Eduardo José Herrera Alba - 201912865

Ejercicio 12 Complementaria Métodos Computacionales 1

1.

Para demostrar que se debe verificar que la función siempre sea positiva y que al integrar la función sobre los reales es 1.

1.1 Como sigma siempre se encuentra al cuadrado, este parámetro nunca hace negativa a la función. Además, la función exponencial con base e siempre es positiva. Por lo tanto, la función cumple con siempre ser positiva.

1.2 Se debe probar que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|x|}{\sigma^2}}\, dx = 1$$

Que equivale a probar:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|x|}{\sigma^2}}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|x|}{\sigma^2}}\, dx = 1$$

Se elimina el valor absoluto teniendo en cuenta los límites de las integrales:

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2\sigma^2} e^{\frac{x}{\sigma^2}}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{x}{\sigma^2}}\, dx$$

Las constantes salen de la integral:

$$\frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{\sigma^2}}\, dx + \frac{1}{2\sigma^2}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{\sigma^2}}\, dx$$

Haciendo $\mathrm{c} = \sigma^2$

$$\frac{1}{2\sigma^2}\int_{-\infty}^{0} e^{\frac{x}{c}}\, dx + \frac{1}{2\sigma^2}\int_{0}^{\infty} e^{-\frac{x}{c}}\, dx$$

Resolviendo las integrales

$$\frac{1}{2\sigma^2}\left[ce^{\frac{x}{c}}\right]_{x=-\infty}^{x=0} + \frac{1}{2\sigma^2}\left[-ce^{-\frac{x}{c}}\right]_{x=0}^{x=\infty}$$

Simplificando

$$\frac{1}{2\sigma^2}\,[c-0] + \frac{1}{2\sigma^2}[0--c]$$

Eduardo José Herrera Alba - 201912865

Remplazando c

$$\frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2 + \frac{1}{2\sigma^2}\sigma^2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Por lo tanto, se demuestra que es una función de densidad.

Eduardo José Herrera Alba - 201912865

2.

$$f_X(x) = \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|x|}{\sigma^2}}$$

$$\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{2\sigma^2} e^{-\frac{|x_i|}{\sigma^2}}$$

$$\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}$$

$$\ln\left(\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\mathrm{n}} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\right)$$

$$\ln\left(\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)^{\mathrm{n}}\right) + \ln\left(e^{-\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|}\right)$$

$$nln\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{\sigma}} nln\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right) - \frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$= -\frac{2n}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i|$$

$$-\frac{2n}{\sigma} + \frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 0$$

$$\frac{2}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \frac{2n}{\sigma}$$

$$\frac{2}{\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = 2n$$

$$\frac{2}{2n}\sum_{i=1}^{n}|x_i| = \sigma^2$$

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n} = \sigma^2$$

$$\sigma = \sqrt{\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}|x_i|}{n}\right)}$$

Eduardo José Herrera Alba - 201912865

$$\sigma = \sqrt{\frac{\begin{array}{c}130 + 122 + 119 + 142 + 136 + 127 + 120 + 152 + 141 \\ +132 + 127 + 118 + 150 + 141 + 133 + 137 + 129 + 142\end{array}}{18}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{2398}{18}} = 11.54$$