Ejercicio 2

Ecuaciones del movimiento parabólico:

$$x = v_0 \cdot \cos\theta \cdot t$$

$$y = h + v_0 \cdot \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2} g t^2$$

Primero se despeja el tiempo que tarda en llegar al suelo, es decir, con $\mathrm{y} = 0$:

$$-\frac{1}{2} g t^2 + \mathrm{v}_0 \cdot \sin\theta \cdot t + h = 0$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para el t mayor:

$$t = \frac{v_0}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 2z}\right) \qquad z = \frac{gh}{v_0^2}$$

Para saber cuál es el alcance que logra la pelota, se despeja usa esta ecuación en la ecuación de alcance horizontal:

$$x = \frac{v_0^2}{g}\left(\sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 2z}\right) cos\theta$$

Para maximizar el alcance horizontal, se deriva la ecuación de alcance horizontal con respecto al ángulo y se iguala a 0:

$$\left(cos\theta + \frac{2sin\theta cos\theta}{2\sqrt{\sin^2\theta + 2z}}\right) cos\theta - \left(sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 2z}\right) sin\theta = 0$$

$$(\cos^2 - \sin^2\theta)\left(sin\theta + \sqrt{\sin^2\theta + 2z}\right) = 2zsin\theta$$

$$\sqrt{\sin^2\theta + 2z} = \frac{2zsin\theta}{\cos{(2\theta)}} - sin\theta$$

$$(1 - 2\sin^2\theta)^2 = 2zsin^2\theta - 2\sin^2\theta(1 - 2\sin^2\theta)$$

Despejando seno:

$$1 - 2\sin^2\theta = 2z\sin^2\theta$$

$$\sin^2\theta(-2z - 2) = -1$$

$$\sin^2\theta = \frac{1}{2 + 2z}$$

Despejando el ángulo para obtener la respuesta:

$$\theta_m = \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{2 + 2\frac{gh}{v_0^2}}}$$