



sep

seit

D G I T

**INSTITUTO TECNOLOGICO DE MORELIA**  
DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

"COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA  
PARA SISTEMAS LINEALES, INVARIANTES EN  
EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR  
UNA MATRIZ INTERVALO"

TESIS PROFESIONAL

QUE PARA OBTENER EL TITULO DE  
**INGENIERO  
EN ELECTRONICA**

PRESENTA

**EDUARDO HERNANDEZ MORALES**

MORELIA, MICH.      MAYO 2000



PROPIEDAD DEL INSTITUTO  
TECNOLOGICO DE MORELIA

61433

**SEP**

**SEIT**

**D G I T**

**INSTITUTO TECNOLOGICO DE MORELIA**  
**DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES**  
**DEPARTAMENTO DE INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA**

**"COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA  
PARA SISTEMAS LINEALES, INVARIANTES EN  
EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR  
UNA MATRIZ INTERVALO"**

**TESIS PROFESIONAL**

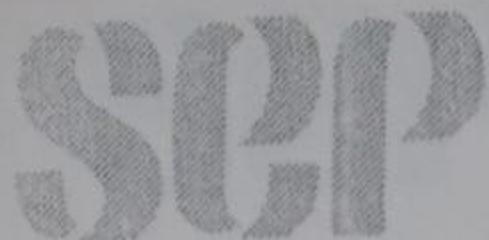
**QUE PARA OBTENER EL TITULO DE**

**INGENIERO  
EN ELECTRONICA**

**PRESENTA**

**EDUARDO HERNANDEZ MORALES**

**MORELIA, MICH.      MAYO 2000**



# INSTITUTO TECNOLOGICO de morelia

DEPENDENCIA  
SECCION  
OFICIO NO.

SUB. ACADEMICA  
DIV. EST. PROF.  
D.E.P. 2273/2000

ASUNTO: Autorización de Impresión Definitiva.

Morelia, Mich., 2000-04-12

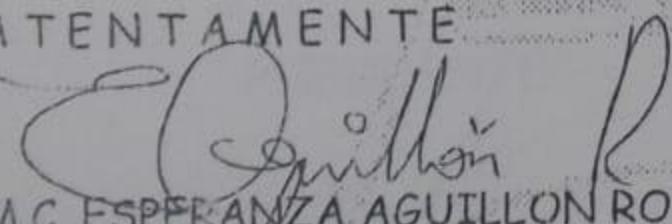
EDUARDO HERNANDEZ MORALES  
PASANTE DE LA CARRERA DE  
INGENIERIA ELECTRONICA  
PRESENTE

Por este medio, tengo el agrado de comunicar a usted, que el Jurado designado para su Recepción Profesional, ha informado a esta Jefatura de División, su aceptación para la Impresión Definitiva de su trabajo de **TESIS PROFESIONAL**, el cual lleva por nombre:

**COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEALES, INVARIANTES  
EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ INTERVALO**

Por lo anterior, se autoriza la impresión de su trabajo, esperando que el logro del mismo, sea congruente con sus aspiraciones profesionales.

ATENTAMENTE

  
M.C. ESPERANZA AGUILÓN ROBLES  
JEFE DE LA DIV. DE EST. PROFESINALES



c.c.p.- Archivo.

EAR/ahg.

**SEP****INSTITUTO TECNOLOGICO  
de morelia**DEPENDENCIA  
SECCION  
OFICIOSUB. ACADEMICA  
DEPTO. ING. E.E.  
D.I.EE-216-00

ASUNTO

AUTORIZACION DE IMPRESION DEFINITIVA.

Morelia, Mich. **2000-ABR-10**

C. M.C. ESPERANZA AGUILLO ROBLES  
JEFE DE LA DIVISION DE ESTUDIOS PROFESIONALES  
P R E S E N T E.

Los suscritos, ING. JUAN JOSE DARIO DELGADO ROMERO, ING. RODOLFO S. GONZALEZ GARZA, ING. HECTOR SUAREZ APARICIO e ING. ENRIQUE REYES ARCHUNDIA, Jurado del Examen Profesional del (a) Pasante C. EDUARDO HERNANDEZ MORALES, de la carrera de Ing. Electrónica, hemos revisado el trabajo de Opción I denominada TESIS PROFESIONAL, así como las correcciones que se habían indicado y cuyo tema es: "COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEALES, INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ INTERVALO".

Le comunicamos que estamos de acuerdo en que se realice la impresión de su trabajo.

PRESIDENTE

ING. JUAN JOSE D. DELGADO ROMERO

SECRETARIO

ING. RODOLFO S. GONZALEZ GARZA

VOCAL PROPIETARIO

ING. HECTOR SUAREZ APARICIO

SECRETARIA DE  
EDUCACION PUBLICA  
INSTITUTO TECNOLOGICO  
DE MORELIA

VOCAL SUPLENTE

ING. ENRIQUE REYES ARCHUNDIA

RSGG/arac

Avenida Tecnológico 1500, Col. Lomas de Santaguito Morelia, Mich., 58120

Teléfono: 01 (4) 312-15-70 con 12 líneas Fax. Extensión 211

E-mail: director@vega.tecmor.mx http://www.tecmor.mx



DEDICATORIA

Dedico este trabajo de tesina  
como un recuerdo

**COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEALES,  
INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ  
INTERVALO**

Emma Graciela del Carmen Morales de Hernandez †  
TESIS QUE PARA OBTENER EL TITULO DE INGENIERO EN ELECTRONICA  
PRESENTA:

EDUARDO HERNANDEZ MORALES

DE MI ABUELA

Emma Fernandez Colorado †

Alquiero solertia dormia via, DOMINA  
el ign purpura luce si el  
Resplandor le gocia

Morelia, Mich.

AMEN

Mayo de 2000

**DEDICATORIA**

Dedico este trabajo de tesis

como un recuerdo

a la memoria:

**DE MI MADRE:**

**Emma Graciela del Carmen Morales de Hernández †**

**DE MI PADRE**

**Rodolfo Eduardo Hernández Lagunas †**

**DE MI ABUELITA**

**Emma Fernández Colorado †**

**Réquiem aeterna donna eis, DOMINE**

**et lux perpetua luce at eis**

**Requiescat in pacem**

**AMEN**

## **AGRADECIMIENTO**

Deseo agradecer de una manera especial:

a mi asesor

Juan José Darío Delgado Romero

por ser mi amigo, maestro y asesor

a mi hermano

Gabriel Hernández Morales

por su perseverancia

a mis hermanos

Rodolfo, David y Emma Hernández Morales

por su apoyo y comprensión.

a Paulo Martínez Madrigal y Omar Vázquez Carmona

por su amistad

a Alejandro Talavera Vazquez y Francisco Javier Aguiñaga

por generarme el interés en el control

a Odilón, Manolín, Natas, Iván y Vicente

por que supieron ser compañeros

a La generación de mi Hermano Gabriel

por su camaradería

Y a toda persona que de alguna manera influyó en la realización de la presente tesis.

De manera especial deseo agradecer a COSNET el apoyo al presente trabajo con el

proyecto: 788,99-P

## INDICE

OBJETIVOS	iii
JUSTIFICACION	iv
RESUMEN	v
NOTACION	vii
CAPITULO I	
INTRODUCCION	1
CAPITULO II	
MARCO TEORICO	7
CAPITULO III	
COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEALES INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ INTERVALO.	12
III.1. ESTABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES CONTINUOS INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ INTERVALO.	12
III.2. ESTABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES DISCRETOS INVARIANTES AL CORRIMIENTO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ INTERVALO.	18
III.3. ESTABILIDAD ROBUSTA DE MATRICES INTERVALO: PRUEBAS SENCILLAS PARA SISTEMAS CONTINUOS.	24

III.4. ESTABILIDAD ROBUSTA DE MATRICES INTERVALO: PRUEBAS SENCILLAS PARA SISTEMAS DISCRETOS.	30
III.5. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA UN CASO ESPECIAL DE SISTEMAS LINEALES, INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR MATRICES INTERVALO.	36
CAPITULO IV	
CONDICIONES DE APLICACION PARA ANALISIS DE ROBUSTEZ DE SISTEMAS FISICOS.	46
CAPITULO V	
PROGRAMA EN MATLAB™ PARA LA EVALUACION Y GRAFICACION DE VALORES CARACTERISTICOS DE MATRICES INTERVALO.	74
CONCLUSIONES	81
BIBLIOGRAFIA	83

## OBJETIVOS

El objetivo que se persigue con el siguiente trabajo es resaltar la importancia que tienen las incertidumbres que presentan los sistemas y la forma de manipularlas. En este trabajo de tesis se han desarrollado cotas que permiten la evaluación de la estabilidad del sistema, incluyendo las incertidumbres. Estas incertidumbres pueden ser generadas por la tolerancia en los elementos, las variaciones con la temperatura y el envejecimiento, entre otras.

Se desea además generar una forma rápida de evaluar la estabilidad en los sistemas, partiendo de los estudios realizados en análisis de estabilidad de sistemas representados por matrices intervalo, donde presentan problemas de tipo **NP-completos**, y para su solución en ciertas condiciones se puede llegar a un problema de tipo **NP-complicado (NP-Hard)**.

En resumen los objetivos son:

1. Resaltar la importancia de las incertidumbres en los sistemas.
2. Generar formas rápidas y sencillas para la evaluación de robustez en sistemas representados por matrices intervalo.
3. Demostrar cada una de las cotas de robustez propuestas.

## JUSTIFICACION

Como el mundo real no puede ser modelado con exactitud, entonces deben incluirse las incertidumbres que se presentan en el mismo. Estas incertidumbres pueden ser generadas por envejecimiento, humedad, temperatura y tolerancia, entre otras.

Debido a estas incertidumbres, se requiere realizar análisis cada vez más complejos. Las incertidumbres que se generan pueden modelarse como sistemas intervalo (función de transferencia intervalo) o como matrices intervalo.

La manera más natural de representar las incertidumbres de sistemas físicos son las matrices intervalo y las evaluaciones de estabilidad de matrices intervalo sencillas y rápidas son una opción aceptable para el análisis de robustez del sistema.

Los sistemas físicos que se representan con matrices intervalo generan problemas tipo **NP-completos**, por lo que un traslado a problemas **NP-complicados (NP-hard)** dan solución de manera aceptable a los problemas **NP-complicados**.

## RESUMEN

El estudio del control ha hecho que se profundice más al respecto de los sistemas físicos sobre todo en este siglo de un desarrollo tecnológico vertiginoso. Esto ha permitido que se incluyan incertidumbres generadas por las variaciones de los propios elementos que constituyen a un sistema e introducen cambios en la dinámica del mismo.

Por ello es importante analizar los sistemas tomando en cuenta las variaciones de los elementos que la componen, de tal forma que se conozca si el mismo sistema es estable en sus operaciones ordinarias al existir incertidumbres en sus elementos.

Este trabajo trata del estudio de esas incertidumbres de una manera en la que se tenga una fácil evaluación de la estabilidad robusta de los sistemas continuos lineales invariantes en el tiempo o de los sistemas discretos lineales invariantes al corrimiento y que sean representadas por matrices intervalo.

Por ello el presente trabajo consta de:

- 3 cotas para analizar la estabilidad de sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo y representados por una matriz intervalo.
- 2 ejemplos numéricos para cada cota usada en sistemas continuos.
- 3 cotas para analizar la estabilidad de sistemas lineales discretos invariantes al corrimiento y representados por una matriz intervalo.
- 2 ejemplos numéricos de cada cota usada en sistemas discretos.

- 2 ejemplos de aplicación a sistemas físicos.

La incertidumbre paramétrica empleada en este trabajo es causada principalmente por envejecimiento, humedad, temperatura y tolerancia, entre otras. Los sistemas con incertidumbres han sido estudiados para incorporar sus efectos en los modelos que representa al sistema realizando diferentes análisis con diferentes métodos.

Es necesario aclarar que la línea de investigación que se realiza en esta tesis es referente a los sistemas representados por variables de estado que permite un acceso rápido al incluir incertidumbres a los elementos del sistema generando una matriz intervalo. Partiendo de esta matriz intervalo y de teoremas o hechos conocidos en la teoría del control moderno, se demuestran las cotas que se proponen en este trabajo.

Una de estas características es saber si el sistema lineal continuo invariante en el tiempo o el sistema lineal discreto invariante al corrimiento representado por una matriz intervalo es estable o no y para ello el valor de la cota debe ser menor a cero (para sistemas continuos) o debe ser menor a uno (para sistemas discretos), para asegurar la estabilidad robusta del sistema.

Otra característica importante es que todos los valores característicos de todas las matrices que se generan a partir de agregar la incertidumbre al sistema sean menores a alguna de las cotas evaluadas en esta tesis. Con ello se asegura que la cota sea mayor a la parte real de cualquier valor característico que se pueda generar por el sistema incluyendo las incertidumbres.

## NOTACION

$\mathbb{R}$	Campo de números reales.
$\mathbb{C}$	Campo de números complejos.
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matrices reales de dimensión $n \times m$ .
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Matrices complejas de dimensión $n \times m$ .
$x^n$	Vector de dimensión $n$ .
$\lambda_i(\mathbf{A})$	$i$ -ésimo valor característico de la matriz $\mathbf{A}$ .
$x_i(\mathbf{A})$	$i$ -ésimo vector característico de la matriz $\mathbf{A}$ .
$\sigma(\mathbf{A})$	Espectro de la matriz $\mathbf{A}$ , esto es: $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_i(\mathbf{A}):  \lambda_i - \mathbf{A}  = 0\}$ .
$\lambda_{\max}(\mathbf{A})$	$\max\{\operatorname{Real}(\lambda_i) : \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})\}$ .
$x_{\max}(\mathbf{A})$	Vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_{\max}(\mathbf{A})$ .
$\lambda_{\min}(\mathbf{A})$	$\min\{\operatorname{Real}(\lambda_i) : \lambda_i \in \sigma(\mathbf{A})\}$ .
$x_{\min}(\mathbf{A})$	Vector característico correspondiente al valor característico $\lambda_{\min}(\mathbf{A})$ .
$\rho(\mathbf{A})$	Radiopectral de la matriz $\mathbf{A}$ .
$\ \mathbf{A}\ $	Norma de la matriz $\mathbf{A}$ , $\ \mathbf{A}\ _1$ =norma 1, $\ \mathbf{A}\ _2$ =norma 2, $\ \mathbf{A}\ _F$ =norma Frobenius, $\ \mathbf{A}\ _\infty$ =norma infinito.
$\mathbf{M}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$	Matriz intervalo, esto es: $l_{ij} \leq m_{ij} \leq u_{ij}$ .
$\mathbf{C}_0=\frac{1}{2}(\mathbf{U}+\mathbf{L})$	Matriz centroide.
$\mathbf{D}=\frac{1}{2}(\mathbf{U}-\mathbf{L})$	Matriz de diferencia central.
$\mathbf{P}=(\mathbf{U}-\mathbf{L})$	Matriz de incertidumbre.
$\mathbf{CEROS}=\mathbf{0}$	Matriz de ceros, esto es $ceros_{ij}=0 \forall i, j=1, \dots, n$ .
$\mathbf{B} \succeq \mathbf{A}$	$\mathbf{B}$ es mayor o igual que $\mathbf{A}$ elemento a elemento, esto es $b_{ij} \geq a_{ij}$ , $\forall i, j=1, \dots, n$ .
$\mathbf{A} \succeq \mathbf{0}$	$\mathbf{A}$ es mayor o igual que <b>CEROS</b> elemento a elemento, esto es $a_{ij} \geq 0$ $\forall i, j=1, \dots, n$ .

$\mathbf{B} \geq  \mathbf{A} $	$\mathbf{B}$ es mayor o igual que el valor absoluto de $\mathbf{A}$ elemento a elemento, esto es $b_{ij} \geq  a_{ij}  \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$
$\mathbf{B} < \mathbf{A}$	$\mathbf{B}$ es menor que $\mathbf{A}$ elemento a elemento, esto es $b_{ij} < a_{ij}, \quad \forall i, j = 1, \dots, n.$
$\mathbf{A} < 0$	$\mathbf{A}$ es menor que <b>CEROS</b> elemento a elemento, esto es $a_{ij} < 0,$ $\forall i, j = 1, \dots, n.$
$\mathbf{A}^T = \mathbf{A}'$	Transpuesta de la matriz $\mathbf{A}.$
$\mathbf{A}^*$	Transpuesta compleja conjugada de la matriz $\mathbf{A}.$
$\mathbf{A} = \mathbf{A}' = \mathbf{A}^T$	Matriz simétrica.
$\mathbf{A} = -\mathbf{A}' = -\mathbf{A}^T$	Matriz anti-Simétrica.
$\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$	Matriz Hermítica.
$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$	Matriz anti-Hermítica.
$\mathbf{A} \mathbf{A}^* = \mathbf{A}^* \mathbf{A}$	Matriz normal.
$H(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$	Parte Hermética de la matriz $\mathbf{A}.$
$S(\mathbf{A}) = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^*)$	Parte anti-Hermética de la matriz $\mathbf{A}.$
<b>UNOS</b>	Matriz de unos, esto es $\text{unos}_{ij} = 1 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$
$\mathbf{A} \circ \mathbf{B}$	Producto Hadamard de las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ , elemento a elemento, esto es $[\mathbf{A} \circ \mathbf{B}]_{ij} = a_{ij} b_{ij} \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n.$
■	Fin de la demostración de un teorema.
<b>Q.E.D.</b>	Quo est demonstratum (quedando esto demostrado) y se aplica a la demostración de teoremas.

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

La teoría de control moderno nace a partir de 1769 cuando James Watt aplicó por primera vez técnicas de control a la industria siendo en una máquina de vapor [1]. Posteriormente el Ruso Lyapunov introdujo el control en el siglo pasado a la industria rusa. El trabajo realizado por ambos generó nuevas expectativas para la teoría del control.

Poco tiempo después el astrónomo y matemático G.B. Airy interesado en la velocidad somete a grandes esfueros mecánicos la máquina de vapor con el aditamento que construyó Watt para su control, logrando observar que la máquina a cierta velocidad no respondía al control implementado de manera adecuada, dando por resultado el primer informe registrado acerca de la inestabilidad en un sistema controlado.

Con el tiempo las universidades se interesaron por impartir la cátedra de la teoría del control, donde la recibe Maxwell, quien posteriormente introduce las matemáticas a la teoría del control. Es importante señalar este hecho debido a que antes de Maxwell el estudio del control era inductivo, y con su aportación, el estudio del control fue desde entonces deductivo. Cabe señalar que el análisis para determinar la estabilidad dependía de resolver sistemas de ecuaciones de orden  $n$ , por lo que no era muy accesible para los estudiantes.

En el año de 1877 el premio Adams que otorgaba la universidad donde egresó Maxwell fué concedido a Routh (teniendo como jurado a Maxwell) por sus aportaciones al control al introducir el criterio de Routh que establece condiciones de estabilidad en los sistemas al analizar un polinomio.

Para finales del siglo pasado el matemático ruso Lyapunov desarrolla su conocido trabajo sobre estabilidad de los sistemas, conocidas como las 2 leyes de Lyapunov, en las cuales menciona:

- La primera ley de Lyapunov incluye todos los conocimientos de estabilidad de sistemas conocidos hasta entonces, como son los trabajos de Maxwell y Routh.
- La segunda ley de Lyapunov incluye condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de sistemas y determina que una matriz  $\mathbf{A}$  es estable si y solo si  $\mathbf{PA} + \mathbf{A}^T\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , donde  $\mathbf{P}$  y  $\mathbf{Q}$  son matrices positivas definidas.

El análisis de estabilidad usando incertidumbre representadas por matrices intervalo no fue posible hasta el año de 1929 cuando el matemático Duncan desarrolla una investigación incluyendo incertidumbre en la matriz que representa al sistema, sin embargo este trabajo no fue tomado en cuenta por sus contemporáneos.

Pasado el tiempo, el trabajo de Duncan es recuperado y tomado en cuenta como base para la realización de técnicas más depuradas de estudio que realizó Kharitonov en el año de 1974 y las dirige al estudio de estabilidad de sistemas representados por funciones de transferencia donde encuentra condiciones necesarias y suficientes de estabilidad probando 4 polinomios que pertenecen al polinomio intervalo.

El análisis de estabilidad para sistemas lineales invariantes en el tiempo representados por matrices intervalo es propiamente dado a conocer por Bialas en el año 1983 donde desarrolló condiciones necesarias y suficientes para asegurar la estabilidad robusta de sistemas representados con matrices intervalo. Este resultado es tomado en cuenta por sus contemporáneos desarrollándose un estudio fuerte sobre matrices intervalo.

Este movimiento que genera Bialas en el estudio de la estabilidad robusta es retomado por Barmish al año siguiente (1984), donde demuestra que las condiciones presentadas por Bialas son erróneas y por lo tanto no cumple para todas las matrices.

El estudio de estabilidad robusta de sistemas era evaluado exclusivamente para sistemas continuos, pero para el año de 1988 las computadoras ya eran algo tangible de tal forma que los sistemas lineales discretos representados por matrices intervalo eran una realidad por lo que Huang desarrolló el análisis de estabilidad de sistemas lineales discretos invariantes al corrimiento y representados por matrices intervalo dando condiciones suficientes de estabilidad.

Sin embargo los estudios desarrollados por Soh en 1989 determinan que lo establecido por Huang no cumple para todo el grupo de matrices que propone. De esta forma el estudio de estabilidad para sistemas lineales (continuos y discretos) generó una carrera para poder saber quien podía generar las condiciones necesarias y suficientes en los sistemas representados por matrices intervalo.

Posteriormente el hungaro Jiri Rhon desarrolló un estudio matemático en el cual establece que los sistemas lineales representados por matrices intervalo generan un problema **NO POLINOMIAL COMPLETO (NP–Completo)**, y al aplicar cualquier método siempre se obtiene una solución del problema que contiene conservatismo, por lo cual indica que un resultado que ofrezca condiciones suficientes de estabilidad para este tipo de sistemas es un resultado decoroso por la complejidad del análisis, generando por lo tanto problemas **NP–Complicados (NP–Hard)**. También deja en claro que el problema de estabilidad para este tipo de sistemas representados por matrices intervalo queda abierto.

Finalmente puede citarse lo desarrollado por Mansour en el año de 1989 cuando presenta el análisis de estabilidad para los sistemas lineales invariantes en el tiempo y representados por matrices intervalo estudiando todas las matrices que se generan del sistema al agregar incertidumbre al sistema las cuales son  $2^{n^2}$  matrices que se tienen que analizar para determinar si el sistema es robustamente estable, por lo que su método es muy bueno pero muy laborioso, conociendo que si el sistema es  $A \in \mathbb{R}^{5x5}$  se deben analizar  $2^{5^2}$  vértices, esto es  $2^{25}=33554432$  vértices.

En este trabajo de tesis se incluyen algunas cotas que se han obtenido para realizar análisis de estabilidad robusta de sistemas, y que son representados por matrices intervalo e incluyen condiciones suficientes de estabilidad robusta, así como condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para un caso especial de matrices intervalo. Se incluyen además condiciones de aplicación de las cotas para sistemas físicos.

Las cotas evaluadas en el presente trabajo garantizan la estabilidad del sistema bajo condiciones de incertidumbre para sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y para sistemas lineales discretos, invariantes al corrimiento y que son representados por una matriz intervalo  $A = [L, U]$ .

Las pruebas presentadas en esta tesis son de fácil evaluación, dado que el análisis de robustez en un sistema intervalo genera un problema **NP–Completo** y por esto se presenta un crecimiento sin control en el tiempo de evaluación, con estas cotas solo se evalúan 2 matrices y es independiente de la dimensión del problema.

El mundo real difícilmente puede ser modelado con exactitud, por lo cual se generan incertidumbres en sus modelos. Esta incertidumbre puede ser representada por incertidumbre paramétrica (cuando sólamente varían los parámetros del sistema) o por incertidumbre dinámica (cuando varía la dimensión del sistema).

En este trabajo la demostración de las cotas que garantizan la robustez del sistema se basan principalmente en el teorema de Perron, el teorema de Weyl, los discos Gersgorin y el producto Hadamard.

Considerando el siguiente sistema lineal e invariante en el tiempo:

para sistemas continuos:  $\dot{x}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t); y(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)$

para sistemas discretos:  $x(k+1) = \mathbf{Ax}(k) + \mathbf{Bu}(k); y(k) = \mathbf{Cx}(k) + \mathbf{Du}(k)$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nxn}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{nxm}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{pxn}$  y  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{pxm}$ .

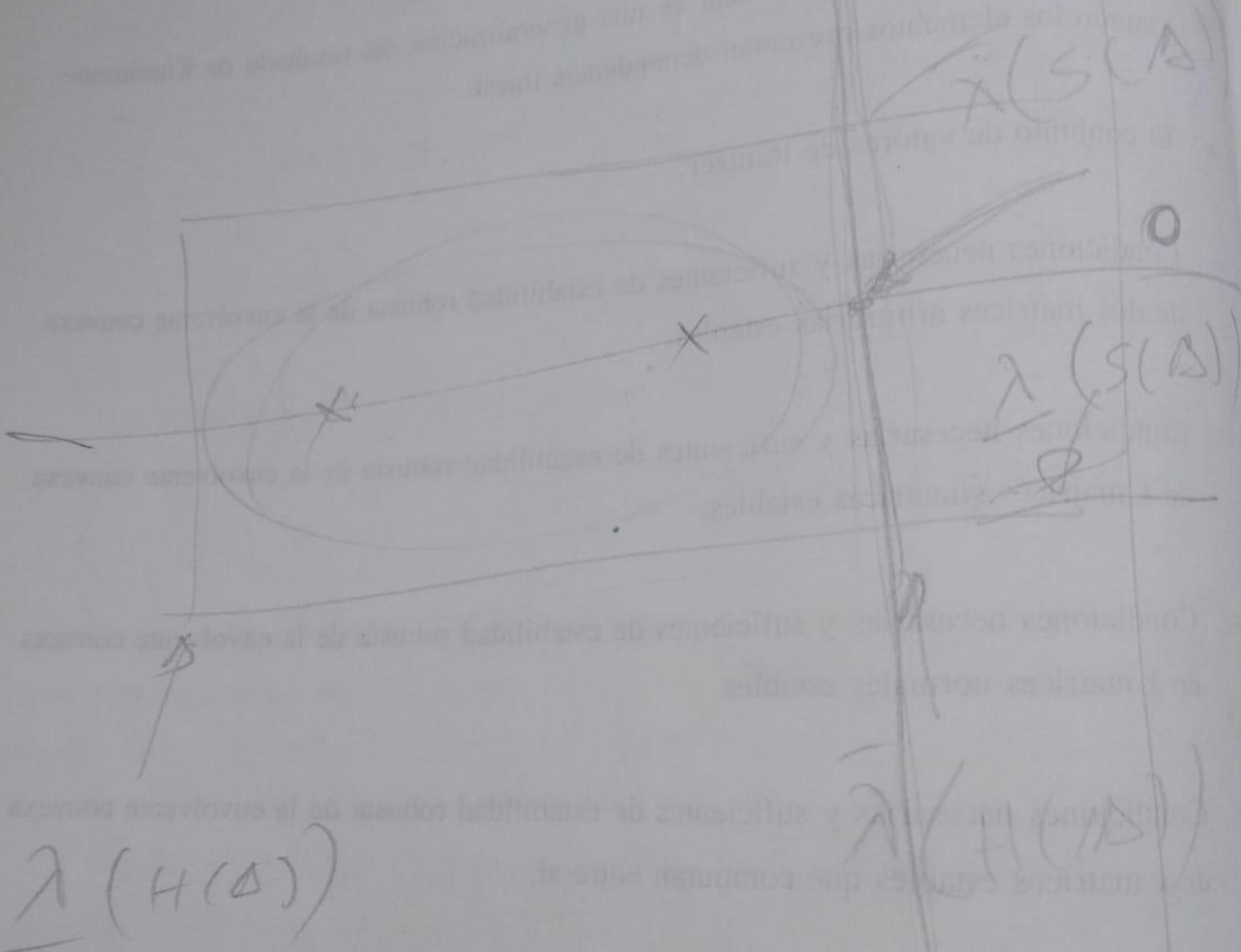
Cuando el sistema contiene incertidumbres, entonces la matriz  $\mathbf{A}$  puede ser modelada como un politopo de matrices (conjunto de matrices) y en este caso la matriz  $\mathbf{A}$  es representada por una matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . En el análisis de estabilidad de sistemas físicos, son importantes las incertidumbres que presenta el sistema y pueden ser generadas: por tolerancia en elementos, por corrimiento, por temperatura o por envejecimiento.

La incertidumbre usada en la presente tesis es incertidumbre paramétrica y el sistema es representado por una matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ . En la literatura de control pueden encontrarse algunos resultados para garantizar la estabilidad robusta de un sistema continuo lineal e invariante en el tiempo, entre los que se cuentan:

- 1.- Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta de una planta intervalo (resultado de Kharitonov), este resultado es usado en funciones de transferencia intervalo y evalúa 4 polinomios vértice.

- 2.- El teorema de las aristas de Bartlett plantas intervalo.
- 3.- El resultado de Barmish, el cual es una generalización del resultado de Kharitonov cuando los elementos presentan dependencia lineal.
- 4.- El conjunto de valores de Rantzer.
- 5.- Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta de la envolvente convexa de dos matrices arbitrarias estables.
- 6.- Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta de la envolvente convexa de  $k$  matrices simétricas estables.
- 7.- Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta de la envolvente convexa de  $k$  matrices normales estables.
- 8.- Condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta de la envolvente convexa de  $k$  matrices estables que comutan entre sí.
- 9.- Condiciones suficientes de estabilidad robusta usando el campo de valores de  $k$  matrices estables.
- 10.- Condiciones suficiente de estabilidad robusta de matrices intervalo.

El presente trabajo está enfocado en el último inciso, aunque además se incluyen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para un caso especial de matrices intervalo.



## CAPITULO II MARCO TEORICO

En este capítulo se incluyen algunos resultados que son necesarios para la demostración de los teoremas presentados en esta tesis. Algunos de los resultados son: El teorema de Weyl, el teorema de Perron, la subaditividad de las matrices normales, la inclusión del radio espectral, entre otros.

**Hecho 2.1.** — Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces:

$$\lambda_{\min}(H(\mathbf{A})) \leq \min(\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})))$$

y

$$\max(\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A}))) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{A})).$$

$$\lambda_{\min}(S(\mathbf{A})) \leq \min(\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A})))$$

$$\max(\operatorname{Re}(\lambda_i(\mathbf{A}))) \leq \bar{\lambda}(S(\mathbf{A}))$$

Este hecho indica que el espectro de la matriz  $\mathbf{A}$  es acotado inferiormente por el mínimo valor característico de la parte Hermética de  $\mathbf{A}$  y superiormente por el máximo valor característico de la parte Hermética de  $\mathbf{A}$ .

**Hecho 2.2.** — (Teorema de Weyl) Sean las matrices Hermíticas  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , esto es  $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$  y  $\mathbf{B} = \mathbf{B}^*$ , entonces:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{A}) + \lambda_{\max}(\mathbf{B}).$$

El teorema de Weyl determina condiciones de subaditividad del máximo valor característico de la suma de dos matrices Hermíticas, esto es: el máximo valor característico de la suma de dos matrices Hermíticas es menor o igual que la suma de los máximos valores característicos de las matrices.

**Hecho 2.3.**— Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces:

$$|\lambda_i(\mathbf{A})| \leq \rho(\mathbf{A}), \quad i=1,2,\dots,n.$$

El hecho anterior indica que todos los valores característicos de una matriz  $\mathbf{A}$  están contenidos en un círculo de radio igual al radio espectral de la matriz  $\mathbf{A}$ , esto es  $\rho(\mathbf{A})$ .

**Hecho 2.4.**— Sean las matrices  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{B} \succeq |\mathbf{A}|$ , entonces:

$$\rho(\mathbf{B}) \geq \rho(|\mathbf{A}|) \geq \rho(\mathbf{A}).$$

El hecho 2.4 determina que el radio espectral de una matriz positiva contiene a los radios espectrales de todas las matrices que son menores en valor absoluto a la matriz original elemento a elemento.

**Hecho 2.5.**— (Teorema de Perron) Sea la matriz  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{CEROS} = \mathbf{0}$ , entonces:

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) = \rho(\mathbf{A}).$$

El teorema de Perron indica que para toda matriz real con elementos positivos el máximo valor característico de la matriz es real y coincide exactamente con el radio espectral.

**Hecho 2.6.**— Sean las matrices  $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{A} \succeq \mathbf{CEROS}$ ,  $\mathbf{B} \succeq \mathbf{CEROS}$ , entonces:

$$\lambda_{max}(\mathbf{A} \circ \mathbf{B}) \leq \lambda_{max}(\mathbf{A}) \lambda_{max}(\mathbf{B}).$$

El hecho 2.6. indica que para dos matrices con elementos positivos, el producto Hadamard presenta condiciones de submultiplicatividad del máximo valor característico del producto Hadamard de dos matrices, esto es: el máximo valor característico del producto Hadamard de dos matrices es menor o igual que el producto de los máximos valores característicos de las matrices.

**Hecho 2.7.-** Sea la matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces:

$$\rho(A) \leq |\rho(H(A)) + j\rho(S(A))|.$$

El hecho anterior determina que el radiopectral de una matriz  $A$  está contenido por el valor absoluto de la suma de los radiospectrales de las partes Hermítica y anti-Hermítica de la matriz  $A$ , esto es debido a que tanto  $H(A)$  como  $S(A)$  son matrices normales.

**Hecho 2.8.-** Sean las matrices normales  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , esto es  $AA^*=A^*A$  y  $BB^*=B^*B$ , entonces:

$$\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B).$$

El hecho 2.8 determina condiciones de subaditividad para los radiospectrales de la suma de dos matrices normales, esto es: el radiopectral de la suma de dos matrices normales es menor o igual que la suma de los radiospectrales de las matrices.

**Hecho 2.9.** – Sea la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces la matriz intervalo es Hurwitz estable si y solo si

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq 0 \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}].$$

El hecho 2.9 determina las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para un sistema continuo representado por una matriz intervalo e indica que una matriz intervalo es Hurwitz estable si y solo si todas las matrices que pertenecen al intervalo son Hurwitz estables, esto es: para la condición suficiente, la matriz intervalo es Hurwitz estable si todas las matrices que pertenecen al intervalo son Hurwitz estables y para la condición necesaria, todas las matrices que pertenecen al intervalo son Hurwitz estables si la matriz intervalo es Hurwitz estable.

**Hecho 2.10.** – Sea la matriz  $\mathbf{A} \in [\text{CEROS}, \text{UNOS}]$ , entonces:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) = n.$$

El hecho 2.10 indica que para una matriz intervalo con elementos contenidos entre cero y uno, entonces el máximo valor característico de la matriz intervalo es igual a la dimensión de la matriz.

**Hecho 2.11.** – Sea la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , entonces la matriz intervalo es Schur estable si y solo si

$$\rho(\mathbf{A}) \leq 1 \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}].$$

El hecho 2.11 determina las condiciones necesarias y suficientes de estabilidad para un sistema discreto representado por una matriz intervalo e indica que una matriz intervalo es Schur estable si y solo si todas las matrices que pertenecen al intervalo son Schur estables, esto es: para la condición suficiente, la matriz intervalo es Schur estable si todas las matrices que pertenecen al intervalo son Schur estables y para la condición necesaria, todas las matrices que pertenecen al intervalo son Schur estables si la matriz intervalo es Schur estable.

**Hecho 2.12.**— Sea la matriz  $\mathbf{A}, \mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $\mathbf{T}$  no singular, entonces:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}).$$

El hecho anterior indica que toda transformación de similitud mantiene invariante el espectro de la matriz original.

**Hecho 2.13.**— Sea la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}], \mathbf{T} \in \mathbb{C}^{n \times n}$  con  $\mathbf{T}$  no singular, entonces:

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{L}, \mathbf{U}) = \sigma(\mathbf{T}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{T}) = \sigma(\mathbf{T}^{-1} [\mathbf{L}, \mathbf{U}] \mathbf{T}).$$

El hecho 2.13 indica que la transformación de similitud realizada a una matriz intervalo mantiene invariante su espectro, por lo tanto si la matriz intervalo es estable, entonces la transformación de similitud realizada a la matriz intervalo es también estable.

**CAPITULO III**  
**COTAS DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA SISTEMAS LINEALES**  
**INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ**  
**INTERVALO**

**III.1. ESTABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES CONTINUOS,  
INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ  
INTERVALO.**

La cota incluída en este apartado la presenté en el Congreso de Oscilaciones y Caos COC '97 en San Petesburgo, Rusia. Esta cota cumple condiciones suficientes que garantizan la estabilidad robusta de sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y que son representados por una matriz intervalo [16].

**Teorema III.1.1.-** Sea el siguiente sistema lineal continuo, invariante en el tiempo y representado por:

$$\dot{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu}; y = \mathbf{Cx}$$

donde  $\mathbf{A}$  es representada por una matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{A}, \mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{nxn}$ ,  $\mathbf{C}_0 = \frac{1}{2}(\mathbf{U} + \mathbf{L})$  y  $\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{U} - \mathbf{L})$ , entonces el sistema es Hurwitz estable si:

$$\alpha = \lambda_{max}(H(\mathbf{C}_0)) + n\lambda_{max}(H(\mathbf{D})) < 0.$$

**Prueba:** La matriz intervalo puede ser definida por:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] = \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_k \text{ con } \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}]$$

o también puede ser definido como:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] = \mathbf{C}_0 + \mathbf{D} \circ \mathbf{T}_k \text{ con } \mathbf{T}_k \in [\mathbf{CERO}, \mathbf{UNOS}].$$

Usando el hecho 2.1 y el hecho 2.9 se obtiene:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{A})) = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D} \circ \mathbf{T}_k)) = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0) + H(\mathbf{D} \circ \mathbf{T}_k)).$$

Usando ahora el teorema de Weyl (hecho 2.2) se tiene:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D} \circ \mathbf{T}_k)).$$

Ahora porque  $H(\mathbf{D} \circ \mathbf{T}_k) \leq H(\mathbf{D}) \circ \mathbf{T}_{1_k}$ , donde  $\mathbf{T}_{1_k} = \mathbf{T}_{1_k}^*$  y  $\mathbf{T}_{1_k} \in [\mathbf{CERO}, \mathbf{UNOS}]$  (hecho 2.4) se logra:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D}) \circ \mathbf{T}_{1_k}).$$

Usando ahora el hecho 2.6 porque  $H(\mathbf{D}) \geq \mathbf{CERO}$  y  $\mathbf{T}_{1_k} \geq \mathbf{CERO}$  entonces:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) \lambda_{\max}(\mathbf{T}_{1_k}).$$

Finalmente porque  $\mathbf{T}_{1_k} \in [\mathbf{CERO}, \mathbf{UNOS}]$  es una matriz Hermética y por el hecho 2.10 se obtiene:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \alpha = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + n \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) < 0.$$

Q. E. D.

■

### EJEMPLO NUMERICO III.1.2.-

En esta sección se incluye un par de ejemplos numéricos, los cuales muestran la aplicación de la cota evaluada anteriormente.

Sea el sistema lineal continuo, invariante en el tiempo y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -2.3074 & -0.6971 & -1.2518 \\ -1.3514 & -2.9820 & -1.2283 \\ -0.5393 & -0.7781 & -2.8342 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -2.1585 & -0.5125 & -1.0837 \\ -1.1174 & -2.8401 & -1.2110 \\ -0.5268 & -0.5442 & -2.7276 \end{pmatrix}.$$

Evaluando la cota  $\alpha = \lambda_{max}(H(\mathbf{C}_0)) + n\lambda_{max}(H(\mathbf{D})) = -0.8988$ , puede verse que el sistema es Hurwitz estable para la matriz intervalo dada.

La figura 3 ilustra la matriz. La linea vertical representa la cota  $\alpha$ . La representación de los vértices del hipercubo y (x) representan las condiciones de los puntos formados de los vértices del hipercubo que corresponden a la matriz intervalo.

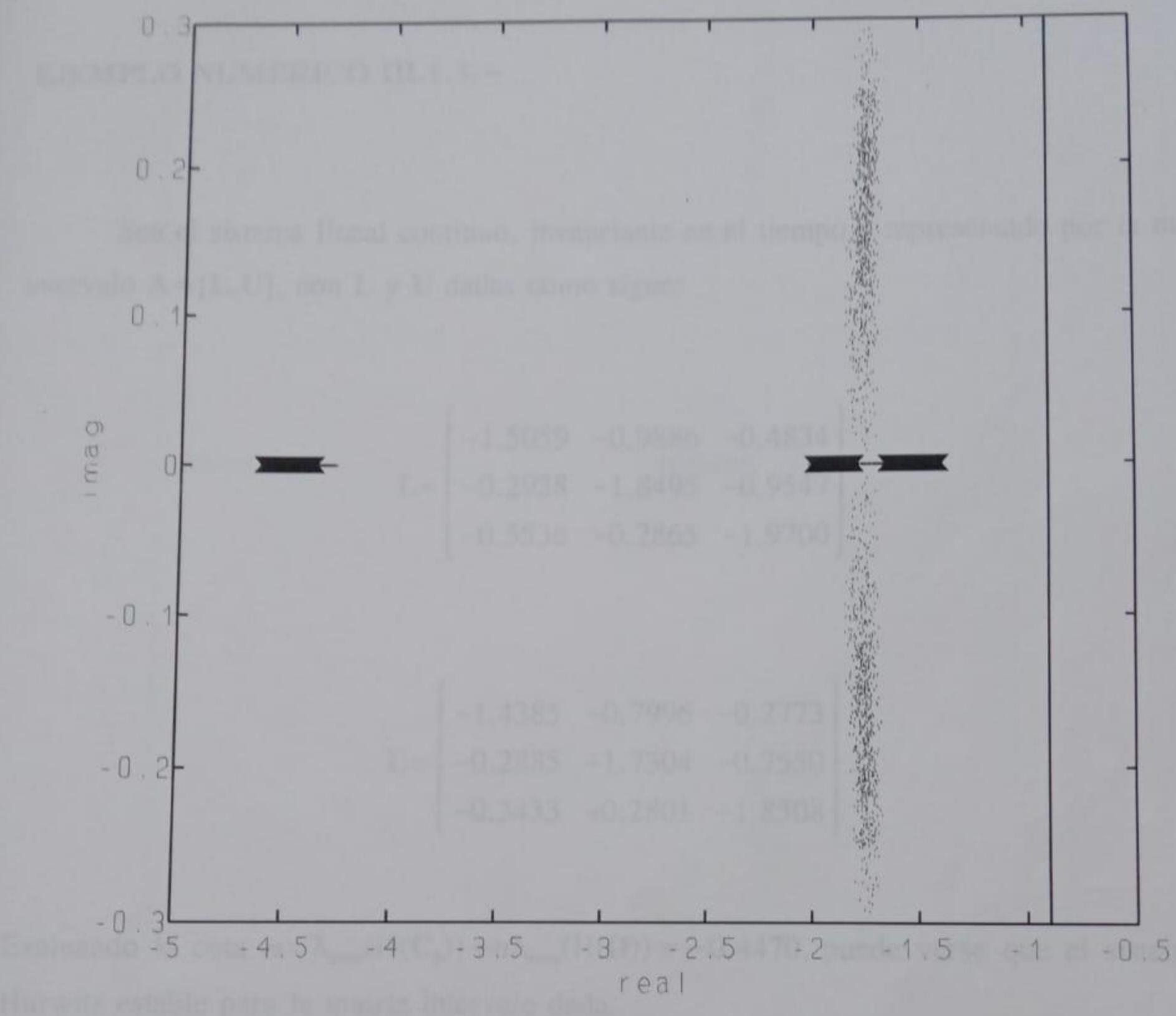


Figura 3.1

La figura 3.1 muestra: La línea vertical representa la cota  $\alpha$ , (.) representa los valores característicos de todas las matrices vértice del hipercubo y (x) representa los valores característicos de las partes Hermíticas de los vértices del hipercubo que corresponden a la matriz intervalo.

### EJEMPLO NUMERICO III.1.3.-

Sea el sistema lineal continuo, invariante en el tiempo y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1.5059 & -0.9886 & -0.4834 \\ -0.2938 & -1.8495 & -0.9547 \\ -0.5536 & -0.2865 & -1.9700 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1.4385 & -0.7996 & -0.2773 \\ -0.2885 & -1.7304 & -0.7550 \\ -0.3433 & -0.2801 & -1.8508 \end{pmatrix}.$$

Evaluando la cota  $\alpha = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + n\lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) = -0.4470$ , puede verse que el sistema es Hurwitz estable para la matriz intervalo dada.

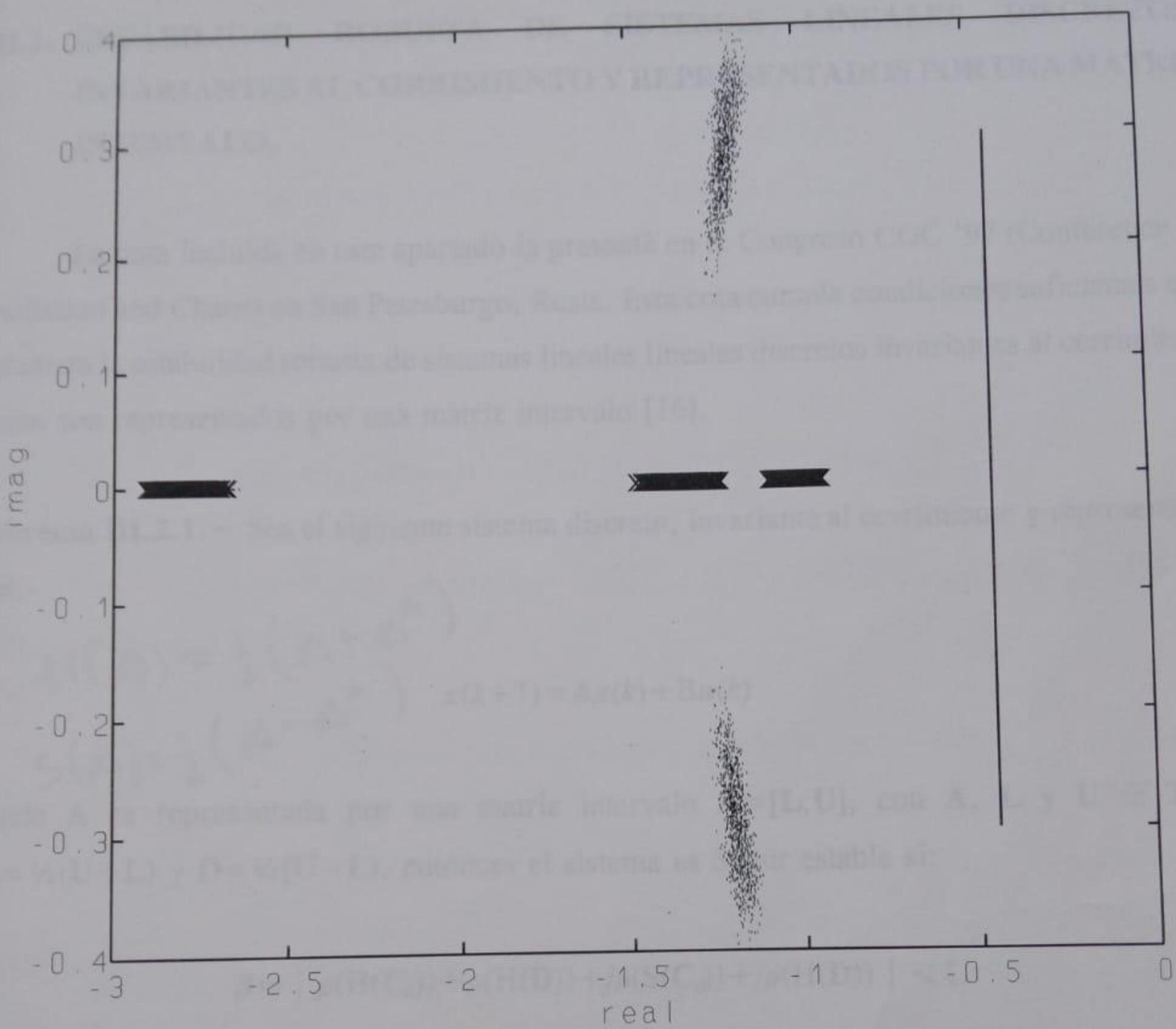


Figura 3.2

La figura 3.2 muestra: La línea vertical representa la cota  $\alpha$ , (.) representan los valores característicos de todas las matrices vértice del hipercubo y (x) representan los valores característicos de las partes Hermíticas de los vértices del hipercubo que corresponden a la matriz intervalo.

### III.2. ESTABILIDAD ROBUSTA DE SISTEMAS LINEALES DISCRETOS, INVARIANTES AL CORRIMIENTO Y REPRESENTADOS POR UNA MATRIZ INTERVALO.

La cota incluida en este apartado la presenté en el Congreso COC '97 (Conference on Oscillation and Chaos) en San Petesburgo, Rusia. Esta cota cumple condiciones suficientes que garantiza la estabilidad robusta de sistemas lineales discretos invariantes al corrimiento y que son representados por una matriz intervalo [16].

**Teorema III.2.1.** – Sea el siguiente sistema discreto, invariante al corrimiento y representado por:

$$H(D) = \frac{1}{2}(D + D^*)$$

$$S(D) = \frac{1}{2}(D - D^*)$$

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

donde  $A$  es representada por una matriz intervalo  $A = [L, U]$ , con  $A, L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_0 = \frac{1}{2}(U + L)$  y  $D = \frac{1}{2}(U - L)$ , entonces el sistema es Schur estable si:

$$\beta = |\rho(H(C_0)) + \rho(H(D)) + j\rho(S(C_0)) + j\rho(H(D))| < 1.$$

**Prueba:** La matriz intervalo  $A = [L, U]$  puede representarse por:

$$A = C_0 + D_k \text{ con } D_k \in [\text{CEROS}, D].$$

Usando el hecho 2.7 y el hecho 2.11 se tiene:

$$\rho(A) \leq |\rho(H(C_0 + D_k)) + j\rho(S(C_0 + D_k))|.$$

Ahora puede separarse la matriz en una parte Hermítica y en una parte anti-Hermítica  $\mathbf{A} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A})$  y se tiene:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0) + \mathbf{S}(\mathbf{D}_k)) | .$$

Porque las matrices Hermíticas y anti-Hermíticas son matrices normales, puede usarse el hecho 2.8 para conseguir:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{D}_k)) | .$$

Finalmente, usando el hecho 2.4 (porque  $\mathbf{H}(\mathbf{D}_k) \preceq |\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)| \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D})$  y  $\mathbf{S}(\mathbf{D}_k) \preceq |\mathbf{S}(\mathbf{D}_k)| \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D})$ ), se obtiene:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) | = \beta < 1.$$

Q. E. D. ■

### EJEMPLO NUMERICO III.2.2.-

En esta sección se incluye un par de ejemplos numéricos, los cuales muestran la aplicación de la cota evaluada anteriormente.

Sea el sistema lineal discreto, invariante al corrimiento y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0.1591 & 0.3754 & -0.1767 \\ -3337 & -0.1633 & 0.0655 \\ -0.2621 & -0.3565 & -0.3557 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0.11907 & 0.4618 & -0.0646 \\ -0.3218 & -0.1138 & -0.1099 \\ -0.1376 & -0.3297 & -0.2422 \end{bmatrix}.$$

Calculando la cota  $\beta = |\rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}))| = 0.7403$ , puede observarse que el sistema representado por la matriz intervalo es Schur estable.

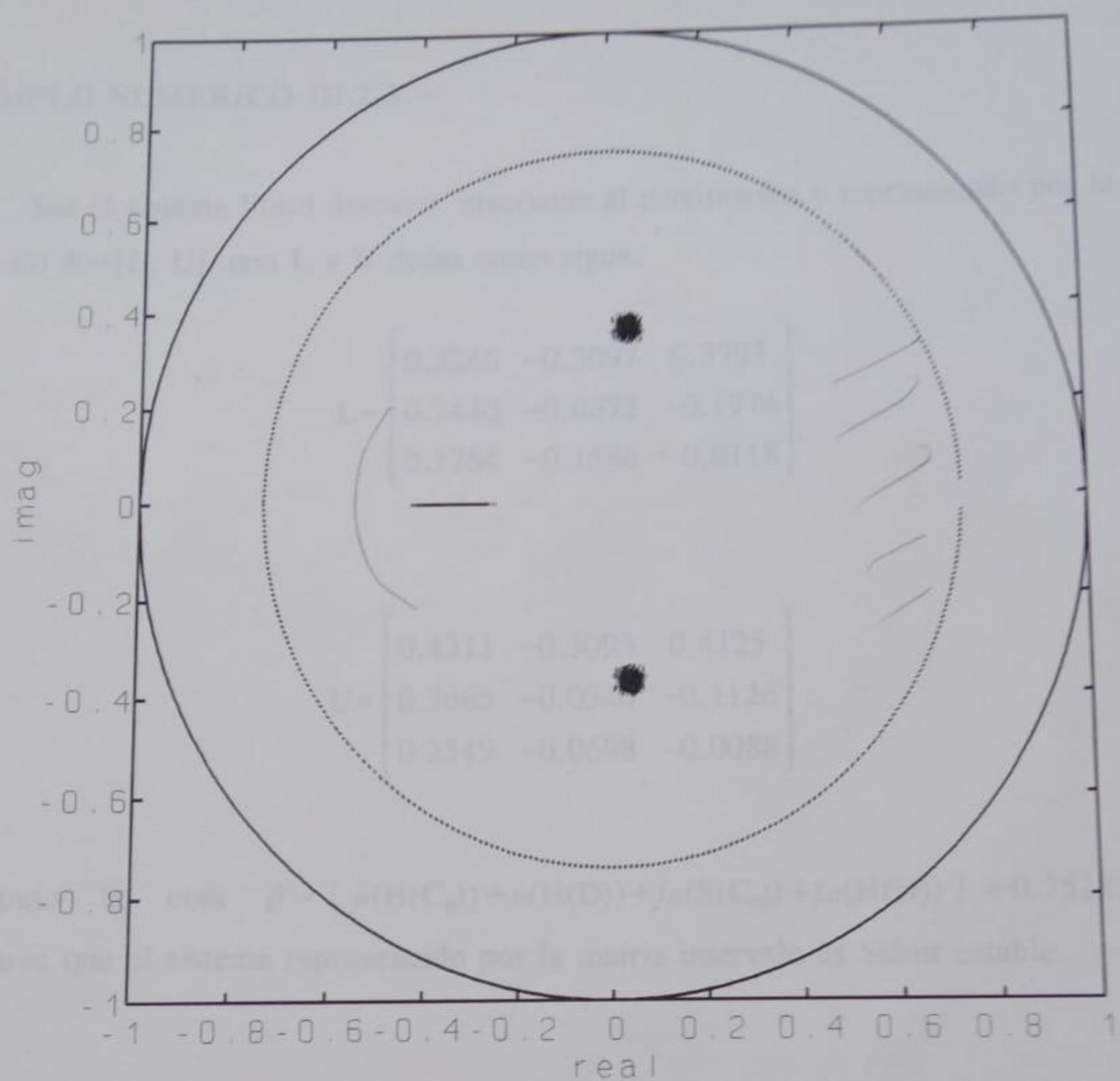


Figura 3.3

La figura 3.3 muestra: La línea continua representa el circulo unitario, la línea en puntos (...) representa la cota  $\beta$  y los puntos representan los valores característicos de las matrices vértice del hipercubo que representa la matriz intervalo.

### EJEMPLO NUMERICO III.2.3.-

Sea el sistema lineal discreto, invariante al corrimiento y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} 0.3246 & -0.3097 & 0.3793 \\ 0.3440 & -0.0672 & -0.1974 \\ 0.1764 & -0.1586 & -0.0118 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0.4311 & -0.3095 & 0.4125 \\ 0.3665 & -0.0540 & -0.1126 \\ 0.2549 & -0.0698 & -0.0088 \end{pmatrix}.$$

Calculando la cota  $\beta = |\rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}))| = 0.7528$ , puede observarse que el sistema representado por la matriz intervalo es Schur estable.

Figura 3.4

En la Figura 3.4 se muestra el resultado de la ejecución del comando `ezplotf` en MATLAB. La figura consta de tres subplots. El subplot superior muestra la respuesta en magnitud y fase de la matriz intervalo. Los subplots inferiores muestran la respuesta en magnitud y fase de los componentes  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  de la matriz intervalo.

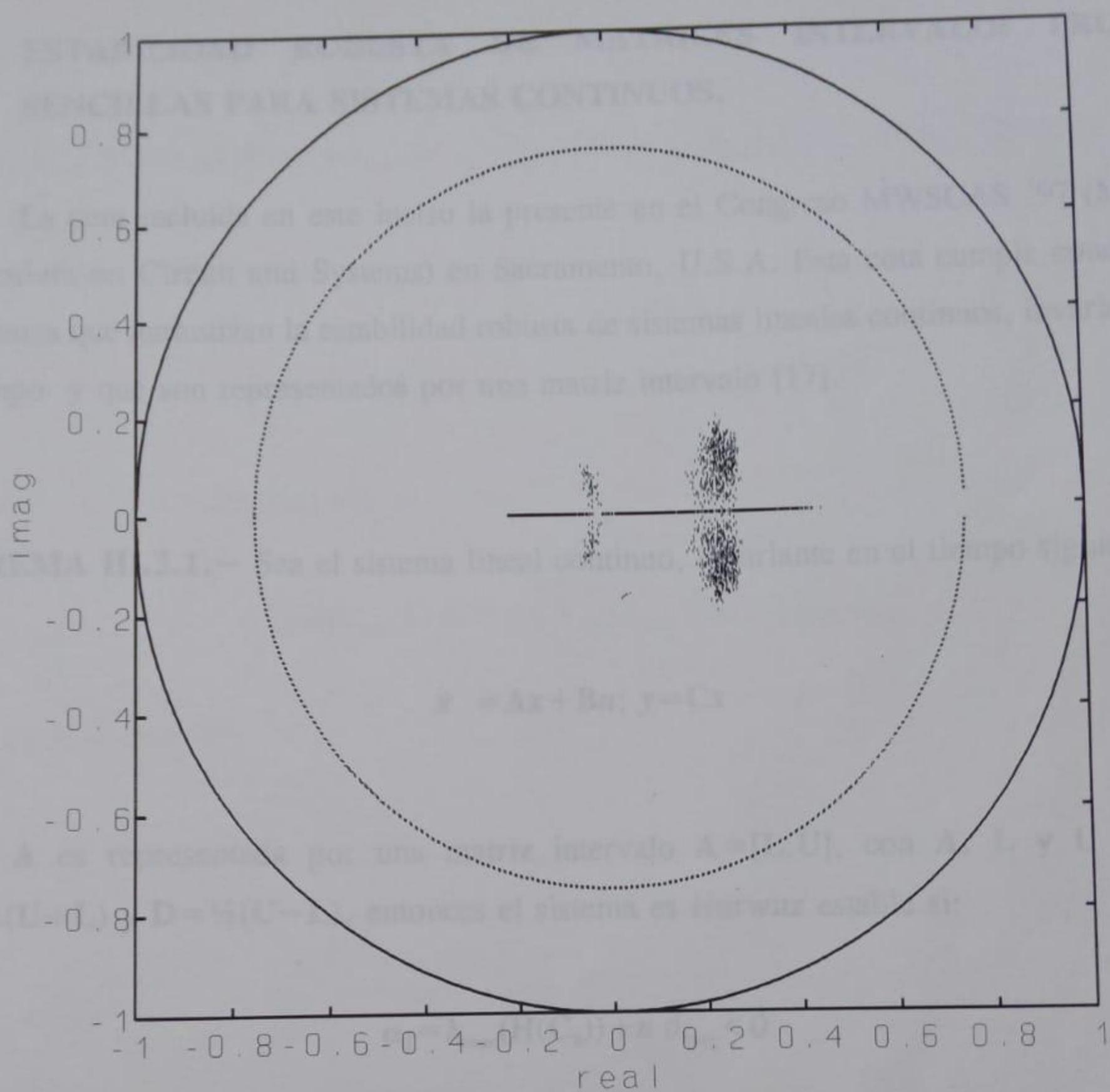


Figura 3.4

La figura 3.4 muestra: La línea continua representa el circulo unitario, la línea en puntos (...) representa la cota  $\beta$  y los puntos representan los valores característicos de las matrices vértice del hipercubo que representa la matriz intervalo.

### III.3. ESTABILIDAD ROBUSTA DE MATRICES INTERVALO: PRUEBAS SENCILLAS PARA SISTEMAS CONTINUOS.

La cota incluída en este inciso la presenté en el Congreso MWSCAS '97 (Midwest Symposium on Circuit and Systems) en Sacramento, U.S.A. Esta cota cumple condiciones suficientes que garantizan la estabilidad robusta de sistemas lineales continuos, invariantes en el tiempo y que son representados por una matriz intervalo [17].

**TEOREMA III.3.1.** – Sea el sistema lineal continuo, invariante en el tiempo siguiente:

$$\dot{x} = Ax + Bu; y = Cx$$

donde  $A$  es representada por una matriz intervalo  $A = [L, U]$ , con  $A, L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_0 = \frac{1}{2}(U + L)$  y  $D = \frac{1}{2}(U - L)$ , entonces el sistema es Hurwitz estable si:

$$\alpha_I = \lambda_{\max}(H(C_0)) + n d_{\max} < 0$$

**Prueba:** La matriz intervalo puede definirse como:

$$A = [L, U] = C_0 + D_k \text{ con } D_k \in [-D, D]$$

ahora puede usarse un sobreacotamiento, de tal forma que:

$$A = [L, U] = C_0 + D_k \leq C_0 + d_{\max} \text{ UNOS, con } D_k \in [0, D] \text{ y } D_k \in [CEROS, d_{\max} \text{ UNOS}]$$

Usando ahora el hecho 2.1 y el hecho 2.9 se obtiene:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{A})) = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0 + d_{\max} \text{UNOS})) = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0) + H(d_{\max} \text{UNOS}))$$

Por el teorema de Weyl (hecho 2.2) se logra:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + \lambda_{\max}(H(d_{\max} \text{UNOS})).$$

Si se utilizan discos de Gergorin se tiene:

$$\lambda_{\max}(H(d_{\max} \text{UNOS})) \leq \lambda_{\max}(d_{\max} \text{UNOS}) \leq n d_{\max}$$

Finalmente se obtiene:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \alpha_I = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + n d_{\max} < 0$$

Q. E. D.



### EJEMPLO NUMERICO III.3.2.-

En esta sección se muestra un ejemplo numérico aplicando la cota  $\alpha_I$ . Este ejemplo demuestra la estabilidad de sistemas lineales continuos e invariantes en el tiempo.

Sea el sistema lineal continuo, invariante en el tiempo y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1.7277 & -0.6847 & -01.1044 \\ -0.9163 & -1.5070 & -0.9266 \\ -0.8839 & -0.6676 & -2.1335 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1.6167 & -0.6496 & -0.9735 \\ -0.8806 & -1.4680 & -0.7099 \\ -0.6539 & -0.6366 & -2.0067 \end{pmatrix}$$

Evaluando la cota  $\alpha_I = \lambda_{max}(H(\mathbf{C}_0)) + n \cdot d_{max} = -0.4407$ , puede determinarse que el sistema representado por la matriz intervalo es Hurwitz estable.

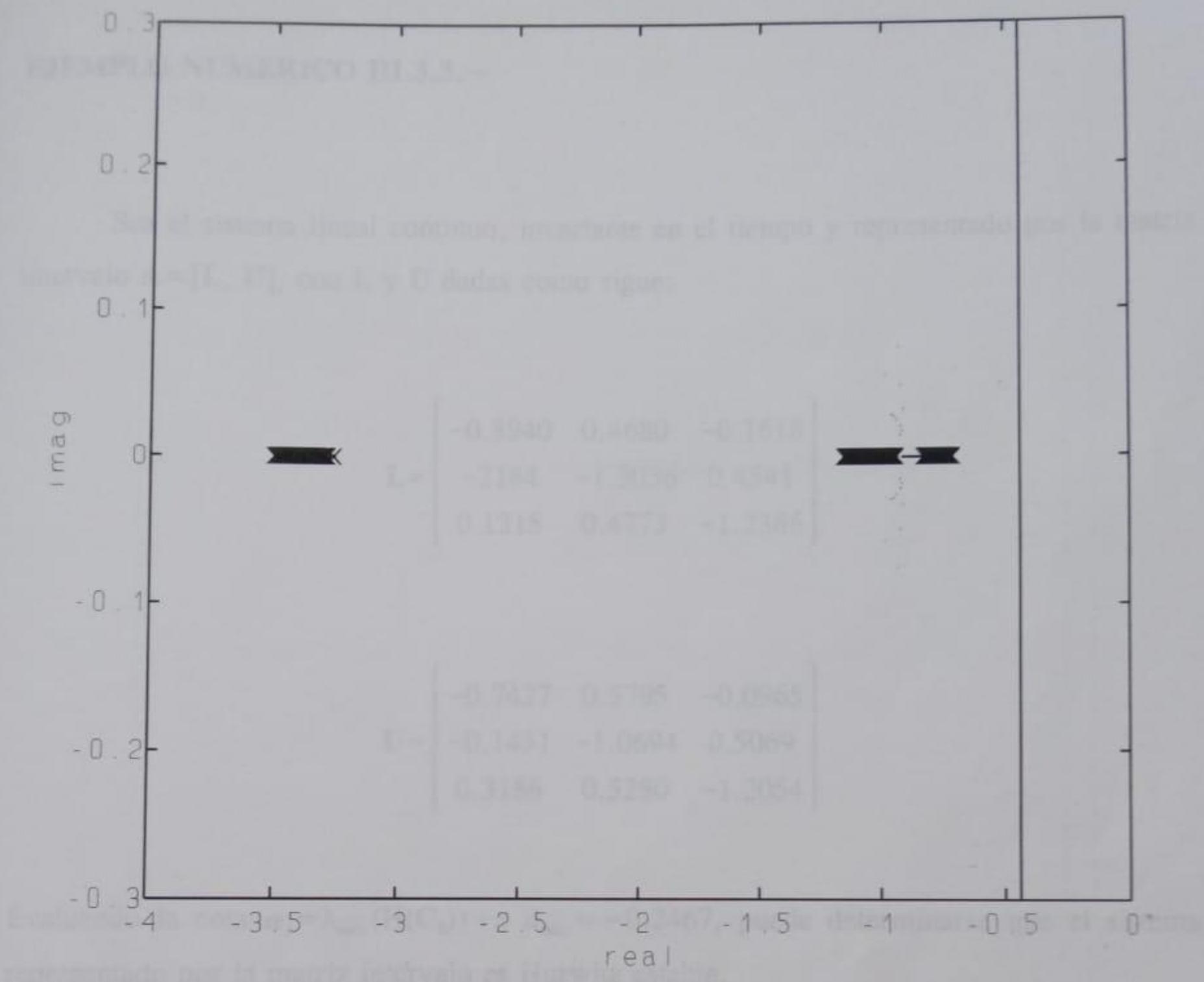


Figura 3.5

La figura 3.5 muestra: La línea vertical representa la cota  $\alpha_1$ , (.) representan los valores característicos de todos los vértices de la matriz intervalo y (x) representan los valores característicos de las partes Hermíticas de los vértices de la matriz intervalo.

### EJEMPLO NUMERICO III.3.3.-

Sea el sistema lineal continuo, invariante en el tiempo y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.8940 & 0.4680 & -0.1618 \\ -2184 & -1.3036 & 0.4541 \\ 0.1315 & 0.4773 & -1.2386 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.7427 & 0.5795 & -0.0965 \\ -0.1451 & -1.0694 & 0.5069 \\ 0.3186 & 0.5280 & -1.2054 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota  $\alpha_I = \lambda_{max}(H(\mathbf{C}_0)) + n \ d_{max} = -0.2467$ , puede determinarse que el sistema representado por la matriz intervalo es Hurwitz estable.

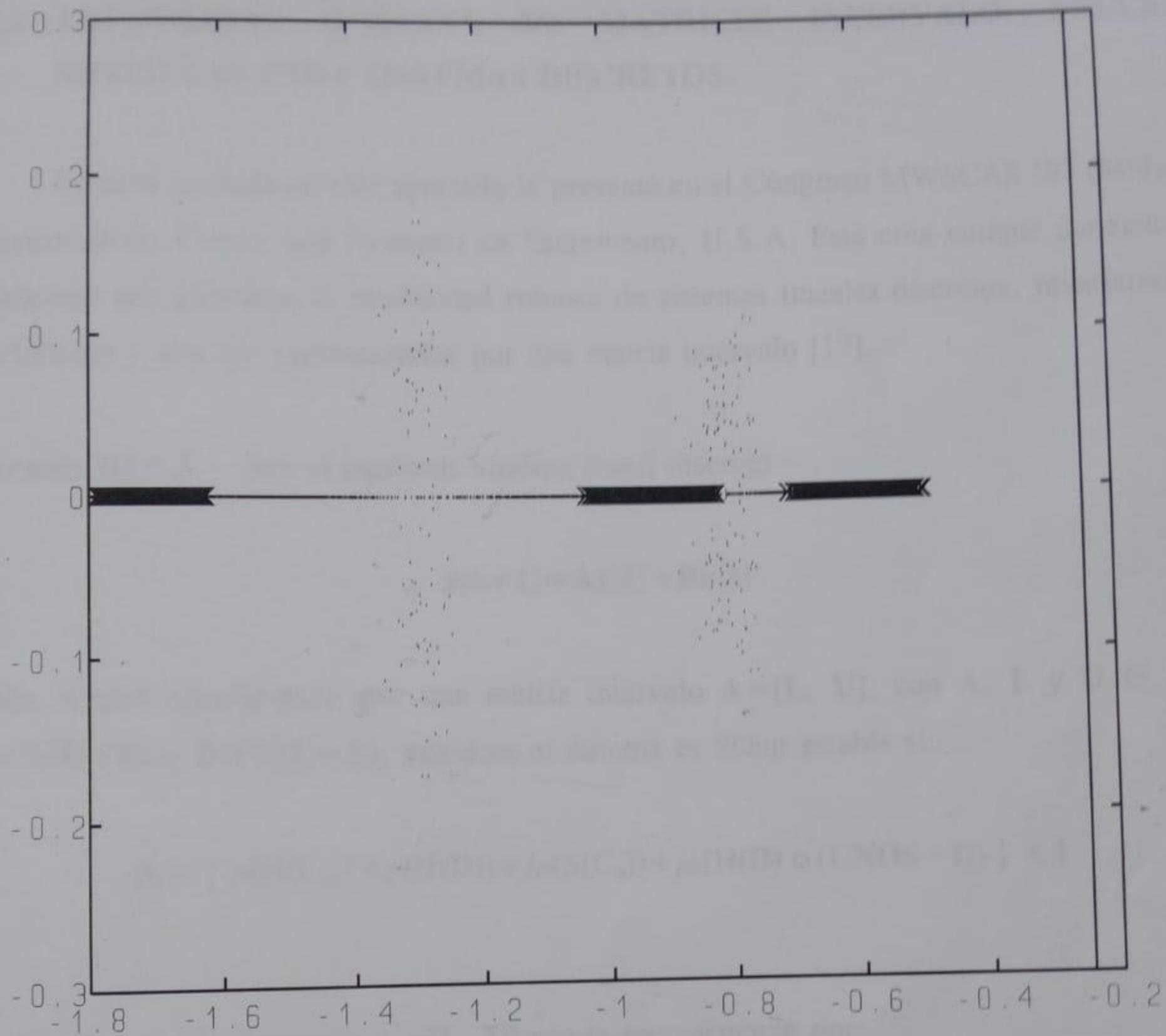


Figura 3.6

La figura 3.6 muestra: La línea vertical representa la cota  $\alpha_I$ , (.) representan los valores característicos de todos los vértices de la matriz intervalo y (x) representan los valores característicos de las partes Hermíticas de los vértices de la matriz intervalo.

### III.4. ESTABILIDAD ROBUSTA DE MATRICES INTERVALO: PRUEBAS SENCILLAS PARA SISTEMAS DISCRETOS.

La cota incluída en este apartado la presenté en el Congreso MWSCAS '97 (Midwest Symposium on Circuit and Systems) en Sacramento, U.S.A. Esta cota cumple condiciones suficientes que garantiza la estabilidad robusta de sistemas lineales discretos, invariantes al corrimiento y que son representados por una matriz intervalo [17].

**Teorema III.4.1.**— Sea el siguiente sistema lineal discreto

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

donde  $A$  esta representada por una matriz intervalo  $A = [L, U]$ , con  $A, L$  y  $U \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $C_0 = \frac{1}{2}(U+L)$  y  $D = \frac{1}{2}(U-L)$ , entonces el sistema es Schur estable si:

$$\beta_I = | \rho(H(C_0)) + \rho(H(D)) + j\rho(S(C_0)) + j\rho(H(D) \circ (UNOS - I)) | < 1$$

**Prueba:** La matriz intervalo  $A = [L, U]$  puede representarse por:

$$A = C_0 + D_k \text{ con } D_k \in [-D, D]$$

Usando el hecho 2.7 y el hecho 2.11, se tiene:

$$\rho(A) \leq | \rho(H(C_0 + D_k)) + j\rho(S(C_0 + D_k)) |$$

Separando ahora la matriz en parte Hermítica y parte anti-Hermítica  $\mathbf{A} = \mathbf{H}(\mathbf{A}) + \mathbf{S}(\mathbf{A})$ , entonces:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0) + \mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0) + \mathbf{S}(\mathbf{D}_k)) |$$

Porque las matrices Hermíticas y anti-Hermíticas son matrices normales, puede usarse el hecho 2.8 y se obtiene:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{D}_k)) |$$

Usando ahora el hecho 2.4, debido a que  $\mathbf{H}(\mathbf{D}_k) \preceq |\mathbf{H}(\mathbf{D}_k)| \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D})$  y  $\mathbf{S}(\mathbf{D}_k) \preceq |\mathbf{S}(\mathbf{D}_k)| \preceq \mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS} - \mathbf{I})$ , entonces:

$$\rho(\mathbf{A}) \leq | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS} - \mathbf{I})) | = \beta_I < 1$$

Q. E. D.

■

Evaluando la constante  $\beta_I = | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS} - \mathbf{I})) | = 0.8787$ , se observa que el sistema representado por la matriz invertible es Schur estable.

### EJEMPLO NUMERICO III.4.2.-

En esta sección se muestra un ejemplo numérico aplicando la cota  $\beta_I$ . Este ejemplo demuestra la estabilidad de sistemas lineales discretos e invariantes al corrimiento.

Sea el sistema lineal discreto, invariante al corrimiento y representado pos la matriz intervalo  $\mathbf{A}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -0.5527 & -0.0625 & 0.0218 \\ 0.0709 & 0.0670 & 0.4211 \\ -0.0958 & -0.3346 & -0.6026 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -0.4355 & 0.0491 & 0.1360 \\ 0.1242 & 0.0819 & 0.4992 \\ 0.016 & -0.2133 & -0.5960 \end{bmatrix}$$

Evaluando la cota  $\beta_I = | \rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS} - \mathbf{I})) | = 0.8787$ , puede observarse que el sistema representado por la matriz intervalo es Schur estable.

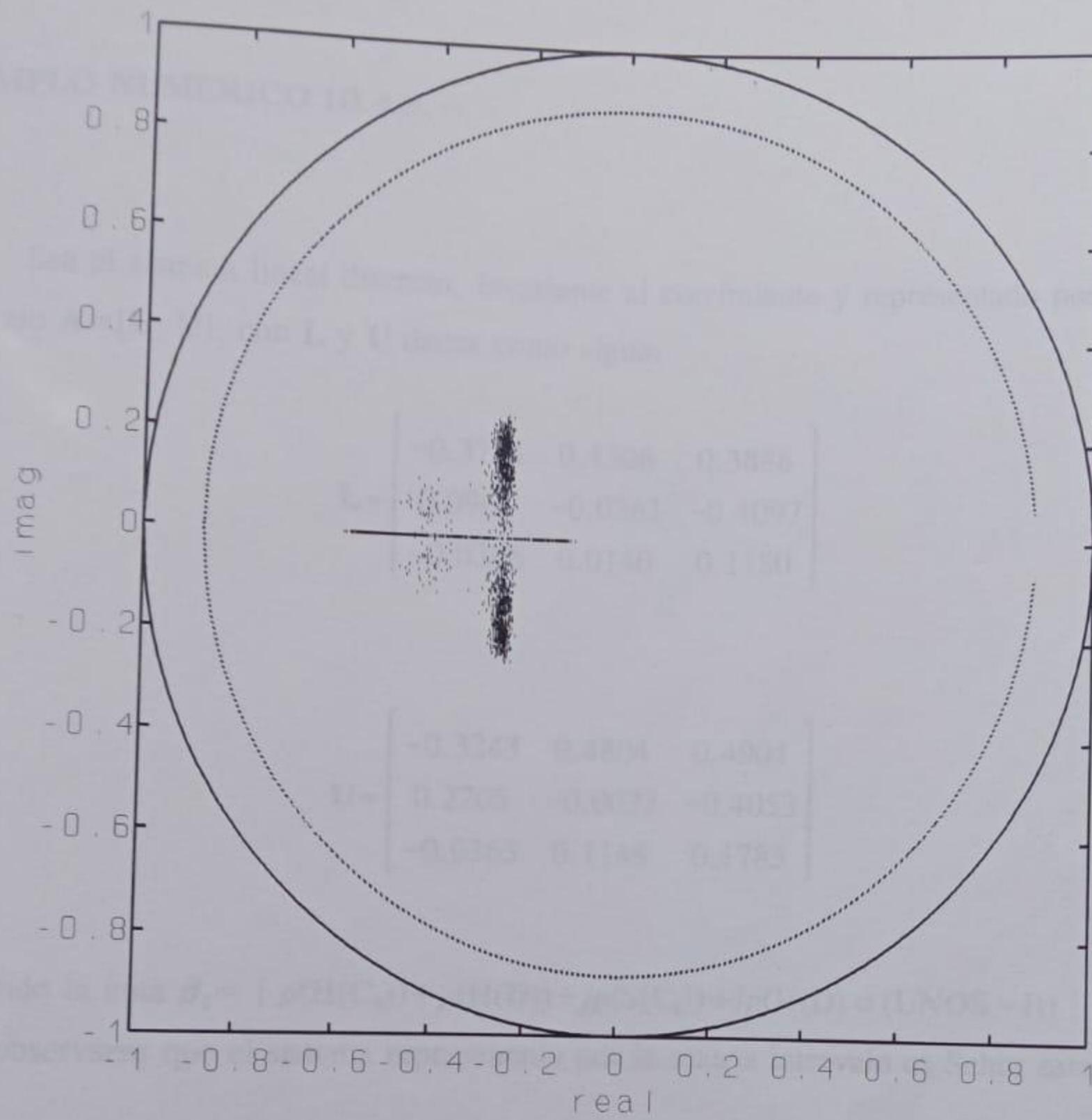


Figura 3.7

La figura 3.7 muestra: La línea continua representa el círculo unitario, la línea en puntos (...) representa la cota  $\beta_I$  y los puntos representan los valores característicos de las matrices vértice del hipercubo que representa la matriz intervalo.

### EJEMPLO NUMERICO III.4.3.-

Sea el sistema lineal discreto, invariante al corrimiento y representado por la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -0.3784 & 0.4306 & 0.3886 \\ 0.0963 & -0.0361 & -0.4097 \\ -0.0386 & 0.0140 & 0.1180 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -0.3243 & 0.4804 & 0.4904 \\ 0.2205 & -0.0022 & -0.4053 \\ -0.0363 & 0.1148 & 0.1785 \end{pmatrix}$$

Evaluando la cota  $\beta_I = |\rho(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \rho(\mathbf{H}(\mathbf{D})) + j\rho(\mathbf{S}(\mathbf{C}_0)) + j\rho(\mathbf{H}(\mathbf{D}) \circ (\mathbf{UNOS} - \mathbf{I}))| = 0.8322$ , puede observarse que el sistema representado por la matriz intervalo es Schur estable.

La figura 3.8 muestra: La linea continua representa el circulo unitario, la linea en puntos (...) representa la cota  $\beta_I$  y los puntos representan los valores caracteristicos de las matrices vértice del hipercubo que representa la matriz intervalo.

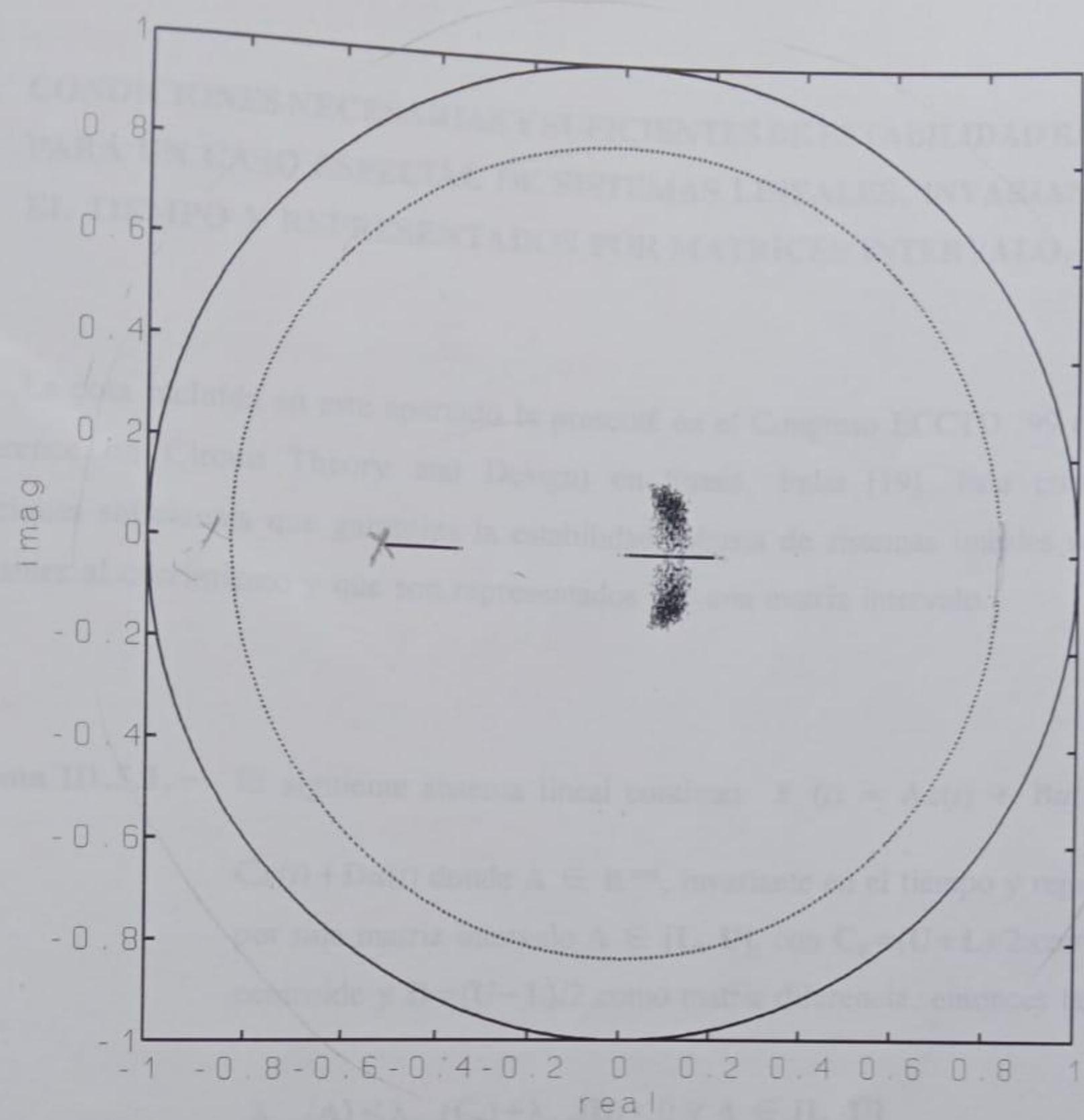


Figura 3.8

La figura 3.8 muestra: La línea continua representa el círculo unitario, la línea en puntos (...) representan la cota  $\beta_1$ , y los puntos representan los valores característicos de las matrices vértice del hipercubo que representa la matriz intervalo.

### III.5. CONDICIONES NECESARIAS Y SUFICIENTES DE ESTABILIDAD ROBUSTA PARA UN CASO ESPECIAL DE SISTEMAS LINEALES, INVARIANTES EN EL TIEMPO Y REPRESENTADOS POR MATRICES INTERVALO.

La cota incluída en este apartado la presenté en el Congreso ECCTD '99 (European Conference on Circuit Theory and Design) en Stresa, Italia [19]. Esta cota cumple condiciones suficientes que garantiza la estabilidad robusta de sistemas lineales continuos, invariantes al corrimiento y que son representados por una matriz intervalo.

**Teorema III.5.1.-** El siguiente sistema lineal continuo  $\dot{x}(t) = \mathbf{Ax}(t) + \mathbf{Bu}(t); y(t) = \mathbf{Cx}(t) + \mathbf{Du}(t)$  donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , invariante en el tiempo y representado por una matriz intervalo  $\mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $\mathbf{C}_0 = (\mathbf{U} + \mathbf{L})/2$  como matriz centroide y  $\mathbf{D} = (\mathbf{U} - \mathbf{L})/2$  como matriz diferencia, entonces la cota

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{\max}(\mathbf{D}) < 0 \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$$

contiene condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta si las siguientes condiciones se cumplen:

1. -  $\mathbf{C}_0$  y  $\mathbf{D}$  son matrices Hermíticas.

2. -  $\lambda_{\max}(\mathbf{C}_0)$  y  $\lambda_{\max}(\mathbf{D})$  comparten el mismo vector característico  $x_{\max}$ .

**DEMOSTRACION:**

**CONDICION SUFFICIENTE:** En este caso se debe demostrar que, si la cota  $\lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D}) < 0$ , entonces la matriz intervalo es Hurwitz estable  $\forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

La matriz intervalo  $\mathbf{A}$  puede representarse como:

$$\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] = \mathbf{C}_0 + [-\mathbf{D}, \mathbf{D}] = \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_k \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Con la máxima parte real de los valores característicos :

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_k) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Ahora usando el hecho 2.1, se tiene:

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A})) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_k)) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Usando la condición de que  $\mathbf{C}_0$  es una matriz Hermítica, se puede concluir que:

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A})) \leq \lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + H(\mathbf{D}_k)) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Sabiendo que tanto  $\mathbf{C}_0$  como  $H(\mathbf{D}_k)$  son matrices Hermíticas, se puede usar el teorema de Weyl (hecho 2.2) y se obtiene:

$$\lambda_{max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{max}(H(\mathbf{A})) \leq \lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(H(\mathbf{D}_k)) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Ahora usando el hecho 2.3, se determina que:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{A})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \rho(H(\mathbf{D}_k)) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Si se usa el hecho 2.4, se obtiene:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{A})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \rho(H(\mathbf{D})) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Usando ahora el hecho 2.5 (teorema de Perron), se concluye:

$$\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(H(\mathbf{A})) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Finalmente, porque  $\lambda_{\max}(\mathbf{A}) \leq \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{\max}(\mathbf{D}) < 0$  entonces la matriz intervalo  $\mathbf{A}$  es Hurwitz estable  $\forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

**CONDICION NECESARIA:** En la condición necesaria para la demostración del teorema se debe demostrar que si la matriz intervalo  $\mathbf{A}$  es Hurwitz estable  $\forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , entonces la cota  $\lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{\max}(\mathbf{D}) < 0$ .

Puede verse que la matriz intervalo es

$$\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] = \mathbf{C}_0 + \mathbf{D}_k = [\mathbf{L}, \mathbf{U}] \quad \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]; \mathbf{D}_k \in [-\mathbf{D}, \mathbf{D}].$$

Entonces los valores y vectores característicos de  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}$  son

$$\mathbf{C}_0 \ x_{\max}(\mathbf{C}_0) = \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) \ x_{\max}(\mathbf{C}_0)$$

$$\mathbf{D} \ x_{max}(\mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{D}) \ x_{max}(\mathbf{D})$$

y

$$(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) \ x_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) \ x_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}).$$

Sumando las dos primeras ecuaciones, se obtiene:

$$\mathbf{C}_0 \ x_{max}(\mathbf{C}_0) + \mathbf{D} \ x_{max}(\mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0) \ x_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D}) \ x_{max}(\mathbf{D}).$$

Ahora porque  $\mathbf{C}_0$  y  $\mathbf{D}$  comparten el mismo vector característico, se tiene:

$$(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) \ x_{max}(\mathbf{C}_0) = (\lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D})) \ x_{max}(\mathbf{C}_0).$$

Finalmente puede obtenerse

$$\lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D}).$$

Como la matriz intervalo es Hurwitz estable, esto es  $\lambda_{max}(\mathbf{A}) < 0 \ \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , entonces  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  son estables ( $\lambda_{max}(\mathbf{L}) < 0$  y  $\lambda_{max}(\mathbf{U}) < 0$ ) y por lo tanto se obtiene:

$$\lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D}) < 0 \ \forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}].$$

Q. E. D.



### EJEMPLO NUMERICO III.5.2.-

En esta sección se incluye un par de ejemplos numéricos, los cuales muestran las condiciones para la aplicación del teorema anterior.

Sea el sistema intervalo siguiente  $\mathbf{M} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  están dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1.8963 & 0.6178 & 0.7446 \\ 0.6178 & -1.7197 & 0.5844 \\ 0.7446 & 0.5844 & -2.0458 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1.4723 & 0.7486 & 0.7646 \\ 0.7486 & -1.3685 & 0.6952 \\ 0.7646 & 0.6952 & -1.6112 \end{pmatrix}$$

Además  $\mathbf{C}_0$  y  $\mathbf{D}$  son:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1.6843 & 0.6832 & 0.7546 \\ 0.6832 & -1.5441 & 0.6398 \\ 0.7546 & 0.6398 & -1.8285 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0.2120 & 0.0654 & 0.0100 \\ 0.0654 & 0.1756 & 0.0554 \\ 0.0100 & 0.0554 & 0.2173 \end{bmatrix}$$

Los valores característicos de  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}$  son:

$$\sigma(\mathbf{C}_0) = \{-2.1361, -2.5149, -0.2963\}$$

$$\sigma(\mathbf{D}) = \{0.1107, 0.2052, 0.2890\}$$

$$\sigma(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \{-2.1349, -2.3098, -0.0073\}$$

Evaluando la cota  $\lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D}) = -0.0073$ , la matriz intervalo es Hurwitz estable  $\forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

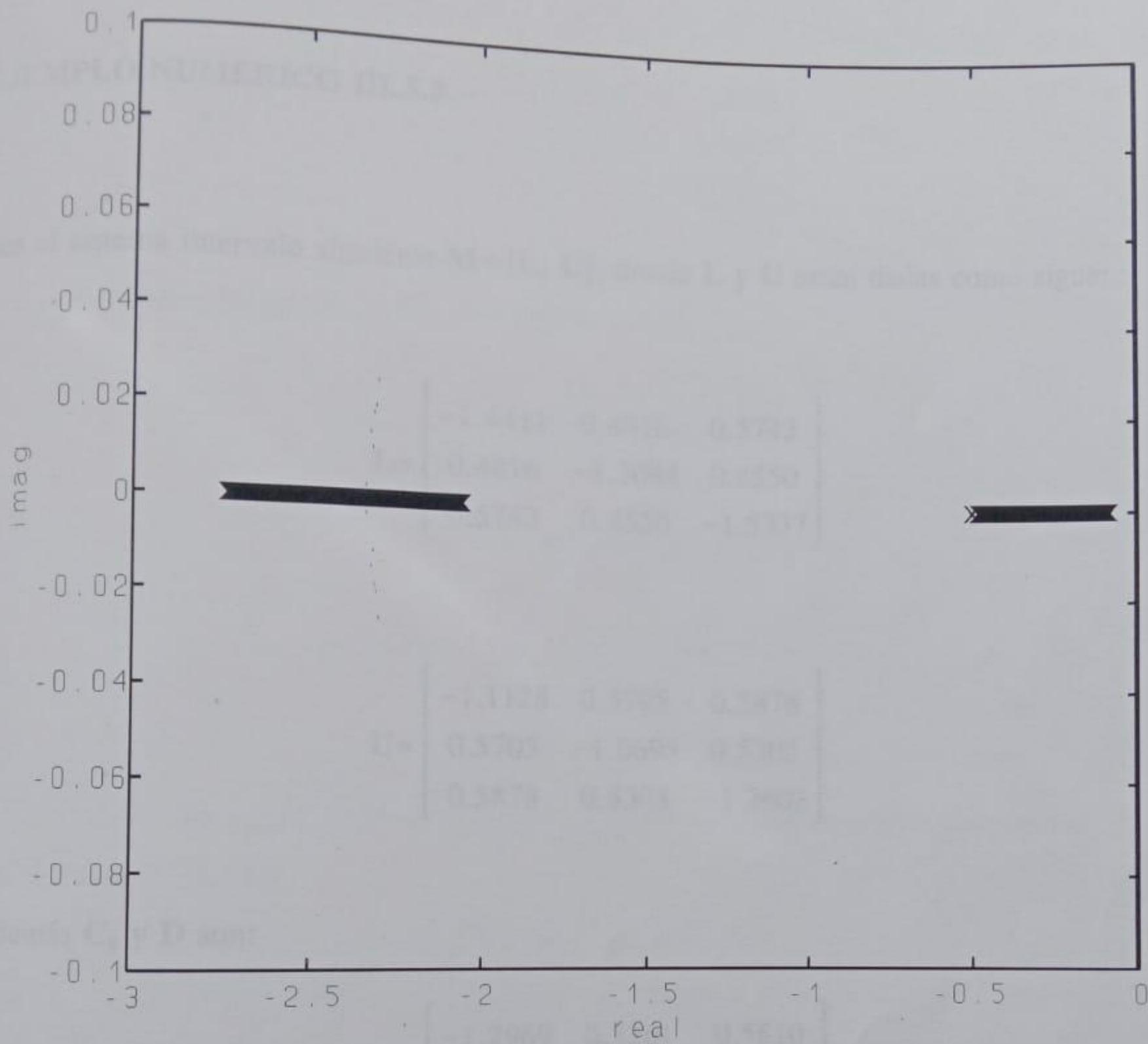


Figura 3.9

La figura 3.9 muestra los valores característicos de 2000 matrices aleatorias que corresponden a la matriz intervalo, incluyendo las matrices  $L$  y  $U$ , la cota  $\lambda_{max}(C_0+D)=\lambda_{max}(C_0)+\lambda_{max}(D)=-0.0073$  se muestra con la linea vertical.

### EJEMPLO NUMERICO III.5.3.-

Sea el sistema intervalo siguiente  $\mathbf{M} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , donde  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  están dadas como sigue:

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} -1.4411 & 0.4816 & 0.5742 \\ 0.4816 & -1.3084 & 0.4550 \\ 0.5742 & 0.4550 & -1.5337 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} -1.1128 & 0.5705 & 0.5878 \\ 0.5705 & -1.0695 & 0.5303 \\ 0.5878 & 0.5303 & -1.2602 \end{pmatrix}$$

Además  $\mathbf{C}_0$  y  $\mathbf{D}$  son:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{pmatrix} -1.2969 & 0.5261 & 0.5810 \\ 0.5261 & -1.1891 & 0.4927 \\ 0.5810 & 0.4927 & -1.4079 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0.1442 & 0.0445 & 0.0068 \\ 0.0445 & 0.1194 & 0.0377 \\ 0.0068 & 0.0377 & 0.1478 \end{pmatrix}$$

Los valores característicos de  $\mathbf{C}_0$ ,  $\mathbf{D}$  y  $\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}$  son:

$$\sigma(\mathbf{C}_0) = \{-0.2282, -1.9365, -1.7292\}$$

$$\sigma(\mathbf{D}) = \{0.1966, 0.0753, 0.1395\}$$

$$\sigma(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \{-0.0316, -1.7970, -1.6593\}$$

Evaluando la cota  $\lambda_{max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \lambda_{max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{max}(\mathbf{D}) = -0.0316$ , la matriz intervalo es Hurwitz estable  $\forall \mathbf{A} \in [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ .

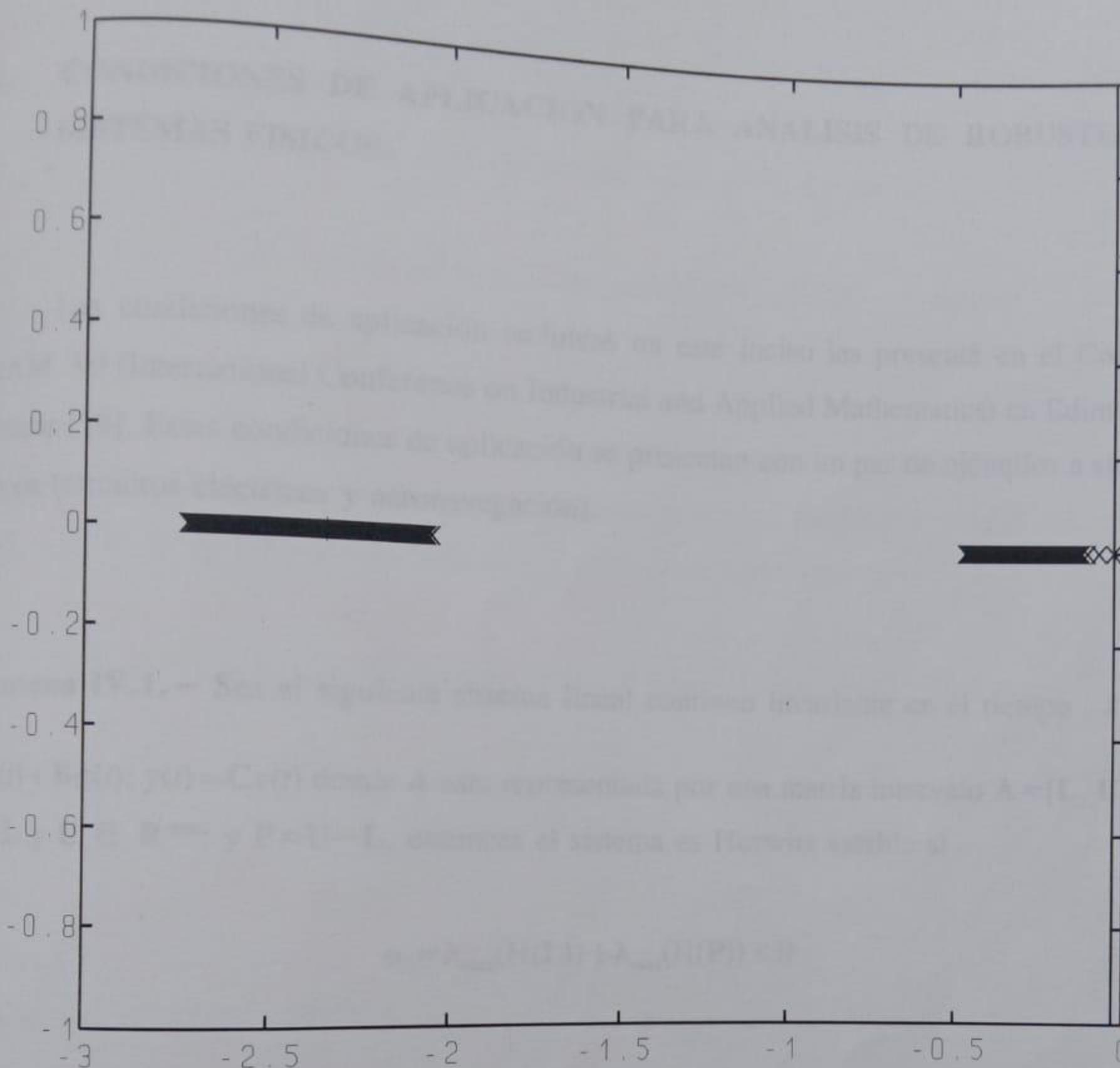


Figura 3.10

La figura 3.10 muestra los valores característicos de 1000 matrices aleatorias que corresponden a la matriz intervalo, incluyendo las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$ , la cota  $\lambda_{\max}(\mathbf{C}_0 + \mathbf{D}) = \lambda_{\max}(\mathbf{C}_0) + \lambda_{\max}(\mathbf{D}) = -0.0316$  se muestra con la linea vertical.

#### IV. CONDICIONES DE APLICACION PARA ANALISIS DE ROBUSTEZ DE SISTEMAS FISICOS.

Las condiciones de aplicación incluídas en este inciso las presenté en el Congreso ICIAM '99 (International Conference on Industrial and Applied Mathematics) en Edimburgo, Escocia [18]. Estas condiciones de aplicación se presentan con un par de ejemplos a sistemas físicos (circuitos eléctricos y aeronavegación).

**Teorema IV.1.**— Sea el siguiente sistema lineal continuo invariante en el tiempo  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$  donde  $A$  esta representada por una matriz intervalo  $A = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $A, \mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; y  $\mathbf{P} = \mathbf{U} - \mathbf{L}$ , entonces el sistema es Hurwitz estable si

$$\alpha_0 = \lambda_{\max}(H(\mathbf{L})) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{P})) < 0$$

**Teorema IV.2.**— Sea el siguiente sistema lineal continuo invariante en el tiempo  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t); y(t) = Cx(t)$  donde  $A$  esta representada por una matriz intervalo  $A = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , con  $A, \mathbf{L}$  y  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ; y  $\mathbf{P} = \mathbf{U} - \mathbf{L}$ , entonces el sistema es Hurwitz estable si

$$\alpha = \lambda_{\max}(H(\mathbf{C}_0)) + \lambda_{\max}(H(\mathbf{D})) < 0$$

**Teorema IV.3.** — Sea el siguiente sistema lineal discreto invariante al corrimiento  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); y(k) = Cx(k)$  donde  $A$  esta representada por una matriz intervalo  $A = [L, U]$ , con  $A, L$  y  $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ ; y  $P = U - L$ , entonces el sistema es Schur estable si

$$\beta = | \rho(H(C_0)) + \rho(H(D)) + j\rho(S(C_0)) + j\rho(H(D)) | < 1$$

**Teorema IV.4.** — Sea el siguiente sistema lineal discreto invariante al corrimiento  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k); y(k) = Cx(k)$  donde  $A$  esta representada por una matriz intervalo  $A = [L, U]$ , con  $A, L$  y  $U \in \mathbb{R}^{nxn}$ ; y  $P = U - L$ , entonces el sistema es Schur estable si

$$\beta_1 = | \rho(H(C_0)) + \rho(H(D)) + j\rho(S(C_0)) + j\rho(H(D) \circ (UNOS - I)) | < 1$$

#### EJEMPLO NUMERICO IV.5.—

En esta sección se dá un par de ejemplos de aplicación, con los cuales se observa la forma de utilizar las cotas en sistemas físicos.

Sea el circuito eléctrico mostrado en la figura 4.1. El ejemplo incluye incertidumbre paramétrica debido a la tolerancia en los elementos.

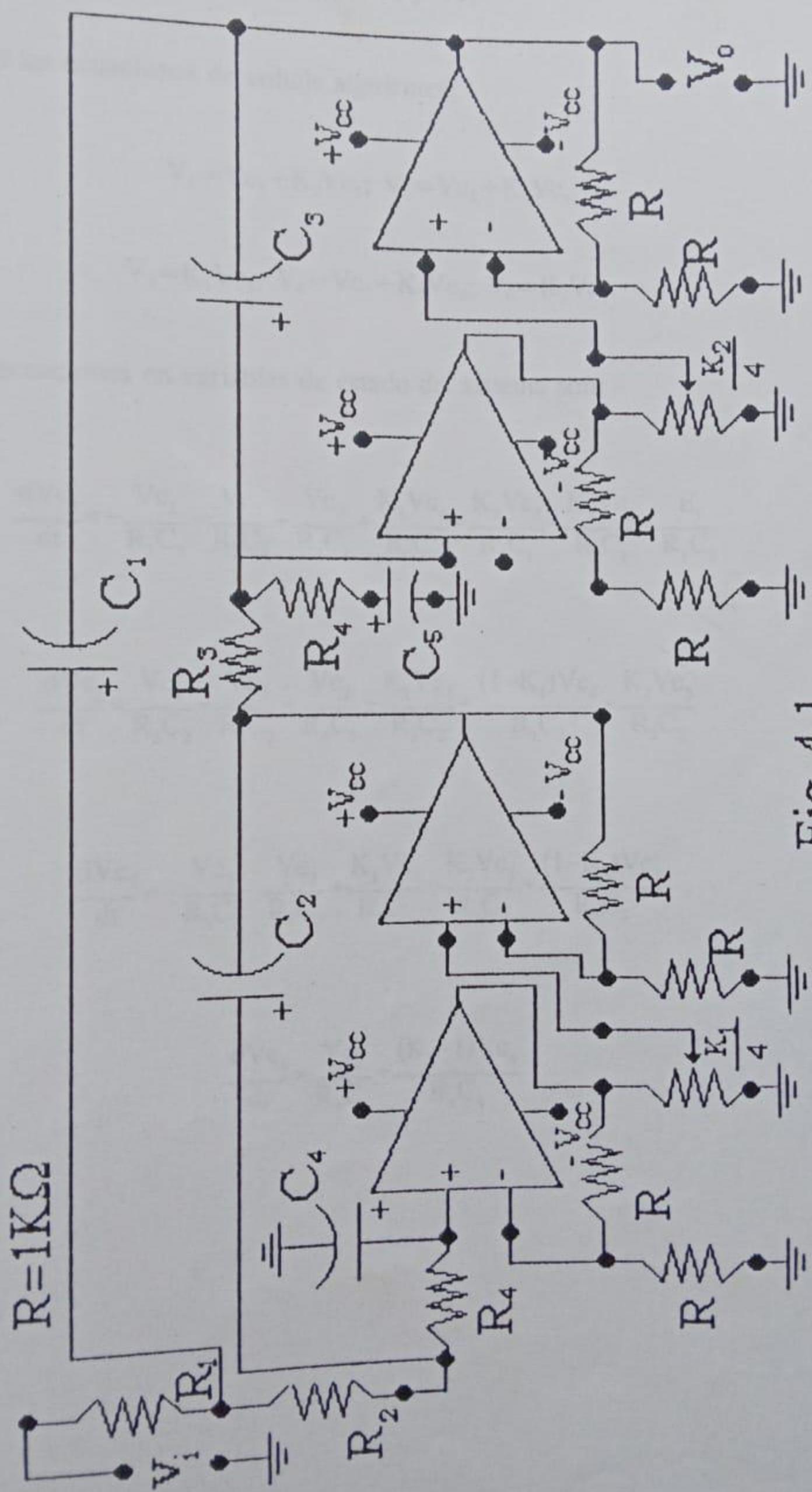


Fig. 4.1

Las variables de estado son:  $V_{C_1}$ ,  $V_{C_2}$ ,  $V_{C_3}$ ,  $V_{C_4}$  y  $V_{C_5}$ .

Usando también las ecuaciones de voltaje siguientes:

$$V_1 = V_{C_1} + K_2 V_{C_5}; \quad V_2 = V_{C_2} + K_1 V_{C_4};$$

$$V_3 = K_1 V_{C_4}; \quad V_4 = V_{C_3} + K_2 V_{C_5}; \quad V_0 = K_2 V_{C_5}.$$

Finalmente las ecuaciones en variables de estado del sistema son:

$$\frac{dV_{C_1}}{dt} = -\frac{V_{C_1}}{R_1 C_1} - \frac{V_{C_1}}{R_2 C_1} + \frac{V_{C_2}}{R_2 C_1} + \frac{K_1 V_{C_4}}{R_2 C_1} - \frac{K_2 V_{C_5}}{R_1 C_1} - \frac{K_2 V_{C_5}}{R_2 C_1} + \frac{E_i}{R_1 C_1}$$

$$\frac{dV_{C_2}}{dt} = \frac{V_{C_1}}{R_2 C_2} - \frac{V_{C_2}}{R_2 C_2} - \frac{V_{C_2}}{R_4 C_2} - \frac{K_1 V_{C_4}}{R_2 C_2} + \frac{(1-K_1)V_{C_4}}{R_4 C_2} + \frac{K_2 V_{C_5}}{R_2 C_2}$$

$$\frac{dV_{C_3}}{dt} = -\frac{V_{C_3}}{R_3 C_3} - \frac{V_{C_3}}{R_5 C_3} + \frac{K_1 V_{C_4}}{R_2 C_3} - \frac{K_2 V_{C_5}}{R_3 C_3} + \frac{(1-K_2)V_{C_3}}{R_5 C_3}$$

$$\frac{dV_{C_4}}{dt} = \frac{V_{C_2}}{R_4 C_4} + \frac{(K_1-1)V_{C_4}}{R_4 C_4}$$

$$\frac{dVc_5}{dt} = \frac{Vc_3}{R_5 C_5} + \frac{(K_2 - 1)Vc_5}{R_5 C_5}.$$

Por lo tanto el sistema en variables de estado tiene la forma:

$$\dot{Vc}(t) = \mathbf{A} Vc(t) + \mathbf{B} Ei(t); \quad V_0(t) = \mathbf{C} Vc(t).$$

Donde  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{C}$  están dadas como sigue:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} - \frac{1}{R_2 C_1}; & \frac{1}{R_2 C_1}; & 0 & \frac{K_1}{R_2 C_1} & -\frac{K_2}{R_1 C_1} - \frac{K_2}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} - \frac{1}{R_4 C_2} & 0 & \frac{1-K_1}{R_4 C_2} - \frac{K_1}{R_2 C_2} & \frac{K_2}{R_2 C_2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{R_3 C_3} - \frac{1}{R_5 C_3} & \frac{K_1}{R_3 C_3} & \frac{1-K_1}{R_2 C_3} - \frac{K_2}{R_3 C_3} \\ 0 & \frac{1}{R_4 C_4} & 0 & \frac{K_1 - 1}{R_4 C_4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{R_5 C_5} & 0 & \frac{K_2 - 1}{R_5 C_5} \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1 C_1} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{C} = (0 \ 0 \ 0 \ 0 \ K_2) \quad \text{y} \quad Vc = \begin{pmatrix} Vc_1 \\ Vc_2 \\ Vc_3 \\ Vc_4 \\ Vc_5 \end{pmatrix}.$$

La estabilidad del sistema está garantizada por la matriz  $\mathbf{A}$  y en este caso  $\mathbf{A}$  está delimitada por las tolerancias en los valores de los resistores, capacitores y fuentes dependientes.

En el sistema se realizan diferentes análisis, donde  $R_1=R_2=R_3=R_4=R_5=R_{nom}$ ,  $C_1=C_2=C_3=C_4=C_5=C_{nom}$  y  $K_1=K_2=K_{nom}$ . Cuando se incluyen tolerancias del 1% y 5% en resistores, capacitores y ganancia, entonces la matriz  $\mathbf{A}$  puede ser representada por una matriz intervalo  $\mathbf{A}=[\mathbf{L}, \mathbf{U}]$ , donde la matriz  $\mathbf{L}$  se obtiene con los mínimos valores y la matriz  $\mathbf{U}$  se obtiene con los máximos valores. Usando estas condiciones se obtiene:

$$\frac{1}{RC} \Big|_{min} = \frac{1}{R_{max} C_{max}}; \quad \frac{1}{RC} \Big|_{max} = \frac{1}{R_{min} C_{min}}$$

$$-\frac{2}{RC} \Big|_{min} = -2 \cdot \frac{1}{RC} \Big|_{max}; \quad -\frac{2}{RC} \Big|_{max} = -2 \cdot \frac{1}{RC} \Big|_{min}$$

$$\frac{K_1}{RC} \Big|_{min} = K_1 \Big|_{min} \cdot \frac{1}{RC} \Big|_{min}$$

$$\frac{K_1}{RC} \Big|_{max} = K_1 \Big|_{max} \cdot \frac{1}{RC} \Big|_{max}$$

$$\frac{-2K_2}{RC} \Big|_{min} = -2K_2 \Big|_{max} \cdot \frac{1}{RC} \Big|_{max}$$

$$\frac{-2K_2}{RC} \mid_{max} = -2K_2 \mid_{min} \cdot \frac{1}{RC} \mid_{min}$$

$$\frac{1-2K_1}{RC} \mid_{min} = (1-2K_1 \mid_{max}) \cdot \frac{1}{RC} \mid_{min}$$

$$\frac{1-2K_1}{RC} \mid_{max} = 1-2K_1 \mid_{min} \cdot \frac{1}{RC} \mid_{max}$$

$$\frac{K_1-1}{RC} \mid_{min} = K_1 \mid_{min} - 1 \cdot \frac{1}{RC} \mid_{max}$$

$$\frac{K_1-1}{RC} \mid_{max} = K_1 \mid_{max} - 1 \cdot \frac{1}{RC} \mid_{min}$$

1.- Para el primer caso los capacitores y los resistores tienen el 1% de tolerancia, esto es  $R_{min}=0.99R_{nom}$ ,  $R_{max}=1.01R_{nom}$ ,  $C_{min}=0.99C_{nom}$ ,  $C_{max}=1.01C_{nom}$ . En este caso las ganancias son consideradas invariantes  $K_1=K_2=0.1$ ; por lo tanto la matriz intervalo  $A=[L, U]$  está dada por:

$$L = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \cdot \Gamma; \text{ donde}$$

$$\Gamma = \begin{pmatrix} -2.0406 & 0.9803 & 0 & 0.0980 & -0.2041 \\ 0.9803 & -2.0406 & 0 & 0.7842 & 0.0980 \\ 0 & 0 & -2.0406 & 0.0980 & 0.7842 \\ 0 & 0.9803 & 0 & -0.9183 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9803 & 0 & -0.9183 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \cdot \Xi; \text{ donde}$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} -1.9606 & 1.0203 & 0 & 0.1020 & -0.1961 \\ 1.0203 & -1.9606 & 0 & 0.8162 & 0.1020 \\ 0 & 0 & -1.9606 & 0.1020 & 0.8162 \\ 0 & 1.0203 & 0 & -0.8823 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0203 & 0 & -0.8823 \end{pmatrix}.$$

Evaluando la cota  $\alpha = -\frac{0.1244}{R_{nom} C_{nom}}$  y  $B_1 = -\frac{0.1381}{R_{nom} C_{nom}}$  la estabilidad robusta del sistema está

garantizada porque tanto  $R_{nom} > 0$  como  $C_{nom} > 0$  para elementos físicos.

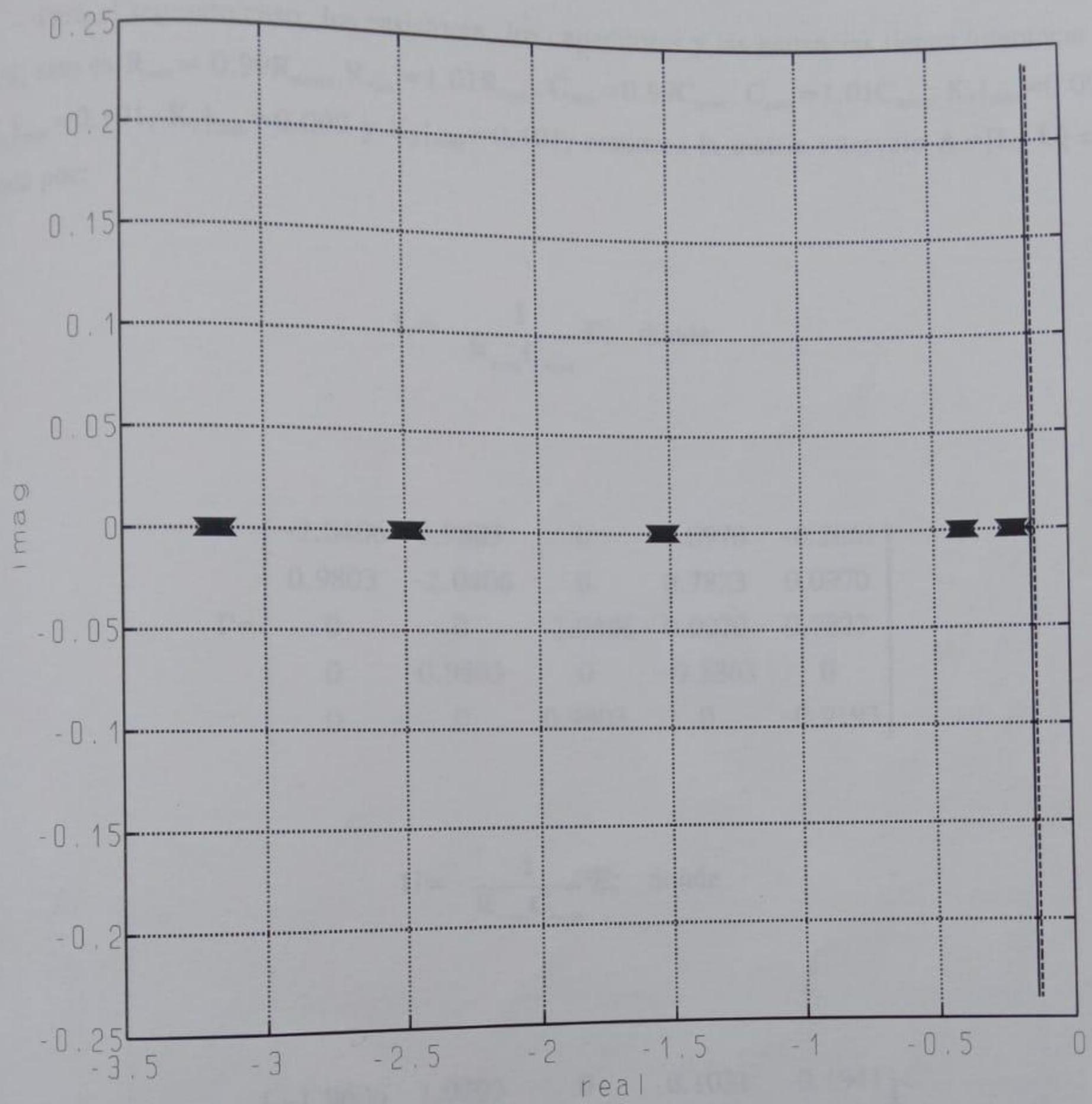


Figure 4.2

La figura 4.2 muestra: (x) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y que pertenecen a la matriz intervalo, la línea vertical discontinua (—) muestra la cota  $\alpha_1$  y la línea vertical continua (—) muestra la cota  $\alpha$ .

2.- Para el segundo caso, los resistores, los capacitores y las ganancias tienen tolerancia de 1%, esto es  $R_{min} = 0.99R_{nom}$ ,  $R_{max} = 1.01R_{nom}$ ,  $C_{min} = 0.99C_{nom}$ ,  $C_{max} = 1.01C_{nom}$ ;  $K_1|_{min} = 0.099$ ,  $K_1|_{max} = 0.101$ ,  $K_2|_{min} = 0.099$  y  $K_2|_{max} = 0.101$ ; entonces la matriz intervalo  $\mathbf{A} = [\mathbf{L}, \mathbf{U}]$  está dada por:

$$\mathbf{L} = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \cdot \Gamma; \text{ donde}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2.0406 & 0.9803 & 0 & 0.0970 & -0.2061 \\ 0.9803 & -2.0406 & 0 & 0.7823 & 0.0970 \\ 0 & 0 & -2.0406 & 0.0970 & 0.7823 \\ 0 & 0.9803 & 0 & -0.8863 & 0 \\ 0 & 0 & 0.9803 & 0 & -0.9193 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \cdot \Xi; \text{ donde}$$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -1.9606 & 1.0203 & 0 & 0.1031 & -0.1941 \\ 1.0203 & -1.9606 & 0 & 0.8183 & 0.1031 \\ 0 & 0 & -1.9606 & 0.1031 & 0.8183 \\ 0 & 1.0203 & 0 & -0.8813 & 0 \\ 0 & 0 & 1.0203 & 0 & -0.8813 \end{bmatrix}.$$

Evaluando las cotas  $\alpha = -\frac{0.1243}{R_{nom}C_{nom}}$  y  $\alpha_1 = -\frac{0.1371}{R_{nom}C_{nom}}$ , la estabilidad robusta de la matriz intervalo se garantiza porque tanto  $R_{nom} > 0$  como  $C_{nom} > 0$  para elementos físicos.

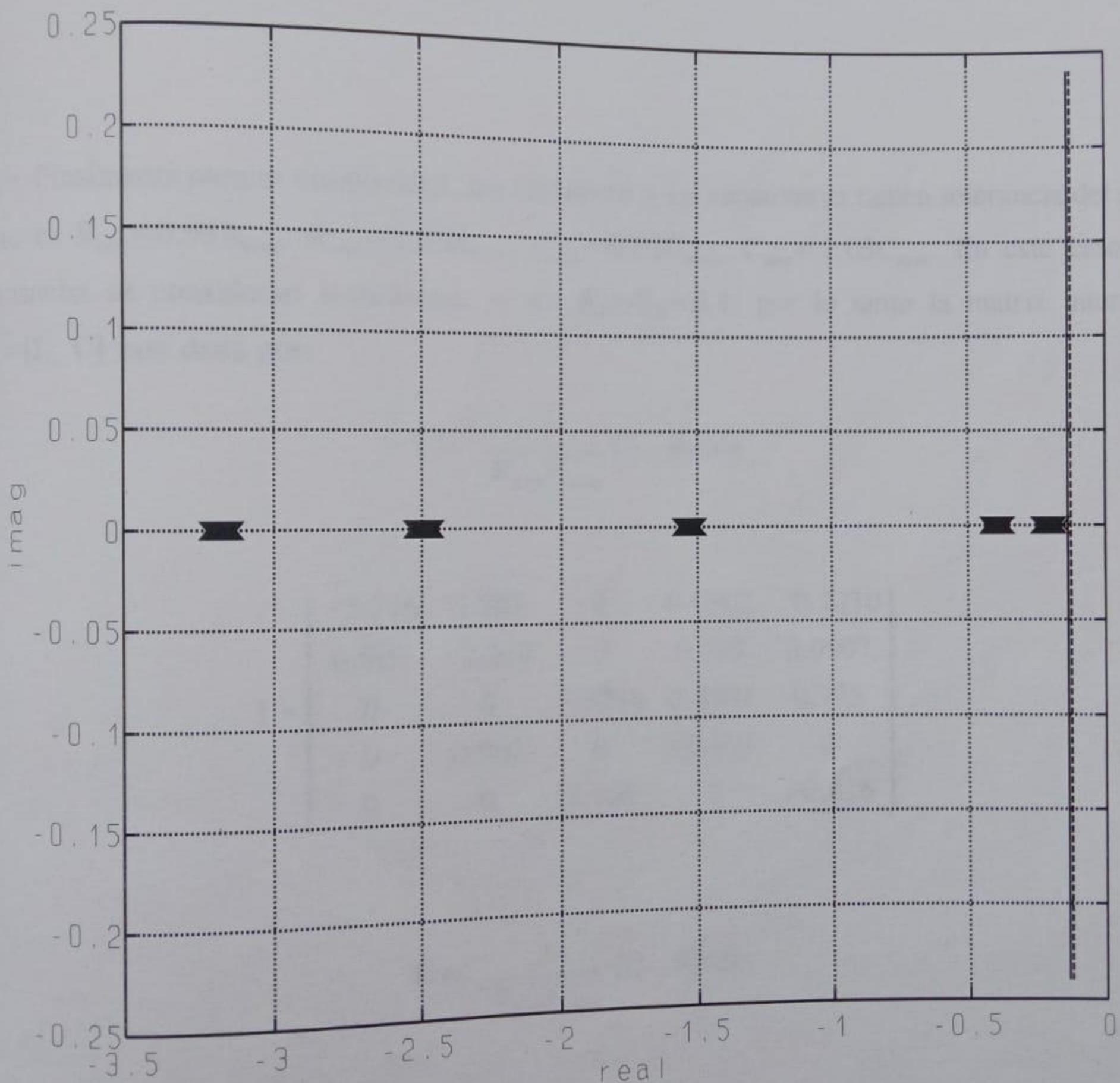


Figura 4.3

La figura 4.3 muestra: (x) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y que pertenecen a la matriz intervalo, la línea vertical discontinua (- -) muestra la cota  $\alpha_1$  y la línea vertical continua (-) muestra la cota  $\alpha$ .

3.- Finalmente para el último caso, los resistores y los capacitores tienen tolerancia del 5%, esto es  $R_{min}=0.95R_{nom}$ ,  $R_{max}=1.05R_{nom}$ ,  $C_{min}=0.95C_{nom}$ ,  $C_{max}=1.05C_{nom}$ . En este caso las ganancias se consideran invariantes, o sea  $K_1=K_2=0.1$ ; por lo tanto la matriz intervalo  $A=[L, U]$  está dada por:

$$L = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \cdot \Gamma; \text{ donde}$$

$$\Gamma = \begin{bmatrix} -2.216 & 0.907 & 0 & 0.0907 & -0.2210 \\ 0.907 & -2.216 & 0 & 0.725 & 0.0907 \\ 0 & 0 & -2.216 & 0.0907 & 0.725 \\ 0 & 0.907 & 0 & -0.997 & 0 \\ 0 & 0 & 1.108 & 0 & -0.816 \end{bmatrix}$$

$$U = \frac{1}{R_{nom} C_{nom}} \cdot \Xi; \text{ donde}$$

$$\Xi = \begin{pmatrix} -1.814 & 1.108 & 0 & 0.111 & -0.181 \\ 1.108 & -1.814 & 0 & 0.886 & 0.111 \\ 0 & 0 & -1.814 & 0.111 & 0.886 \\ 0 & 1.108 & 0 & -0.816 & 0 \\ 0 & 0 & 1.108 & 0 & -0.816 \end{pmatrix}.$$

Evaluando la cota  $\alpha = \frac{0.1954}{R_{nom}C_{nom}}$  y  $\alpha_1 = \frac{0.1195}{R_{nom}C_{nom}}$  la estabilidad robusta del sistema

representado por la matriz intervalo no se garantiza porque  $\alpha > 0$  y  $\alpha_1 > 0$ . Puede encontrarse

que la matriz  $\mathbf{U}$  no es estable porque  $\lambda_{\max}(\mathbf{U}) = \frac{0.0548}{R_{nom}C_{nom}}$ .

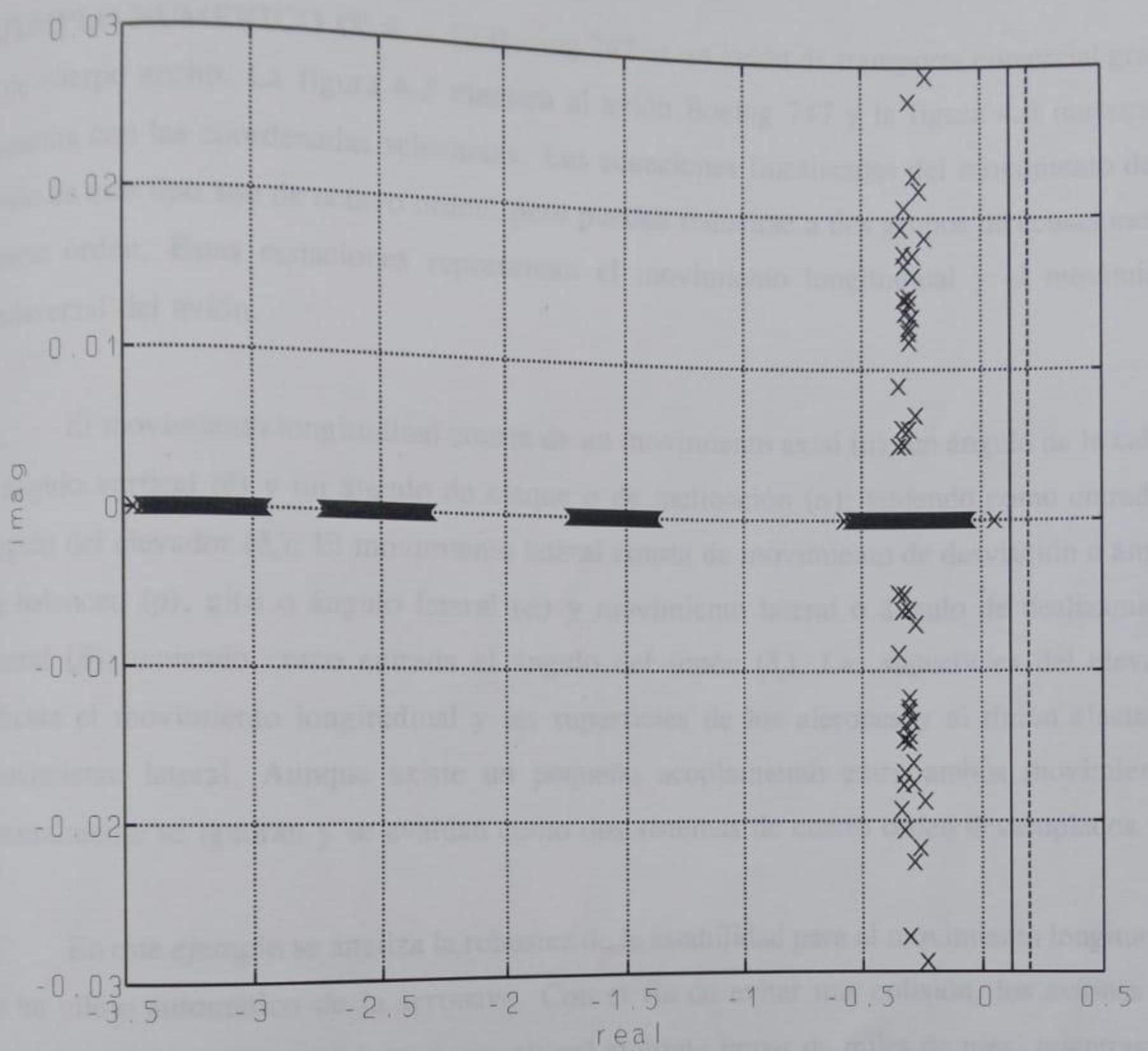


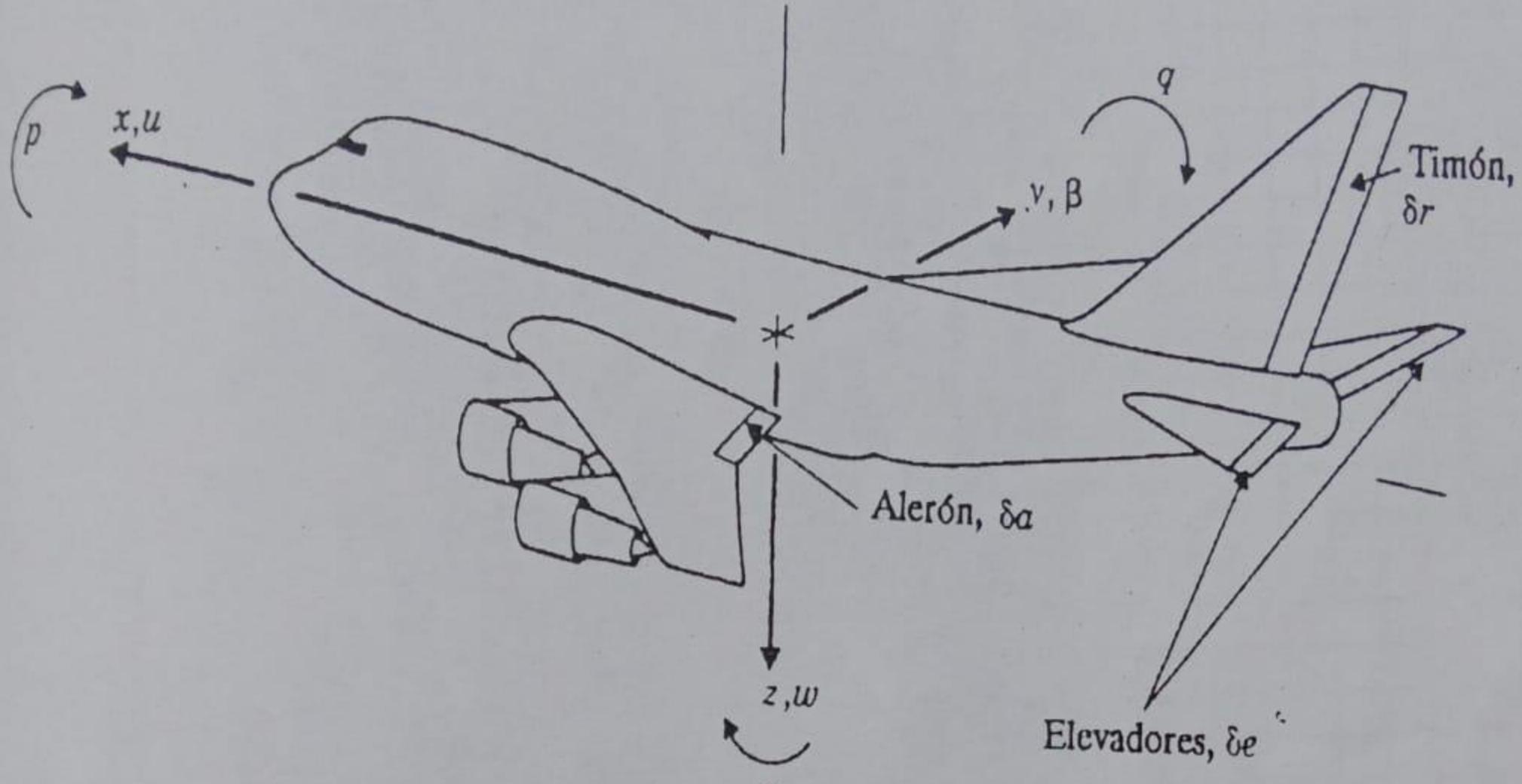
Figure 4.4

La figura 4.4 muestra: (x) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y que pertenecen a la matriz intervalo, la línea vertical discontinua (—) muestra la cota  $\alpha_1$  y la línea vertical continua (—) muestra la cota  $\alpha$ .

**EJEMPLO NUMERICO IV.6.**— El Boeing 747 es un avión de transporte comercial grande y de cuerpo ancho. La figura 4.5 muestra al avión Boeing 747 y la figura 4.6 muestra un esquema con las coordenadas relevantes. Las ecuaciones linealizadas del movimiento de un avión de este tipo son de octavo orden, pero pueden reducirse a dos grupos de ecuaciones de cuarto orden. Estas ecuaciones representan el movimiento longitudinal y el movimiento transversal del avión.

El movimiento longitudinal consta de un movimiento axial ( $u$ ), un ángulo de la cabeza o ángulo vertical ( $\theta$ ) y un ángulo de ataque o de inclinación ( $\alpha$ ); teniendo como entrada el ángulo del elevador ( $\delta_e$ ). El movimiento lateral consta de movimiento de desviación o ángulo de balanceo ( $p$ ), giro o ángulo lateral ( $\phi$ ) y movimiento lateral o ángulo de deslizamiento lateral ( $\beta$ ); teniendo como entrada el ángulo del timón ( $\delta_r$ ). Las superficies del elevador afectan el movimiento longitudinal y las superficies de los alerones y el timón afectan el movimiento lateral. Aunque existe un pequeño acoplamiento entre ambos movimientos, generalmente se ignoran y se evalúan como dos sistemas de cuarto orden desacoplados.

En este ejemplo se analiza la robustez de la estabilidad para el movimiento longitudinal de un piloto automático de la aeronave. Con el fin de evitar una colisión, los aviones con rumbo este (E) tienen que viajar a una altitud múltiple impar de miles de pies, mientras que los aviones con rumbo oeste (O) deben ir a una altitud múltiple par de miles de pies. Debido a esto la aeronave debe mantener la altitud dentro de algunos cientos de metros y si el sistema es un piloto automático, entonces debe realizar seguimiento dentro del parámetro marcado.



$x, y, z$ =coordenadas de posición

$u, \beta, w$ =coordenadas de velocidad

$p$ =velocidad de giro

$q$ =velocidad de inclinación

$r$ =velocidad de desviación

Figura 4.5

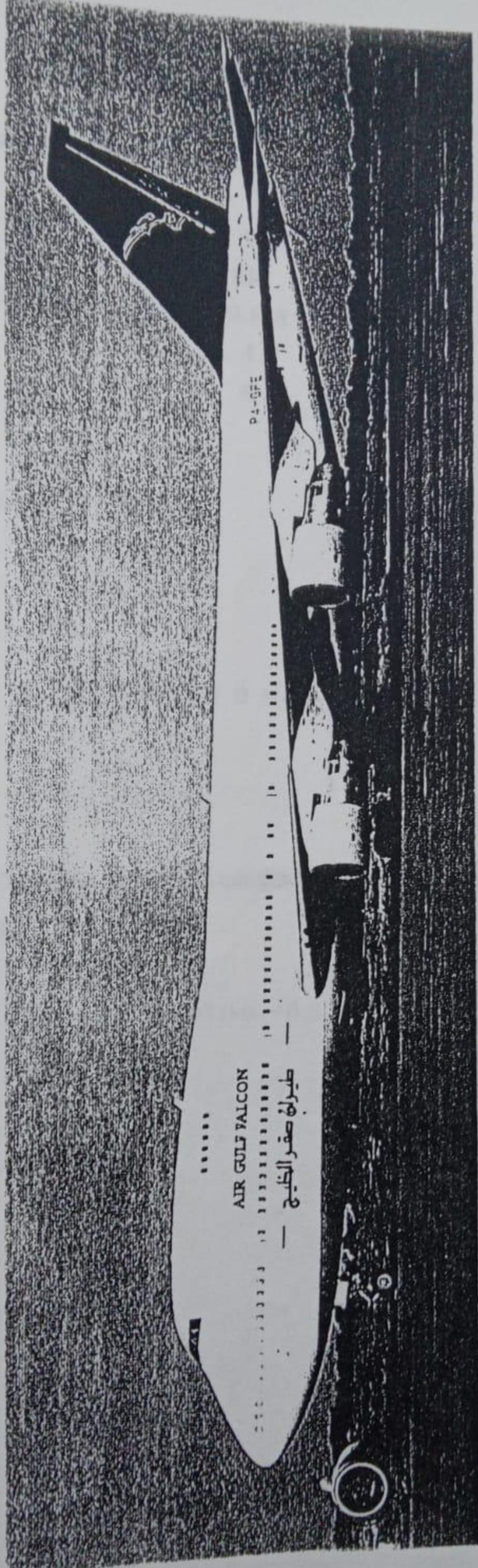


Figura 4.6

El sistema está representado por las ecuaciones siguientes:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 820 & 0 & 0 \\ -0.000222 & -0.00153 & -0.668 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -32.7 \\ -2.08 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e$$

y para mantener la altitud

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix}.$$

El sistema anterior es inestable de manera inherente, de tal forma que requiere un controlador que lo estabilice, siendo

$$\mathbf{K} = [0 \ 0 \ 0 \ -0.8 \ -6]$$

el vector de retroalimentación y generando el siguiente sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.0941 & -0.624 & 761 & -196.6 & 0 \\ -0.000222 & -0.00153 & -4.41 & -12.48 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -32.7 \\ -2.08 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e$$

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix}.$$

Finalmente se realiza una realimentación óptima con

$$\mathbf{K} = [-0.0011 \ 0.0016 \ -0.0843 \ -1.6011 \ -0.001]$$

quedando el sistema:

$$\begin{bmatrix} \dot{u} \\ \dot{w} \\ \dot{q} \\ \dot{\theta} \\ \dot{h} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.00643 & 0.0263 & 0 & -32.2 & 0 \\ -0.1305 & -0.5708 & 758.2437 & -248.555 & -0.0327 \\ -0.00025 & 0.0019 & -4.5853 & -15.8102 & -0.0021 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 830 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -32.7 \\ -2.08 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \delta_e$$

PROPIEDAD DEL INSTITUTO  
TECNOLOGICO DE MORELIA

61433

$$h = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} u \\ w \\ q \\ \theta \\ h \end{bmatrix}$$

con polos en:

$$\{-2.25+2.98j, -2.25-2.98j, -0.0045, -0.5130, -0.145\}.$$

Como el sistema anterior tiene parte Hermítica inestable, debe realizarse una transformación de similitud, de tal forma que el espectro de la parte Hermética se colapse a la parte real de los valores característicos de la matriz.

Existe una matriz de transformación de similitud  $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}$  que diagonaliza a la matriz  $\mathbf{A}_0$ , pero la matriz diagonalizada  $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}\mathbf{V} \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Sin embargo se va a usar una matriz de transformación de similitud  $\mathbf{V}$  que diagonaliza a bloques la matriz  $\mathbf{A}_0$ , esto es  $\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1}$  diagonaliza a  $\mathbf{A}_0$ :

$$\mathbf{V}\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{V}\mathbf{V} = \text{diag}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5)$$

de tal forma que:

$f_1, f_2, f_3, f_4$  y  $f_5$  son:

$$f_1 = -2.25 + 2.98j$$

$$f_2 = -2.25 - 2.98j$$

$$f_3 = -0.0045$$

$$f_4 = -0.5130$$

$$f_5 = -0.145$$

por lo tanto

$$\text{diag}(f_1, f_2, f_3, f_4, f_5) = \begin{bmatrix} -2.25 + 2.98j & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.25 - 2.98j & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.145 \end{bmatrix} \quad 66$$

y la matriz que realiza dicha transformación es:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} 0 & -0.001 + 0.0033j & -.1 - 0.033j & 0.0252 & -0.0673 \\ 0 & -0.2387 + 0.9696j & 0.2387 - 0.9696j & -0.4297 & 0.0104 \\ 0 & -0.0042 - 0.0009j & -0.0042 + 0.0009j & 0 & 0 \\ 0 & 0.0005 + 0.001j & 0.0005 - 0.001j & 0.0001 & 0 \\ 0 & -0.0507 - 0.0178j & -0.0507 + 0.0178j & -0.9026 & 0.9977 \end{pmatrix}$$

y  $\mathbf{V}$  diagonaliza a bloques a  $\mathbf{A}_0$ :

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{F1}, f2, f3, f4)$$

de tal forma que:

$\mathbf{F1}$  es una matriz de orden  $2 \times 2$  con disposición anti-Hermítica, esto es:

$$\mathbf{F1} = \begin{pmatrix} -2.25 & 2.98 \\ -2.98 & -2.25 \end{pmatrix}$$

$$f2 = -0.00453$$

$$f3 = -0.5130$$

$$f4 = -0.145$$

por lo tanto

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A}_0 \mathbf{V} = \text{diag}(\mathbf{f1}, \mathbf{f2}, \mathbf{f3}, \mathbf{f4}) =$$

$$\begin{bmatrix} -2.25 & 2.98 & 0 & 0 & 0 \\ -2.98 & -2.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.145 \end{bmatrix}$$

y la matriz que realiza dicha transformación es:

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0.0028 & 0.0017 & -0.9879 & -0.0260 & 0.0369 \\ 0.9672 & 0.2482 & 0.1496 & 0.4042 & -0.0405 \\ -0.0027 & 0.0033 & 0 & 0 & 0 \\ 0.0011 & 0.0001 & 0.0002 & -0.0001 & 0.0001 \\ -0.0396 & 0.3630 & -0.0405 & 0.9143 & -0.9985 \end{bmatrix}.$$

En este ejemplo se van a evaluar dos casos; en el primero caso se usa una matriz de incertidumbre real tomadas de [12], [13] y se analiza la robustez del sistema; en el segundo caso se usa la misma matriz de incertidumbre pero se evalúa un índice de robustez que indica hasta cuando se pierde la estabilidad en el sistema si se amplifica la matriz de incertidumbre.

caso 1: Análisis de robustez del piloto automático para un Boeing 747.

La matriz centralizada del sistema  $\mathbf{A}_0$  y la matriz de perturbación están dadas por:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} -2.25 & 2.98 & 0 & 0 & 0 \\ -2.98 & -2.25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0.0045 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0.5130 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -0.145 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0.0057 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0003 & 0 & 0.00001 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Usando la matriz  $\mathbf{V}$  que diagonaliza a bloques a  $\mathbf{A}_0$  y aplicandolo a la matriz intervalo:

$$\mathbf{V}^{-1} ([\mathbf{L}, \mathbf{U}]) \mathbf{V}$$

Se evalúa la nueva matriz intervalo, usando:

$$\mathbf{L} = \min(\mathbf{V}^{-1} ([\mathbf{L}, \mathbf{U}]) \mathbf{V}) \text{ y } \mathbf{U} = \max(\mathbf{V}^{-1} ([\mathbf{L}, \mathbf{U}]) \mathbf{V}).$$

Por lo tanto el nuevo sistema intervalo es:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} -2.2523 & 2.9886 & 0 & -0.0032 & -0.0032 \\ -2.2891 & -2.2505 & 0.0002 & 0.0016 & -0.0066 \\ 0 & 0 & -0.0044 & 0.0001 & 0 \\ -0.0001 & 0.0031 & 0.0003 & -0.1383 & -0.02199 \\ -0.0011 & 0.0032 & 0 & 0.0257 & -0.5303 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} -2.2523 & 2.9886 & 0 & 0.0077 & -0.0032 \\ -2.2891 & -2.2505 & 0.0002 & 0.0016 & -0.0066 \\ 0 & 0 & 0.0002 & 0.0001 & 0 \\ -0.0001 & 0.0031 & 0.0006 & -0.1383 & -0.02201 \\ -0.0011 & 0.0032 & 0 & 0.0257 & -0.5303 \end{bmatrix}.$$

Evaluando la cota  $\alpha = \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{C}_0)) + \lambda_{\max}(\mathbf{H}(\mathbf{D})) = -0.0017$ , se obtiene la estabilidad robusta del sistema representado por la matriz intervalo está garantizada porque  $\alpha < 0$ .

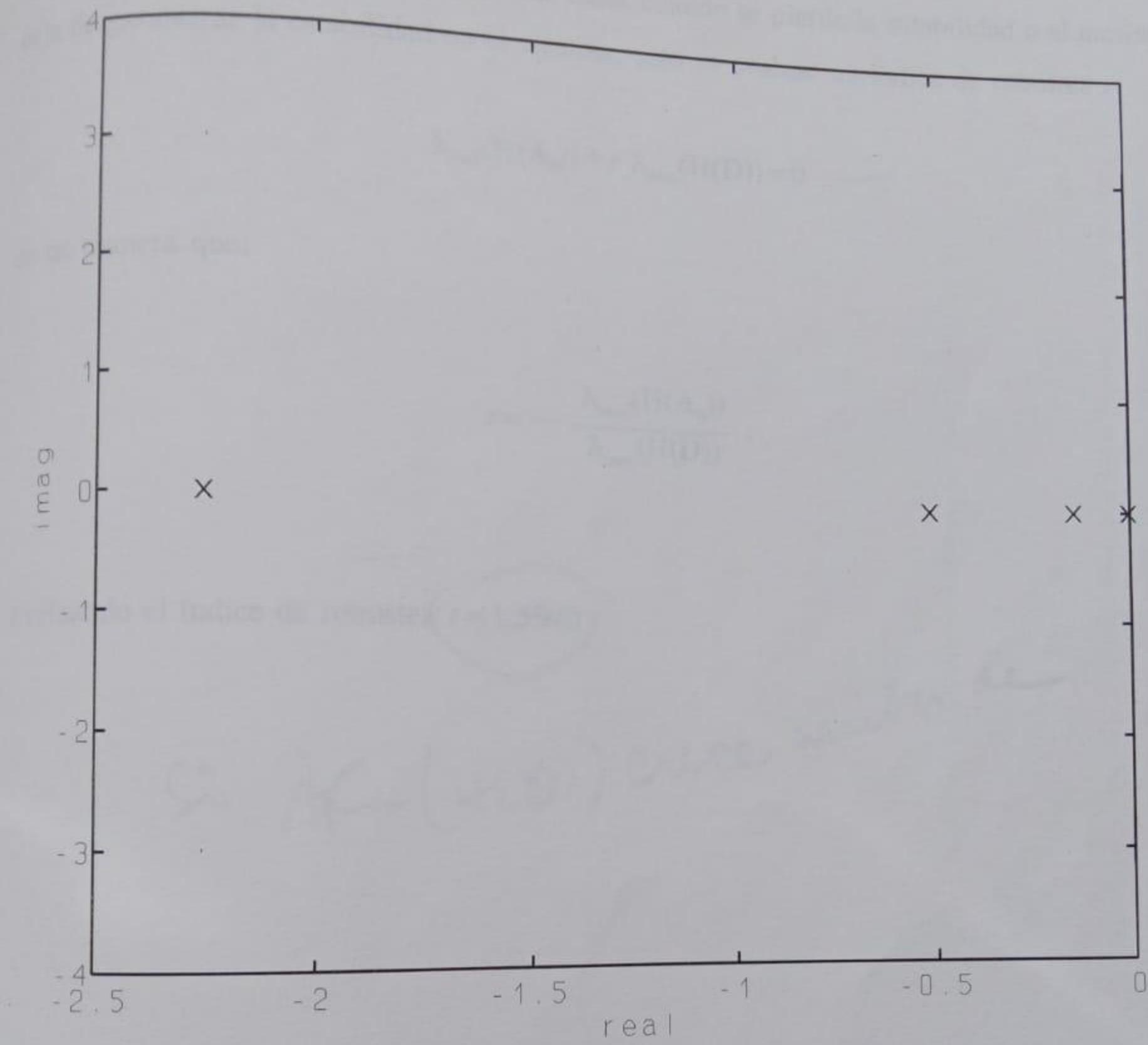


Figura 4.7

La figura 4.7 muestra: (x) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y que pertenecen a la matriz intervalo, la línea vertical muestra la cota  $\alpha$  (En la figura no se aprecia la línea de la cota porque está muy cerca del eje vertical).

Caso 2: En este caso se requiere analizar hasta cuando se pierde la estabilidad o al menos se deja de garantizar la estabilidad en el sistema, esto es evaluar un índice de robustez  $r$ :

$$\lambda_{\max}(H(A_0)) + r \lambda_{\max}(H(D)) = 0 \quad \text{---}$$

de tal manera que:

$$r = - \frac{\lambda_{\max}(H(A_0))}{\lambda_{\max}(H(D))}.$$

Evaluando el índice de robustez  $r = 1.5940$

Sí  $\lambda_{\max}(H(D))$  crece más allá de

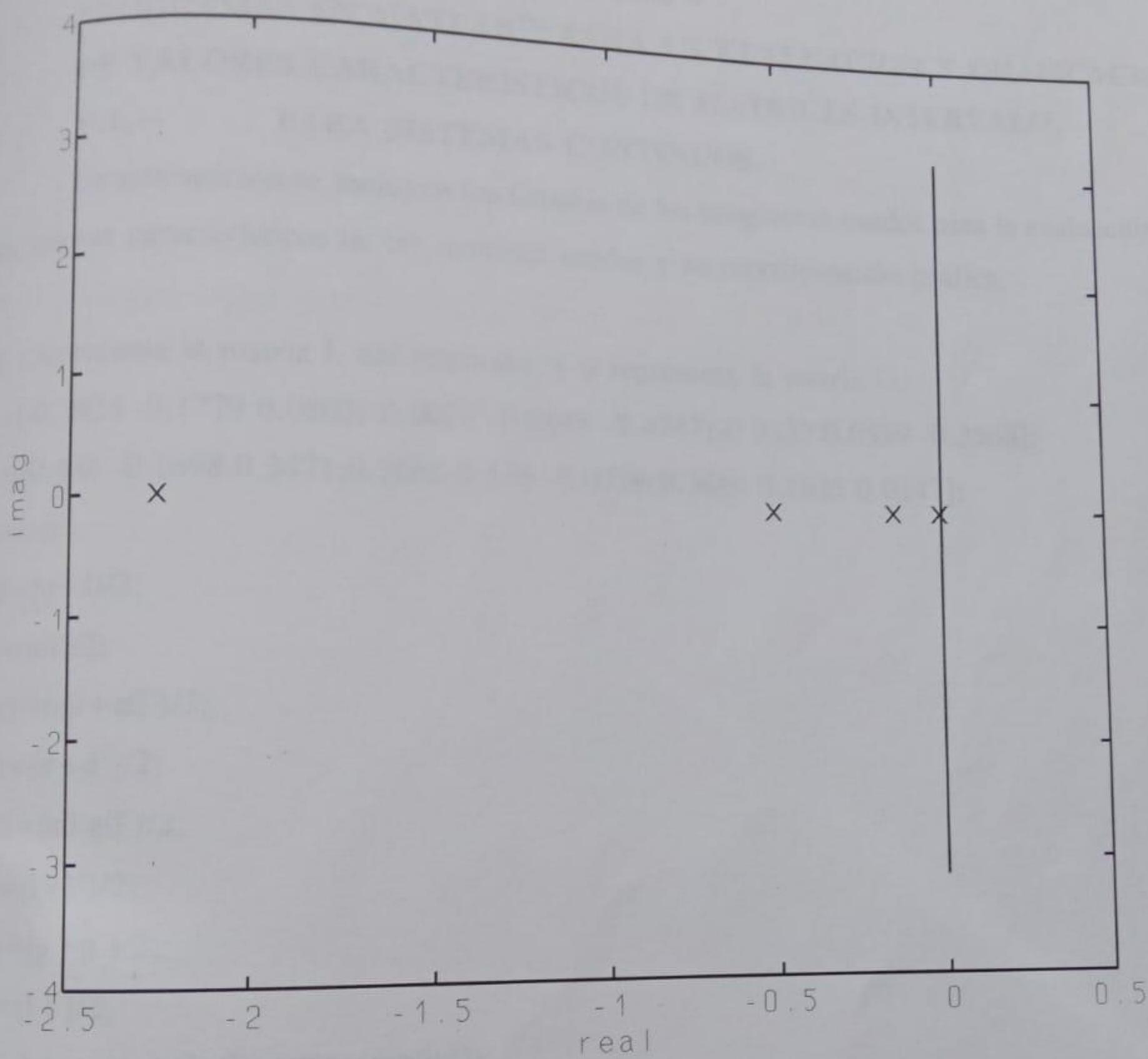


Figura 4.8

La figura 4.8 muestra: (x) los valores característicos de 1000 matrices aleatorias y que pertenecen a la matriz intervalo. Cabe mencionar que usando diferentes cotas se tienen diferentes índices de robustez y se debe a que las cotas no cumplen condiciones necesarias y suficientes de estabilidad robusta para sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo y que se representan por una matriz intervalo.

**CAPITULO V**  
**PROGRAMAS EN MATLAB™ PARA LA EVALUACION Y GRAFICACION**  
**DE VALORES CARACTERISTICOS DE MATRICES INTERVALO.**

**V.1.- PARA SISTEMAS CONTINUOS.**

En esta sección se incluyen los listados de los programas usados para la evaluación de los valores característicos de las matrices usadas y su representación gráfica.

% l representa la matriz L del intervalo, y u representa la matriz U.

$l = [-0.3926 \ -0.1779 \ 0.0803; -0.0027 \ -0.0648 \ -0.4747; -0.0337 \ 0.0599 \ -0.3568];$

$u = [0.486 \ -0.1698 \ 0.3471; 0.2668 \ 0.535 \ -0.0726; 0.3684 \ 0.1625 \ 0.0147];$

$p = u - l;$

$a0 = (u + l) / 2;$

$d = (u - l) / 2;$

$ha0 = (a0 + a0') / 2;$

$hd = (d + d') / 2;$

$sa0 = (a0 - a0') / 2;$

$hl = (l + l') / 2;$

$hp = (p + p') / 2;$

$sl = (l - l') / 2;$

$cota1 = \max(\text{eig}(ha0)) + \max(\text{eig}(hd))$

$\text{plot}(cota1)$

$\text{hold on}$

$\%$

$\%$  en la siguiente parte se grafican 1000 matrices aleatorias y que pertenecen

$\%$  a la matriz intervalo

$\text{for } k = 1:1000,$

$\text{rr} = \text{rand}(3);$

```

mm=l+rr.*p;
plot(real(eig(mm)), imag(eig(mm)),'.')
end
%
% en la siguiente parte se grafican los valores caracteristicos de todos los
% vértices que corresponden a la matriz intervalo y los valores caracteristicos
% de las partes Hermíticas de los vértices.

for k=0:1:511,
    b=k/2;
    b1=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b2=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b3=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b4=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b5=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b6=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b7=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b8=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b9=2*(b-fix(b));

```

```
b=[b1 b2 b3;b4 b5 b6;b7 b8 b9];
mat=l+b.*p;
plot(real(eig(mat)),imag(eig(mat)),'.')
hmat=(mat+mat')/2;
plot(real(eig(hmat)),imag(eig(hmat)),'x')
end
xlabel('real')
ylabel('imag')
end
```

```

% l representa la matriz L del intervalo, y u representa la matriz U.
l=[-0.3926 -0.1779 0.0803;-0.0027 -0.0648 -0.4747;-0.0337 0.0599 -0.3568];
u=[0.486 -0.1698 0.3471;0.2668 0.535 -0.0726;0.3684 0.1625 0.0147];
p=u-l;
a0=(u+l)/2;
d=(u-l)/2;
ha0=(a0+a0')/2;
hd=(d+d')/2;
sa0=(a0-a0')/2;
hl=(l+l')/2;
hp=(p+p')/2;
sl=(l-l')/2;
cota=abs(max(eig(ha0))+max(eig(hd))+j*(max(abs(eig(i*sa0)))))+j*(max(abs(eig(hd)))))

% en la siguiente parte se grafican 1000 matrices aleatorias y que pertenecen
% a la matriz intervalo
hold on
for k=1:1000,
    rr=rand(3);
    mm=l+rr.*p;
    plot(real(eig(mm)), imag(eig(mm)),'.')
end
conta=1;
%
% en la siguiente parte se grafica el circulo unitario

```

```

for k=-1:0.01:1,
    gra1(conta)=sqrt(1-k^2);
    gra2(conta)=-gra1(conta);
    eje(conta)=k;
    conta=conta+1;
end
plot(eje,gra1)
v=[-10 10 -10 10];
axis('square');
plot(coto)
hold on
plot(cota)
clear conta
conta=1;
%
% en la siguiente parte se grafican el circulo con medida igual a la cota
for k=-cota:0.01:cota,
    gra3(conta)=sqrt(cota^2-k^2);
    gra4(conta)=-gra3(conta);
    eje5(conta)=k;
    conta=conta+1;
end
plot(eje5,gra3,:')
plot(eje5,gra4,:')
%
% en la siguiente parte se grafican todos los vértices del hipercubo generado

```

```

% por la matriz intervalo
for k=0:1:511,
    b=k/2;
    b1=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b2=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b3=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b4=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b5=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b6=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b7=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b8=2*(b-fix(b));
    b=fix(b)/2;
    b9=2*(b-fix(b));
    b=[b1 b2 b3;b4 b5 b6;b7 b8 b9];
    mat=l+b.*p;
    plot(real(eig(mat)),imag(eig(mat)),'.')
    hmat=(mat+mat')/2;
    plot(real(eig(hmat)),imag(eig(hmat)), 'x')
end

```

```
hold off  
 xlabel('real')  
 ylabel('imag')  
 axis('square')  
 end
```

b

## CONCLUSIONES

En el presente trabajo se presenta la demostración de 3 cotas para analizar la estabilidad robusta de sistemas lineales invariantes en el tiempo y representadas por matrices intervalo donde además se incluyen 2 ejemplos numéricos por cada una de las cotas.

También se presenta la demostración de 3 cotas para analizar estabilidad robusta para sistemas discretos invariantes al corrimiento y representadas por matrices intervalo así como también 2 ejemplos con valores numéricos para cada una de las cotas. Cabe mencionar que las cotas aquí presentadas son de rápida y fácil evaluación. Las incertidumbres usadas en esta tesis son paramétricas, quedando excluidas las incertidumbres dinámicas.

Por último se presenta la aplicación de una cota a 2 sistemas físicos donde se evalúa su robustez, mediante la generación de las matrices intervalo. El primer ejemplo se trata de un circuito electrónico donde después de generar la matriz que incluye incertidumbres de tipo paramétrico se analiza su robustez. Este ejemplo incluye tres casos con diferentes grados de tolerancia en sus elementos.

En el segundo se analiza la robustez de un piloto automático para un Boeing 747 partiendo de la matriz que representa al sistema para la dinámica longitudinal.

Los resultados obtenidos en base a los objetivos iniciales de esta tesis fueron cumplidos cabalmente puesto que se parte de la incertidumbre para poder generar un método de evaluación de estabilidad que sea rápido y sencillo para los sistemas lineales continuos invariantes en el tiempo o sistemas lineales discretos invariantes al corrimiento y que sean representadas por una matriz intervalo, así como la demostración de cada una de las cotas propuestas.

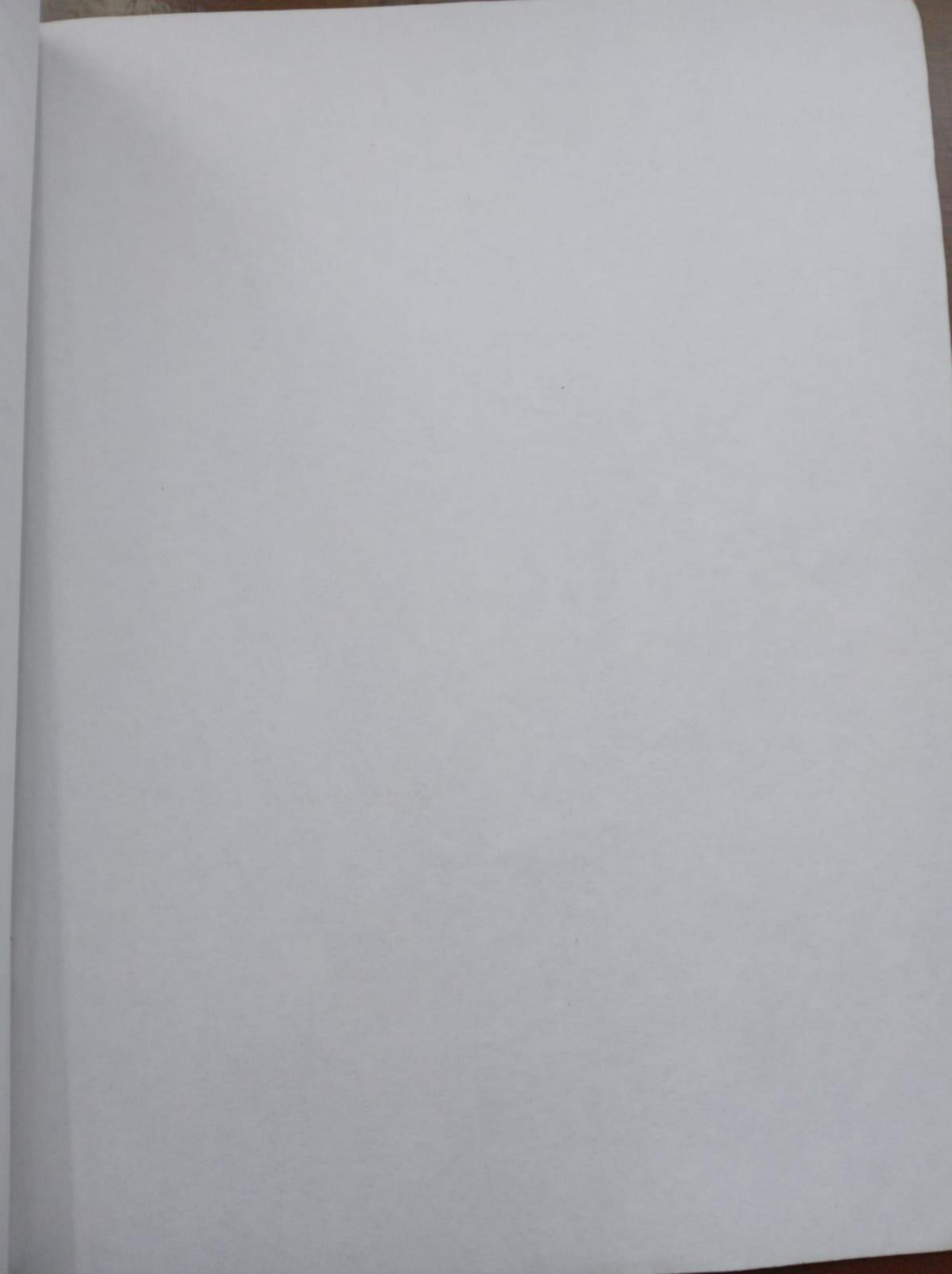
Los resultados obtenidos para las cotas incluídas en esta tesis fueron presentados en diferentes congresos arbitrados y éstos son COC'97 (Conference on Oscillations and Chaos) en San Petesburgo, Rusia, MWSCAS'97 (Midwest Symposium on Circuit and Systems) en Sacramento, U.S.A. y ECCTD'99 (European Conference on Circuit Theory and Design) en Stresa, Italia; al igual que una de las aplicaciones que aquí se incluyen fue presentada en el congreso ICIAM'99 (International Conference on Industrial and Application Mathematics) en Edimburgo, Escocia.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Topics in Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1991).
- [2] M. Fu and B. R. Barmish. "A Generalization of Kharitonov's interval polynomial framework to handle linearly dependent uncertainty". *Technical Report Electrical and Computer Engineering*, University of Wisconsin – Madison, (1987).
- [3] M. Mansour. "Robust Stability of Interval Matrices". *Proceeding of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol 1, pp. 46–51. 1989.
- [4] Y. T. Juang, C.S. Shao. "Stability analysis of Dinamic Interval Systems". *International Journal of Control*, Vol 49, No. 4, pp. 1401. 1989.
- [5] James A. Heinen. "Sufficient conditions for stability of Interval Matrices". *International Journal of Control*, Vol 39, No. 6, pp. 1323–1328. 1984.
- [6] Q-G. Wang. "Necessary and Sufficient conditions for Stability of a Matrix Polytope with Normal Vertex Matrices". *Automatica*, 27, pp. 887–888. 1991.
- [7] Foo Y. K. and Soh Y. C. "Stability Analisis of a Family of Matrices". *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 35, No. 11, pp. 1257–1259. 1990.
- [8] J. Rohn. "Stability of interval matrices: The real eigenvalue case". *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 37, No. 10, pp. 1604–1605. 1992.

- [9] P. Lancaster and M. Tismenetsky. *The Theory of Matrices with Applications*. 2nd Ed. Academic Press, San Diego, USA (1985).
- [10] R. A. Horn and C. R. Johnson. *Matrix Analysis*. Cambridge University Press, New York (1985).
- [11] A. Berman and R. Plemmons. *Nonnegative Matrices in the Mathematical Sciences*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia (1994).
- [12] Wicks M. A. "Computing Robustness on System Properties with Respect to Structured Real Matrix Perturbations", *Proceeding of the 28th IEEE Conference on Decision and Control*, Vol 2, pp. 1909–1914. 1992.
- [13] Elliot J. R. "NASA's Advanced Control Law Program for the F-8 Digital Fly-by-wire Aircraft", *IEEE Transaction on Automatic Control*. Vol 22, No. 5, pp.753–757. 1977.
- [14] Garey M. R. and Johnson C. S., *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*, Freeman, New York, 1979.
- [15] Franklin G. F., Powel J. D. and Emami-Naeini A. "Control de sistemas dinámicos con retroalimentación", Addison-Wesley Iberoamericana. México, 1991.
- [16] J. J. D. Delgado-Romero, E. Hernández-Morales and R. S. Gonzalez-Garza. "Robust stability of lineal time invariant systems represented by an interval matrix", *Conference on control of oscillations and chaos*, Vol. 3 pp. 545-548. Saint Petersburg, Russia. 1997

- [17] J. J. D. Delgado-Romero, E. Hernández-Morales, G. Acosta-Villarreal and H. Suarez-Meza. "Robust stability of interval matrices: simple tests", *40th Midwest Symposium on circuits and systems*, Vol.1 pp. 533-536, Sacramento, U.S.A. 1997.
- [18] J. J. D. Delgado-Romero, E. Hernández-Morales, G. Acosta-Villarreal. " Robust stability of linear time invariant systems", *European Conference on Circuit Theory and Design*, Vol. 3 pp. 1173-1176. Budapest, Hungary. 1997.
- [19] J. J. D. Delgado-Romero, E. Hernández-Morales, R. S. Gonzalez-Garza. "APPLICATION CONDITIONS FOR ROBUST STABILITY OF PHYSICAL SYSTEMS", International Conference on Industrial and applied Mathematics, Vol.1 pp. 316. Edinburgh, Scotland. 1999.
- [19] J. J. D. Delgado-Romero, E. Hernández-Morales, R. S. Gonzalez-Garza, "NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR ROBUST STABILITY OF A SPECIAL CASE OF AN INTERVAL MATRIX", *European Conference on Circuit Theory and Design*, Vol. 2 pp. 1363-1366. Stresa, Italy. 1999.
- \*  
[20] Dorf R. C. "Sistemas Modernos de Control", Addison-Wesley Iberoamericana. México, 1989.



- Que sucede si  $A$  es hermitica en Lyapunov.
- Que sucede si las matrices  $\mathbf{U}$  e  $\mathbf{V}$  de la matriz intervalo  $A \in [\mathbf{U}, \mathbf{V}]$  son hermiticas
- Que sucede si las matrices  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{V}$  son complejas.
- Que si  $R_{nm}$  es negativa (basado en UT o diodo finel)

PROPIEDAD DEL INSTITUTO  
TECNOLOGICO DE MORELIA

,61433

