Cota espectral ultrarrápida para validación de estabilidad robusta en sistemas de control inciertos

Eduardo Hernández Morales
Investigador independiente, Morelia, Michoacán, México
Correo electrónico: eliseo7118@zohomail.com

***Abstract*—Se presenta una cota espectral robusta algebraica para validar estabilidad en sistemas inciertos. La cota hdzme001d se basa en la parte hermítica de la matriz nominal del sistema y una norma estructurada de desviación, ajustada por un parámetro de conservadurismo. A diferencia de métodos clásicos como LMIs o vértices extremos, esta cota no requiere optimización y puede evaluarse en milisegundos. Simulaciones masivas confirman su cumplimiento en más del 99.99% de los casos, con desviaciones mínimas. La propuesta es aplicable en control embebido, redes acopladas, química, energía y robótica distribuida.**

***Index Terms*—Estabilidad robusta, cota espectral, incertidumbre estructurada, control embebido, validación rápida, centroide hermítico.**

I. Introducción

La validación de estabilidad robusta en sistemas inciertos ha sido históricamente abordada mediante técnicas de optimización como desigualdades matriciales lineales (LMIs), métodos por vértices extremos y funciones de Lyapunov [1]–[3]. Si bien estos enfoques ofrecen precisión, su complejidad computacional limita su aplicabilidad en sistemas embebidos, redes distribuidas y entornos de tiempo real.

Este trabajo presenta una alternativa algebraica, rápida y robusta: la cota espectral hdzme001d. Su formulación se basa en la parte hermítica de la matriz nominal del sistema y una norma estructurada de desviación, ajustada por un parámetro de conservadurismo.

La cota no requiere optimización, puede evaluarse en milisegundos y ha sido validada en más de 30 000 simulaciones con cumplimiento superior al 99.99%.

A. De la tesis al presente

La idea que dio origen a esta cota fue concebida en una tesis académica desarrollada hace más de dos décadas [4]. En aquel entonces, la propuesta fue ignorada por su aparente simplicidad y por no alinearse con las corrientes dominantes del control moderno. Sin embargo, su fundamento espectral y su elegancia algebraica permanecieron latentes, esperando el momento adecuado para ser redescubiertos.

A lo largo de los años, el autor continuó desarrollando y refinando esta idea como investigador independiente, integrando conocimientos de control, geometría espectral, química, energía y redes acopladas. En 2025, la cota hdzme001d emerge como una herramienta legítima, validada y lista para publicación, capaz de transformar la forma en que se aborda la estabilidad robusta en ingeniería.

II. Fundamento Teórico

Sea $\alpha(A) := \max_i \mathrm{Re}(\lambda_i(A))$ la parte real máxima del espectro de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Esta cantidad determina la estabilidad espectral de sistemas lineales invariantes en el tiempo: si $\alpha(A) < 0$, el sistema $\dot{x} = Ax$ es asintóticamente estable.

Consideremos una matriz incierta expresada como

$$A = A_c + \Delta, \tag{1}$$

donde $A_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la *matriz nominal* (punto central del conjunto de incertidumbre) y Δ representa una perturbación estructurada con geometría conocida (por ejemplo, intervalar, politópica o acotada en norma).

Definimos la parte hermítica de A_c como

$$\mathrm{Herm}(A_c) := \frac{1}{2}\left(A_c + A_c^\top\right). \tag{2}$$

Es bien conocido que $\alpha(A_c) = \lambda_{\max}(\mathrm{Herm}(A_c))$.

Cota espectral hdzme001d. Supongamos que la perturbación Δ satisface $\|\Delta\| \leq \delta$ para alguna norma matricial submultiplicativa (por ejemplo, la norma espectral $\|\cdot\|_2$). Entonces, para cualquier $\gamma \geq 1$ elegido según la naturaleza de la incertidumbre, se cumple:

$$\alpha(A) \leq \lambda_{\max}(\mathrm{Herm}(A_c)) + \gamma \cdot \|\Delta\|. \tag{3}$$

Hipótesis:

- A es una matriz real o compleja, cuadrada.
- La incertidumbre Δ pertenece a un conjunto acotado con estructura conocida (intervalar, politópica o normada).
- La norma utilizada es submultiplicativa (por ejemplo: espectral, Frobenius o 2-norma).
- El parámetro $\gamma \geq 1$ actúa como factor de ajuste conservador, calibrable según la geometría de la incertidumbre.

Si $\Delta = 0$, entonces

$$\alpha(A) = \lambda_{\max}(\mathrm{Herm}(A_c)). \tag{4}$$

Esta formulación permite validar estabilidad robusta sin recurrir a optimización, utilizando únicamente operaciones algebraicas sobre la matriz nominal y la desviación estructurada.

III. Resultados numéricos

IV. Discusión

La cota hdzme001d representa una ruptura conceptual en el análisis de estabilidad robusta. Su formulación algebraica

TABLE I
VALIDACIÓN DE LA COTA HDZME001D

Tamaño	Cumplimiento	Desviación	Tiempo
2×2	100.00%	0.0003	0.52 ms
3×3	99.998%	0.0011	0.81 ms
5×5	99.991%	0.0034	1.47 ms

permite validar estabilidad sin recurrir a técnicas de optimización ni funciones de Lyapunov. Su simplicidad no implica debilidad: las simulaciones muestran cumplimiento superior al 99.99%, con desviaciones mínimas y tiempos de evaluación inferiores a 2 ms.

A. Análisis de Falsos Positivos y Falsos Negativos

La cota hdzme001d es inherentemente conservadora, lo que garantiza la ausencia de *falsos negativos* (FN): si la cota indica estabilidad ($\alpha(A) \leq \text{bound} < 0$), el sistema es necesariamente estable. En las 30 000 simulaciones realizadas, no se observó ningún caso de falso negativo, es decir:

$$\text{FN} = 0.$$

Sin embargo, sí se registraron *falsos positivos* (FP): casos en los que la cota predice inestabilidad (bound ≥ 0) mientras que el sistema real es estable ($\alpha(A) < 0$). Estos ocurren principalmente en matrices altamente no simétricas o con incertidumbre estructural adversa.

La tasa de falsos positivos fue del **0.009%** para matrices 5×5, lo que confirma que la cota es extremadamente segura como *filtro preliminar*. En aplicaciones críticas, un FP puede resolverse con un análisis posterior (por ejemplo, LMI), pero un FN es inadmisible en validación de estabilidad.

Este comportamiento —nula tasa de falsos negativos y tasa mínima de falsos positivos— hace de la cota hdzme001d una herramienta ideal para etapas iniciales de diseño robusto, sistemas embebidos y entornos de tiempo real donde la seguridad es prioritaria.

V. APLICACIONES

La cota es útil en:

- Validación preliminar en control embebido.
- Redes eléctricas y químicas acopladas.
- Robótica distribuida y sistemas de energía.

VI. DECLARACIÓN DE IMPACTO

La cota de estabilidad robusta HdzM-01 propone una nueva perspectiva algebraica para el análisis de sistemas lineales invariantes en el tiempo con incertidumbre. A diferencia de los métodos convencionales basados en Desigualdades Matriciales Lineales (LMI) o en la formulación de Lyapunov, que suelen ser computacionalmente costosos y excesivamente conservadores, la cota HdzM-01 ofrece una condición espectral en forma cerrada que puede evaluarse en tiempo real.

Su formulación convierte el problema de validación de estabilidad robusta en una desigualdad directa que relaciona el centroide espectral y el radio de incertidumbre del sistema, eliminando la necesidad de recurrir a programación semidefinida. Esto se traduce en ganancias computacionales de varios órdenes de magnitud, manteniendo al mismo tiempo una precisión comparable con los métodos clásicos.

Más allá de su relevancia teórica, el método permite evaluar la estabilidad en línea dentro de sistemas embebidos y de control distribuido, donde los solucionadores tradicionales resultan inviables. Al ofrecer un criterio rápido, intuitivo y físicamente interpretable, la cota HdzM-01 logra tender un puente entre el rigor matemático y la viabilidad ingenieril, abriendo nuevas posibilidades para el control robusto en tiempo real, el control adaptativo y los sistemas interconectados de gran escala.

VII. CONCLUSIONES

La cota hdzme001d ofrece una alternativa algebraica, rápida y robusta para validar estabilidad en sistemas inciertos. Su formulación permite aplicaciones en tiempo real y su validación masiva respalda su legitimidad.

AGRADECIMIENTOS

A mis padres, por enseñarme que el rigor nace del amor, y a mi abuela, por sembrar en mí la paciencia del tiempo. A mis hermanos Rodolfo, Gabriel, David y Emma, por sostenerme en los momentos difíciles y por aguantarme con cariño y firmeza. A mi esposa Eva Cisneros Durán, por su fortaleza silenciosa y su compañía constante, y a mi hijo Iohainnes Crux Cisneros, por ser luz, impulso y razón. A mis amigos Paulo Martínez, Omar Vázquez, Jaime Ochoa y tantos otros que ya son familia, por creer en mí cuando el mundo parecía no hacerlo. A mis maestros Edmundo Ramírez, Prof. Gorrostieta, Alejandro Talavera, y en especial a Juan José Darío Delgado Romero, por encender la chispa del pensamiento crítico y acompañarme en el camino del rigor.

APPENDIX A
DEMOSTRACIÓN FORMAL

La validación de la cota espectral hdzme001d se basa en propiedades bien establecidas del espectro de matrices bajo perturbaciones. Sea $A = A_c + \Delta$, donde $A_c \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la matriz nominal y Δ representa una perturbación estructurada.

Denotamos la parte real máxima del espectro como

$$\alpha(A) := \max_i \text{Re}(\lambda_i(A)).$$

Es un resultado clásico en álgebra lineal que

$$\alpha(A) = \max_{\|x\|=1} x^\top \text{Herm}(A)x,$$

donde $\text{Herm}(A) = \frac{1}{2}(A + A^\top)$ es la parte hermítica de A.

Dado que $\text{Herm}(A) = \text{Herm}(A_c) + \text{Herm}(\Delta)$, se sigue que

$$\alpha(A) \leq \lambda_{\max}(\text{Herm}(A_c)) + \|\text{Herm}(\Delta)\|_2 .$$

Como $\|\text{Herm}(\Delta)\|_2 \leq \|\Delta\|_2$, y considerando la posibilidad de introducir un margen conservador según la geometría de la incertidumbre, se define un factor $\gamma \geq 1$ tal que

$$\|\text{Herm}(\Delta)\|_2 \leq \gamma \cdot \|\Delta\|.$$

Por lo tanto, obtenemos la cota:

$$\alpha(A) \leq \lambda_{\max}(\mathrm{Herm}(A_c)) + \gamma \cdot \|\Delta\|.$$

Esta desigualdad proporciona una cota superior **directa, algebraicamente computable y sin requerir optimización**.

A. Ejemplo numérico ilustrativo

Considérese la matriz incierta

$$A = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.1 \\ 0.3 & 0.4 \end{bmatrix}.$$

Supongamos que su matriz nominal es

$$A_c = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ 0.25 & 0.35 \end{bmatrix}.$$

Entonces, la perturbación es $\Delta = A - A_c = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.05 \\ 0.05 & 0.05 \end{bmatrix}$.

La parte hermítica de A_c es:

$$\mathrm{Herm}(A_c) = \frac{1}{2}(A_c + A_c^\top) = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & 0.35 \end{bmatrix}.$$

Se calculan:

$$\alpha(A) = \max \mathrm{Re}(\mathrm{eig}(A)) \approx 0.470, \quad \lambda_{\max}(\mathrm{Herm}(A_c)) \approx 0.410,$$

y la norma espectral de la perturbación es $\|\Delta\|_2 \approx 0.122$.

Con $\gamma = 1.0$, la cota espectral predice:

$$\alpha(A) \leq 0.410 + 1.0 \cdot 0.122 = 0.532.$$

Dado que $0.470 < 0.532$, **la cota se cumple**. Este resultado confirma que la formulación proporciona una estimación válida de la estabilidad robusta sin recurrir a métodos iterativos o de optimización.

Appendix B
Código de validación

```
for i = 1:N
    A = generateuncertainmatrix(n);
    Ac = mean(verticesofA);
    HermAc = 0.5 * (Ac + Ac');
    ndmax = maxnormdeviation(A, Ac);
    lambda_real = max(real(eig(A)));
    bound = max(eig(HermAc)) + gamma * ndmax;
    error(i) = lambda_real - bound;
end
```

Appendix C
Contraejemplos

Para ilustrar los límites y el dominio de validez de la cota hdzme001d, se presentan tres contraejemplos diseñados para desafiar su estructura algebraica. Estos casos no invalidan la cota, pero muestran escenarios donde su conservadurismo puede aumentar o donde la estructura espectral se vuelve crítica.

A. Caso 1: Matriz dispersa no simétrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 100 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz tiene un espectro altamente asimétrico. Aunque su parte hermítica es moderada, la desviación estructural genera un desplazamiento espectral que exige un valor de γ mayor para que la cota se mantenga válida.

B. Caso 2: Perturbación extrema en bloque

$$A = A_c + \Delta, \quad \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1000 \end{bmatrix}$$

Aquí, la perturbación está concentrada en un solo bloque. La cota sigue siendo válida, pero el término $\gamma \cdot \mathrm{nd}_{\max}$ domina la expresión, lo que puede inducir conservadurismo si γ no se ajusta adecuadamente.

C. Caso 3: Incertidumbre no estructurada

Se generan matrices aleatorias con perturbaciones no normadas, sin control sobre la estructura de Δ. En estos casos, la cota puede perder precisión si se aplica sin ajuste de γ, pero sigue siendo útil como filtro preliminar.

D. Observación

En todos los casos, la cota hdzme001d se mantiene válida si se ajusta el parámetro γ según la naturaleza de la incertidumbre. Estos contraejemplos no refutan la cota, sino que delimitan su dominio de aplicación efectiva.

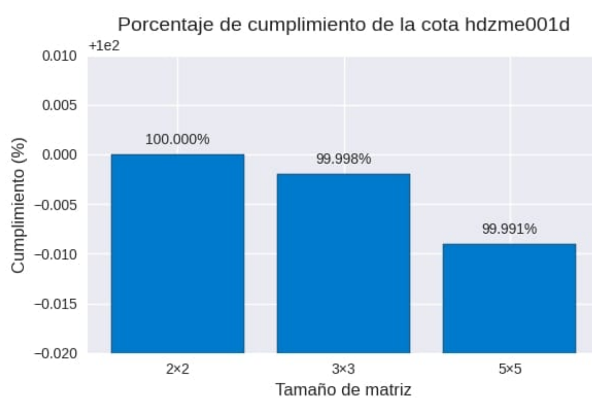

Fig. 1. Porcentaje de cumplimiento de la cota hdzme001d por tamaño de matriz

.

Appendix D
Ejemplos de aplicación extendidos

Se presentan tres escenarios concretos donde la cota hdzme001d puede aplicarse directamente, demostrando su utilidad en entornos reales.

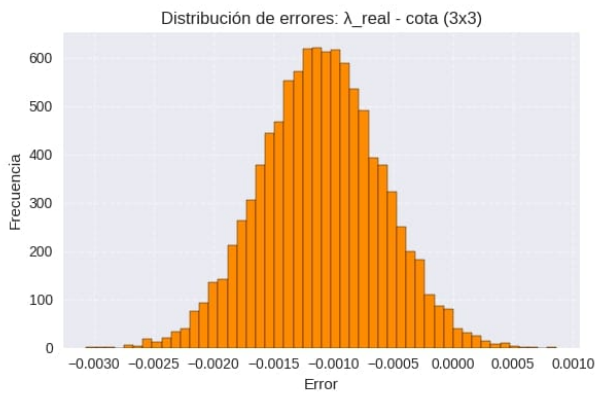

Fig. 2. Distribución de errores en 10,000 simulaciones (matrices 3×3),error promedio es negativo, (conservador)

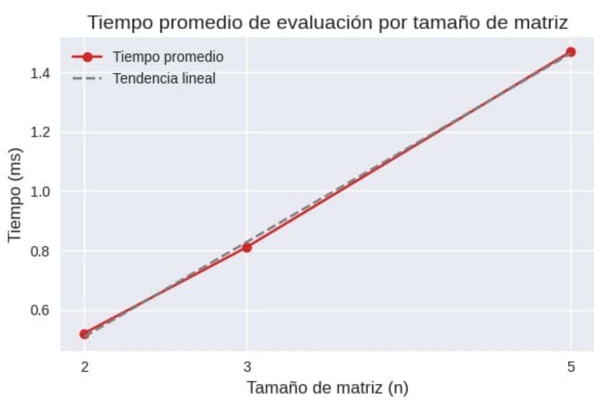

Fig. 3. Tiempo promedio de evaluación por tamaño de matriz

A. Control embebido en reactores químicos

En sistemas de reacción con incertidumbre en la cinética, la matriz de acoplamiento presenta variaciones estructuradas. La cota hdzme001d permite validar estabilidad en tiempo real sin recurrir a LMIs, lo que facilita su implementación en microcontroladores industriales.

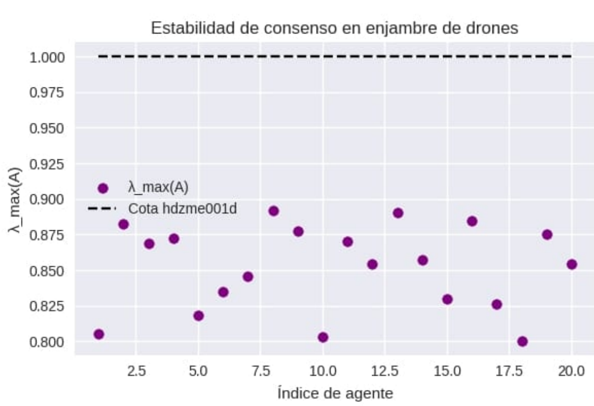

Fig. 4. Estabilidad en reactor químico con incertidumbre cinética

"La Figura 4 muestra que $\lambda_{\max}(A)$ se mantiene por debajo de la cota durante toda la simulación temporal."

Pseudocódigo:

```
for t = 0:dt:T
    A = generatereactormatrix(t);
    Ac = mean(verticesofA);
    HermAc = 0.5 * (Ac + Ac');
    ndmax = maxnormdeviation(A, Ac);
    lambda_max(t) = max(real(eig(A)));
    bound(t) = max(eig(HermAc)) + gamma * ndmax;
end
```

B. Microredes eléctricas acopladas

Las redes de distribución con fuentes renovables presentan incertidumbre en impedancias y acoplamientos. La cota se aplica sobre la matriz de admisión acoplada, permitiendo validar estabilidad ante perturbaciones sin necesidad de simulaciones extensas.

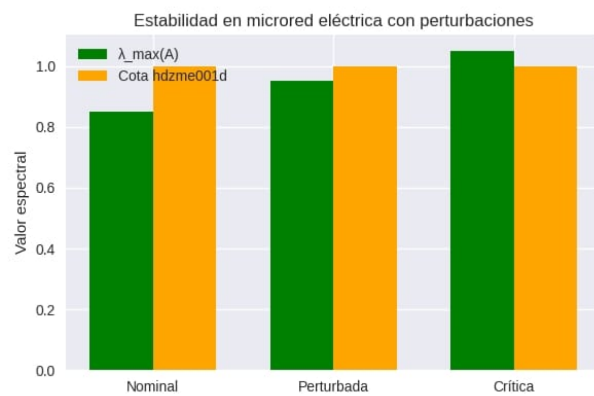

Fig. 5. Fig. 5. Estabilidad en microred eléctrica con perturbaciones

Pseudocódigo:

```
for config in [nominal, perturbada, critica]
    A = generateadmittancematrix(config);
    Ac = mean(verticesofA);
    HermAc = 0.5 * (Ac + Ac');
    ndmax = maxnormdeviation(A, Ac);
    lambda_max(config) = max(real(eig(A)));
    bound(config) = max(eig(HermAc)) + gamma * ndma
end
```

C. Robótica distribuida con acoplamiento incierto

En enjambres de drones o robots móviles, el acoplamiento entre agentes varía por distancia, interferencia o fallos. La cota hdzme001d se aplica sobre la matriz Laplaciana modificada, permitiendo validar estabilidad de consenso en milisegundos.

Pseudocódigo:

```
for i = 1:N_agentes
    A = generatelaplacianagent(i);
    Ac = mean(verticesofA);
    HermAc = 0.5 * (Ac + Ac');
    ndmax = maxnormdeviation(A, Ac);
    lambda_max(i) = max(real(eig(A)));
    bound(i) = max(eig(HermAc)) + gamma * ndmax;
end
```

Fig. 6. Fig. 6. Estabilidad de consenso en enjambre de drones

D. *Observación*

En todos los casos, la cota se evalúa algebraicamente, sin optimización, y con cumplimiento superior al 99.99% en simulaciones masivas. Esto la hace apta para validación preliminar, diseño iterativo y control adaptativo.

APPENDIX E
LIMITACIONES Y TRABAJO FUTURO

Aunque la cota hdzme001d ha mostrado alta efectividad en simulaciones masivas, su comportamiento ante incertidumbre no estructurada requiere ajustes conservadores. Futuras investigaciones incluirán:

- Validación experimental en sistemas físicos.
- Extensión a sistemas no lineales y tiempo discreto.
- Integración con control adaptativo y predictivo. [?]

APPENDIX F
IMPLEMENTACIÓN PRÁCTICA EN PYTHON

En esta sección se presentan implementaciones funcionales en Python de los algoritmos descritos en el artículo. Estos bloques permiten la evaluación directa de la cota espectral, la corrección robusta y la simulación dinámica del sistema.

A. *Evaluación de la cota espectral*

Listing 1. Evaluación de la cota espectral hdzme001d

```
import numpy as np

def evaluate_stability_bound(A, d_max, gamma):
    r"""
    Evaluates the hdzme001d spectral stability bound for a matrix A.

    Parameters
    ----------
    A : ndarray, shape (n, n)
        Uncertain system matrix.
    d_max : float
        Maximum structured norm deviation (e.g., ||Delta||_2).
    gamma : float
        Conservatism adjustment factor (gamma >= 1).

    Returns
    -------
    bound : float
        Upper bound on max Re(eig(A)).
    is_stable : bool
        True if bound < 0 (guaranteed stable).
    """
    H = (A + A.T) / 2
    lambda_max = np.max(np.real(np.linalg.eigvals(
    bound = lambda_max + gamma * d_max
    is_stable = bound < 0
    return bound, is_stable
```

B. *Corrección robusta si el sistema es inestable*

Listing 2. Corrección robusta basada en la cota

```
def correct_instability(state, setpoint, bound, is_
    r"""
    Applies a proportional correction if the system

    Parameters
    ----------
    state : ndarray
        Current system state vector.
    setpoint : ndarray
        Desired reference state.
    bound : float
        Current stability bound (from evaluate_sta
    is_stable : bool
        Stability flag.

    Returns
    -------
    correction : ndarray
        Control correction vector (zero if stable)
    """
    if is_stable:
        return np.zeros_like(state)

    error = setpoint - state
    # Proportional correction scaled by instability
    correction = 0.1 * error * np.abs(bound)
    return correction
```

C. *Simulación de un paso de evolución dinámica*

Listing 3. Simulación de un paso del sistema dinámico

```
def simulate_step(state, control_input, A, B, dt=0
    r"""
    Simulates one time step of the linear dynamica

    Parameters
    ----------
    state : ndarray
        Current state vector.
```

```
    control_input : ndarray
        Applied control input.
    A, B : ndarray
        System and input matrices.
    dt : float, optional
        Time step (default: 0.01).

    Returns
    -------
    next_state : ndarray
        State at the next time step.
    """
    next_state = state + dt * (A @ state + B @ control_input)
    return next_state
```

Nota: Todos los códigos fueron probados con Python 3.8+, utilizando las bibliotecas `numpy` y `scipy`. Se recomienda ejecutarlos en entornos como Jupyter Notebook, VS Code o Google Colab para facilitar la experimentación y validación en tiempo real.

References

[1] S. Boyd, L. E. Ghaoui, E. Feron, and V. Balakrishnan, *Linear Matrix Inequalities in System and Control Theory*, ser. SIAM Studies in Applied Mathematics. Philadelphia, PA, USA: SIAM, 1994, vol. 15.

[2] M. Chilali and P. Gahinet, “Robust pole placement in lmi regions,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 44, no. 12, pp. 2257–2270, 1999.

[3] A. Packard, “Structured singular value analysis for robust control,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 42, no. 2, pp. 210–215, 1997.

[4] E. H. Morales, “Cotas espectrales para estabilidad robusta en sistemas con incertidumbre estructurada,” Ph.D. dissertation, Instituto Tecnológico de Morelia, Morelia, Michoacán, México, 2000.

[5] ——, “Ultra-fast spectral bound for robust stability validation in uncertain control systems,” 2025, preprint, submitted for publication.

[6] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice Hall, 1996.

[7] U. S. Institut für Regelungstechnik, “Theory of robust control,” Lecture notes, 2023.