Eduardo Herrera Juan Idarraga Castro

1) ¿P medida de probabilidad? A cualquier conjunto del σ-Algebra escogido

i) $P(A) = a_1P_1(A) + a_2P_2(A)$ Como P_1 y P_2 son medidas de probabilidad $P_1(A), P_2(A) \geq 0$.

$a_1, a_2 \in \mathbb{R}^+ \rightarrow a_1, a_2 \geq 0$

- El producto de 2 numeros positivos $a_1 \cdot P_1(A)$ es positivo $\rightarrow a_1 \cdot P_1(A) \geq$
- La suma de 2 numeros positivos $a_1P_1(A) + a_2P_2(A)$ es positiva

Entonces $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \sigma$-Algebra : σ-algebra $\in \Omega$

ii) Ω es el Conjunto o espacio muestral

$P(\Omega) = a_1P_1(\Omega) + a_2P_2(\Omega)$ Como P_1 y P_2 son medidas de probabilidad $P_1(\Omega) = 1$ y $P_2(\Omega) = 1$

$P(\Omega) = a_1 + a_2$ Por la definicion dada $a_1 + a_2 = 1$.

$P(\Omega) = 1$

iii)

$P(\bigcup E_i) =$ Como son $\sum P(E_i)$

$a_1P_1(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) + a_2P_2(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum a_1P_1(E_i) + a_2P_2(E_i)$

Como P_1 y P_2 son medidas de probabilidad entonces

$P_1(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum P_1(E_i)$ Y $P_2(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum P_2(E_i)$

entonces

$P_1(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) + P_2(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum P_1(E_i) P_2(E_i)$

$P(\bigcup_{i=1}^{n} E_i) = \sum P(E_i)$

Semana 10 Métodos Computacionales

2.

Para demostrar que $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad, se deben verificar los axiomas de Kolmogorov:

<u>Axioma 1: $\mathbb{P}(\Omega) = 1$</u>

Según la definición de $\mathbb{P}$, $\mathbb{P}(A) = 1$ si $A = \{1, 2\}$. Como $\Omega = \{1,2\}$, $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.

<u>Axioma 2: $\forall\, A \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(A) \geq 0$</u>

Según la definición de $\mathbb{P}$:

Si $A = \{\emptyset\}$, $\mathbb{P}(A) = 0$, entonces $\mathbb{P}\ (A) \geq 0$ y se cumple el axioma.

Si $A = \{A\}$, $\mathbb{P}(A) = 1/3$, entonces $\mathbb{P}(A) \geq 0$ y se cumple el axioma.

Si $A = \{2\}$, $\mathbb{P}(A) = 2/3$, entonces $\mathbb{P}(A) \geq 0$ y se cumple el axioma.

Si $A = \{1, 2\}$, $\mathbb{P}(A) = 1$, entonces $\mathbb{P}(A) \geq 0$ y se cumple el axioma.

El axioma se cumple para todo A.

<u>Axioma 3: $\mathbb{P}(\bigcup A_i) = \sum \mathbb{P}(A_i)\ \ si\ \ A_i \cap A_j = \emptyset$</u>

En este caso los conjuntos mutuamente excluyentes son:

Caso 1: $A_1 = \{\emptyset\}$ y $A_2 = \{1\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_2) = 1/3$

$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) = 0 + 1/3 = 1/3$

Como $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2)$, se cumple el axioma.

Caso 2: $A_1 = \{\emptyset\}$ y $A_3 = \{2\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_3) = 2/3$

$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3) = 0 + 2/3 = 2/3$

Como $\mathbb{P}(A_1 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_3)$, se cumple el axioma.

Caso 3: $A_1 = \{\emptyset\}$ y $A_4 = \{1, 2\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_4) = \mathbb{P}(A_4) = 1$

$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_4) = 0 + 1 = 1$

Como $\mathbb{P}(A_1 \cup A_4) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_4)$, se cumple el axioma.

Caso 4: $A_1 = \{\emptyset\}$, $A_2 = \{1\}$, $A_3 = \{2\}$

$\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_4) = 1$

$\mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 0 + 1/3 + 2/3 = 1$

Como $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_1) + \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$, se cumple el axioma.

Caso 5: $A_2 = \{1\}$ y $A_3 = \{2\}$

$\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_4) = 1$

$\mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3) = 1/3 + 2/3 = 1$

Como $\mathbb{P}(A_2 \cup A_3) = \mathbb{P}(A_2) + \mathbb{P}(A_3)$, se cumple el axioma.

El axioma se cumple para todos los casos.

Como todos los axiomas de Kolmogorov se cumplen, se concluye que $\mathbb{P}$ es una medida de probabilidad.

3.

a) Por propiedades de conjuntos, $\emptyset^c = \Omega$.

Por la demostración del literal b): $\mathbb{P}(\Omega) = 1 - \mathbb{P}(\emptyset)$.

Por el primer axioma de Kolmogorov: $1 = 1 - \mathbb{P}(\emptyset)$, entonces $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.

b) Por propiedades de conjuntos, $A \cup A^c = \Omega$ y $A \cap A^c = \emptyset$ (mutuamente excluyentes).

Por el tercer axioma de Kolmogorov: $\mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$, entonces

$\mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$.

Por el primer axioma de Kolmogorov: $1 = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$, entonces $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

c) Como $A \cap (B\text{-}A) = \emptyset$ (son mutuamente excluyentes), entonces por el tercer axioma de Kolmogorov, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\text{-}A) = \mathbb{P}(A \cup (B\text{-}A))$.

Por propiedades de conjuntos, $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\text{-}A) = \mathbb{P}(B)$.

d) Tomando la expresión del literal c):

$\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\text{-}A) = \mathbb{P}(B)$.

Si $B = \Omega$, entonces por el primer axioma de Kolmogorov: $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(B\text{-}A)$.

Supóngase que $\mathbb{P}(A) > 1$. En ese caso, $\mathbb{P}(B\text{-}A) < 0$, pero esto contradice el segundo axioma de Kolmogorov. Por reducción al absurdo, $\mathbb{P}(A) \leq 1$.

e) Por la demostración del literal c): $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B\text{-}A)$, entonces $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B\text{-}A)$.

Por el segundo axioma de Kolmogorov: $P(B\text{-}A) \geq 0$, entonces $\mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A) \geq 0$, por lo que $\mathbb{P}(B) \geq \mathbb{P}(A)$.

f) El conjunto $(A \cup B)$ se puede escribir como $A \cup (A^c \cap B)$, como $(A^c \cap B)$ y A son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma de Kolmogorov:

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A^c \cap B) + \mathbb{P}(A)$.

Por otro lado, el conjunto B se puede escribir como $(A \cap B) \cup (A^c \cap B)$.
Como $(A \cap B)$ y $(A^c \cap B)$ son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma:

$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$.

Substituyendo la segunda expresión en la primera:

$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

g) Sea D = A U B [$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$]

Por f): $P(D) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = P(D \cup C)$

Por f): $P(D \cup C) = \mathbb{P}(D) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(D \cap C)$

$P(D \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(D \cap C)$

Sustituyendo D:

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$

Por la propiedad distributiva de la intersección sobre la unión de conjuntos:

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))$

Usando f:

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(C) - [\mathbb{P}(A \cap C) + \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}((A \cap C) \cap (B \cap C))]$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

Por lo anterior, se concluye que $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$.

h) Una expresión equivalente es:

$\mathbb{P}(A\text{-}B) + \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)$

Operando el lado izquierdo de esta expresión:

$\mathbb{P}(A\text{-}B) + \mathbb{P}(A \cap B)$

Como $(A - B) = (A \cap B^c)$:

$=\mathbb{P}(A \cap B^c) + \mathbb{P}(A \cap B)$

Como $(A \cap B^c)$ y $(A \cap B)$ son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma de Kolmogorov:

$= \mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (A \cap B))$

Por propiedades de conjuntos, $(A \cap B^c) \cup (A \cap B) = A$. Por lo que:

$= \mathbb{P}(A)$

Por lo anterior, se concluye que $\mathbb{P}(A-B) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

i) Tómese el lado izquierdo de la expresión:

$\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c))$

Por propiedades de conjuntos, $(A \cap B^c) = (A - B)$ y $(B \cap A^c) = (B-A)$. Entonces,

$= \mathbb{P}((A-B) \cup (B-A))$

Como (A-B) y (B-A) son mutuamente excluyentes, por el tercer axioma de Kolmogorov:

$= \mathbb{P}(A-B) + \mathbb{P}(B-A)$
Usando el literal h):

$= \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(B \cap A)$

$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$

Por lo anterior, se concluye que $\mathbb{P}((A \cap B^c) \cup (B \cap A^c)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

5.

A: al menos un celular sea defectuoso

A^c: ningún celular es defectuoso

$$\mathbb{P}(A^c) = \mathbb{P}(\text{primer celular no sea defectuoso}) * \mathbb{P}(\text{segundo celular no sea defectuoso}) * \mathbb{P}(\text{primer celular no sea defectuoso}) * \mathbb{P}(\text{primer celular no sea defectuoso}) * \mathbb{P}(\text{primer celular no sea defectuoso})$$

$\mathbb{P}(\text{primer celular no sea defectuoso}) = 48/50$ (hay dos defectuosos y aún no se ha probado ningún celular del total de 50)

$\mathbb{P}(\text{segundo celular no sea defectuoso}) = 47/49$ (hay dos defectuosos y ya se probó un celular del total de 50)

$\mathbb{P}(\text{tercer celular no sea defectuoso}) = 46/48$ (hay dos defectuosos y ya se probaron dos celulares del total de 50)

$\mathbb{P}(\text{cuarto celular no sea defectuoso}) = 45/47$ (hay dos defectuosos y ya se probaron tres celulares del total de 50)

$\mathbb{P}(\text{quinto celular no sea defectuoso}) = 44/46$ (hay dos defectuosos y ya se probaron cuatro celulares del total de 50)

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{48}{50} * \frac{47}{49} * \frac{46}{48} * \frac{45}{47} * \frac{44}{46} = \frac{198}{245}$$

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) = 1 - \frac{198}{245} = \frac{47}{245}$$

4 A → la suma de los resultados es menor o igual a tres.
B → El resultado del primer lanzamiento es impar

$$P(A) = \frac{(1,1)(2,1)(1,2)}{36 \rightarrow \#\text{ total pos}} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$$P(B) = \frac{\#\text{ Posibles Favor}}{\#\text{ Posibles Tot}} = \frac{(1,n)(3,n)(5,n)}{36} = \frac{3\cdot 6}{36} = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = \frac{1}{12}\cdot\frac{24}{36} \Rightarrow \frac{1}{18} \Leftarrow P(B)\cdot P(A|B) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{36}$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} - \frac{1}{18} = \frac{19}{36}$$

$$P(A^c) = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{12} = \frac{11}{12}$$

6
a) $P(A) = P(S_c \cup S_d) = P(S_c) + P(S_d) - P(S_c \cap S_d)$

$$P(A) = \frac{6}{10} + \frac{8}{10} - \frac{5}{10} = \frac{9}{10} = 90\%$$

b) $P(B) = P(S_c \cup S_d) - P(S_c \cap S_d) = \frac{9}{10} - \frac{5}{10} = \frac{4}{10} = 40\%$

8
$$P(A) = \frac{(2,6)(6,2)(4,4)(5,3)(3,5)}{36} = \frac{5}{36}$$

$$P(B) = \frac{(n,1)(n,3)(n,5)}{36} = \frac{3\cdot 6}{36} = \frac{1}{2}$$

$$P(A \cap B) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

$$P(A)P(B) = \frac{5}{72}$$

A es independiente de B ↔ $P(A \cap B) = P(A)\cdot P(B)$

Pero $\frac{1}{18} \neq \frac{5}{72}$ → A y B no son independientes