_n\sum_k q_{kn}\mathbf{s}_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n),$$

que também é equivalente a

$$\boldsymbol{\nabla}\times\langle\mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle \;=\; -\frac{1}{c}\sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n),$$

e, portanto,

$$\begin{aligned}
\langle\mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \sum_n\sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n)f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&- \sum_n\sum_k q_{kn}(\dot{\mathbf{s}}_{kn}+\dot{\mathbf{s}}_n)\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&= \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) + \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&- \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) - \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&= \mathbf{J}(\mathbf{r},t) + \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_{kn}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n) + \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n)\\
&+ c\boldsymbol{\nabla}\times\langle\mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r},t)\rangle - \sum_n\sum_k q_{kn}\dot{\mathbf{s}}_n\mathbf{s}_{kn}\cdot\boldsymbol{\nabla}f(\mathbf{r}-\mathbf{s}_n).
\end{aligned}$$

Como também estamos supondo que a carga total de cada molécula seja nula, isto é,

$$\sum_k q_{kn} = 0,$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) &= \sum_n \left(\sum_k q_{kn} \right) \dot{\mathbf{s}}_n f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) \\ &= \mathbf{0},\end{aligned}$$

implicando que

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{J}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle &\approx \mathbf{J}(\mathbf{r}, t) + c\boldsymbol{\nabla} \times \langle \mathbf{M}_{mic}(\mathbf{r}, t) \rangle \\ &+ \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_{kn} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n) - \sum_n \sum_k q_{kn} \dot{\mathbf{s}}_n \mathbf{s}_{kn} \cdot \boldsymbol{\nabla} f(\mathbf{r} - \mathbf{s}_n).\end{aligned}$$