

# El flujo de Poynting en la transferencia de energía: comentarios sobre “Electric fields and charges in elementary circuits”, por M. A. Heald [Am. J. Phys. 59, 111 (1991)]

Eduardo José Herrera Alba\* and Sofía Naranjo Barros\*\*

Universidad de los Andes, Bogotá, Colombia.

(Dated: 2 de junio de 2023)

En este informe se reprodujeron y verificaron los cálculos y conceptos más importantes realizados por Mark A. Heald en su artículo *Electric fields and charges in elementary circuits*. Para estudiar el comportamiento del campo eléctrico, las líneas equipotenciales, las cargas superficiales y el vector de Poynting en diferentes circuitos, se analizó en particular dos ejemplos de circuitos circulares vistos como secciones transversales de cilindros conductores. El primer caso fue el de una resistencia distribuida a lo largo de todo el bucle de corriente, y el segundo, el de la resistencia distribuida en una sección limitada por cierto ángulo. A partir de estos casos bidimensionales, se pudo entender tridimensionalmente el vector de Poynting como la dirección del flujo de energía desde la batería como fuente de corriente hasta los elementos resistores como disipadores de energía.

## I. INTRODUCCIÓN

Los principios de la electrostática y el estudio de los circuitos eléctricos se presentan de forma discontinua en la enseñanza convencional de la electricidad en los cursos introductorios de física. El primero se centra principalmente en las cargas que residen en los conductores y los campos eléctricos exteriores generados por estos. Mientras que en el segundo, la atención se desplaza a los componentes de los circuitos, como baterías, resistencias, cables y condensadores. Así, el vínculo entre las distribuciones de carga y los campos eléctricos cerca de los circuitos puede entonces no ser claro desde este punto de vista [3].

En su artículo *Electric fields and charges in elementary circuits*, M. A. Heald [3] explica que en los circuitos eléctricos, las distribuciones de carga y los campos eléctricos externos a menudo se descartan en el análisis cuantitativo debido a su complejidad y dificultad de cálculo o medición. Esto se debe a que, en general, su consideración no es necesaria para comprender y diseñar circuitos convencionales, y se establecen simplificaciones basadas en el análisis de potencial y las leyes de Kirchhoff, que permiten un estudio preciso y práctico del comportamiento de los circuitos. Sin embargo, en aplicaciones especializadas, como electrónica de alta frecuencia, se abordan aspectos más detallados de las cargas y los campos electromagnéticos. Aun así, la complejidad matemática asociada con el cálculo de estas distribuciones de carga es prohibitiva, especialmente para circuitos con geometrías complicadas.

Es por ello que Heald [3] aborda este problema proporcionando un tratamiento cuantitativo y gráfico de dos ejemplos de geometrías de circuitos ideales de "variación lenta" (cuasiestáticos), enfocándose en el análisis

de un circuito que consiste en una batería conectada a una resistencia mediante cables. Para facilitar el análisis, consideró una geometría circular precisa, donde la resistencia está distribuida uniformemente alrededor del bucle (figura 1c). Aunque la resolución del problema es compleja debido a las condiciones de contorno y a la tridimensionalidad, se limita la consideración al caso bidimensional, reinterpretando el diagrama como una sección transversal de un cilindro conductor infinito. Para el segundo ejemplo, se aborda el mismo caso, pero considerando que la resistencia se encuentra en una porción de arco de la circunferencia, limitada por cierto ángulo (figura 1b).

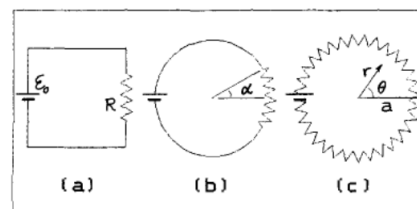


Figura 1. Diagramas de circuitos. El circuito (a) corresponde al circuito elemental presentado en los cursos introductorios de física. El (b), circuito de geometría circular con el resistor acotado entre el ángulo  $\theta = \pm\alpha$ . El (c), circuito con resistencia distribuida por todo el bucle. Se usa la convención de las dos líneas normales al cable como la batería, y el cable dentado como la resistencia. Recuperada de [3].

A lo largo de este artículo se reproducirán y analizarán los conceptos electromagnéticos abordados en el artículo de Heald, donde además de encontrar los potenciales, cargas superficiales y campos eléctricos para cada ejemplo, Heald ofrece una valiosa interpretación física y computacional acerca de las líneas de campo, las líneas equipotenciales y, en particular, las líneas del flujo de Poynting. Este último, corresponde a una cantidad física que describe la transferencia de energía electromag-

\* Correo institucional: ej.herreraa@uniandes.edu.co

\*\* Correo institucional: s.naranjob@uniandes.edu.co

nética a través del espacio [2]. Representa la cantidad de energía electromagnética que fluye por unidad de área y unidad de tiempo, y está dado por la expresión:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \quad (1)$$

Desde un enfoque crítico nos adentraremos en los aspectos clave con fuerte componente electromagnético abordados en el artículo de Heald, al tiempo que aportaremos en la interpretación rigurosa de los resultados, completando los cálculos analíticos intermedios y complementando con cálculos numéricos relevantes por medio de métodos computacionales. El objetivo es ampliar la comprensión de que la energía electromagnética en un circuito no es transportada a través de los cables, sino que fluye en el espacio que se encuentra alrededor del cable, a partir del análisis de las líneas de flujo de Poynting.

## II. DESARROLLO Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

### A. Circuito con resistencia distribuida por todo el bucle

Para analizar este caso, se tomó el circuito de la figura 1c. Las coordenadas utilizadas son cilíndricas ( $r, \theta, z$ ) con “a” como el radio del cilindro. Por conveniencia se consideró que el grosor del cable resistivo es despreciable y que la batería está en la posición  $\theta = \pm\pi$ , cuyas terminales están a potenciales  $\pm V_0/2$ . Teniendo en cuenta lo anterior y usando la ley de Ohm (ver Apéndice B), se encontró que el potencial del conductor en  $r = a$  es:

$$V(r = a; \theta) = V_0 \theta / 2\pi \quad (-\pi < \theta < \pi) \quad (2)$$

Este potencial se calculó usando una serie trigonométrica (ver Apéndice B) y los armónicos cilíndricos para soluciones independientes de  $z$ , puede ser expresado para  $r < a$  y  $r > a$  como:

$$V(r < a; \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-r/a)^k \sin(k\theta)}{k} \quad (3)$$

$$V(r > a; \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-a/r)^k \sin(k\theta)}{k} \quad (4)$$

Por último, reescribiendo este resultado de forma cerrada, se tiene:

$$V(r < a; \theta) = (V_0/\pi) \arctan\left(\frac{r \sin \theta}{a + r \cos \theta}\right) \quad (5)$$

$$V(r > a; \theta) = (V_0/\pi) \arctan\left(\frac{a \sin \theta}{r + a \cos \theta}\right) \quad (6)$$

La figura 2a muestra las líneas equipotenciales para este caso en particular. Nótese que en el interior del bucle, las líneas equipotenciales (planos que se extienden el el eje  $z$ ) son rectas, mientras que afuera de este, son circulares. Mientras que en la figura 2b, se observan las líneas de fuerza.

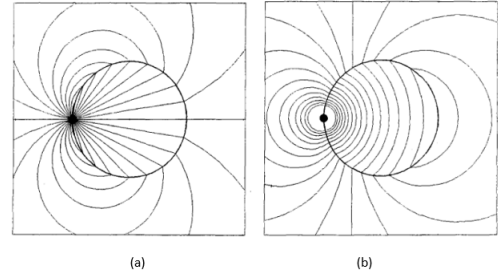


Figura 2. Comportamiento electromagnético del circuito con resistencia distribuida: (a) es una representación gráfica de líneas equipotenciales del circuito, donde las líneas dentro del bucle también pueden ser representadas como las líneas de flujo de Poynting; (b) muestra la fuerza eléctrica para este mismo circuito. Recuperadas de [3].

Posteriormente, calculando los gradientes de estas expresiones, obtuvimos el campo eléctrico generado por las cargas en las mismas dos regiones, el cual se corresponde con el valor de la magnitud del campo reportado en el artículo de Heald:

$$\mathbf{E}(r < a, \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \frac{a \sin \theta}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{r} - \frac{V_0}{\pi} \frac{a \cos \theta + r}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{\theta} \quad (7)$$

$$\mathbf{E}(r > a, \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \frac{a \sin \theta}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{r} - \frac{V_0}{\pi} \frac{a}{r} \frac{r \cos \theta + a}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{\theta} \quad (8)$$

En adición a los cálculos de potencial y campo eléctrico encontrados anteriormente, se realizó computacionalmente un mapa de calor (figura 3) en el que se muestra el potencial eléctrico en coordenadas cartesianas para esta configuración. El propósito fue verificar las ecuaciones

encontradas para el potencial, así como extender las soluciones gráficas dadas previamente. En esta gráfica se evidencia que el potencial eléctrico disminuye desde un máximo en el polo positivo de la batería, hasta el mínimo en el polo negativo. Igualmente, a medida que  $r$  crece, se observa que el potencial decae a 0.

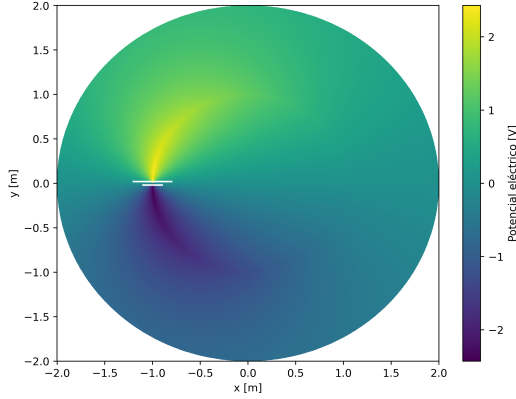


Figura 3. Potencial eléctrico para resistor distribuido en coordenadas cartesianas. Se tomaron valores de  $V_0 = 5V$  y  $a = 1m$ . El potencial decrece alrededor del cilindro debido al resistor distribuido. Además, a medida que  $r$  aumenta, el potencial decae. Esta gráfica es consistente con la distribución de líneas equipotenciales de la figura 2a.

De la componente radial del campo eléctrico, se obtuvo la carga superficial  $\sigma$ :

$$\sigma(\theta) = (\epsilon_0 V_0 / 2\pi a) \tan \phi, \quad (9)$$

donde  $\phi$  es el ángulo polar ubicado en el origen de la batería ( $-\pi/2 < \phi < \pi/2$ ).

Para analizar el campo magnético, se tomó una representación análoga de este sistema: un solenoide donde la magnitud del campo es uniforme dentro del mismo, y cero afuera. De la ecuación 1 se tiene que el vector de Poynting es perpendicular al campo eléctrico  $E$ , al igual que lo son las líneas equipotenciales. Por ello, estas últimas representadas en la figura 2a que se encuentran dentro del bucle, también pueden ser interpretadas como las líneas de flujo de Poynting. Por su parte, para el caso exterior, como el campo magnético en  $r > a$  es cero, se concluye que las líneas de Poynting son equivalentes a las del campo eléctrico  $E$  y estarían representadas en las líneas externas de la figura 2b. Las líneas de Poynting indican entonces cómo fluye la energía desde la fuente (batería), hasta su disipación en el cable resistivo.

En este sentido, las cargas en la superficie del cable generan un campo eléctrico que impulsa la corriente de conducción dentro del cable según la ley de Ohm. Al

mismo tiempo que generan un campo eléctrico fuera de este, permitiendo el flujo de energía electromagnética en el espacio circundante. Por lo tanto, la energía electromagnética no se transporta directamente a través de la corriente dentro del cable, sino que fluye en el espacio exterior a este.

## B. Circuito con resistencia concentrada en una sección del bucle

Para este caso se tomaron las mismas consideraciones que en el ejemplo anterior, pero con conductor resistivo comprendido por la porción angular  $-\alpha < \theta < \alpha$ . De esta manera, se encontró que el potencial estaría dado por la serie de Fourier:

$$V(r = a; \theta) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin(k\theta) \quad (10)$$

donde el coeficiente  $A_k$  corresponde a:

$$A_k = (V_0/\pi) [(-1)^{k-1}/k + \sin(k\alpha)/k^2\alpha] \quad (11)$$

El resultado para las regiones internas y externas del bucle con las resistencia concentrada se obtiene:

$$V(r < a; \theta) = (V_0/\pi) \left( \arctan\left(\frac{r \sin \theta}{a + r \cos \theta}\right) + \sum_k (r/a)^k [\sin(k\theta)/k^2\alpha] \sin(k\theta) \right) \quad (12)$$

$$V(r > a; \theta) = (V_0/\pi) \left( \arctan\left(\frac{a \sin \theta}{r + a \cos \theta}\right) + \sum_k (a/r)^k [\sin(k\theta)/k^2\alpha] \sin(k\theta) \right) \quad (13)$$

A diferencia del ejemplo de la resistencia distribuida por todo el bucle, este caso se limitó a un análisis meramente numérico del potencial. Las figuras 4a y 4b corresponden a las representaciones para este circuito de las líneas equipotenciales y las líneas de fuerza, respectivamente. Si se entiende nuevamente las líneas equipotenciales como las del flujo de Poynting, la figura 4a muestra similarmente el flujo de energía desde la batería hasta la porción resistiva. Además, la figura 5 representa un mapa de calor del potencial. En particular, se puede observar el comportamiento esperado del potencial en los cables conductores, en los que el potencial es equivalente al del polo correspondiente. Mientras que en la porción del resistor concentrado, se ve la caída de potencial esperada. Similarmente al anterior, el

potencial decae a medida que  $r$  aumenta. Este mapa reproduce de manera correcta el comportamiento de las líneas equipotenciales que se observan en la figura 4a.

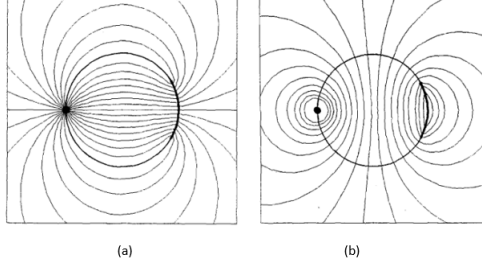


Figura 4. Comportamiento electromagnético del circuito con resistencia concentrada: (a) es una representación gráfica de líneas equipotenciales para el circuito con resistencia concentrada entre los ángulos  $\theta = \pm\alpha$ , donde las líneas dentro del bucle también pueden ser representadas como las líneas de flujo de Poynting; (b) muestra la fuerza eléctrica para este mismo circuito. Recuperadas de [3].

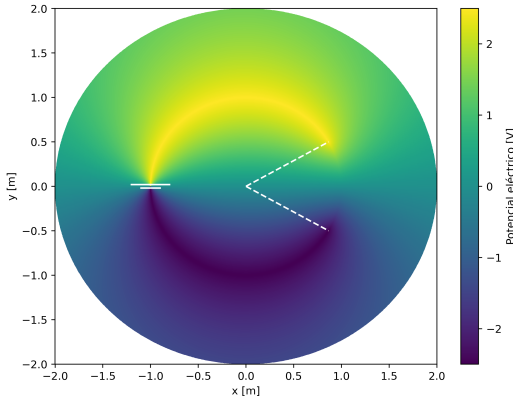


Figura 5. Potencial eléctrico para resistor concentrado en coordenadas cartesianas. Se tomaron valores de  $V_0 = 5V$ ,  $a = 1m$  y  $\alpha = \pm 30^\circ$ . En este caso, el potencial es constante a lo largo del cable superior (color amarillo), así como a lo largo del cable inferior (color azul), y solo decrece en la región  $-\alpha < \theta < \alpha$  debido al resistor concentrado en esa región. También se aprecia que, a medida que  $r$  aumenta, el potencial decae. Esta gráfica es consistente con la distribución de líneas equipotenciales de la figura 4a.

En relación a la carga superficial, la expresión que se obtuvo fue:

$$\sigma(\theta) = (\epsilon_0 V_0 / 2\pi a) [\tan(\theta/2) + (1/\alpha) \ln |\sin(\theta + \alpha/2) / \sin(\theta - \alpha/2)|] \quad (14)$$

Es necesario resaltar en este punto el término adicional que surge tanto en el potencial, como en la carga superficial encontrada, en relación al ejemplo anterior. Esto es así debido a que se requiere carga adicional para proporcionar el campo aumentado en la resistencia y para eliminar cualquier campo paralelo al cable de conexión perfectamente conductor. Adicionalmente, se puede evidenciar que este término posee singularidades logarítmicas en  $\pm\alpha$ . La figura 6 representa la densidad de carga superficial en función del ángulo  $\theta$ . En esta se observan las discontinuidades en los extremos del resistor, es decir en  $\theta = \pm\alpha$ , así como el comportamiento asintótico en los dos polos.

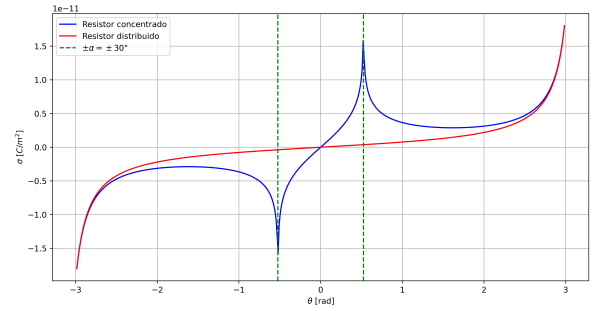


Figura 6. Densidad de corriente superficial en función del ángulo  $\theta$ . En color rojo se grafica el caso del resistor distribuido, mientras que en azul se grafica el caso del resistor concentrado. Para este último se evidencia la discontinuidad de los extremos del resistor en  $\theta = \pm\alpha$  en color verde. En ambos casos se ve el comportamiento asintótico de los polos en  $\theta = \pm\pi$ .

### III. CONCLUSIONES

Aunque los cálculos realizados a lo largo del artículo son para el caso bidimensional, ofrecen una idea considerable de las distribuciones de carga, potencial, campo eléctrico y flujo de Poynting en bucles de corriente tridimensionales del mundo real. Igualmente, se logró verificar mediante mapas de calor los resultados realizados por Heald para las líneas equipotenciales en el caso de un circuito circular con resistencia distribuida por el bucle, y para resistencia aglomerada en una porción del circuito. Destacamos, además, el papel del flujo de Poynting como transportador de energía desde la fuente hasta los elementos de resistencia, guiado por el campo eléctrico externo generado por cargas superficiales en los cables. En casos más complejos, como circuitos planos multimalla, se pueden trazar equipotenciales y líneas de flujo de Poynting consistentes con las condiciones de contorno y el análisis de Kirchhoff. Esto permite visualizar sistemas tridimensionales con superficies equipotenciales interconectadas por líneas de flujo de Poynting que conectan las fuentes y las resistencias.

- 
- [1] Dwight, H. (1961). *Tables of Integrals and Other Mathematical Data*. Series of mathematical texts for colleges. Macmillan.
- [2] Griffiths, D. (2014). *Introduction to Electrodynamics*. Pearson Education.
- [3] Heald, M. A. (1984). Electric fields and charges in elementary circuits. *American Journal of Physics*, 52(6):522–526.
- [4] Herrera, E. and Naranjo, S. (2023). Proyectofinal\_em1. [https://github.com/eduardoh27/ProyectoFinal\\_EM1](https://github.com/eduardoh27/ProyectoFinal_EM1).

## APÉNDICE A: CÓDIGO

Las gráficas con las que reproducimos algunos resultados del artículo se encuentran en el repositorio de GitHub de las referencias [4]. Estas gráficas fueron realizadas en *Python* por medio las bibliotecas *NumPy* y *Matplotlib*. En particular, el método *matplotlib.pyplot.pcolormesh* permitió la representación de los resultados de las figuras 5 y 3 como un mapa de calor.

## APÉNDICE B: CÁLCULOS INTERMEDIOS

### Ley de Ohm

El potencial en el circuito ( $V(r = a; \theta)$ ) se halló teniendo en cuenta la ley de Ohm, la cual establece una relación de linealidad entre la diferencia de potencial y la resistencia:  $V = IR$ . De esta ecuación sabemos que un  $\Delta R$  es proporcional a  $\Delta V$ . Como se maneja el caso de la resistencia distribuida, se tiene que la caída de potencial a lo largo del cable se corresponde con una caída potencial proporcional. Si se tiene en cuenta que fijamos un potencial  $+V_0/2$  en el polo positivo de la batería, entonces se encuentra la siguiente relación:

$$\frac{V_0/2}{\pi} = \frac{V(r = a; \theta)}{\theta},$$

con la cual se obtiene la expresión del potencial de la ecuación (2).

### Variables adicionales

En algunos resultados se utilizó la variable  $\rho$ , la cual es el radio polar medido desde la batería. Naturalmente, esta variable se puede escribir en términos de  $a$  y  $r$  usando el teorema del coseno junto con la identidad  $\cos(\pi - \theta) = -\cos \theta$ :

$$\begin{aligned}\rho^2 &= a^2 + r^2 - 2ar \cos(\pi - \theta) \\ \rho^2 &= a^2 + r^2 + 2ar \cos \theta\end{aligned}$$

También se utilizó la variable  $\phi$ , que corresponde al ángulo polar con respecto al origen en la batería. Debido a esto,  $\phi = \theta/2$ .

### Cálculo del campo eléctrico

El campo eléctrico se calculó con el gradiente del potencial eléctrico en cada región. En el caso del campo dentro del cilindro se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{r < a} &= -\nabla V_{r < a} \\ \nabla &= \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{\theta} \\ \mathbf{E}_{r < a} &= -\left( \frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z} \right) \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{V_0}{\pi} \frac{a \sin \theta}{(a + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{V_0}{\pi} \frac{ar \cos \theta + r^2}{(a + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r < a, \theta) &= -\frac{V_0}{\pi} \frac{a \sin \theta}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{r} \\ &\quad - \frac{V_0}{\pi} \frac{a \cos \theta + r}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(r < a, \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \left( \frac{a \sin \theta}{\rho^2} \hat{r} + \frac{a \cos \theta + r}{\rho^2} \hat{\theta} \right)$$

Mientras que para el exterior del cilindro se tiene:

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{r > a} &= -\nabla V_{r > a} \\ \frac{\partial V}{\partial r} &= \frac{V_0}{\pi} \frac{a \sin \theta}{(a + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2} \\ \frac{\partial V}{\partial \theta} &= \frac{V_0}{\pi} \frac{ar \cos \theta + a^2}{(a + r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(r > a, \theta) &= -\frac{V_0}{\pi} \frac{a \sin \theta}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{r} \\ &\quad - \frac{V_0}{\pi} \frac{a}{r} \frac{r \cos \theta + a}{a^2 + 2ar \cos \theta + r^2} \hat{\theta}\end{aligned}$$

$$\mathbf{E}(r > a, \theta) = -\frac{V_0}{\pi} \left( \frac{a \sin \theta}{\rho^2} \hat{r} + \frac{a}{r} \frac{r \cos \theta + a}{\rho^2} \hat{\theta} \right)$$

### Serie trigonométrica

El remplazo de  $\theta$  en las ecuaciones (3) y (4) se hizo usando la siguiente serie trigonométrica, tomada de la ecuación 416.07 de la tabla de integrales [1]:

$$\theta = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} \sin(k\theta)}{k} \quad (-\pi < \theta < \pi)$$