Actividades 10, 11 y 12
Física Computacional

Eduardo Granillo Luna 219220906

02 de Mayo de 2021

1. Introducción

En estas actividades se desarrolla el funcionamiento y resolución de las ecuaciones diferenciales parciales de tipo parabólicas, hiperbólicas y elípticas. Intentaremos darles solución con distintos tipos de valores iniciales y métodos mas sofisticados como las diferencias finitas para simular unas mallas discretas con la información que buscamos pero sobre todo buscando el modelado físico de los fenómenos característicos de estas ecuaciones.

2. Descripción de las tres grandes familias de Ecuaciones Diferenciales Parciales: Parabólica, Hiperbólicas y Elípticas.

A continuación se muestra una breve descripción de las tres grandes familias de las Ecuaciones Diferenciales parciales:

- **Parabólicas.-** Son usadas para describir una amplia variedad de fenómenos dependientes del tiempo incluyendo la conducción del calor o la difusión de partículas. Para definir al tipo más simple de ecuación diferencial parcial parabólica se considera una función u(x,y) de dos variables reales independientes x e y. Se clasifica como parabólica si los coeficientes satisfacen $B^2 - AC = 0$ en

  $$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

  El nombre parabólica se le da ya que la asunción de los coeficientes es el mismo a la condición para una ecuación de geometría analítica que define a una parabola en el plano.

- **Hiperbólicas.-** Una ecuación de este tipo de orden n es, sin entrar en mucho detalle, una ecuación que tiene un problema de valor inicial bien definido para las primeras $n-1$ derivadas. Muchas de las ecuaciones de mecánica son hiperbólicas, de lo cual su estudio tiene tanto interés contemporáneo. La hiperbólica modelo es la ecuación de onda, que en una dimensión espacial es

  $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

  Esta ecuación tiene la propiedad de que si u y su primera derivada respecto al tiempo son datos iniciales arbitrariamente especificados en la línea $t = 0$ (con propiedades suficientes de suavidad), entonces existe una solución para cualquier tiempo t.

- **Elípticas.-** Volviendo a las ecuaciones del tipo

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F = 0$$

donde A, B, C, D, E, F y G son funciones de x y y. Se dice que es elíptica si cumple $B^2 - AC < 0$. Llamarle así es una convención inspirada de la ecuación para una elipse en el plano. El ejemplo más simple y no trivial es la ecuación de Laplace y la ecuación de Poisson. De una manera, cualquier otra ecuación elíptica de dos variables puede ser considerada como una generalización de una de estas ecuaciones al ser puesta en su forma canónica con un cambio de variables.

3. Descripción de los tres tipos de Condiciones a la Frontera: Dirichlet, Neumann y Robin (mixto)

- **Dirichlet.-** En honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, cuando en una ecuación diferencial ordinaria o una en derivadas parciales, se le especifican los valores de la solución que necesita la frontera del dominio. En ciencias aplicadas una condición de frontera de Dirichlet también se conoce como una condición de fronteras fijas. En termodinámica por ejemplo, cuando una superficie es mantenida a una temperatura fija.

- **Neumann.-** En honor a Carl Neumann. La condición especifica los valores de la derivada aplicada a la frontera del dominio. En termodinámica por ejemplo, un flujo de calor preescrito por una superficie sirve de condición de frontera.

- **Robin.-** En honor a Victor Gustave Robin. Es una especificación de una combinación lineal de los valores de la función y de los valores de su derivada en las fronteras del dominio. Otros nombres son la condición tipo Fourier y la condición de radiación. Combina Dirichlet y Neumann y tiene aplicaciones en la transferencia de calor y convección-difusión en general.

4. Descripción del Método de Diferencias Finitas

Consiste en utilizar las series de Taylor para aproximar las derivadas en la ecuación. Si se conoce el valor de una función f(x) en un punto x_0 se puede conocer el valor en una vecindad $x_0 + h$ con Taylor. En esta ecuación aparecen varios terminos de orden h^2 y superior que tienden a ser cero por lo que es mas manejable el resultado, esta aproximación de la primera derivada se le conoce como diferencias finitas de $f'(x_0)$ hacia enfrente, porque involucra un punto hacia enfrente de la derivada. Ahora bien, la aplicamos hacia atrás restando la h en vez de sumarla. Después promediamos las dos ecuaciones anteriores y se obtiene una diferencia finita centrada de orden superior. Ahora calculamos con esta ecuación la aproximación de la segunda derivada hacia atrás, hacia enfrente, y su promedio. Finalmente obtenemos la diferencia finita centrada de segundo orden para $f''(x_0)$ que involucra los valores en 3 puntos.

5. Solución de la Ecuación del Calor: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución. Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 10 en Github.

Habiendo comprendido el método de las diferencias finitas antes mencionado lo que haremos es aplicarlo hacia enfrente y centradas en el espacio.

Para esto primero discretizamos el espacio-tiempo mediante una malla con n puntos entre x=0 y x=L, separados por una distancia Δx y m puntos entre t=0 y t, separados en lapsos de tiempo Δt. Suponiendo estos incrementos se forma una nueva ecuación de calor con un error de aproximación pequeño. A esta manera de hacer la malla se le puede llamar "molécula computacional".

Ahora implementando el método de diferencias finitas conocemos la condición inical $u(x,0) = f(x)$ y las condiciones a la frontera $u(0,t)$, $u(L,t)$ podemos calcular sin problema el valor desconocido de la temperatura en cualquier tiempo t=k. Así, podemos conocer tambien el valor de 2k, y todo sucesivamente.

Para accesar a la actividad 10 sobre esto ingresa a Github o vaya al siguiente link: https://github.com/eduardogranillo/FisicaComputacional/blob/master/Actividad10/Actividad10.ipynb

6. Solución de la Ecuación de Onda: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución.Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 11 en Github.

Para resolver la ecuación de onda en una dimensión primero requerimos definir 4 condiciones: 2 iniciales (derivada de segundo orden en t) y 2 a la frontera (segundo orden en el espacio), para encontrar la solución. Así como también el valor de la constante c que puede ser la raíz cuadrada de la velocidad de propagación de la información.

Por el medio de diferencias finitas podemos comenzar aproximando las segundas derivadas por diferencias finitas centradas de segundo orden. Si discretizamos la malla y h es un incremento en la dirección x y k uno en el tiempo así podemos definir un esténcil computacional de 5 puntos espaciados uniformemente por h y k.

Para inciar el algoritmo tendremos que calcular el primer nivel de u(x,k) usando sólo la información de la condición inicial, con otro esténcil de 4 puntos similar al que utilizamos en la ecuación de calor.

Con esto, ya podremos calcular todos los valores futuros. Ahora para la ecucación de Onda en general no se puede aplicar el esténcil de 5 puntos por lo que se usa el de 4.

Para accesar a la actividad 11 sobre esto ingresa a Github o vaya al siguiente link: https://github.com/eduardogranillo/FisicaComputacional/blob/master/Actividad11/Actividad11.ipynb

7. Solución de la Ecuación de Poisson: Descripción del algoritmo de solución y condiciones de solución. Enlace a la sesión de Jupyter de la Actividad 12 en Github.

Se puede resolver ya sea con condiciones a la frontera de tipo Dirichlet o con condiciones de Neumann. Aparece en problemas de campos gravitatorios, campos eléctricos y otros problemas de la física.

Si contamos con las condiciones en la frontera no requerimos condicion inicial pues no hay dependencia en el tiempo. El procedimiento consiste en generar una malla sobre el dominio regular cartesiano con incrementos hx y hy.

Podemos aproximar las derivadas parciales de segundo orden de la ecuación de Poisson por diferencias finitas centradas de segundo orden. La ecuación resultante requiere de un esténcil de 5 puntos como el que ya utilizamos con anterioridad.

Para los de frontera tipo Neumann se utilizan las diferencias finitas centradas, dentro del dominio mallado de nuevo el esténcil de 5 puntos, se calcula para cada frontera y cada columna. Juntamos todas las ecuaciones y terminaremos con una ecuación matricial, la que nos dice la solución.

Para accesar a la actividad 12 sobre esto ingresa a Github o vaya al siguiente link: https://github.com/eduardogranillo/FisicaComputacional/blob/master/Actividad12/Actividad12.ipynb

8. Resumen y conclusiones

En estas tres actividades se vio mucha información muy detallada sobre las Ecuaciones Diferenciales Parciales de las tres familias: parabólicas, hipérbolicas y elípticas. Algo que considero muy importante es identficiar primero con qué tipo estamos tratando, aunque parece que como ya han sido muy estudiadas se conocen los ejemplos concretos de cada tipo, me llamó la atención que todos estos sirven para el modelado físico. También aprendí los tres tipos de condiciones de la frontera, los cuales son fáciles de identificar y útil conocer, en cuanto al método de diferencias finitas puedo decir que es muy poderoso ya que usar el teorema de Taylor para las soluciones de la malla es muy inteligente y como vimos los resultados arrojados satisfacen muy bien lo esperado. Sin duda una tercia de actividades muy integradoras y que siento que estaré consultando con el tiempo cuando comprenda más de los métodos matemáticos con los que las resolvimos.

Referencias

[1] Pagina consultada el 02 de Mayo de 2021
https://en.wikipedia.org/wiki/Parabolic_partial_differential_equation

[2] Pagina consultada el 02 de Mayo de 2021
https://en.wikipedia.org/wiki/Hyperbolic_partial_differential_equation

[3] Pagina consultada el 02 de Mayo de 2021
https://en.wikipedia.org/wiki/Elliptic_partial_differential_equation

[4] Pagina consultada el 02 de Mayo de 2021
https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_boundary_condition

[5] Pagina consultada el 02 de Mayo de 2021
https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann_boundary_condition

[6] Pagina consultada el 02 de Mayo de 2021
https://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition