- Métodos computacionales:
  Alejandro Segura

- **Sistemas Lineales**

  a) Incluir el código Notebook (.ipynb).

  b) Guardar la información en una carpeta llamada Semana7_Nombre1_Nombre2

  c) Comprimir en formato `zip` la carpeta para tenga el nombre final Semana7_Nombre1_Nombre2.zip

  d) **Hacer una sola entrega por grupo**.

Contents

List of Figures

1 Linear-Systems

1.1 Mínimos cuadrados

1. Se tienen tres líneas en $\mathbb{R}^2$:

$$
\begin{aligned}
2x - y &= 2 \\
x + 2y &= 1 \\
x + y &= 4
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   (a) Con el método de mínimos cuadrados encuentre el punto común a las tres líneas. Grafique las tres líneas y el punto solución, ¿qué interpretación puede dar?

   (b) Realice una búsqueda iterativa entre $-5 < x < 5$ y $5 < y < 5$ con un paso de $h = 0.03$ para encontrar la menor distancia del problema. Grafique la distancia y compare con el resultado obtenido con mínimos cuadrados.

$$min(||\mathbb{A}x^* - \vec{b}||) \tag{2}$$

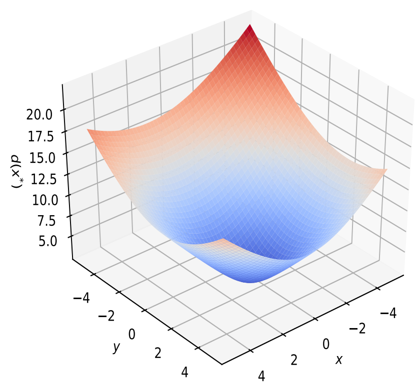

Figure 1: Distancia $||\mathbb{A}x^* - \vec{b}||$ en la región rectangular definida en el problema. La distancia mínima debe corresponder al resultado del método de mínimos cuadrados.

2. Descargue los datos: `https://github.com/asegura4488/Database/blob/main/MetodosComputacionalesReforma/MinimosLineal.txt`. Realice el ajuste usando el método de mínimos cuadrados para encontrar los parámetros de:

$$f(x) = a_0 + a_1 x \tag{3}$$

   Grafique los datos y el ajuste mostrando el valor de las constantes en la etiqueta de la grafica.

3. Descargue los datos: `https://github.com/asegura4488/Database/blob/main/MetodosComputacionalesReforma/MinimosCuadratico.txt`. Realice el ajuste usando el método de mínimos cuadrados para encontrar los parámetros de:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_1 x^2 \tag{4}$$

   Grafique los datos y el ajuste mostrando el valor de las constantes en la etiqueta de la grafica.

4. Utilice el método `curve_fit` de `Python` para obtener los dos ajustes. Compare con los resultados anteriores.

5. En el caso de ajustes, es posible definir funciones de costo que midan la distancia entre los puntos muestrales y el modelo de ajuste. En el caso de mínimos cuadrados la función es χ^2. Para n puntos y un modelo lineal la función de costo es:

$$\chi^2(a_0, a_1) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 x_i))^2 \tag{5}$$

Si hablamos en terminos Bayesianos, $\Omega = \{a_0, a_1\}$ define el conjunto de modelos lineales que pueden explicar los n puntos muestrales. Al minimizar $\chi^2(a_0, a_1)$ muestre (analíticamente) que los parámetros están dados por:

$$\begin{aligned} a_0 &= \bar{y} - a_1 \bar{x} \\ a_1 &= \frac{\sum xy - \frac{\sum x \sum y}{n}}{\sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{n}} \end{aligned} \tag{6}$$

donde $\bar{x}$ y $\bar{y}$ son los valores medios de puntos y sus imágenes. Para n puntos y un modelo cuadrático la función de costo es:

$$\chi^2(a_0, a_1, a_2) = \sum_{i=1}^{n} (y_i - (a_0 + a_1 x_i + a_2 x_i^2))^2 \tag{7}$$

Minimize $\chi^2(a_0, a_1, a_2)$ para encontrar el siguiente sistema de ecuaciones. *Nota alguna regularidad?*

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} [a_0 + x_i a_1 + x_i^2 a_2 &= y_i] \\ \sum_{i=1}^{n} [a_0 x_i + a_1 x_i^2 + a_2 x_i^3 &= x_i y_i] \\ \sum_{i=1}^{n} [a_0 x_i^2 + a_1 x_i^3 + a_2 x_i^4 &= x_i^2 y_i] \end{aligned} \tag{8}$$

Opcionalmente: Encuentre los parámetros usando estas expresiones para los problemas 2) y 3)

6. Calcule la proyección ortogonal del vector $\vec{b} = (-3, -3, 8, 9)$ sobre el sub-espacio W generado por los vectores (tomado de algun lugar de la deepweb):

$$\begin{aligned} \vec{u}_1 &= (3, 1, 0, 1) \\ \vec{u}_2 &= (1, 2, 1, 1) \\ \vec{u}_3 &= (-1, 0, 2, -1) \end{aligned} \tag{9}$$

   a) Usando mínimos cuadrados matriciales. La proyección ortogonal es $p_W(b) = Ax$, donde las columnas de A son los vectores base y x es la solución de mínimos cuadrados.

   b) Con el proceso de Grand-Schmidt obtener una base ortonormal (v_1, v_2, v_3) y luego calcular la proyección sobre dicha base: $p_W(b) = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$, donde $c_i =< b.v_i >$ para $i = 1, 2, 3$. Respuesta: $p_W(b) = (-2, 3, 4, 0)$

1.2 Sistemas de ecuaciones no lineales

(a) Usando los métodos vistos en clase, encuentre la solución para los siguientes sistemas de ecuaciones no lineales:

$$\begin{aligned} ln(x_1^2 + x_2^2) - sin(x_1 x_2) &= ln(2) + ln(\pi), \\ e^{x_1 - x_2} + cos(x_1 x_2) &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (2, 2)$

$$\begin{aligned} 6x_1 - 2cos(x_2 x_3) - 1 &= 0, \\ 9x_2 + \sqrt{x_1^2 + sin(x_3) + 1.06} + 0.9 &= 0, \\ 60x_3 + 3e^{-x_1 x_2} + 10\pi - 3 &= 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Use $\mathbf{x}^{(0)} = (0, 0, 0)$
Ejercicios tomados de Numerical Analysis - Burden and Faires, Ninth Edition, Chapter 10.