UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EDUARDO HENRIQUE SILVEIRA DA COSTA

ALGORITMO GENÉTICO APLICADO A PROBLEMAS NA ECONOMIA

CURITIBA
2022

EDUARDO HENRIQUE SILVEIRA DA COSTA

ALGORITMO GENÉTICO APLICADO A PROBLEMAS NA ECONOMIA

Monografia apresentada como requisito à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas pelo Curso de Ciências Econômicas, Setor de Ciências Sociais Aplicada, Universidade Federal do Paraná.

Orientador: Dr. João Basilio Pereima

CURITIBA
2022

TERMO DE APROVAÇÃO

EDUARDO HENRIQUE SILVEIRA DA COSTA

ALGORITMO GENÉTICO APLICADO A PROBLEMAS NA ECONOMIA

Monografia apresentada como requisito à obtenção do grau de Bacharel em Ciências Econômicas pelo Curso de Ciências Econômicas, Setor de Ciências Sociais Aplicada, Universidade Federal do Paraná:

Orientador: Prof. Dr. João Basilio Pereima
Setor de Ciências Sociais Aplicadas
Universidade Federal do Paraná

---

xxxx. xxxx. xxxxxxxxxxxxx
Setor de Ciências Sociais Aplicadas
Universidade Federal do Paraná

---

xxxx. xxxx. xxxxxxxxxxxxx
Setor de Ciências Sociais Aplicadas
Universidade Federal do Paraná

Curitiba, 25 de Abril de 2022.

RESUMO

Em Economia, embora haja algumas teorias bem estabelecidas, não há um consenso de como se analisar certos comportamentos dos agentes. Desde o desenvolvimento dos primeiros modelos econômicos simples até os modelos computacionais recentes mais complexos, os objetivos gerais são basicamente os mesmos: captar e prever tais comportamentos. Com a formalização da Econometria como área de estudo na primeira metade do século XX e o desenvolvimento dos sistemas computacionais na segunda metade do século passado, inúmeros modelos surgiram buscando alcançar os objetivos citados. Muitos, por sua vez, apresentam limitações na busca por respostas e soluções de problemas econômicos complexos, seja por restrições teóricas ou computacionais. Dessa forma, a presente monografia tem o objetivo de apresentar os Algoritmos Genéticos como uma alternativa robusta para a análise e previsão do comportamento de agentes e cenários econômicos. Para isso, realizou-se uma breve apresentação da história de criação e desenvolvimento dos algoritmos genéticos, o aprofundamento em sua estrutura, a demonstração de exemplos de aplicações em problemas econômicos e, por fim, uma aplicação passo-a-passo de um algoritmo genético simples na linguagem Python, abordando os resultados de cada um de seus operadores.

Palavras-chave: algoritmo genético; otimização; inovação; aprendizado adaptativo.

ABSTRACT

In Economics, although there are some well-established theories, there is no consensus on how to analyze certain behaviors of agents. From the development of the first simple economic models to the more complex recent computer models, the general goals are basically the same: to capture and predict such behaviors. With the formalization of Econometrics as a field of study in the first half of the 20th century and the development of computer systems in the second half of the last century, numerous models emerged seeking to achieve the aforementioned objectives. Many, in turn, have limitations in the search for answers and solutions to complex economic problems, either due to theoretical or computational restrictions. Thus, this undergraduate thesis aims to present Genetic Algorithms as a robust alternative for analyzing and predicting the behavior of agents and economic scenarios. For this, a brief presentation of the history of creation and development of genetic algorithms was carried out, the deepening of its structure, the demonstration of examples of applications in economic problems and, finally, a step-by-step application of a genetic algorithm in the Python language, covering the results of each of its operators.

Keywords: genetic algorithm; optimization; inovation; adaptative learning.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SIGLAS

AG - Algoritmo Genético
CE - Computação Evolucionária
PE - Programação Evolucionária
EE - Estratégias Evolutivas
PIB - Produto Interno Bruto
H-H - Indicador Herfindahl–Hirschman

SUMÁRIO

Capítulo 1

Introdução

Frente à complexidade das análises em Economia, buscou-se continuamente ao longo do tempo desenvolver modelos, além de melhorar os já existentes, que auxiliassem a entender o comportamento dos agentes econômicos em busca de alcançar os objetivos definidos pela sociedade, sejam eles para atingir progresso tecnológico, aumentar o bem-estar social, elevar a felicidade dos indivíduos, entre outros. Ao longo do desenvolvimento das Ciências Econômicas como área de estudo, surgiram diversas teorias de como os agentes se comportam e tomam suas decisões quando expostos a alguns cenários específicos. Entretanto, apenas a fundamentação teórica não basta para a análise e o entendimento destes processos, mostrando-se necessária a construção de modelos matemáticos que visam demonstrar a robustez teórica dos argumentos apresentados. Os métodos, para isso, são diversos, porém podem ser divididos em dois caminhos gerais: modelos aplicados a dados reais e modelos aplicados a dados hipotéticos ou simulados. O caminho a ser seguindo dependerá do objetivo da pesquisa, das hipóteses a serem testadas, da disponibilidade de dados, de restrições computacionais, etc. Dessa forma, na busca por modelos robustos visando uma maior compreensão dos fenômenos econômicos, surgem diversas barreiras como a dificuldade em escalá-lo, a falta de dados estruturados e confiáveis para aplicação e treinamento, a necessidade de inserção de muitos parâmetros de entrada, a inflexibilidade frete à problemas complexos, entre muitas dificuldades encontradas quando postos à prova. Com isso, buscou-se, no presente trabalho, apresentar como os Algoritmos Genéticos podem ser uma alternativa robusta e eficiente para a compreensão e previsão dos comportamentos dos agentes em ambientes econômicos complexos, assim como contribuir para a literatura da área que carece de poucos trabalhos em língua portuguesa.

Dessa forma, o presente trabalho tem como finalidade: i) realizar uma breve revisão histórica do contexto de criação e desenvolvimento dos Algoritmos Genéticos; ii) aprofundar na estrutura de um Algoritmo Genético simples, apresentando os principais elementos para sua construção, como a formação da população inicial, os operadores de reprodução, cruzamento e mutação, a construção e definição da função objetivo e a teoria dos blocos de construção; iii) apresentar exemplos de aplicações dos Algoritmos Genéticos em contextos econômicos como, por exemplo, problemas de otimização, análise de processos de inovação, análise de comportamento dos agentes, entre outros; iv) demonstrar, matemática e programaticamente, uma aplicação detalhada de um Al-

goritmo Genético simples na linguagem Python contendo os principais elementos para sua construção.

Para isso, como principais referências na construção, implementação e estrutura dos Algoritmos Genéticos, utilizou-se o artigo "*Genetic Algorithms*" de John H. Holland, o livro "*Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*" de David E. Goldberg e o livro "*An Introduction to Genetic Algorithms*" de Melanie Mitchell. No que diz respeito à revisão história do desenvolvimento dos Algoritmos Genéticos, além do trabalho de Goldberg citado previamente, foi utilizado o livro "Handbook of Evolutionary Computation" de Thomas Back, David B. Fogel e Zbigniew Michalewicz. Para a apresentação dos exemplos de pesquisas em Algoritmos Genéticos aplicados a problemas econômicos, foi realizada uma revisão bibliográfica do tema, com o aprofundamento em algumas das pesquisas encontradas na literatura. Para os demais conceitos e definições na área da Computação e Economia, foi utilizada uma compilação da bibliografia relevante às áreas como livros, teses, artigos acadêmicos e, no caso do código programático, as documentações necessárias.

Enquanto o capítulo dois traz uma revisão histórica da evolução do desenvolvimento da computação evolucionária, e dos algoritmos genéticos como sua sub área de pesquisa, o capitulo três faz um aprofundamento nos componentes para construção de um algoritmo genético contendo os operadores de reprodução, cruzamento e mutação, assim como a teoria por trás destes elementos. Já o capítulo quatro realiza uma breve revisão das principais teorias econômicas do século XX e XXI, uma apresentação da economia evolucionária e algumas aplicações de algoritmos genéticos em contextos econômicos, especialmente, em problemas de otimização, inovação e aprendizado adaptativo. No capítulo cinco, por sua vez, é feita, passo-a-passo, uma aplicação de um algoritmo genético simples demonstrando-a matematicamente, conforme exposto no capítulo três, assim como sua implementação para a resolução do Problema da Caixa Preta na linguagem Python. Por fim, apresenta-se a conclusão.

Capítulo 2

Computação Evolucionária

O contexto da criação e desenvolvimento dos algoritmos genéticos está intrinsecamente ligado à área de estudos da computação evolucionária que, por sua vez, está sob o guarda-chuva da área de pesquisa da inteligência artificial. Com o objetivo de entender o desenvolvimento dos algoritmos genéticos, desde sua criação, procura-se, neste capítulo, realizar uma contextualização histórica à computação evolucionária, à programação evolucionária, às estratégias evolutivas, além da evolução e principais contribuições para o desenvolvimento dos algoritmos genéticos até sua formalização como campo de pesquisa.

2.1 Introdução

Como o próprio nome sugere, a computação evolucionária (CE) tem como inspiração os processos de evolução observados nos organismos da natureza, sendo uma metáfora computacional (vide Tabela 2.1) que, de forma geral, visa solucionar problemas computacionais ou entender melhor os processos naturais de evolução. Através de uma simulação destes processos naturais, busca-se pelos indivíduos mais aptos a sobreviverem em um ambiente, assim como analisar como os processos de reprodução e mutação destes indivíduos ocorreram. O próprio ambiente é, em si, um dos elementos mais importantes neste conjunto, tendo grande influência nessa luta pela sobrevivência e na busca de parceiros para reprodução, determinando, assim, como a capacidade de se adaptar a esse meio influenciará em suas chances de passar seus genes para as próximas gerações.

TABELA 2.1: METÁFORA DA COMPUTAÇÃO EVOLUCIONÁRIA

Evolution		Problem solving
Environment	$\Longleftrightarrow$	Problem
Individual	$\Longleftrightarrow$	Candidate solution
Fitness	$\Longleftrightarrow$	Quality

FONTE: Eiben and Smith (2015, p.11)

Ao fim de 1950, e meados da década de 60, a tecnologia havia avançado até chegar à computação digital, o que possibilitou um avanço na experimentação de novos modelos

de processos evolucionários e um grande número de estudos nas décadas seguintes. Os trabalhos de Friedberg (1958), Friedberg et al. (1959) e Bremermann (1962) são apontados como os primeiros registros de desenvolvimento de processos evolucionários aplicados no contexto de problemas computacionais. Os trabalhos de Friedberg podem ser considerados alguns dos primeiros estudos em *machine learning*[1] e programação automática (Back et al., 1997).

Bremermann (1962), publica sua pesquisa de evolução simulada aplicada à otimização linear e convexa e equações simultâneas não lineares, assim como desenvolve, em 1965[2], um dos primeiros estudos teóricos sobre algoritmos evolucionários, demonstrando que a mutação ótima deve ter um valor $\frac{1}{l}$[3] no caso de l bits codificados como indivíduos quando aplicados a problemas linearmente separáveis (Back et al., 1997).

Com as contribuições dos trabalhados acima apresentados, as pesquisas realizadas na segunda metade dos anos 1960 estabeleceram os três principais campos de estudo em CE, sendo eles a programação evolucionária (PE), as estratégias evolutivas (EE) e os algoritmos genéticos (AG). Na segunda metade da década de 1960, Lawrance Fogel[4] construía as bases da programação evolucionária em San Diego, Califórnia, e John Holland fundava as bases dos algoritmos genéticos na Universidade de Michigan[5]. Por sua vez, as estratégias evolutivas eram desenvolvidas por Inge Rechenberg, Peter Bienert e Hans-Paul Schwefel em Berlim em meados de 1965[6].

Como aponta Back et al. (1997), mesmo com cada uma das áreas seguindo seu próprio caminho de pesquisas ao longo dos quase 30 anos seguintes, a década de 1990 marca o encontro destes campos através dos esforços de seus pesquisadores na organização de diversos congressos com o objetivo de compartilharem os conhecimentos até então absorvidos, culminando, no início da década, no consenso do nome **computação evolucionária** como o nome dessa nova grande área de pesquisa. A partir destas reuniões, o crescimento do número de interessados e novos trabalhos foi naturalmente crescendo ao longo da década. Em 1993, é criado um periódico homônimo pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts[7] e, em 1994, uma das três conferências do Congresso Mundial de Inteligência Computacional organizado pelo Instituto de Engenheiros Eletricistas e Eletrônicos[8] (Back et al., 1997 apud Eiben et al., 1994) .

2.2 Programação Evolucionária

Desenvolvida por Lawrance Fogel na década de 1960, a programação evolucionária (PE) foi construída sobre diversos experimentos visando a previsão, sob algum critério arbitrário, de séries temporais não estacionárias através da evolução simulada dos estados das máquinas dentro de um limite de estados predeterminados, ou seja, dado os

[1] Do inglês, aprendizado de máquina.
[2] Bremermann H J and S
[3] *length*, do inglês, comprimento
[4] Fogel et al. (1966)
[5] Holland (1962)
[6] Rechenberg et al. (1965)
[7] Evolutionary Computation (1993)
[8] *IEEE World Congress on Computaional Intelligence* (WCCI)

estados passados, previa-se os estados da máquina resultantes deste processo. Fogel buscou seguir um caminho diferente de pesquisa em relação ao que os trabalhos em inteligência artificial se concentravam à época, uma simulação primitiva de redes neurais. Para Fogel, havia uma grande limitação dos modelos baseados na inteligência humana em relação aos processos de criaturas com desenvolvimento contínuo do intelecto, necessário para sobrevivência em um dado ambiente (evolução).

Segundo Back et al. (1997, pg.A2.3:3), Fogel apresenta as primeiras tentativas de "[...](i) usar a evolução simulada para realizar predições, (ii) incluir codificações de comprimento variável, (iii) usar representações que tomam a forma de uma sequência de instrução, (iv) incorporar uma população de soluções candidatas e (v) coevoluir programas evolutivos" e partindo da premissa que "a inteligência é baseada na adaptação do comportamento para atingir metas em uma variedade de ambientes" (tradução nossa)[9].

Devido ao contexto computacional, esses ambientes eram representados através de uma sequência de símbolos ou caracteres de um alfabeto finito arbitrário e o problema evolutivo definido como uma sequência de instruções, ou algoritmo, aplicadas sobre o conjunto de símbolos já observados. Com isso, ao inserir um conjunto de máquinas (população) em um dado ambiente, onde cada máquina possui um valor definido como o valor de entrada, esperava-se melhorar a performance de previsão do algoritmo, à medida que o valor de saída, ou o resultado, era comparado com o próximo valor de entrada. A qualidade desta previsão era, então, medida por uma função de recompensa que indicava o quanto cada máquina da população se adaptou ao ambiente.

Cada máquina pai pode criar um ou mais descendentes, onde cada descendente é criado pelo processo aleatório de alteração de estado, ou valor, do pai. Esse processo de mutação pode ocorrer sob uma certa distribuição de probabilidade ou ser definido no início da implementação do algoritmo. Ao fim de cada geração, a função de recompensa é aplicada sobre o descendente, assim como foi feito com seu pai, para avaliar o quão apto está em relação ao ambiente. As máquinas que fornecem o maior valor de recompensa permanecem no ambiente e se tornam pais das máquinas da geração seguinte. Este processo acontece sucessivas vezes até o símbolo que o símbolo que se deseja prever seja, efetivamente, previsto. A melhor máquina irá gerar essa previsão e esse novo símbolo é adicionado na população para ser avaliado no ambiente, reiniciando, assim, o processo.

Esse algoritmo foi aplicado com êxito em problemas de previsão, identificação e controle automático, simulação de coevolução de populações, experimentos de previsão de sequência, reconhecimento de padrões e em jogos. Na década de 1980, o algoritmo estendeu-se para novas aplicações, como no ordenamento de itens no problema do caixeiro viajante e em funções de otimização contínua, evoluindo, posteriormente, para implementações em planejamento de rotas, seleção ótima de subconjuntos e treinamento de redes neurais. No início da década de 1990, ocorre a primeira conferência anual de programação evolucionária, com exemplos de diversas aplicações de otimização na área de robótica, planejamento de caminhos e rotas, desenho e treinamento de redes neurais, controle automática entre outros (Back et al., 1997 apud Eiben et al., 1994) .

[9] *[...] (i) use simulated evolution to perform prediction, (ii) include variable-length encodings, (iii) use representations that take the form of a sequence of instructions, (iv) incorporate a population of candidate solutions, and (v) coevolve evolutionary programs [...] considered intelligence to be based on adapting behavior to meet goals in a range of environments.*

2.3 Estratégias Evolutivas

Na metade da década de 1960, Bienert, Rechenberg e Schwefel, três estudantes da Universidade Técnica de Berlim, estudavam modelos de otimização aplicados em problemas da área de aerotecnologia e tecnologia espacial. Uma das principais pesquisas que realizavam à época, era de um robô experimental que, em um túnel de vento, deveria realizar uma série de testes em uma estrutura tridimensional fina e flexível visando minimizar a resistência em relação ao ar. Os primeiros testes não obtiveram sucesso. Foi apenas no ano seguinte ao início dos testes que Rechenberg et al. (1965) decide utilizar um dado para decisões aleatórias elaborando, assim, a primeira versão de uma EE (Back et al., 1997, pg.A2.3:6) chamada, posteriormente, de $(1 + l)EE$.

Essa primeira versão consiste em uma sequência de instruções projetadas para otimização contínua bastante similar à busca aleatória, exceto por uma regra para a força da mutação conhecida como "regra do sucesso $\frac{1}{5}$" para ajuste do desvio padrão dessa mutação. Como a notação sugere, a estratégia de evolução $(1 + l)$ possui apenas um indivíduo pai que irá gerar apenas um indivíduo filho, onde ambos são confrontados e o indivíduo que representa a solução mais fraca, morre. Este indivíduo sobrevivente gera um novo filho e, assim, repetindo essa sequência diversas até se chegar a uma solução ótima. Sendo executado indivíduo a indivíduo, esse processo é computacionalmente custoso, apresentando uma convergência lenta para uma solução ótima, assim como tem a possibilidade de convergir para uma solução local.

Devido aos problemas de desempenho, os autores trabalharam em melhorias na estrutura do algoritmo, desenvolvendo uma nova versão chamada de EE multi-membro[10] com população maior que 1. Novas melhorias foram realizadas nessa nova versão, resultando em dois princípios principais: $(\mu+1)$ e $(\mu, 1)$. No primeiro, μ indivíduos produzem λ descendentes, gerando uma população temporária de $(\mu + \lambda)$ novos indivíduos, havendo a seleção de μ indivíduos para a geração seguinte. No segundo tipo, μ indivíduos produzem λ descendentes, com $\mu < \lambda$, onde a nova população de μ indivíduos possui apenas os indivíduos selecionados do conjunto de λ descendentes, limitando o tempo de vida de um indivíduo apenas a uma geração específica.

A partir da primeira versão, a comunidade de pesquisadores da área de EE realizaram novas aplicações nas décadas seguintes que não se reduziram somente ao objetivo da otimização de valores do mundo real, como a aplicação para otimização binária em estruturas de indivíduos multicelulares usando a ideia de sub populações, estratégias evolutivas para problemas com multi critérios, entre diversas outras aplicações seguindo a ideia principal de melhoria contínua dos indivíduos analisados (Back et al., 1997).

[10] *EE multimembered.*

2.4 Algoritmos Genéticos

No início da década de 1960, na Universidade de Michigan, John H. Holland[11] e seus alunos davam os primeiros passos nos estudos de operadores genéticos para resolução de problemas em ambientes artificiais. Previamente aos primeiros estudos de Holland, é válido citar que o uso de computadores para simular sistemas artificiais ou genéticos com o objetivo de observar fenômenos naturais já era tema de pesquisa em trabalhos de biólogos que buscavam entender como a interação entre os indivíduos de uma população impactavam nas gerações subsequentes (Goldberg, 1989, p.90).

Em 1962, em seu artigo intitulado "*Outline for a Logical Theory of Adaptive Systems*", Holland apresenta as primeiras ideias de sua Teoria de Sistemas Adaptativos que, conforme o autor apresenta, tinha o seguinte objetivo (Holland, 1962):

> [...] delinear uma teoria de autômatos adequada às propriedades, requisitos e questões de adaptação. As condições que tal teoria deve satisfazer vêm não de um, mas de vários campos: deve ser possível formular, pelo menos em uma versão abstrata, algumas das principais hipóteses e problemas de partes relevantes da biologia, particularmente as áreas relacionadas ao controle molecular e neurofisiologia. [...] Em linhas gerais, é um estudo de como os sistemas podem gerar procedimentos que lhes permitam se ajustar de forma eficiente aos seus ambientes. Para que a adaptabilidade não seja arbitrariamente restringida no início, o sistema de adaptação deve ser capaz de gerar qualquer método ou procedimento capaz de uma definição efetiva. [...] O processo de adaptação pode, então, ser visto como uma modificação do processo de geração à medida que as informações sobre o ambiente se acumulam. Isso sugere que os sistemas adaptativos sejam estudados em termos de classes associadas de procedimentos de geração – a classe associada em cada caso sendo o repertório do sistema adaptativo. [...] A adaptação, então, baseia-se na seleção diferencial de programas de supervisão. Ou seja, quanto mais "bem-sucedido"for um programa de supervisão, em termos da capacidade de seus programas de resolução de problemas produzirem soluções, mais predominante ele se tornará (em números) em uma população de programas de supervisão. (Holland, 1962, p.297-298) (tradução nossa). [12]

Dessa forma, Holland buscou nas décadas seguintes desenvolver uma teoria com os procedimentos necessários para criação de máquinas e programas computacionais que pudessem resolver problemas gerais com alta capacidade de adaptação a ambientes com-

[11] John Henry Holland foi um bacharel em Matemática pelo Instituto de Tecnologia de Massachusetts, com mestrado na mesma área. Em 1959, é a primeira pessoa a receber o título de Ph.D (Doutor) da Universidade de Michigan em Ciência da Computação. Holland foi um dos responsáveis pela criação do primeiro Centro de Estudos de Sistemas Complexos, em Michigan. Na segunda metade da década de 1980, se torna uns dos principais membros do Instituto Santa Fe, no Novo México, que pesquisava fenômenos não-lineares. Da conquista de seu título de Doutor até seu falecimento, em 9 de agosto de 2015, permaneceu como professor na Universidade de Michigan lecionando nas disciplinas de Economia, Biologia e Ciência da Computação (Britannica, 2022).

[12] *[...] to outline a theory of automata appropriate to the properties, requirements and questions of adaptation. The conditions that such a theory should satisfy come from not one but several fields: It should be possible to formulate, at least in an abstract version, some of the key hypotheses and problems from relevant parts of biology, particularly the areas concerned with molecular control and neurophysiology. [...] In general terms, it is a study of how systems can generate procedures enabling them to adjust efficiently to their environments. If adaptability is not to be arbitrarily restricted at the outset, the adapting system must be able to generate any method or procedure capable of an effective definition. [...] The process of adaptation can then be viewed as a modification of the generation process as information about the environment accumulates. This suggests that adaptive systems be studied in terms of associated classes of generation procedures–the associated class in each case being the repertory of the adaptive system. [...] Adaptation, then, is based upon differential selection of supervisory programs. That is, the more "successful"a supervisory program, in terms of the ability of its problem-solving programs to produce solutions, the more predominant it is to become (in numbers) in a population of supervisory programs.*

plexos através de alguns operadores que selecionariam, dentre um conjunto de programas ou máquinas, o mais apto à sobrevivência. Em outras palavras, os mais bem-sucedidos em encontrar uma solução para um dado problema, tinha maior chance de ser escolhido e novamente testado.

Segundo Back et al. (1997, pg.A2.3:4), Holland "[...] estabeleceu uma agenda ampla e ambiciosa para compreender os princípios subjacentes dos sistemas adaptativos – sistemas que são capazes de automodificação em resposta às suas interações com os ambientes em que devem funcionar" (tradução nossa)[13]. Para Goldberg (1989, p. 1), Holland tinha dois objetivos principais em sua pesquisa: uma explicação bem estruturada e fundamentada dos processos de adaptação de sistemas naturais e a construção de programas computacionais de sistemas artificiais com a finalidade de incorporar importantes mecanismos destes sistemas, sendo o foco da pesquisa a robustez dos algoritmos, ou seja, o equilíbrio entre a eficiência e a eficácia necessária para a sobrevivência de possíveis soluções em muitos ambientes diferentes.

Diferentemente dos estudos apresentados anteriormente de algoritmos aplicados em modelos de previsão ou otimização, Holland se debruçou sobre modelos evolutivos para entendimento de sistemas adaptativos robustos naturais e projeção de elementos adaptativos em um dado contexto. Para o autor, em sistemas adaptativos naturais, as características relativas à competição e inovação entre os agentes ao longo destes processos naturais eram fundamentais para que os indivíduos se adaptassem ao ambiente e às mudanças imprevistas que este aplicava sobre os indivíduos (Back et al., 1997).

O grande deferencial da linha desenvolvida por Holland, foi a incorporação de diversos conceitos da genética (fenótipo, genótipo, reprodução, cruzamento, mutação, entre outros) que se demonstraram altamente eficientes e performáticos na resolução de problemas complexos utilizando poucos dados de entrada, assim como os processos de busca para encontrar soluções ótimas apresentavam inovações em relação à resolução de problemas e aprendizados dos elementos no ambiente ao longo dos processos evolutivos. Dessa forma, como veremos a seguir, a partir de suas primeiras publicações, a Teoria de Sistemas Adaptativos foi se tornando o objeto de estudo de cada vez mais pesquisadores, conquistando um importante espaço no campo de pesquisa da Inteligência Artificial e absorvendo novas ideias das diversas aplicações realizadas, em um grande número de áreas, nas décadas seguintes.

2.4.1 A Evolução e as Contribuições Gerais para a Área

Bagley (1967) publica a primeira aplicação, externa ao grupo de pesquisa liderado por Holland, utilizando os conceitos da Teoria de Sistemas Adaptativos. É em seu trabalho que aparece pela primeira vez o termo "algoritmo genético" (Bagley, 1967, pg.133). Em sua tese, Bagley elabora um programa de testes controlável para aplicação de tarefas a um jogo de *hexapawn*[14]. Com um AG que busca por um conjunto de parâmetros

[13] *Holland set out a broad and ambitious agenda for understanding the underlying principles of adaptive systems—systems that are capable of self-modification in response to their interactions with the environments in which they must function.*

[14] Hexapeão, em tradução livre, é um jogo para dois jogadores jogado em um tabuleiro 3 x 3, onde cada jogador começa com 3 peões e tem o objetivo de chegar até a outra extremidade ou impedir o avanço de seu

através de funções de avaliação do jogo realizado e os compara com outros algoritmos de correlação, o programa ajusta os novos procedimentos conforme os resultados de cada jogo. Segundo Goldberg (1989, pg.93), Bagley introduz dois conceitos importantes à Teoria: um mecanismo de ajuste da adaptação que reduz as chances de uma solução ser escolhida muito cedo, havendo uma "super solução" que domina as demais, e que aumenta as chances de seleção de soluções com maior valor de aptidão nas gerações seguintes, aumentando a competitividade; a noção de um AG que se autorregula, sugerindo a codificação das probabilidades de cruzamento e mutação dentro do cromossomo (solução).

No mesmo período, com ênfase nos aspectos biológicos, Rosenberg (1967), utilizando um AG, simula uma população de organismos monocelulares em busca dos organismos com as propriedades bioquímicas mais ajustadas a uma estrutura genética arbitrária. Em sua tese, com o cálculo de funções não lineares, Rosenberg faz a primeira aplicação de um AG multiobjetivo que busca o valor máximo de adaptação de uma estrutura específica através da minimização do impacto de organismos com baixo valor de adaptação.

Absorvendo os novos métodos implementados por Bagley e Rosenberg, Cavicchio (1970) implementa AGs em problemas de seleção de subrotina e problemas de reconhecimento de padrões, inovando com a inserção de um método que ele chamou de esquema de pré seleção, onde uma prole com um bom valor de aptidão substitui seu pai com o objetivo de manter uma população mais diversificada. Com isso, Cavicchio apresenta um dos primeiros estudos sobre formas elitistas de seleção e adaptação de taxas de cruzamento e mutação. No mesmo ano, Weinberg (1970), assim como Rosenberg, aplica AGs para a busca dos cromossomos que melhor se adaptam à uma estrutura genética. Contudo, diferentemente dos trabalhos citados anteriormente, Weinberg sugere a aplicação de um AG para a ajuste dos parâmetros de um AG de nível inferior, chamando o AG de nível mais alto de um programa genético não adaptativo e o AG de nível inferior, onde os parâmetros são ajustados, de programa genético adaptativo. Em outras palavras, o AG de nível superior determina a direção em que o AG de nível inferior evoluirá. Em 1967, Holland começa a elaborar as primeiras ideias de esquemas de sistemas adaptativos e, em 1969, demonstra aplicações de alocação ótima utilizando o modelo de k-bandidos armados (Holland apud Back et al., 1997) .

É apenas em 1971 que AGs são aplicados a problemas reais. Hollstien (1971) implementa AGs há um conjunto de 14 problemas de otimização matemática em busca de qual ou quais soluções melhor otimizam o controle de retorno digital de uma determinada planta de engenharia. Uma de suas principais contribuições, foi a observação do impacto negativo que uma população pequena (no caso de sua tese, uma população de 16 indivíduos) tem na robustez do algoritmo e, com isso, recomendando a utilização de populações maiores para futuros testes de otimização. Frantz (1972) leva em consideração a recomendação de Hollstien. Em seu trabalho, Frantz aplica AGs em uma população de tamanho $n = 100$ vetores de comprimento $l = 25$, com o objetivo de estudar os impactos que a ordem dos genes em um cromossomo, assim como a mudança de posição dos blocos de construção internos do cromossomo, tinha na otimização de AG. As funções configuradas por Frantz para avaliar tais impactos foram não foram robus-

oponente.

tas o bastante na captação dos impactos, não demonstrando, assim, maiores variações de performance de um ordenamento em relação à outro, considerando o experimento inconclusivo. Contudo, como apontado por Goldberg (1989, pg.102), Frantz faz duas importantes contribuições através da introdução do operador de complemento parcial e do operador de cruzamento de múltiplos pontos.

Em 1975, Holland reuni as ideias desenvolvidas em sua pesquisa até aquele momento e publica seu principal trabalho, o livro "*Adaptation in Natural and Artificial Systems*" (Holland, 1975). No mesmo ano, De Jong (1975)[15] publica sua tese intitulada "*Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*", uma das publicações mais importantes no campo de estudos dos AGs. Segundo Goldberg (1989, pg.107), "O estudo de De Jong permanece um marco no desenvolvimento de algoritmos genéticos devido à combinação da Teoria de Esquema de Holland e seus próprios experimentos computacionais cuidadosos"[16] (tradução nossa).

De Jong via os AGs como uma ferramenta poderosa e bastante flexível na resolução de um grande número de problemas complexos. Em sua tese, contudo, foca na aplicação de AGs para a otimização de funções, onde descreve minuciosamente os processos realizados pelos AGs na resolução de problemas de otimização, além de refinar e simplificar a configuração de outros elementos importantes como o ambiente e os critérios de desempenho.

Em um ambiente de testes, De Jong implementou AGs em 5 problemas de minimização de função, avaliando a efetividade de cada AG através de duas métricas: um medidor de convergência e um medidor de convergência contínuo. A primeira foi chamada de medida de performance *off-line* (convergência) enquanto a segunda de medida de performance *on-line* (contínua). O uso de cada métrica dependerá do contexto de aplicação, onde, em uma aplicação *off-line*, era realizada a simulação de avaliação de funções, onde a função com o melhor resultado (média dos melhores valores de performance em cada momento do tempo) seria a escolhida após alcançar um critério de parada predeterminado. Em relação a uma aplicação *on-line*, diferentemente da anterior, a avaliação das funções não é realizada através de simulações, mas sobre dados reais, obtendo, como resultado (média de todas as funções avaliadas), uma recompensa conforme o desempenho da função avaliada pela métrica.

Após definido o ambiente de testes e as métricas de desempenho, De Jong implementou uma primeira versão de um AG que chamou de $R1$ (*reproductive plan 1*), similar ao AG simples apresentado na Seção 3.3, onde, seguindo um processo aleatório, 3 operadores principais são aplicados sobre uma população de cadeias codificadas de caracteres, sendo eles: i) Operador de reprodução ou seleção; ii) Operador de cruzamento; iii) Operador de mutação. Nesta primeira versão, eram inseridos quatro parâmetros de entrada como o tamanho da população (n), a probabilidade de cruzamento (p_c), a probabilidade

[15] Kenneth Allan De Jong foi um dos alunos mais célebres de Holland. Sob sua orientação, recebe seu título de doutor em Ciência da Computação pela Universidade de Michigan em 1975. Com suas pesquisas, De Jong contribuiu para áreas dos AGs, EC, *machine learning* e sistemas adaptativos complexos. Atualmente, é professor emérito em Ciência da Computação na Universidade de Goerge Mason, Virgínia, e um dos principais pesquisadores em CE.

[16] *De Jong's study still stands as a milestone in the development of genetic algorithms because of its combination of Holland's theory of schemata and his own careful compuational experiments.*

de mutação (p_m) e a lacuna de geração (G)[17]. Os resultados deste primeiro experimento demonstraram algumas características importantes do AG aplicado. Populações maiores tendem a apresentar uma performance melhor em ambientes simulados, em relação à dados reais, devido à alta diversidade entre os indivíduos. No entanto, populações pequenas têm capacidade de adaptação mais rapidamente, apresentando um bom desempenho nas gerações iniciais. O operador de mutação é um importante elemento que diminui a perda de alelos ao longo das gerações, mantendo uma diversidade populacional suficiente para melhoria contínua das populações. Em relação ao operador de reprodução, o autor sugeriu a aplicação de uma probabilidade $p_c = 0,6$ como um valor que equilibrasse a performance tanto no contexto de uma aplicação *off-line* quanto *on-line*. Em outras palavras, para cada 10 indivíduos em uma população, 6 seriam selecionados para cruzamento.

No plano $R2$ (um modelo elitista), De Jong identificou que em superfícies unimodais, o modelo apresentou um crescimento significativo na performance em aplicações *on-line* e *off-line*. Contudo, cruzando estes resultados com o experimento do modelo $R5$ (um modelo de fator de aglomeração), foi identificado que o elitismo nos AGs faz com que o modelo melhore sua performance em relação à busca local em detrimento à busca por ótimos globais. No modelo $R3$ (um modelo de valor esperado), De Jong faz uma outra importante contribuição. Com o objetivo de reduzir os erros estocásticos da seleção aleatória, o autor inseriu no modelo o cálculo do número esperado de proles de cada geração, indicando o quão distante o número de indivíduos simulados ficou do resultado esperado.

Com isso, a segunda metade da década de 1970 foi um marco no campo de pesquisa dos AGs. O interesse pela área foi crescendo progressivamente nos anos seguintes. Em 1976, pesquisadores da Universidade de Michigan, da Universidade de Pittsburgh, entre outras, organizaram a primeira conferência de sistemas adaptativos. Em 1979, Holland, De Jong e Sampson escalam o tamanho da conferência através de um financiamento para realizarem uma conferência interdisciplinar em sistemas adaptativos, que acabou sendo realizado em 1981 na Universidade de Michigan. Em 1985, na Universidade de Pittsburgh, ocorre a primeira Conferência Internacional sobre Algoritmos Genéticos (ICGA) que, devido ao sucesso, passou a ser semestral nos próximos anos. Em 1989, surge a Sociedade Internacional de Algoritmos Genéticos (ISGA), organização responsável pelo financiamento de conferências e atividades das áreas de pesquisas relacionadas aos AGs, tendo como uma de suas primeiras conquistas a criação de uma das principais conferências da comunidade, sobre os Fundamentos dos Algoritmos Genéticos (FOGA) (Back et al., 1997, pg.A2.3:5).

[17] *Generation gap*, ou lacuna de geração em tradução livre, não será um operador que iremos nos aprofundar nestes trabalho. Contudo, em termos gerais, é um método que permite que uma população não sobreponha a outra, convergindo para um resultado muito rápido.

Capítulo 3

Algoritmos Genéticos

Neste capítulo, procura-se introduzir, aprofundar e discutir os principais componentes, e suas características, para a construção de um algoritmo genético simples.

3.1 Introdução

Um algoritmo genético é uma meta-heurística[1] com finalidades variadas que, conforme citado por Mitchell (1998, pg.27), pode ser dividido em dois campos principais de aplicação: como uma técnica de busca de possíveis soluções de problemas tecnológicos e como um modelo computacional que objetiva simular sistemas naturais em busca de respostas como, por exemplo, um maior entendimento dos processos evolutivos e de seleção natural. No primeiro, a gama de aplicações é extensa, encontrando-se diversos trabalhos em problemas das ciências exatas e ciências sociais; em relação ao segundo, encontram-se diferentes empregos de algoritmos genéticos nas áreas das ciências biológicas. Neste trabalho, serão abordadas as aplicações relativas a problemas nas ciências sociais, em especial, nas ciências econômicas.

Relativo às ciências econômicas, dentre as diversas aplicações encontradas na literatura, buscar-se-á abordar três principais: a busca por soluções ótimas de problemas de otimização, a procura por padrões ou características que podem ser entendidas como inovações em um dado processo ou contexto e, por último, o aprendizado que pode ser extraído dos processos de um AG através da aplicação de seus operadores e interação entre os elementos analisados. No presente capítulo, com o objetivo de abordar cada operador e processo de um AG simples, utilizar-se-á um exemplo de aplicação que busca encontrar uma solução de um problema de otimização. As demais aplicações apresentadas acima serão aprofundadas no capítulo seguinte.

De forma geral, um AG funciona da seguinte forma: definido um problema, o algoritmo realiza uma busca por uma solução global em um espaço de possíveis soluções, onde, ao realizar essa busca, ele pode encontrar ou não uma solução ótima. Inicialmente, estas possíveis soluções são construídas de forma aleatória e combinam suas

[1] Heurística é uma técnica construída para encontrar, gerar ou selecionar uma solução para um problema específico dentro de um problema maior definido, sendo a meta-heurística, então, uma heurística de alto nível que busca por heurísticas para resolução de um dado problema principal.

características entre si, formando novas possíveis soluções. Tais características determinarão como e quais serão os atributos combinados ou ignorados neste processo, que é realizado de forma iterativa[2], onde cada iteração termina com novas soluções construídas através da troca de informações entre os elementos. Estas sucessivas iterações terminam quando o objetivo predefinido é alcançado ou o algoritmo não encontra nenhuma solução que satisfaz o problema. Um AG básico, ou seja, que contenha pelo menos a utilização dos operadores de reprodução, cruzamento e mutação, é de simples construção e parametrização. Embora simples, é capaz de procurar por soluções em um espaço de busca muito maior e um desempenho acima dos programas convencionais Holland (1992, pg.66) e, conforme cita Goldberg (1989, pg.2), podem ser divididos em três métodos de busca principais: baseado em cálculo, enumerativo e aleatório ou randômico.

O primeiro tipo, é uma heurística de busca local e é subdividido em duas classes: indireto e direto. Através da resolução de, normalmente, um conjunto de equações não lineares, as técnicas de busca indireta procuram por extremos locais resultantes de uma função objetivo igual a zero. Em outras palavras, conforme a direção definida pelo vetor gradiente, analisa-se se o ponto de aclive ou declive, que não possui mais nenhuma variação para qualquer direção, assume o valor de máximo ou mínimo com base nas funções calculadas. Em relação aos métodos diretos, com uma solução arbitrária inicial, são feitos repetidos incrementos nesta solução e, caso essa mudança apresente um resultado melhor, é feito um novo incremento, e assim sucessivamente, até não haver mais nenhuma melhoria, levando-se em consideração as restrições do problema.

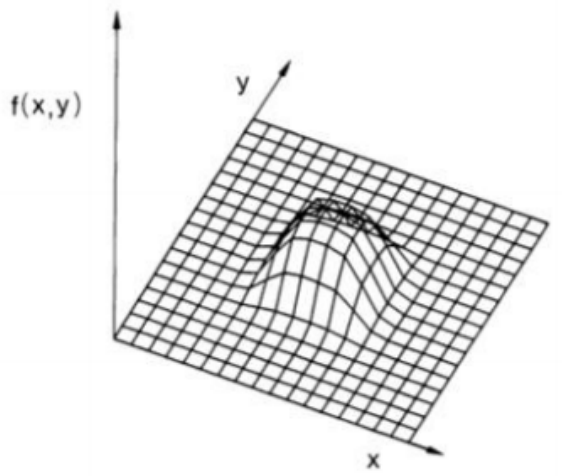
O segundo método, uma heurística de busca global, inicia buscando pelos valores da função objetivo em cada um dos pontos dentro de um espaço de busca delimitado ou um espaço de busca infinito discreto, parando ao encontrar um extremo global que se apresente como uma possível solução para o problema a ser resolvido.

Por último, o método de busca aleatória, também uma heurística de busca global, utiliza algum tipo de aleatoriedade ou probabilidade na busca por ótimos globais dentro de um espaço definido.

Goldberg (1989, pg.5) também cita que os métodos acima apresentados, com um exemplo de extremo fictício ilustrado na Figura 3.1, foram perdendo a relevância ao longo do tempo, pois são métodos de busca úteis em um número muito pequeno de situações, não apresentando uma eficácia e eficiência satisfatórias na resolução de um espectro grande de problemas, de diferentes níveis de complexidade, conforme a realidade demanda. Dessa forma, os algoritmos genéticos foram se destacando por sua robustez na resolução de um número considerável de problemas de otimização através da adaptação para os sistemas artificiais de alguns conceitos da biologia e da genética, sobretudo, o conceito darwiniano de evolução dos indivíduos mais aptos.

[2]Na programação, é uma ação que se repete sucessivamente até atingir um resultado desejado ou alguma ordem de término.

FIGURA 3.1: EXEMPLO DE UM EXTREMO LOCAL



FONTE: Goldberg (1989, p.3)

Dessa forma, nas seções subsequentes, serão explorados os principais conceitos, operadores e processos para a construção de um algoritmo genético simples.

3.2 Algoritmos e Linguagem de Máquina

Para Cormen et al. (2009, pg.2), um algoritmo é um "procedimento computacional bem definido que recebe um valor, ou um conjunto de valores, como entrada e produz algum valor, ou conjunto de valores, como saída"[3] (tradução nossa). Não é diferente com um AG, que, dada uma função de otimização, depende de um conjunto de parâmetros de entrada para encontrar um, ou mais de um, ponto ótimo, ou próximo ao ótimo, como valor, ou valores, de saída.

Sendo o desenho do AG uma simulação de um processo natural, é necessário que haja uma codificação dos valores de entrada para que o sistema computacional possa processá-los. Ou seja, é necessário realizar uma transformação das informações que os humanos interpretam, modificam e constroem, com base nos estudos dos processos naturais, em uma linguagem que o computador entenda, chamada linguagem ou código de máquina.

Como apresentado por Fedeli et al. (2009, pg.42), atualmente, os computadores utilizam apenas dois operadores básicos em sua linguagem, sendo eles os dígitos binários 0 e 1, também conhecidos como bit (do inglês, *binary digit*). O bit é a menor informação armazenada pela memória e processada pela unidade central de processamento (UCP) de um computador, onde, em um determinado espaço da memória, é armazenado um e somente um bit (0 ou 1) por vez. De forma mais ilustrativa, pode-se entender o 0

[3] [...] a well-defined computational procedure that takes some values, or set of values, as input and produces some value, or set of values, as output.

como uma instrução para um corte de energia ou uma informação relativa à negação, impedimento ou inexistência; do contrário, o 1 é uma instrução para passagem de energia ou uma informação relativa à positivação, desimpedimento ou existência

Existem várias formas de agrupamento destes dígitos, havendo interpretações e funções diferentes levando-se em consideração a quantidade e a ordem dos bits nestes agrupamentos, sendo o *American Standard Code for Information Interchange (ASCII)* o método de armazenamento e representação de caracteres mais utilizado pelas plataformas de computadores pessoais (Fedeli et al., 2009, pg.46), onde cada dígito é formado pela junção de 8 bits[4], unidade conhecida como byte (do inglês, *binary term*). Dessa forma, quando o dígito "A", por exemplo, é enviado para o computador, o ASCII o codifica, enviando a sequência 01000001 para armazenamento na memória. O mesmo processo acontece de forma inversa, quando o computador gera algum dígito que precisa ser representado graficamente.

Com isso, por questões relativas à facilidade de interpretação e desempenho computacional, os parâmetros de entrada de um AG são codificados em sequências de 0s e 1s, onde cada sequência tem origem de um determinado alfabeto [5], que permite realizar a codificação e decodificação dos valores de entrada e saída, respectivamente, do algoritmo aplicado.

3.3 Componentes de um Algoritmo Genético

A forma como os parâmetros de um AG são definidos impacta diretamente na robustez de seu funcionamento e das possíveis soluções encontradas. Dessa forma, serão explorados a seguir os principais elementos, e suas características, para a construção de um AG simples. Para isso, será utilizado como exemplo o Problema da Caixa Preta[6] apresentado por Goldberg (1989, p.8).

3.3.1 Alelo e Locus

Conforme abordado anteriormente (ver Seção 3.2), o primeiro passo na construção de um AG é a codificação dos valores de entrada em um conjunto de 0s e 1s. Cada valor, é uma característica binária ou um detector chamado de alelo (equivalente ao gene de um cromossomo na biologia). A posição de cada caractere dentro deste conjunto é chamada de *locus*. Pode-se analisar o locus à parte do gene (ou alelo). Por exemplo, supondo que as características (genes) do cabelo de um ser humano podem ser encontradas no cromossomo 2. Ao analisar os genes relativos ao cabelo dentro deste cromossomo, identifica-se no locus 3 (posição 3) que a cor do cabelo é preta (valor do alelo). Com isso, temos que o valor e a posição de cada elemento nesse conjunto apresentará uma

[4] Originalmente, o conjunto mínimo era de 7 bits Gorn et al. (1963).

[5] Aqui, alfabeto nada mais é que um conjunto finito de algorismos ou caracteres.

[6] Através de uma máquina ou dispositivo que possui um número específico de parâmetros de entrada (interruptores), o Problema da Caixa Preta consiste em obter o maior valor de saída possível com base na configuração destes parâmetros. O objetivo é analisar como um determinado sistema fechado relaciona os valores de entrada e a resposta, com base no estímulo destes valores, de saída.

característica específica, seja olhando para um único valor ou para um subconjunto de valores.

3.3.2 Cadeia de Caracteres

O conjunto codificado dos valores de entrada de um AG é chamado de cadeia de caracteres[7] ou vetor. Comparativamente, na biologia, o cromossomo é uma estrutura constituída por DNA (ácido desoxirribonucleico), sendo cada DNA composto por um número de genes que, por sua vez, são responsáveis por definirem a(s) característica(s) de um indivíduo. Dessa forma, temos que o vetor de um AG é um elemento artificial análogo ao cromossomo nos sistemas naturais. Como exemplo, o vetor com os possíveis valores da Caixa Preta pode ser representado da seguinte forma:

TABELA 3.1: CADEIA DE CARACTERES OU VETOR CONTENDO 5 GENES

Característica Binária (Gene)	Interruptor 1	Interruptor 2	Interruptor 3	Interruptor 4	Interruptor 5
Valor da Característica Binária (Alelo)	0	1	1	0	1
Posição ou Índice do Gene (Locus)	1	2	3	4	5
Referência Caixa Preta	Desligado	Ligado	Ligado	Desligado	Ligado

FONTE: adaptado de Goldberg (1989, p.11)

3.3.3 População Inicial e Gerações

Inicialmente, o AG começa a realizar sua busca sobre um conjunto aleatório de indivíduos (cadeias de caracteres ou vetores), chamado de população inicial. Através dessa busca, o algoritmo analisa cada um dos elementos da população, identificando quais são os mais aptos a sobreviver levando-se em consideração os demais indivíduos e o ambiente em que estão localizados. Esta estrutura composta por vários indivíduos com genes específicos se manterá por toda a vida do organismo (na genética, esta estrutura é chamada de genótipo) e, à medida que as gerações (iterações) passam, os indivíduos interagem entre si e com o ambiente criando, assim, um novo organismo. Na genética, a nova estrutura resultante deste processo é conhecida como fenótipo.

[7] Do inglês, *string*.

TABELA 3.2: POPULAÇÃO DE TAMANHO 4

Indivíduo (População)	Interruptor 1	Interruptor 2	Interruptor 3	Interruptor 4	Interruptor 5
Vetor 1	0	1	1	0	0
Vetor 2	1	1	0	0	0
Vetor 3	0	1	0	0	0
Vetor 4	1	0	0	1	1

FONTE: Elaborado pelo autor.

3.3.4 Paisagem de Aptidão, Sobrevivência do Mais Apto e Função Objetivo

O ambiente em que os indivíduos (vetores) estão localizados é um elemento importante que compõe os processos de um AG, sendo um dos responsáveis por direcionar a escolha de quais indivíduos irão passar para a próxima geração e quais irão morrer. Ou seja, o algoritmo irá analisar cada indivíduo num dado espaço procurando os mais aptas a sobreviverem ao ambiente em que estão localizados com base em suas características. Este espaço de busca é conhecido como paisagem ou horizonte de aptidão[8], definido por Langdon and Poli da seguinte maneira:

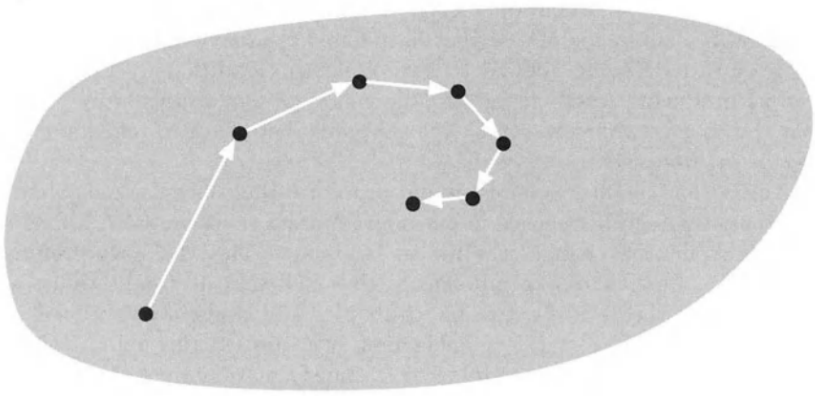
> Na forma mais simples, uma paisagem de aptidão pode ser vista como um gráfico onde cada ponto na direção horizontal representa todos os genes em um indivíduo (genótipo) correspondente àquele ponto. A aptidão daquele indivíduo é plotada como a altura. Se os genótipos podem ser visualizados em duas dimensões, o gráfico pode ser visto como um mapa de três dimensões, que pode conter montes e vales. Grandes regiões de baixa aptidão podem ser consideradas pântanos, enquanto grandes regiões de alta aptidão, que se mantêm num mesmo nível, podem ser consideradas como platôs. (Langdon and Poli, 2002, pg.4) (tradução nossa). [9]

Como ilustrado na Figura 3.2, um AG possui um espaço de busca predeterminado (área cinza) contendo a população inicial a ser analisada, representada na imagem pelo ponto preto mais inferior, à esquerda. Com base nas características binárias (genes) da população ou estrutura (genótipo), o AG determinará quais indivíduos passarão para a próxima geração (seta branca), formando uma nova população. Esse processo acontece sucessivamente até que, com base no estado (fenótipo) de cada nova população, seja encontrada a que possui as maiores chances de sobrevivência, sendo a possível solução para um dado problema de otimização.

[8] do inglês, *fitness landscape*

[9] *In its simplest form a fitness landscape can be seen as a plot where each point in the horizontal direction represents all the genes in an individual (known as its genotype) corresponding to that point. The fitness of that individual is plotted as the height. If the genotypes can be visualised in two dimensions, the plot can be seen as a three-dimensional map, which may contain hills and valleys. Large regions of low fitness can be considered as swamps, while large regions of similar high fitness may be thought of as plateaus.*

FIGURA 3.2: PAISAGEM DE APTIDÃO REPRESENTADA EM 2 DIMENSÕES

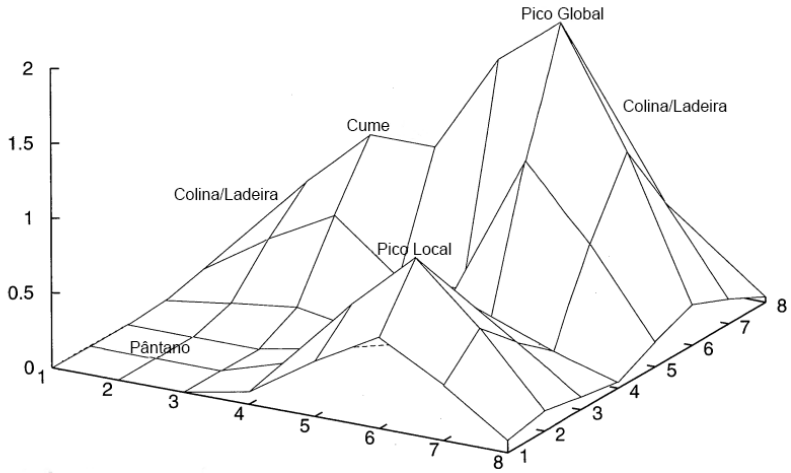


FONTE: Langdon and Poli (2002, p.5)

Desse modo, como foi possível observar, o processo de busca pela população inicial, que é formada de forma randômica, e que determina como será formada a população na geração seguinte, possui grande peso da aleatoriedade, porém de forma diferente do tipo de busca aleatória ou randômica apresentada anteriormente (ver Seção 3.1). Um dos grandes diferenciais do AG é a possibilidade de ter certo controle sobre seus processos aleatórios. Isso acontece, pois o algoritmo observa os dados históricos, que surgem a partir de cada nova geração, assim como segue alguns direcionamentos nas busca por novos pontos com maior chance de sobreviver ao ambiente. Estes direcionamentos são construídos por uma função objetivo (na biologia, chamada de função de aptidão[10]), sendo os seus parâmetros o que definirá quais serão os critérios de sobrevivência ou aptidão para que um ou mais indivíduos de uma população sigam para a geração seguinte, processo representado graficamente pelos pontos mais elevados na paisagem de aptidão na Figura 3.3.

[10]do inglês, *fitness function*.

FIGURA 3.3: PAISAGEM DE APTIDÃO REPRESENTADA EM 3 DIMENSÕES



FONTE: adaptado de Langdon and Poli (2002, p.5)

3.3.5 Reprodução ou Seleção

Dado um primeiro conjunto de indivíduos, chamado de população inicial, o AG precisa determinar quais destes indivíduos têm maior probabilidade de se adaptar ao ambiente e passar seus genes para a próxima geração através de seus descendentes. A esse processo é dado o nome de reprodução ou seleção.

A reprodução é um processo em que os indivíduos são replicados, copiados, conforme seus valores de aptidão, que são calculados pela função objetivo. Os indivíduos que possuem os maiores valores de aptidão têm maior probabilidade de criarem novos descendentes, passando, dessa forma, parte dos seus genes para a população seguinte. Nos sistemas naturais, o que determinará se um indivíduo passará por esse processo é sua capacidade de sobreviver a qualquer elemento que o possa matar antes que consiga se reproduzir, sendo ele um predador, uma doença, etc. (Goldberg (1989, p.11))

Conforme o exemplo da Caixa Preta apresentado na Seção 3.3, foi sugerida uma população inicial, criada aleatoriamente, com os indivíduos (interruptores) 01101, 11000, 01000 e 10011 (ver Tabela 3.1).

O primeiro passo será calcular o valor de aptidão de cada indivíduo, sua participação na população como um todo e ordená-los por valor de aptidão (Tabela 3.3).

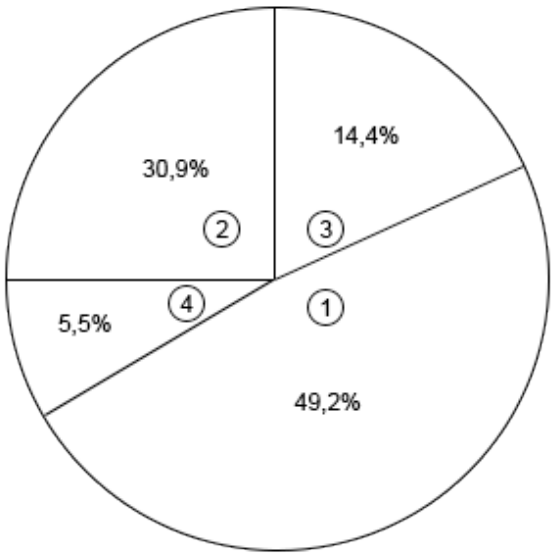
TABELA 3.3: VALORES DE APTIDÃO DOS INDIVÍDUOS DA POPULAÇÃO INICIAL

Índice	Indivíduo	Valor de Aptidão	Valor de Aptidão Acumulado	Participação em Relação à População	Participação Acumulada
1	11000	576	576	49,2%	49,2%
2	10011	361	937	30,9%	80,1%
3	01101	169	1106	14,4%	94,5%
4	01000	64	1170	5,5%	100%
Total		1170		100%	

FONTE: adaptado de Goldberg (1989, p.11)

Com base no peso de cada indivíduo frente à população, o operador da reprodução pode ser aplicado através de uma roleta[11] contendo 4 partes, cada parte relativa a um indivíduo, com proporções equivalentes às suas participações no total da população (Figura 3.4).

FIGURA 3.4: ROLETA ENVIESADA DO OPERADOR DE REPRODUÇÃO



FONTE: adaptado de Goldberg (1989, p.11)

A reprodução ocorre a cada girada na roleta. No caso do nosso exemplo, 4 vezes. Sendo assim, os indivíduos selecionados pelo operador de reprodução são copiados de

[11] O método da roleta é um dos vários possíveis na aplicação do operador de reprodução.

forma ordenada, sem nenhuma alteração, para um reservatório temporário de acasalamento[12] conforme vão sendo selecionados. Ou seja, os que tiverem maior valor de aptidão, logo maior chance de sobrevivência, possuem maiores chances de criarem um número maior de descendentes, passando parte de suas características para a próxima geração. Para o nosso exemplo, será utilizada uma taxa de reprodução de 100%, com todos os indivíduos sendo replicados. Esta taxa pode variar conforme o problema de otimização a ser resolvido.

3.3.6 Cruzamento

No reservatório de acasalamento, os indivíduos irão combinar suas características entre si, processo que é também realizado de forma aleatória. Supondo que, ao girar a roleta, os indivíduos com maior valor de aptidão foram selecionados primeiro que os indivíduos com menor aptidão, formando, assim, os seguintes pares:

TABELA 3.4: PARES FORMADOS NO RESERVATÓRIO DE ACASALAMENTO

Par 1	Indivíduo 1: 11000
	Indivíduo 2: 10011
Par 2	Indivíduo 3: 01101
	Indivíduo 4: 01000

FONTE: Elaborado pelo autor.

Para aplicação do operador de cruzamento, assim como no operador de reprodução, também pode ser utilizada a roleta para o sorteio dos pontos onde os indivíduos serão divididos para cruzamento. Porém, agora, contendo quatro partes iguais, uma para cada ponto entre o locus de cada gene, assim como cada giro equivalerá a um cruzamento por par. Deste modo, ao girar a roleta, vamos supor que tenham sido sorteados os números 2 e 3. Todos os caracteres à direita dos pontos sorteados são trocados entre os indivíduos dos pares formados, o que será representado pelo símbolo separador "|" (Tabela 3.5) e, após o sorteio dos pontos de cruzamento, é realizada a recombinação dos pares (Tabela 3.6).

[12] Do inglês, *mating pool*.

TABELA 3.5: PARES FORMADOS NO RESERVATÓRIO DE ACASALAMENTO COM SEPARADORES DE CRUZAMENTO

Par 1	Indivíduo 1: 1.1|0.0.0
	Indivíduo 2: 1.0|0.1.1
Par 2	Indivíduo 3: 0.1.1.0|1
	Indivíduo 4: 0.1.0.0|0

FONTE: Elaborado pelo autor.

TABELA 3.6: PARES FORMADOS NO RESERVATÓRIO DE ACASALAMENTO APÓS O CRUZAMENTO

Par 1	Indivíduo 1: 1.1|0.1.1
	Indivíduo 2: 1.0|0.0.0
Par 2	Indivíduo 3: 0.1.1.0|0
	Indivíduo 4: 0.1.0.0|1

FONTE: Elaborado pelo autor.

As novas subcadeias de caracteres, ou subvetores, são chamadas de blocos de construção. A Hipótese dos Blocos de Construção de um AG[13] será aprofundada mais à frente. Por agora, fica-se com a analogia apresentada por Goldberg:

> (...) considere uma população de n cadeias de caracteres (...), onde cada uma é uma *ideia* completa ou uma prescrição para realizar uma tarefa particular. As subcadeias de caracteres de cada cadeia de caracteres (ideia) contém várias *noções* do que é importante ou relevante para a tarefa. (...) Então, a ação de cruzamento com reproduções prévias é especulada sobre novas ideias construídas através dos blocos de construção de alto desempenho (noções) de tentativas passadas. (...) A troca de noções para formar novas ideias é intuitiva se nós pensarmos em termos do processo de *inovação*. (Goldberg, 1989, pg.13) (tradução nossa). [14]

[13] Do inglês, *Building block hypothesis*.

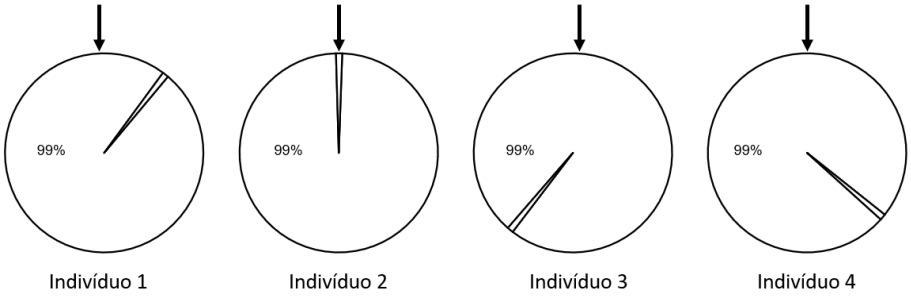
[14] *(...), consider a population of n strings (...) over some appopriate alphabet, coded so that each is a complete idea or prescription for performing a particular task (...). Substrings within each string (idea) contain various notions of what is important or relevant to the task. Viewed in this way, the population contains not just a sample of n ideas; rather, it contains a multitude of notions and rankings of those notions for task performance. (...) Thus, the action of crossover with previus reproduction speculates on new ideas constructed form high-performance building blockis (notions) of past trials. (...) Exchanging of notions to form new ideas is appealing intuitively, if we think in termos of the process of innovation*

3.3.7 Mutação

Após a aplicação dos operadores apresentados, ainda é necessário aplicar um último operador, o de mutação[15]. Os operadores de reprodução e cruzamento mantêm as características, informação genética, dos indivíduos mais aptos, porém essa aptidão é relacionada exclusivamente à geração corrente. Dessa forma, o AG pode convergir para uma solução mais rápido que o desejado e perder genes importantes ao longo do processo (genes que estão localizados em locus específicos em cada indivíduo). Portanto, o operador de mutação é uma garantia secundária de que haja diversidade nas populações que serão geradas ao longo das gerações, permitindo que o AG procure por soluções mais robustas. Ou seja, através da paisagem de aptidão, o algoritmo irá buscar de forma mais ampla pelo maior pico possível (ótimo global), diminuindo as chances de apresentar como solução picos menores (ótimos locais).

Em relação ao processo em si, a mutação é tão simples quanto a reprodução e o cruzamento. Utilizando novamente a roleta, será escolhido aleatoriamente, levando em consideração uma taxa, qual indivíduo sofrerá ou não uma mutação. Iremos nos aprofundar nesse ponto futuramente, mas, a título de exemplo, vamos utilizar uma taxa de mutação de 1%. Será realizado o giro da roleta para cada um dos indivíduos com o objetivo de selecionar qual ou quais sofrerão uma mutação. Supondo-se que o indivíduo 2 seja sorteado, temos:

FIGURA 3.5: SELEÇÃO ALEATÓRIA DE UM INDIVÍDUO PARA MUTAÇÃO

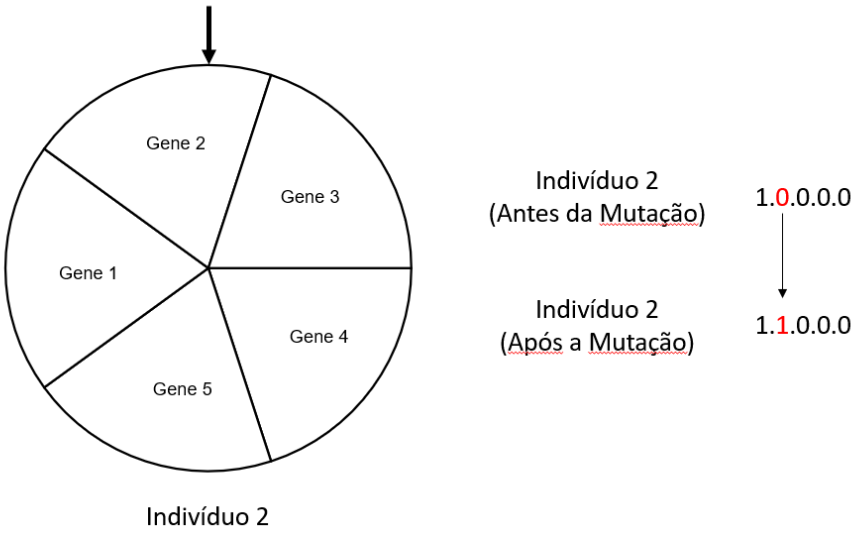


FONTE: Elaborado pelo autor.

Após a seleção dos indivíduos que sofreram a mutação, será definido, também de forma aleatória, em qual gene essa mutação ocorrerá. No caso do indivíduo 2, iremos supor que o gene no locus 2 foi o selecionado:

[15]. O operador de mutação não precisa, necessariamente, ser aplicado na última parte do processo. Isso irá variar conforme as estratégias de construção do AG.

FIGURA 3.6: MUTAÇÃO DO INDIVÍDUO SELECIONADO PARA MUTAÇÃO



FONTE: Elaborado pelo autor.

Como podemos observar no Tabela 3.7, através dos processos de reprodução, cruzamento e mutação é gerada uma nova população, com indivíduos contendo novas características, onde a segunda geração melhorou em relação à primeira, vide o valor total de aptidão de 1530 em comparação aos 1170 da primeira geração, o que a torna uma solução incrementalmente melhor, sendo o indivíduo 1 o que possui as características que mais auxiliarão na resolução do problema da Caixa Preta.

TABELA 3.7: VALORES DE APTIDÃO DOS INDIVÍDUOS DA POPULAÇÃO INICIAL E POPULAÇÃO NA GERAÇÃO SEGUINTE

População 1

Índice	Indivíduo	Valor de Aptidão	Valor de Aptidão Acumulado	Participação em Relação à População	Participação Acumulada
1	11000	576	576	49,2%	49,2%
2	10011	361	937	30,9%	80,1%
3	01101	169	1106	14,4%	94,5%
4	01000	64	1170	5,5%	100%
Total		1170		100%	

População 2

Índice	Indivíduo	Valor de Aptidão	Valor de Aptidão Acumulado	Participação em Relação à População	Participação Acumulada
1	11011	729	729	47,6%	47,6%
2	11000	576	1305	37,6%	85,3%
3	01100	144	1449	9,4%	94,7%
4	01001	81	1530	5,3%	100%
Total		1530		100%	

FONTE: Elaborado pelo autor.

Portanto, após apresentados todos os elementos da composição de um AG, assim como seus processos e operadores, fica mais claro como o algoritmo trabalhada para apresentar uma possível solução de um determinado problema. Claro, no exemplo da Caixa Preta, o indivíduo que apresentará as características que o definem como o mais apto, será o que contiver os genes 11111, porém, não sabemos qual será a geração em que esse indivíduo, ou solução, será criado, assim como não foram consideradas restrições para aplicação do AG, assunto que será tratado no capítulo seguinte.

Capítulo 4

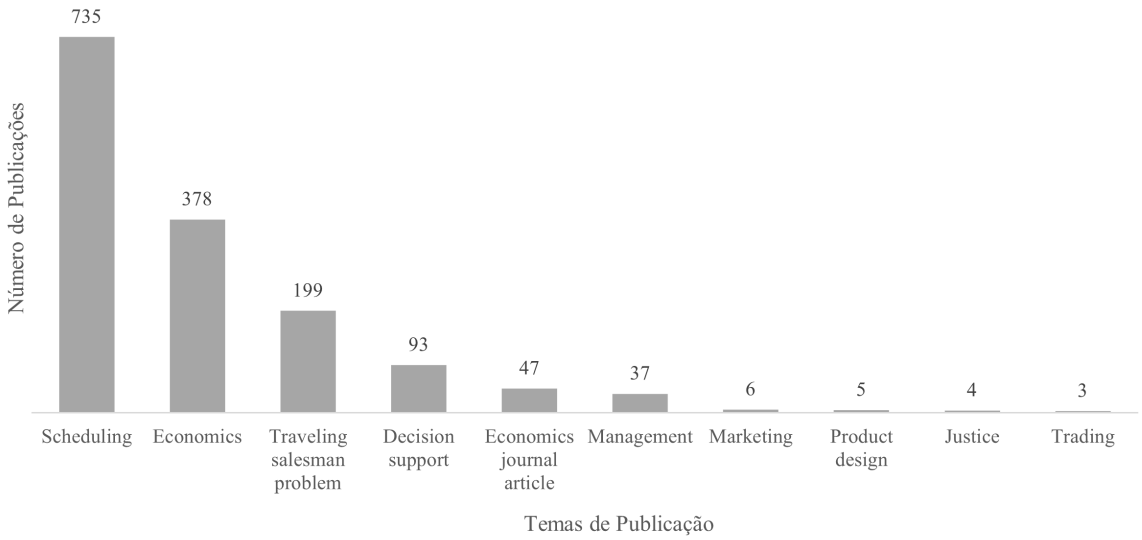
Aplicação de Algoritmos Genéticos na Economia

Neste capítulo, busca-se realizar uma breve apresentação de AGs aplicados à problemas de diversas áreas da economia, assim como um aprofundamento em alguns trabalhos de destaque na literatura.

4.1 Introdução

Desde os primeiros estudos realizados por Holland na primeira metade da década de 1960, os AGs se tornaram uma área importante de pesquisa dentro do campo de Inteligência Artificial, atraindo diversos pesquisadores e se demonstrando um modelo bastante robusto para resolução de problemas complexos. Devido às suas características, os AGs, naturalmente, tornaram-se objeto de estudos e aplicações em problemas voltados a contextos econômicos. Alander and Nissen (2000), realizaram um estudo referente ao número de publicações sobre AGs de 1960 até 2007, onde, analisando diversos periódicos e bancos de dados de publicações científicas, os autores contabilizaram 20.598 trabalhos relacionados à aplicação de AGs, sendo 1.515 em Economia (aproximadamente 7,3%). As publicações foram divididas em 10 temas principais, conforme demonstrado na Figura 4.1:

FIGURA 4.1: NÚMERO DE PUBLICAÇÕES COM APLICAÇÃO DE AGS EM ECONOMIA DE 1960-2007, POR TEMA



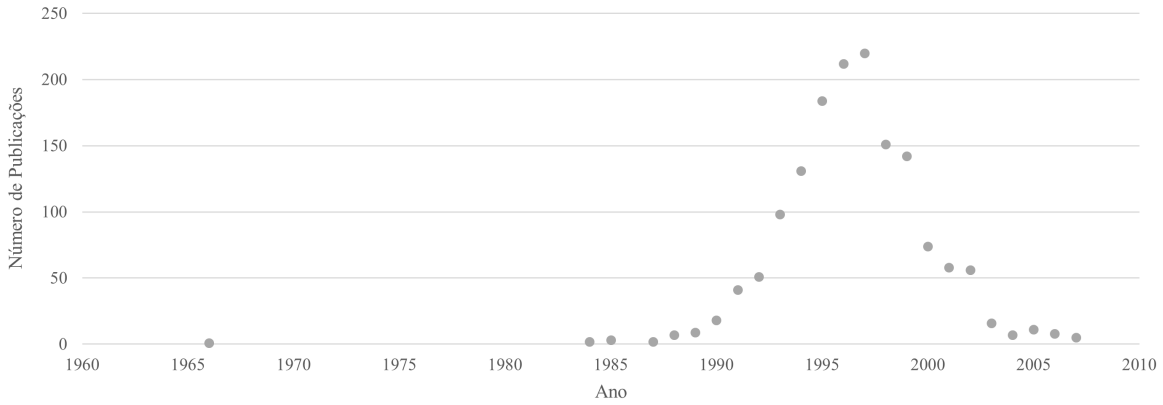
FONTE: adaptado de Alander and Nissen (2000, p.5)

Alguns pontos interessantes podem ser observados. Podemos inferir que, ao menos, 62% dos trabalhos foram aplicados a problemas de otimização (*scheduling*[1] e *traveling salesman problem*[2]), resultado que não surpreende se olharmos a evolução da pesquisa dos AGs e suas aplicações (vide Seção 2.4). Quando observamos a distribuição das publicações ao longo do tempo, é possível notar que o número de pesquisas publicadas se concentrou, em grande parte, na década de 1990, com aproximadamente 82% do total (Figura 4.2).

[1]Scheduling, ou agendamento, em tradução livre, é um problema voltado à otimização da alocação de recursos em processos que precisam ser realizados com uma determinada frequência.

[2]Traveling salesman problem, ou problema do caixeiro viajante, em tradução livre, é um problema voltado à otimização de rotas, principalmente, em processos logísticos.

FIGURA 4.2: NÚMERO DE PUBLICAÇÕES COM APLICAÇÃO DE AGS EM ECONOMIA DE 1960-2007, POR ANO



FONTE: adaptado de Alander and Nissen (2000, p.6)

Não pretendemos, neste trabalho, analisar as causas do comportamento apresentado acima. Contudo, vale destacar que as publicações em Economia têm uma importante participação na área de pesquisa dos AGs, assim como uma gama de temas que carece de estudos e exemplos de aplicações, se apresentando como um campo com muitas oportunidades de pesquisa. Com isso, pretende-se, nas seções subsequentes, apresentar alguns exemplos de publicações voltadas a diferentes problemas econômicos, sobretudo, da segunda metade da década de 1980 até o o fim da década de 1990.

4.2 Comportamento Econômico Adaptativo

Uma das primeiras publicações com enfoque na análise e experimentação de AGs em problemas econômicos vem de John Miller, com participação de Holland, em artigo intitulado "*Artificial Adaptive Agents in Economic Theory*" (Holland and Miller, 1986). Os autores tinham dois objetivos principais com este trabalho: demonstrar que alguns comportamentos econômicos são análogos ou similares a comportamentos biológicos de ecossistemas naturais e que estes comportamentos podem ser modelados e analisados (Holland and Miller, 1986, pg.1). Em 1991, Holland e Miller publicam outro trabalho argumentando como os agentes artificiais adaptativos, simulados por AGs, por exemplo, demonstram uma excelente performance e robustez para resolução de problemas em sistemas adaptativos complexos. Como apontado por Holland and Miller (1991):

> Muitos sistemas econômicos podem ser classificados como sistemas adaptativos complexos. Tal sistema é complexo em um sentido especial: (I) consiste em uma rede de agentes que interagem (processos, elementos); (ii) apresenta um comportamento dinâmico e agregado que emerge das atividades individuais dos agentes; e (iii) seu comportamento agregado pode ser descrito sem um conhecimento detalhado do comportamento dos agentes individuais. Um agente em tal é adaptativo se satisfaz um par adicional de critérios: pode ser atribuído um valor (desempenho, utilidade, recompensa, aptidão ou similar); e o agente se comporta de modo a aumentar esse valor ao longo do tempo. Holland and Miller (1991, p.365) (tradução nossa). [3]

Para apresentar alguns exemplos de aplicação do algoritmo em ambientes complexos, buscando captar o comportamento dos agentes, vamos nos aprofundar em algumas implementações realizadas no trabalho de Miller e Holland de 1986. Os AGs foram aplicados em diversos contextos econômicos distintos com o objetivo de analisar os resultados de um modelado adaptativo relativo ao comportamento, por exemplo, da demanda de um consumidor, sob incerteza, da estrutura de um mercado, entre outros. Abaixo, iremos nos aprofundar em alguns destes experimentos.

Na primeira aplicação, é realizada a implementação de um AG sobre um problema simples de demanda em uma economia contendo um único consumidor, com a finalidade de comparar diretamente um modelo padrão de otimização da utilidade[4] e um modelo adaptativo[5] elaborado para resolução do problema. A experimentação consistiu na análise dos resultados de maximização da utilidade por cada um dos métodos, onde foram realizadas 30 simulações, com um conjunto predefinido de 20 comportamentos diferentes conhecidos pelo consumidor. Na 15ª simulação, foi implementada uma variação nos preços para verificar como seria a reação dos comportamentos frente à mudança. Os resultados são apresentados nas figuras Figura 4.3, Figura 4.4 e Figura 4.5 com cada valor médio de utilidade sendo representado por um único ponto (equivalente ao desvio padrão) em cada geração, assim como a variância do modelo adaptativo é representada pela linha contínua em torno dos valores médios de utilidade.

Como é possível observar Figura 4.3, os comportamentos se adaptam rapidamente nas primeiras simulações em busca de aumentar o valor médio de utilidade, assim como a utilidade média converge rapidamente para a maior de utilidade possível. Na simulação 15, os comportamentos que haviam se ajustado ao cenário anterior, são penalizados por ultrapassarem a restrição orçamentária com o impacto da mudança nos preços. Contudo, logo em seguida, os comportamentos se ajustam ao novo contexto, retornando para uma

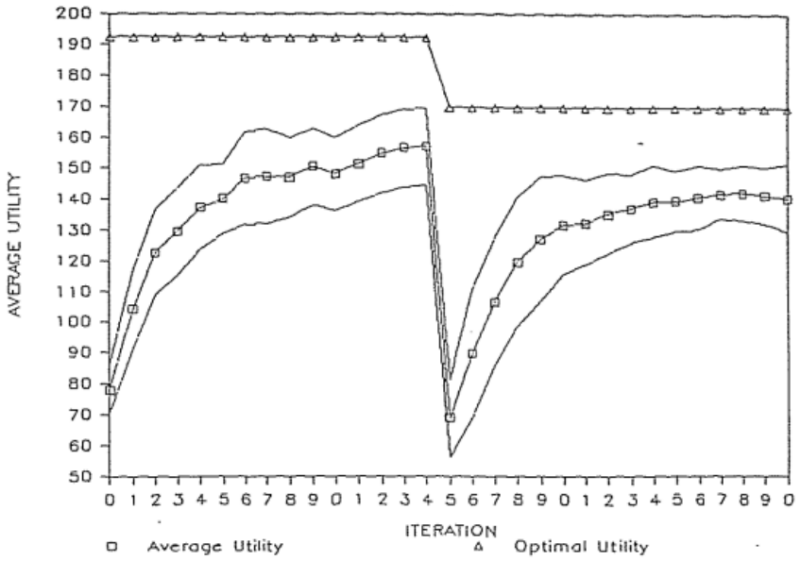
[3] *Many economic systems can be classified as complex adaptive systems. Such a system is complex in a special sense: (I) It consists of a network of interacting agents (processes, elements); (ii) is exhibits a dynamic, aggregate behavior that emerges from the individual activities of the agents; e (iii) its aggregate behavior can be described without a detailed knowledge of the behavior of the individual agents. An agent in such is adaptive if it satisfies an additional pair of criteria: can be assigned a value (performance, utility, payoff, fitness, or the like); and the agent behaves so as to increase this value over time.*

[4] $\max_{x,y} U(x,y)\ s \cdot t \cdot x + p_y y = I$, onde o consumidor está apto a comprar tanto o bem x quanto o bem y. O primeiro é vendido ao preço de mercado de \$1, passando para \$2 a partir da 15ª simulação, e o segundo a $\$p_y$. O consumidor possui uma função de utilidade igual a $U_{(x,y)}$ e está sob uma restrição orçamentária de $\$I$. O consumidor também tem total conhecimento sobre a função de utilidade $U_{(x,y)}$ para todos os valores de x e y, assim sabe otimizar o próprio retorno.

[5] $U_{(x,y)} = u(x,y) - \Gamma(x,y)$, sendo o comportamento do consumidor representado como um vetor $\{x,y\}$ (produtos disponíveis), a função de utilidade como $u(x,y)$ e a função de penalidade de violação da restrição orçamentária como $\Gamma(x,y)$. Dessa forma, o consumidor possui um conhecimento limitado de um conjunto de comportamentos e seus níveis de utilidade correspondentes. Diferentemente da abordagem de otimização padrão, não há uma função de utilidade predefinida, já que a mesma vai se formando ao longo de várias experiências passadas, bem como não possui o conhecimento necessário para maximizar uma função de utilidade arbitrária.

utilidade média mais elevada após a aplicação das penalidades do modelo.

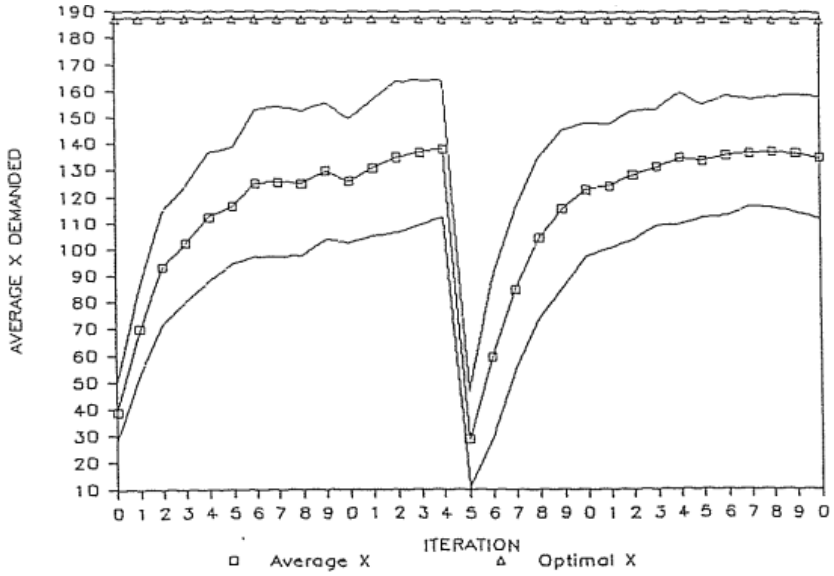
FIGURA 4.3: RESULTADOS DOS VALORES MÉDIOS DE MAXIMIZAÇÃO DE UTILIDADE POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

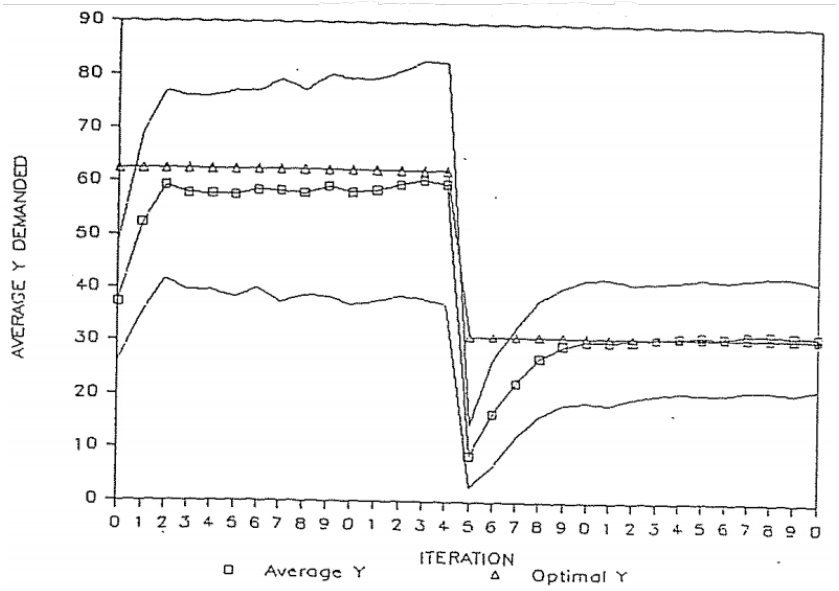
Em relação ao ajuste da demanda do bem x e do bem y frente aos comportamentos do consumidor e ao impacto do preço na 15ª iteração, a demanda de ambos os produtos se ajustaram rapidamente os níveis de ótimo, com destaque para o produto y que alcança logo na 4ª simulação o nível ótimo. Dessa forma, os resultados gerais desta aplicação simples, onde foi necessário poucos ajustes para implementação, indicaram que, embora o modelo adaptativo tenha se apresentado positivamente reativo aos diferentes comportamentos do consumidor, alcançando os valores previsto pela função padrão de otimização, os resultados não acontecem instantaneamente.

FIGURA 4.4: RESULTADOS DOS VALORES MÉDIOS DE MAXIMIZAÇÃO DA DEMANDA DO BEM X POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

FIGURA 4.5: RESULTADOS DOS VALORES MÉDIOS DE MAXIMIZAÇÃO DA DEMANDA DO BEM Y POR SIMULAÇÃO

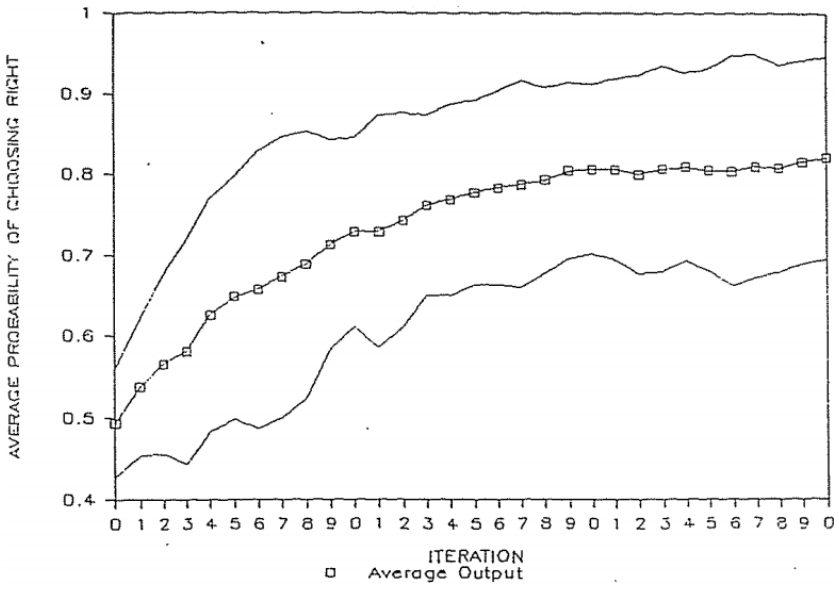


FONTE: Holland and Miller (1986)

A segunda implementação foi realizada sobre um modelo para análise de comportamentos sob um contexto de incerteza. No modelo básico, um experimento empírico de correspondência de probabilidade, os indivíduos precisam escolher entre dois dispositivos que irão retornar uma recompensa. O primeiro dispositivo tem um probabilidade de recompensa de p, quanto o segundo possui uma probabilidade de $1 - p$. Os resultados empíricos apontam que os indivíduos tendem a escolher aleatoriamente um dispositivo com uma probabilidade parecida à probabilidade do dispositivo retornar uma recompensa.

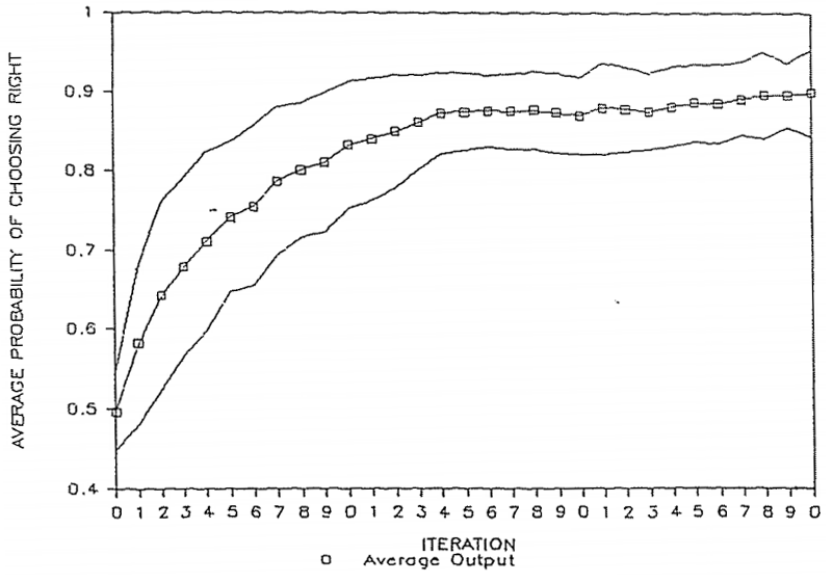
Como apresentado na Figura 4.6, os resultados do modelo de comportamento adaptativo ficaram bastante similares aos dos experimentos empíricos. Assim como no experimento da análise de comportamento da demanda de um consumidor, o modelo leva algumas gerações para atingir o nível ótimo, ajustando-se à probabilidade do indivíduo selecionar um dado dispositivo. Por ser um processo altamente estocástico devido à possibilidade de apenas uma escolha de cada um indivíduo por um dos dispositivos, o modelo apresentou uma variância em relação aos valores médios. Para redução deste efeito, foi realizado um segundo experimento aumentando de apenas uma tentativa de escolha para cinco, em cada uma das gerações. Com este ajuste, além da variância ter diminuído consideravelmente, a probabilidade ótima de escolher o dispositivo correto saiu de, aproximadamente, 80% para 90%, demonstrando que o aumento do número de tentativas de escolha permitiu um melhor ajuste do comportamento do modelo frente aos retornos em cada geração.

FIGURA 4.6: RESULTADOS DO EXPERIMENTO DE CORRESPONDÊNCIA DE PROBABILIDADE COM UMA TENTATIVA DE ESCOLHA, POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

FIGURA 4.7: RESULTADOS DO EXPERIMENTO DE CORRESPONDÊNCIA DE PROBABILIDADE COM CINCO TENTATIVAS DE ESCOLHA, POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

O terceiro experimento foi realizado para analisar a dinâmica da estrutura de um mercado. Diferentemente dos modelos padrões de equilíbrio que, apesar de apresentarem noções gerais das direções para o equilíbrio do mercado, são complexos de implementar e avaliar, os modelos adaptativos são bastante ajustáveis a problemas de estruturas dinâmicas. Como argumenta Holland and Miller (1986):

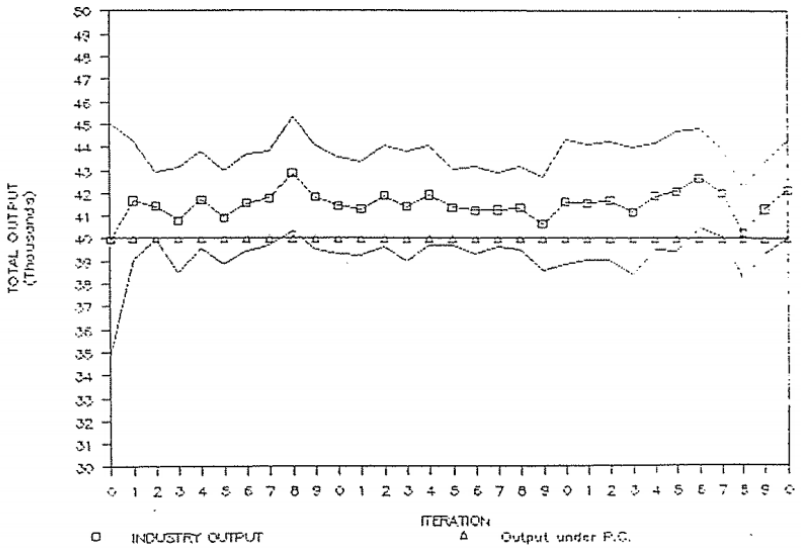
> O modelo de base biológica apresentado aqui fornece uma representação particularmente boa da estrutura de mercado. Os mercados têm paralelos muito próximos nos ecossistemas biológicos. Como organismos que vivem em um mesmo ecossistema, as empresas que operam no mesmo mercado devem competir umas com as outras para sobreviver. As empresas que podem competir com sucesso florescerão e crescerão em tamanho; as empresas que não podem competir acabarão por falir. (Holland and Miller, 1986, p.11) (tradução nossa). [6]

O modelo foi implementado em uma estrutura de mercado de concorrência perfeita, contendo 20 firmas. Neste modelo, quanto maior o lucro da firma, melhor sua performance, assim como foi configurado que, conforme uma firma aumentasse suas perdas, sua performance seria reduzida. Foram realizadas 30 simulações, com variações nos custos na função de produção e na produção total da indústria, bem como utilizou-se o indicador de Herfindahl–Hirschman (H-H) para medir a concentração da indústria em cada simulação.

[6] *The biologically-based model presented here provides a particularly good representation of market structure. Markets have very close parallels in biological ecosystems. Like organisms living in a same ecosystem, firms operating in the same market must compete with one another to survive. Firms which can compete successfully will flourish and grow in size; firms which can not compete will eventually go out of business.*

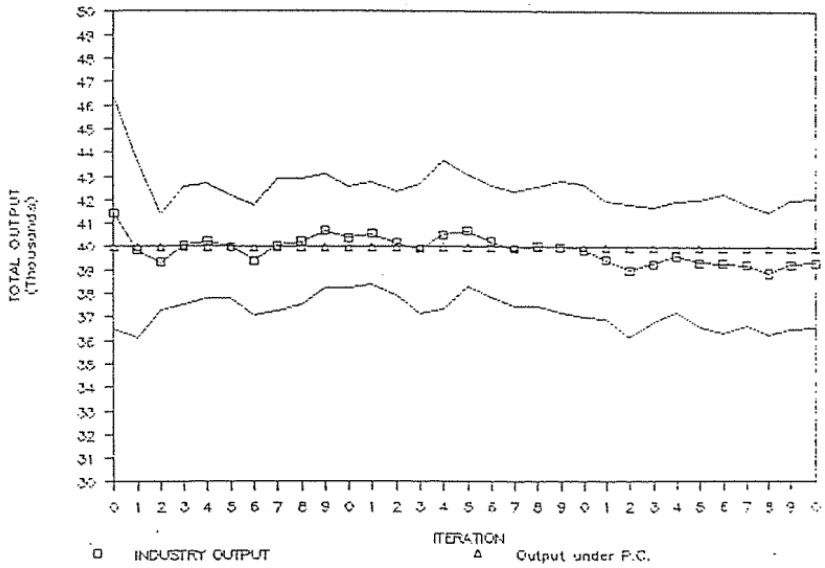
Os resultados das simulações realizadas em um mercado com custos lineares são apresentados na Figura 4.8. O modelo adaptativo apresentou valores de saída acima dos valores previstos sob concorrência perfeita em praticamente todas as simulações, refletindo o incentivo que as firmas possuem em aumentar seus resultados em níveis de preços próximos ao equilíbrio dos preços na indústria. No caso do aumento constante de custos, o modelo apresentou valores bem próximos aos valores esperados pela abordagem do modelo padrão de equilíbrio (vide Figura 4.9).

FIGURA 4.8: RESULTADOS DO EXPERIMENTO EM ESTRUTURAS DE MERCADO COM CUSTOS LINEARES, POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

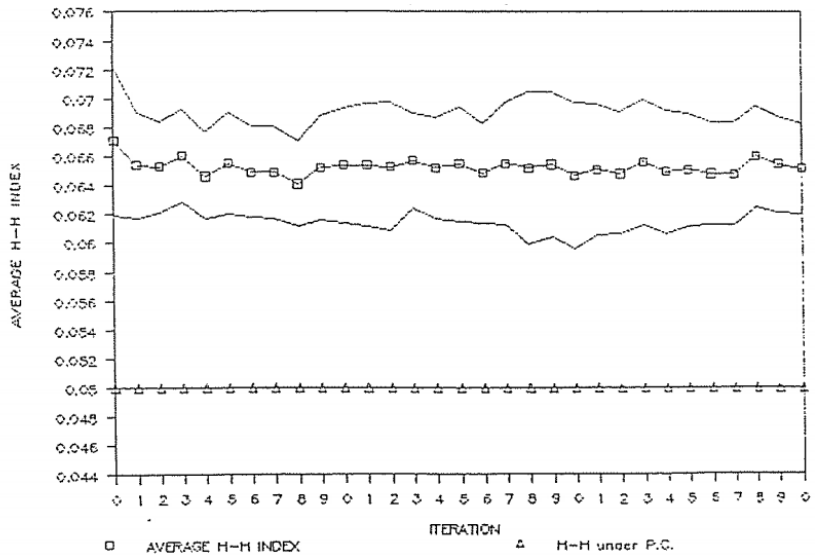
FIGURA 4.9: RESULTADOS DO EXPERIMENTO EM ESTRUTURAS DE MERCADO COM CUSTOS QUADRÁTICOS, POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

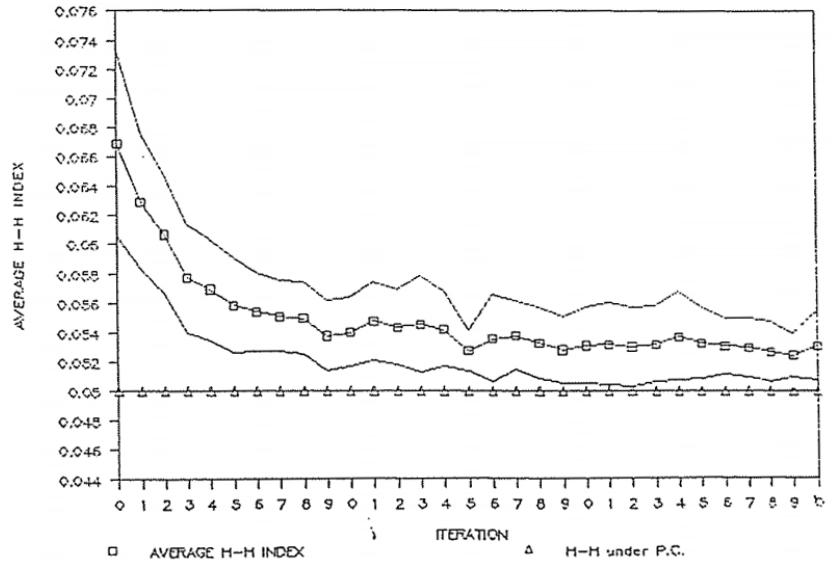
Em relação aos valores do indicador H-H, o mercado sob condições de custos lineares não sofreu grandes variações na concorrência entre as firmas ao longo das simulações, porém apresentando uma concentração acima do mercado sob condições de concorrência perfeita (Figura 4.10). No mercado com aumento constante de custos, o modelo adaptativo inicia as simulações apresentando uma concentração de mercado relativamente elevada, porém rapidamente se ajusta a um nível próximo ao índice perfeito de distribuição das firmas em uma indústria.

FIGURA 4.10: RESULTADOS DO INDICADOR H-H EM ESTRUTURAS DE MERCADO COM CUSTOS LINEARES, POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

FIGURA 4.11: RESULTADOS DO INDICADOR H-H EM ESTRUTURAS DE MERCADO COM CUSTOS QUADRÁTICOS, POR SIMULAÇÃO



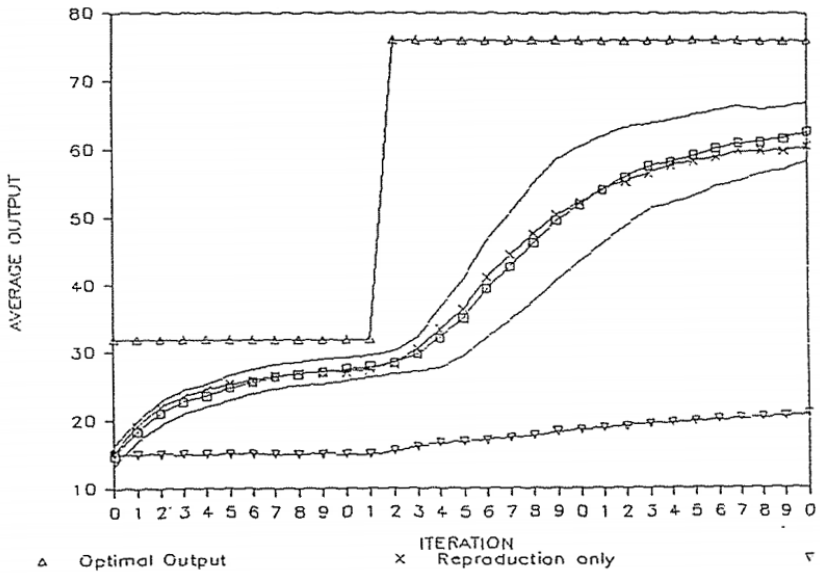
FONTE: Holland and Miller (1986)

Na quarta aplicação, os autores buscaram analisar como o modelo adaptativo se comportaria em um problema de inovação tecnológica. Neste experimento, é possível

observar como algumas características dos AGs são bastante similares aos processos de inovação na dinâmica econômica. Os operadores de seleção e cruzamento, por exemplo, podem ser comparados aos processos que as firmas realizam de replicar os produtos que melhor se adaptaram ao mercado, assim como buscam combinar estes produtos esperando resultados ainda melhores. O operador de mutação, por sua vez, é uma boa analogia para a possibilidade de qualquer tecnologia em um mercado sofrer uma alteração que poderá melhorar ou piorar sua aptidão em relação a um dado contexto.

No modelo elaborado, a indústria, contendo 20 firmas, é simulada através de 30 períodos. De início, as firmas desta indústria escolhem aleatoriamente seus planos de produção, e o mantêm até o 12^{o} período, quando são retiradas as restrições de inovações tecnológicas e as firmas são liberadas para realizar alterações em seus planos de produção. Como pode ser observado na Figura 4.12, as firmas vão lentamente melhorando seus resultados conforme o decorrer dos períodos, chegando próximo ao nível de máximo esperado. Após a retirada das restrições de inovação, a partir da inovação dos primeiros produtos, as demais empresas da indústria irão incorporar a característica inovadora em seu processo de produção. Com isso, a produção total da indústria apresenta um crescimento acelerado entre os períodos 11 e 21, estabilizando o crescimento a partir de então.

FIGURA 4.12: RESULTADOS DO EXPERIMENTO EM UM MERCADO COM PROCESSOS DE INOVAÇÃO, POR SIMULAÇÃO



FONTE: Holland and Miller (1986)

4.3 Aprendizado de Agentes Econômicos

Em 1989, em seu artigo denominado *"Learning by Genetics Algorithms in Economic Enviromnets"*, Arifovic (1989) implementa alguns modelos de AGs em diferentes contextos econômicos: um modelo de empresas competitivas que aprendem a prever o preço de seu produto e o quanto fornecer baseado neste aprendizado; dois modelos de geração sobreposta de moeda fiduciária com oferta de moeda constante e com déficit constante; e, por último, de um modelo que simula um mercado de ativos com agentes informados e desinformados. Exceto a 1ª implementação, os demais modelos possuem conceitos mais avançados, que não foram apresentados no presente trabalho. Dessa forma, iremos nos aprofundar apenas no primeiro problema apresentado pela autora. Os demais experimentos podem ser conferidos em Arifovic (1989, pg.12-24).

Ademais, o interesse de Arifovic em pesquisar modelos de AGs nas dinâmicas econômicas é apresentado da seguinte maneira:

> Meu interesse em AGs e as razões pelas quais os considero mais atraentes do que outros algoritmos para estudar a aprendizagem de agentes econômicos se enquadram em quatro categorias principais, sendo a primeira que os AGs parecem ser mais realistas como modelos de cognição humana, a segunda suas vantagens como maneira de resolver problemas de otimização, a terceira é que se supõe menos competência preexistente exigida em relação a um problema específico, em comparação com outros modelos de aprendizagem em economia e a quarta é sua capacidade de representar o caráter descentralizado da aprendizagem em economia. (Arifovic, 1989, p.1) (tradução nossa). [7]

Arifovic também enumera diversos fatores pelo qual considera os AGs como um modelo de aplicação bastante efetivo e flexível. Para a autora, devido ao processamento paralelo de informações, a competição entre regras alternativas e a seleção das regras com maior desempenho e maior probabilidade de replicação, os AGs genéticos se diferenciam dos demais algoritmos de aprendizado, pois possui uma maior similaridade em relação aos processos cognitivos dos seres humanos. Relativo às vantagens dos AGs na resolução de problemas de otimização, são destacados os seguintes pontos: são menos limitados que outros métodos, pois exploram de forma bastante ampla as similaridades entre os conjuntos de parâmetros devido à codificação implementada sobres tais parâmetros; por realizarem a busca através de uma população de pontos, além de escalar os diferentes picos do horizonte de aptidão simultaneamente, os AGs tem menor probabilidade de apresentar um falso ótimo como solução para o problema, muito comum em métodos ponto-a-ponto que podem convergir para ótimos locais; trabalham com informações de recompensa, sem a necessidade de informações auxiliares; realizam uma busca aleatória através das regiões do espaço de busca utilizando regras de transição probabilística.

Ademais, quando aplicados como modelos de aprendizagem a problemas econômicos, apresentam uma performance satisfatória com poucas informações de entrada. Ao contrário dos outros algoritmos que pressupõem a maximização da função objetivo do

[7] *My interest in GAs and the reasons why I find them more appealing than other algorithms for studying learning of economic agents fall into four main categories, the first being that GAs seem to be more realistic as models of human cognition, the second their advantages as a way of solving optimization problems, the third being that less preexisting competence required in respect to a specific problem is assumed, compared to other learning models in economics and the fourth being their ability to represent the decentralized character of learning in economics.*

agente, os agentes aplicados nos modelos de AGs aprendem a maximizar suas funções de utilidade durante os processos geracionais. AGs também são bastante eficientes em implementações com o objetivo de compreender o aprendizado descentralizado e como esta descentralização é diferente do processo centralizado, onde os agentes reagem de forma similar em um dado contexto.

Em sua primeira aplicação, é simulado um mercado competitivo com n firmas que são tomadoras de preços e produzem os mesmos bens, onde as quantidades produzidas devem ser decididas antes que o preço do mercado seja observado. Conforme apresenta Arifovic (1989), a analogia dos processos realizados pelos AGs em relação aos processos do mercado podem ser o seguinte: o operador de reprodução (o qual reproduz ou selecionada os indivíduos mais aptos) funciona como a replicação que o mercado realiza das firmas que tomaram as melhores decisões de produção, obtendo, assim, maiores lucros. A replicação destas firmas ocorre, pois os investidores buscam realizar seus investimentos nas firmas que dão lucro, ou seja, as demais firmas que não obtiveram muito sucesso, podem ter que sair do mercado. Já os operadores de cruzamento e mutação trabalham como o processo de inovação de um mercado, onde, através da recombinação de bens, ou implementação de novas ideias, gera-se novos produtos ou processos neste mercado.

Para ilustrar melhor o experimento, a autora formulou uma versão das expectativas racionais através de um modelo. O custo de produção de uma firma foi representado por:

$$C_t^i = xq_t^i + \frac{1}{2}y(q_t^i)^2, \tag{4.1}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

onde C_t^i é um custo de produção da firma i no momento t e q_t^i é a quantidade produzida para venda no momento t.

O lucro de uma única empresa, é representado como:

$$\Pi t^i = P_t q_t^i - xq_t^i - \frac{1}{2}y(q_t^i)^2, \tag{4.2}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

No momento $t-1$, a firma escolhe uma quantidade, q_t, para encontrar o valor máximo de $E_{t-1} = x + yq_t^i$ com base na sua experiência adquirida sobre os preços, P_t, dado por

$$E_{t-1}P_t = x + yq_t^i \tag{4.3}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

O preço P_t que prevalece no mercado, no momento t, é dado pela seguinte curva de demanda:

$$Pt = A - B\sum_{i=1}^{n} q_t^i \tag{4.4}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

Em um equilíbrio com expectativas racionais, a expectativa das firmas em torno do preço, P_t, de um bem no momento t é igual ao preço de equilíbrio ($E_{t-1}Pt = P_t$). Dessa forma, $x + yq_t = A - Bnq_t$, sendo $q_t = q_t^i$ para cada firma i, ou

$$q_t = q^* = \frac{A - x}{bn + y} \tag{4.5}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

Assim, foi configurado um AG para identificar se as quantidades produzidas e disponibilizadas para venda pelas firmas que utilizam o AG como esquema de aprendizado convergem para a quantidade contante q^*. No algoritmo, a decisão de produção de cada firma (o quanto ela espera vender), num momento t, é representada por um vetor (firma) de tamanho finito contendo 0's e 1's (regra da decisão), sendo o conjunto destes vetores uma população (indústria). A decodificação do vetor para números decimais representa a quantidade que a empresa decidiu produzir no momento t (geração). A decodificação do vetor pode ser feita com a seguinte fórmula:

$$x_k = \begin{cases} x_{k-1} + 2^{k-1} & \text{para } a_{i,k} = 1 \\ x_{k-1} & \text{para } a_{i,k} = 0 \end{cases} \tag{4.6}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

para $k = 1...l$ e onde $a_{i,k}$ é o k-ésimo alelo no cromossomo (vetor) e x_k é um número real que representa a decodificação do valor do vetor até o alelo k. Após a decodificação é feita a normalização é feita a normalização de x_l através de um coeficiente de normalização como, por exemplo, $qt^i = \frac{xl}{normc}$, onde $normc$ é o coeficiente escolhida para normalização do valor de x_l. Após a definição da quantidade que cada firma irá produzir, é feita a soma de todas as quantidades e o preço de mercado da geração t, P_t, é computada através de $Pt = A - B\sum_{i=1}^{n} q_t^i$. Os custos de produção de cada firma, por sua vez, são calculados associados à quantidade a ser produzida ($C_t^i = xq_t^i + \frac{1}{2}y(q_t^i)^2$).

Definido o preço de mercado P_t, as quantidades que serão produzidas qt^i e os custos de produção C_t^i, o lucro de cada firma é calculado usando $\Pi t^i = P_t q_t^i - xq_t^i - \frac{1}{2}y(q_t^i)^2$. Os lucros, os responsáveis por determinar a probabilidade da empresa continuar no mercado em $t + 1$, são a representação dos valores de aptidão de cada vetor (firma):

$$\mu t^i = \Pi t^i, i = 1 para n \tag{4.7}$$

FONTE: Arifovic (1989, pg.8)

Por último, o AG aplica os operadores de reprodução, cruzamento e mutação, gerando uma nova população ou geração. A partir de uma população inicial (geração 0) gerada aleatoriamente, estes processos se repetem sequencialmente, onde cada ciclo (ou iteração do algoritmo) é uma geração.

Os resultados iniciais não satisfatórios. O algoritmo convergiu rapidamente para um pico, que não o ótimo. Isso pode ter ocorrido, pois, embora os vetores (firmas) aprendem rapidamente como maximizar seus lucros, após esse processo de aprendizagem inicial, os operadores de reprodução e mutação podem interferir negativamente em um vetor com alto valor de aptidão e, caso o algoritmo alcance um ponto ótimo, ele pode entender que é o ponto ótimo global dentro do espaço em que está realizando a busca. Em outras palavras, supondo que numa geração t seja criada a melhor solução possível para o problema proposto (solução ótima), ao ser aplicado o operador de cruzamento e mutação, essa solução ótima pode combinar sua "composição genética" com outra solução distante muito pior, resultando que ambos os indivíduos fiquem com um valor de aptidão pior que o de seus pais, perdendo material genético importante.

Para contornar o problema de convergência, Arifovic implementou um processo que calcula o valor de aptidão de um vetor filho antes que ele efetivamente entre para um próxima geração. Assim, supondo uma reprodução de 100% (2 filhos para 2 pais), se apenas um filho tiver um valor de aptidão maior que seus dois pais, ele substitui o pai com menor aptidão. No caso dos dois filhos terem um valor de aptidão maior que seus pais, ambos os pais são substituídos. Do contrário, onde os dois filhos tem valores menores que seus pais, os pais seguem para a próxima geração, e não os filhos.

Olhando pelo viés econômico, seria o equivalente à firma decidir se a decisão de produção no momento t é melhor ou pior que a decisão no momento $t-1$, ajustando levando em consideração apenas as ideias que podem trazer lucro.

Como pode ser observado na Figura 4.13, foram construídos 5 modelos de AG, onde cada modelo foi simulado sobre 200 gerações. Em todas as 5 gerações, os preços e quantidades definidos pelo AG ficaram muito próximos ao equilíbrio de expectativas racionais, onde a expectativa de todas as firmas do quanto produzir e disponibilizar para venda convergiram para o mesmo valor, que é igual às quantidades ótimos se o preço de mercado for de conhecimento de todos. O mesmo comportamento pode ser observado graficamente, onde foram definidos os parâmetros $A = 100$, $B = 0,02$, $x = 30$ e $y = 1$ (vide Figura 4.14).

FIGURA 4.13: MODELO DE FIRMAS COMPETITIVAS QUE APRENDEM A MAXIMIZAR O LUCRO

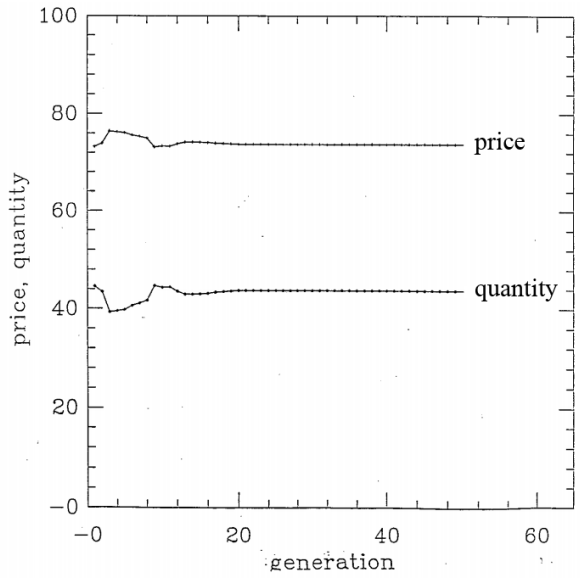
	Model 1	Model 2	Model 3	Model 4	Model 5
A	100	10	100	7	1,000
B	0.02	0.03	0.02	0.003	0.02
X (intercept)	3	2	1	2	200
Y (slope)	1	1	1	1	1
size of the population	20	20	30	30	30
chromosome length	20	20	30	20	30
convergence achieved after generation	45	19	190	38	47
price after convergence*	72.28516	7	62.875	6.587	700
rational expectations** quant. for above price	69.2856	5	61.875	4.587	500
actual quant. after convergence	69.28711	5	61.875	4.587	500
profit (fitness) after convergence	2400.216	12.5	957.031	10.520	124,999.999

*$p_t = A - B \cdot \Sigma\, q^i$ (q^i - individual quantity)

**$Q_t = E_{t-1}P_t - X$

FONTE: Arifovic (1989)

FIGURA 4.14: MODELO DE FIRMAS COMPETITIVAS



FONTE: Arifovic (1989)

Capítulo 5

Exemplo de Aplicação de um Algoritmo Genético Simples

Neste capítulo, busca-se demonstrar a matemática, assim como sua representação programática, por trás de um AG para a resolução de um problema de otimização, levando em consideração os elementos apresentados no Capítulo 3. Para isso, utilizar-se-á uma adaptação do exemplo da Caixa Preta do livro *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, de David E. Goldberg (1989), bem como os processos realizados pelo AG serão construídos em Python, possibilitando maior entendimento prático através de exemplos computacionais em uma das linguagens de programação mais populares da atualidade[1] (código disponibilizado no Apêndice B). Ademais, foi disponibilizado no Apêndice A uma tabela sumarizando os principais termos e conceitos que serão demonstrados no presente capítulo contendo os termos dos sistemas naturais e seus equivalentes nos sistemas artificiais.

5.1 Problema de Valor Máximo em Uma Caixa Preta

Dada uma Caixa Preta[2] com 5 interruptores, onde cada interruptor possui um sinal de entrada 0 ou 1 (desligado ou ligado) e um único sinal de saída como resultado (recompensa) de uma configuração específica, será aplicado um AG para encontrar qual é a configuração que resultará no maior valor de recompensa, considerando o problema de maximização representado pela função

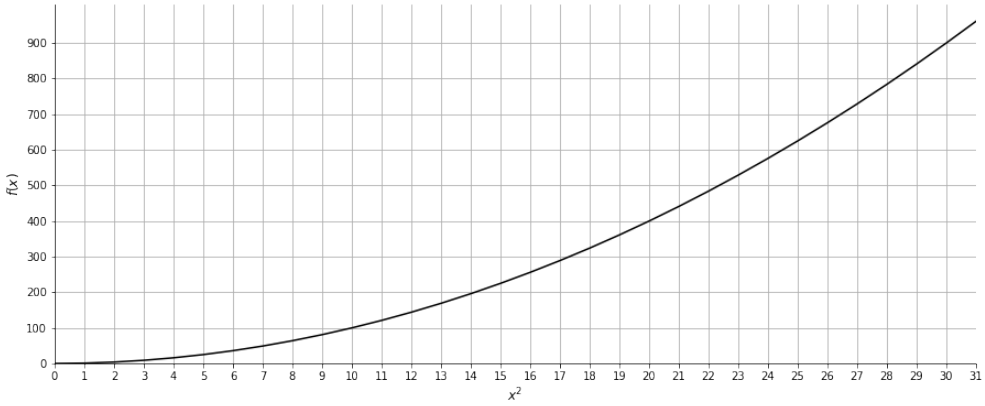
$$f(x) = x^2,$$

onde x pode assumir qualquer inteiro no intervalo $[0, 31]$, função representada na Figura 5.1.

[1] Segundo dados divulgados pelo site TIOBE noa

[2] Ibid, p. 16.

FIGURA 5.1: GRÁFICO DA FUNÇÃO $f(x) = x^2$



FONTE: adaptado de Goldberg (1989, pg.8)

5.2 Construção da População Inicial

O AG é, inicialmente, agnóstico em relação a maioria dos parâmetros que irá utilizar ao longo do processo de um problema de otimização. Como explicado por Goldberg (1989, pg.8), não há a necessidade de trabalhar diretamente com o conjunto de parâmetros de entrada, como outros algoritmos de otimização podem demandar, sendo necessário apenas codificar os valores de entrada em valores binários.

Como visto anteriormente (ver Seção 3.2), o primeiro passo é codificar os parâmetros de entrada do algoritmo, o que será realizado através de um alfabeto binário representado por $V = \{0, 1\}$. Assim, havendo 5 parâmetros de entrada (interruptores com sinal de desligado ou ligado), é possível construir uma representação através de um vetor, ou cadeia de caracteres, de 5 dígitos, que vai de 00000 (inteiro 0) a 11111 (inteiro 31). Esse vetor pode ser expressado como

$$A_i = a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 ... a_n,$$

FONTE: adaptado de Goldberg (1989, pg.25)

onde a notação A representa um vetor (indivíduo) e a representa uma característica específica (gene), subscrita por seu locus, contendo o alelo com valor 0 ou 1. As características não precisam, necessariamente, estarem ordenadas. Para ganho de desempenho, por exemplo, podem ser construídos vetores onde as características estejam fora de ordem em relação às suas posições originais, porém continuam com as subscrições de seus locus como, por exemplo, a variação do vetor anterior

$$A'_i = a_3 a_1 a_5 a_2 a_4 ... a_n,$$

FONTE: adaptado de Goldberg (1989, pg.25)

sendo o apóstrofo (') um símbolo de variação ou derivação de algum vetor específico.

Após a decodificação dos valores de entrada, é formada uma população inicial aleatória de tamanho n. Será considerada uma população inicial de tamanho $n = 5$ vetores, denotada por $\mathbf{A}_j, j = 1, 2, ..., n$, onde o caractere maiúsculo e em negrito $\mathbf{A}$ representa uma população num dado momento t (iteração ou geração). A construção randômica dessa população será realizada através do lançamento de uma moeda honesta ($p_{cara} = p_{coroa} = 50\%$) para cada característica dos 5 vetores, ou seja, 25 lançamentos. Em outras palavras, para cada coroa sorteada, é adicionado um 0 na população e, para cada cara, um 1. Assim, têm-se os seguintes resultados baseados em uma simulação:

TABELA 5.1: POPULAÇÃO INICIAL DE TAMANHO $n = 5$

População Inicial				
$\mathbf{A}_1 = 010110011110111111 0001011$				
Vetor A_{11}	Vetor A_{21}	Vetor A_{31}	Vetor A_{41}	Vetor A_{51}
01011	00111	10111	11100	01011

FONTE: Elaborado pelo autor.

5.3 Cálculo dos Valores de Aptidão

Com a população inicial construída, é necessário decodificar os valores binários de cada vetor, o que pode ser feito através da fórmula

$$a_{ij}{}^{l-1-i}, \tag{5.1}$$

onde l é o tamanho do vetor e a é o valor do alelo no locus i da geração j.

Após a decodificação de cada valor binário, é feita a soma de todos os novos valores do vetor para, posteriormente, aplicar a função objetivo e ordenar os vetores conforme seus valores de aptidão (resultados apresentados na Tabela 5.2). Portanto, para o cálculo do valor total do vetor decodificado, aplica-se:

$$x_n = \sum_{ij=1}^{n} a_{ij}{}^{l-1-i} \tag{5.2}$$

TABELA 5.2: VALORES DE APTIDÃO DOS VETORES DA POPULAÇÃO INICIAL

Nome Vetor	Vetor	Vetor com Alelos Decodificados	Valor de x	Valor de Aptidão ($f(x) = {x_{ij}}^2$)
A_4	11100	$[16, 8, 4, 0, 0]$	28	784
A_3	10111	$[16, 0, 4, 2, 1]$	23	529
A_1	01011	$[0, 8, 0, 2, 1]$	11	121
A_5	01011	$[0, 8, 0, 2, 1]$	11	121
A_2	00111	$[0, 0, 4, 2, 1]$	7	49
		Mínimo	7	49
		Média	16	320,8
		Soma	80	1604
		Máximo	28	784

FONTE: Elaborado pelo autor.

5.4 Operadores de Reprodução, Cruzamento e Mutação

Calculados os valores de aptidão, o passo seguinte será criar uma nova geração de indivíduos através da aplicação dos operadores de reprodução, cruzamento e mutação.

5.4.1 Reprodução

Como visto na Subseção 3.3.5, a reprodução é feita de forma aleatória levando em consideração uma probabilidade de seleção. Há diversas formas de "sortear" os vetores que serão selecionadas para o envio ao reservatório de acasalamento. Para este exemplo, a taxa de reprodução da população será de 100%, ou seja, 5 vetores reproduzidos, e será aplicado o método da roleta para sorteio dos indivíduos que serão selecionados para o reservatório. A probabilidade de reprodução de cada indivíduo será igual ao peso do seu valor de aptidão em relação à população, assim como será calculada a probabilidade de seleção esperada como métrica de comparação, sendo a probabilidade calculada por

$$p_s(x_{ij}) = \frac{f(x_{ij})}{\sum_{ij=1}^{n} f(x_{ij})} \tag{5.3}$$

e a probabilidade esperada por

$$E_s(x_{ij}) = \frac{f(x_{ij})}{\overline{f(x_{ij})}} \tag{5.4}$$

Como é possível observar na Tabela 5.3, a simulação através do método da roleta resultou em 3 reproduções do Vetor A_4, 1 reprodução dos Vetores A_3 e A_5 nenhuma reprodução de A_1 e A_2. O resultado foi próximo ao esperado, com um pequeno desvio

no Vetor A_3, que estava mais próxima de 2 reproduções do que uma, e no Vetor A_4, que estava mais próxima de 2 reproduções do que as 3 resultantes. Contudo, pode-se observar que os resultados seguiram as ideias apresentadas até o momento, onde os indivíduos que possuem maior valor de aptidão em relação ao ambiente, têm uma tendência a serem selecionados para reprodução mais vezes, assim como os que possuem valores baixos de aptidão têm chances de serem selecionados poucas vezes ou não serem selecionados, o que significa a morte destes indivíduos.

TABELA 5.3: RESULTADOS APÓS A REPRODUÇÃO DOS VETORES DA POPULAÇÃO INICIAL

Nome Vetor	Vetor	Valor de x	Valor de Aptidão ($f(x) = {x_i}^2$)	Probabilidade de Reprodução	Nº Esperado de Seleções	Nº de Seleções (Roleta)
A_4	11100	28	784	48,9%	2,44	3
A_3	10111	23	529	33%	1,65	1
A_1	01011	11	121	7,5%	0,38	0
A_5	01011	11	121	7,5%	0,38	1
A_2	00111	7	49	3,1%	0,15	0
	Mínimo	7	49	0,7%	0,15	0
	Média	16	320,88	20%	1,00	1,00
	Soma	80	1604	100%	5,00	5,00
	Máximo	28	784	36,9%	2,44	3,00

FONTE: Elaborado pelo autor.

5.4.2 Cruzamento

O passo seguinte, é a aplicação do operador de cruzamento entre os indivíduos que foram copiados para o reservatório de acasalamento. Este processo será feito em 3 partes, sendo elas: a formação aleatória de pares; a escolha aleatória dos pontos de cruzamento; e, por último, o cruzamento entre os pares e a construção das novos vetores.

5.4.2.1 Formação dos pares

Como foram replicados 5 vetores para o reservatório de acasalamento, se for seguida uma premissa de pares exclusivos, um dos vetores não encontrará um par, logo, não será capaz de efetivamente criar um descendente. Há várias estratégias que podem ser seguidas para lidar com esse ponto. Em relação à população construída no exemplo, será considerada a premissa de que todos os indivíduos façam parte de, ao menos, um par. Ou seja, haverá pelo menos um indivíduo que fará par com dois outros indivíduos da população.

Para a formação dos pares, será sorteado um vetor em seguida do outro, sendo que o último vetor selecionado formará par com o selecionado anteriormente. Estes, vão sendo retirados como opções no sorteio à medida que forem sendo escolhidos. No caso

do último vetor, que ficaria sem par nesse processo, será realizado um novo sorteio para seleção de um dos 4 vetores já selecionados, resultando, assim, na formação de 3 pares para cruzamento. A probabilidade de seleção pode ser representada pela fórmula recursiva

$$p_c(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{se } n-1=1 \\ \frac{1}{n-1} & \text{se } 1 < n \leq n-1 \end{cases} \tag{5.5}$$

5.4.2.2 Escolha do ponto de cruzamento

Com a formação dos pares para cruzamento, será sorteado em qual ponto do vetor ocorrerá a troca de informações. Como ilustrado por Goldberg (1989, p.12), este processo é bastante simples: escolhida uma posição k de forma aleatória, os vetores pares trocarão todas as informações da posição $k+1$ a l. Cada posição k, é localizada entre os valores binários e representada por um inteiro no intervalo $[1, l-1]$, com probabilidade de escolha aleatória do ponto de cruzamento definida por

$$p_k[x_1, x_2] = \frac{1}{l-1} \tag{5.6}$$

5.4.2.3 Formação dos novos vetores

Por último, definido o ponto de cruzamento, os vetores trocam informações entre si, formando vetores filhos. Em outras palavras, utilizando como exemplo os Vetores $A_4 = 11100$ e $A_3 = 10111$, supondo um valor sorteado de $k = 2$ no intervalo $[1, 4]$, todos os valores binários do locus 3 ao 5 serão trocados entre os dois vetores que formam o par, resultando nos vetores $A'_4 = 11111$ e $A'_3 = 10100$, que farão parte da geração seguinte. Os resultados da aplicação do operador de cruzamento nos indivíduos enviados para o reservatório de cruzamento são apresentados na Tabela 5.4.

Como é possível observar, utilizando a premissa de que todos os indivíduos fizessem parte de ao menos um par, o Vetor A_1 foi sorteado como par do Vetor A_0 e do Vetor A_4, Par 2 e Par 3 respectivamente. Para o Par 1, foi selecionado o ponto de cruzamento $k = 3$ localizado entre o locus 3 e 4 e para os Pares 2 e 3, foi selecionado o ponto $k = 2$, entre os locus 2 e 3. Na Tabela 5.5, é possível observar os vetores após o cruzamento entre os pares.

TABELA 5.4: FORMAÇÃO DOS PARES E SORTEIO DO PONTO DE CRUZAMENTO

Id Par	Id Vetores	Vetores	Ponto de Cruzamento Sorteado	Vetores com Ponto de Cruzamento
Par 1	$[A_2, A_3]$	$[11100, 10111]$	3	$[1.1.1\|0.0, 1.0.1\|1.1]$
Par 2	$[A_1, A_0]$	$[11100, 11100]$	2	$[1.1\|1.0.0, 1.1\|1.0.0]$
Par 3	$[A_4, A_1]$	$[01011, 11100]$	2	$[0.1\|0.1.1, 1.1\|1.0.0]$

FONTE: Elaborado pelo autor.

TABELA 5.5: VETORES APÓS APLICAÇÃO DO OPERADOR DE CRUZAMENTO

Id Par	Id Vetores Pais	Vetores Pais	Id Vetor Filho (Após Cruzamento))	Vetor Filho (Após Cruzamento)
Par 1	$[A_2, A_3]$	$[11100, 10111]$	A'_1	11111
Par 1	$[A_2, A_3]$	$[11100, 10111]$	A'_2	10100
Par 2	$[A_1, A_0]$	$[11100, 11100]$	A'_3	11100
Par 2	$[A_1, A_0]$	$[11100, 11100]$	A'_4	11100
Par 3	$[A_4, A_1]$	$[01011, 11100]$	A'_5	01100
Par 3	$[A_4, A_1]$	$[01011, 11100]$	A'_6	11011

FONTE: Elaborado pelo autor.

5.4.3 Mutação

O operador final a ser aplicado, é o de mutação[3]. Como apresentado na Subseção 3.3.7, a mutação é um recurso secundário para evitar que o algoritmo retorne picos locais, ao invés do pico global, como resultado da busca. A taxa de mutação é aplicada bit a bit, o que, em outras palavras, significa que cada elemento da característica de um indivíduo possui uma probabilidade bem pequena de mudança devido à pressão do ambiente. Para o presente exemplo, será considerada a probabilidade de mutação apresentada por Goldberg (1989, pg.25) de 0,1%, ou:

$$p_m(a_{ij}) = 0,001 \tag{5.7}$$

e o número esperado de bits que sofrerão mutação por

$$E_m(a_{ij}) = n \cdot l \cdot p_m(a_{ij}) \tag{5.8}$$

[3]Ibid, p. 24.

Esperava-se que 0.025 $(5 \cdot 5 \cdot 0,001)$ bits sofressem mutação, ou seja, nenhum. Após a aplicação do operador de mutação nos dados simulados, como esperado, nenhum dos 30 bits sofreu mutação.

5.5 Análise dos Resultados

Como podemos observar na Tabela 5.6, a população de vetores da segunda geração apresentaram um valor de aptidão, na média, muito superior aos vetores da população inicial. Como apresentado na Subseção 5.4.1, foi utilizada a premissa de que todos os vetores fariam parte de ao menos um par, sendo que um dos vetores, neste caso, faria parte de dois pares. Com isso, temos que a população 2 aumentou sua prole em relação à população inicial e, por consequência, o valor de aptidão total da população.

Os resultados da simulação de apenas uma geração, foi extremamente promissor. A população, na média, saiu de um valor de aptidão de 320,88 da população inicial para 633,67 na geração seguinte, um salto de aproximadamente 197%. Já na primeira geração, um dos vetores alcançou o valor máximo disponível de maximização da função objetivo (961), apresentando o alelo 1 em todas as posições, assim como o valor de aptidão mínimo de aptidão na população 2 (144) é maior do que o valor de aptidão de 3 vetores da população inicial.

TABELA 5.6: VALORES DE APTIDÃO DA POPULAÇÃO 1 E POPULAÇÃO 2

População 1

Vetor	Valor de x	Valor de Aptidão
01011	28	784
00111	23	529
10111	11	121
10111	11	121
01011	7	49
Mínimo	7	49
Média	16	320,88
Soma	80	1604
Máximo	28	784

População 2

Vetor	Valor de x	Valor de Aptidão
11111	31	961
11100	28	784
11100	28	784
11011	27	729
10100	20	400
01100	12	144
Mínimo	12	144
Média	24,33	633,67
Soma	146	21.316
Máximo	31	961

FONTE: Elaborado pelo autor.

Através dos resultados apresentados, a simulação de um AG simples sobre uma população inicial pode demonstrar, conforme comportamento dos vetores da população 2, o poder de ajuste que os operadores de reprodução, cruzamento e mutação possuem frente ao ambiente, ou problema, em que são implementados. Embora tenha sido uma implementação simples, a configuração do AG foi a mais básica possível, com exceção apenas da adição da premissa dos pares para reprodução, demonstrando como sua estru-

tura permite essa flexibilidade ao longo dos processos e como este modelo se comporta extremamente bem em um problema de otimização.

5.6 Teoria da Cooperação e o Dilema do Prisoneiro

Dentre as inúmeras questões a serem analisadas em contextos econômicos, a cooperação entre os agentes é uma das mais desafiadoras. Um indivíduo pode decidir não cooperar com outro se achar que não receberá nada em troca, ou pode cooperar, porém com a esperança de que a sua atitude lhe dê algum retorno. Sua decisão egoísta ou altruísta perante um outro indivíduo pode definir se, em uma situação específica, terá alguma recompensa ou tomará um prejuízo. Há a possibilidade, ainda, de nada se alterar, ficando exatamente no mesmo estado que no momento prévio à decisão. Esta análise não fica restrita às pessoas expostas a determinadas situações em devem escolher cooperar ou não, a situação se encaixa para diversos tipos de contextos, seja no estudo do comportamento de firmas em uma indústria buscando o maior lucro e participação de mercado, ou de nações que buscam conquistar território e poder econômico perante as demais. Problemas assim fizeram a pesquisa do comportamento cooperativo entre os agentes econômicos um dos campos de estudo mais intrigantes em economia. Assim, Robert Axelrod buscou responder estas e outras questões em seu livro "*The Evolution of Cooperation*" Axelrod (1984):

> A Teoria da Cooperação [...] é baseada em uma investigação de indivíduos que buscam seus próprios interesses sem a ajuda de uma autoridade central para forçá-los a cooperar uns com os outros. A razão para assumir o interesse próprio é que permite um exame do caso difícil em que a cooperação não é completamente baseada na preocupação com os outros ou no bem-estar do grupo como um todo. [...] Um bom exemplo do problema fundamental da cooperação é o caso em que duas nações industrializadas ergueram barreiras comerciais às exportações uma da outra. Devido às vantagens mútuas do livre comércio, ambos os países estariam em melhor situação se essas barreiras fossem eliminadas. Mas se um dos países eliminar unilateralmente suas barreiras, enfrentará termos de troca que prejudicarão sua própria economia. Na verdade, [4] o que quer que um país faça, o outro fica melhor mantendo suas próprias barreiras comerciais. Portanto, o problema é que cada país tem um incentivo para manter as barreiras comerciais, levando a um resultado pior do que seria possível se os dois países cooperassem entre si. Esse problema básico ocorre quando a busca do interesse próprio de cada um leva a um resultado ruim para todos. Para avançar na compreensão da vasta gama de situações específicas que possuem essa propriedade, é necessário um modo de representar o que é comum a essas situações sem se prender aos detalhes únicos de cada uma. Felizmente, existe tal representação disponível: o famoso jogo do **Dilema do Prisioneiro** (destacado por nós). Axelrod (1984, p.6-7) (tradução nossa).

[4] *The Cooperation Theory[...] is based upon an investigation of individuals who pursue their own self-interest without the aid of a central authority to force them to cooperate with each other. The reason for assuming self-interest is that it allows an examination of the difficult case in which cooperation is not completely based upon a concern for others or upon the welfare of the group as a whole. [...] A good example of the fundamental problem of cooperation is the case where two industrial nations have erected trade barriers to each other's exports. Because of the mutual advantages of free trade, both countries would be better off if these barriers were eliminated. But if either country were to unilaterally eliminate its barriers, it would find itself facing terms of trade that hurt its own economy. In fact, whatever one country does, the other country is better off retaining its own trade barriers. Therefore, the problem is that each country has an incentive to retain trade barriers, leading to a worse outcome than would have been possible had both countries cooperated with each other. This basic problem occurs when the pursuit of self-interest by each leads to a poor outcome for all. To make headway in understanding the vast array of specific situations which have this property, a way is needed to represent what*

5.6.1 O Dilema do Prisioneiro

En 1984, Axelrod organizou um Torneio do Dilema do Prisioneiro[5] com o objetivo de reunir vários especialistas na área de teoria dos jogos e identificar qual das estratégias propostas apresentava a melhor solução para um dado problema. O torneio consistia no envio de um programa de computador que implementava uma estratégia para resolução do Dilema do Prisioneiro levando em consideração o histórico de interações para realizar sua escolha entre cooperar ou não no momento presente. A estratégia vencedora do torneio foi a mesma para as duas rodadas disputadas, a estratégia chamada de *TIT FOR TAT*[6], onde um jogador coopera com o outro na primeira interação e, a partir da segunda, toma exatamente a mesma decisão que o outro jogador tomou na jogada anterior, sendo a estratégia mais simples dentre todas as apresentadas.

No Dilema do Prisioneiro apresentado por Axelrod, há dois jogadores que precisam realizar uma única ação de duas possíveis: cooperar ou abandonar. Cada jogador deve realizar uma escolha sem saber o que o outro escolherá. Independente do que o outro jogador decida, a escolha de abandonar possui uma recompensa maior do que de cooperar. Assim, o dilema se apresentada da seguinte forma: se os dois jogadores decidem abandonar, ambos se sairão pior do que se tivessem cooperado. Então, qual a melhor decisão a ser tomada?

Como pode ser observado na Figura 5.2, um dos jogadores escolhe uma linha de decisão, a de cooperar ou a de abandonar. O segundo jogador escolhe, simultaneamente, uma coluna, cooperando ou abandonando. Conforme os resultados demonstrados na matriz a seguir, se os dois jogadores decidem cooperar, ambos se sairão relativamente bem, recebendo a recompensa, R, de 3 pontos cada. Se um jogador acha que o outro irá cooperar, ele fica tentado a abandonar, recebendo 5 pontos, em vez de 3. Por outro lado, se um dos jogadores acha que o outro irá abandonar, a decisão que trará o maior retorno ainda será a de abandonar, recebendo uma recompensa de 1 ponto ao invés de 0.

FIGURA 5.2: O DILEMA DO PRISIONEIRO

		Column Player	
		Cooperate	*Defect*
Row Player	Cooperate	R=3, R=3 Reward for mutual cooperation	S=0, T=5 Sucker's payoff, and temptation to defect
	Defect	T=5, S=0 Temptation to defect and sucker's payoff	P=1, P=1 Punishment for mutual defection

NOTE: The payoffs to the row chooser are listed first.

FONTE: adaptado de Axelrod (1984, p.8)

is common to these situations without becoming bogged down in the details unique to each. Fortunately, there is such a representation available: the famous Prisoner's Dilemma game.

[5]O Dilema do Prisioneiro, foi inventado em 1950 por Merril Flood e Melvin Dresher equanto trabalhavam na Rand Corporation.

[6]Em tradução livre, "olho por olho".

Como apresentado anteriormente, no problema proposto, o abandono sempre resultará em uma recompensa maior que a cooperação. Através dos resultados de todas as estratégias apresentadas no torneio, Axelrod sumarizou quatro propriedades de uma estratégia de sucesso: i) evitar conflitos desnecessários, cooperando, desde que o outro jogador o faça; ii) "provocabilidade" diante de um abandono indesejado do outro; iii) perdão após responder a uma provocação; iv) clareza de comportamento para que o outro jogador possa reconhecer e se adaptar ao seu padrão de ação (Axelrod, 1984, p.20). Ademais, as milhares de estratégias enviadas ao torneio deram visibilidade para outras condições necessárias para que haja cooperação: os jogadores não precisam ser racionais, já que, devido ao processo evolutivo, as decisões bem sucedidas prosperam em relação às demais, não havendo a necessidade por parte do jogador de como ou por quê; Não há, ainda, a necessidade de comunicação entre os jogadores, pois o que importará, em último caso, é a decisão (estratégia) de cada um; Os jogadores não precisam confiar um nos outros, a estratégia de reciprocidade pode tornar a estratégia de abandono improdutiva; As estratégias bem sucedidas fará com que um jogador egoísta tenda a cooperar com o objetivo de obter um retorno satisfatório; e, por fim, o "sistema"cooperativo baseado na reciprocidade funciona por si só, não sendo necessário um "agente"centralizador coordenando as decisões (Axelrod, 1984).

Assim, temos que, para que ocorra a cooperação entre os jogadores, a interação entre eles deve ocorrer por inúmeras vezes ou pelo menos ser desconhecida pelos jogadores. Isso é necessário, pois os jogadores não terão incentivo para cooperação no último lance, pois os dois podem prever o abandono do outro jogador. Na primeira jogada, ambos, que são egoístas, escolherão abandonar, já que é a melhor ação, independente da estratégia que o outro escolherá, porém este número indefinido de interações, em algum momento, implementará a incerteza na estratégia, havendo a possibilidade de surgir, então, uma estratégia cooperativa. Dessa forma, para que a cooperação entre eles seja consistente, o período que ocorrerá no futuro deve ser longo o bastante para que os mesmos dois jogadores se encontrem e a estratégia de abandono seja menos lucrativa que a de cooperar novamente.

Entretanto, quando, em um mundo de indivíduos que não estão dispostos a cooperar, há apenas um indivíduo que esteja, a cooperação não prosperará se não houver outros indivíduos dispostos a retribuir tal cooperação. O que leva ao ponto que a cooperação, provavelmente, surgirá em pequenos grupos de indivíduos que levem a cooperação como estratégia, e não se mantendo com uma atitude egoísta, sendo a estratégia de um indivíduo de cooperar na primeira interação e discriminar entre aqueles que tiveram um comportamento recíproco dos demais. Dessa forma, no caso de ocorrer uma estratégia de nunca ser o primeiro a abandonar, e que esta mesma estratégia seja adotada por praticamente todos os indivíduos do grupo, os que adotaram esta "estratégia legal"obterá melhores retornos e, com isso, "[...] a cooperação mútua pode surgir em um mundo de egoístas sem controle central, começando com um grupo de indivíduos que dependem da reciprocidade. Axelrod (1984, p.69)".

Dessa forma, a cooperação evolui em uma população começando em pequenos grupos através dos indivíduos que usam estratégias "legais"(nunca será o primeiro a abandonar)

e provocativas (descontentamento pela estratégia de abandono adotada pelo outro), fazendo com que o nível geral de cooperação tenda a aumentar e não a diminuir, como sintetizado por (Axelrod, 1984):

> A base da cooperação não é realmente a confiança, mas a durabilidade do relacionamento. Quando as condições estão corretas, **os jogadores podem cooperar uns com os outros através do aprendizado por tentativa e erro sobre possibilidades de recompensas mútuas, através da imitação de outros jogadores de sucesso, ou mesmo através de um processo cego de seleção das estratégias mais bem-sucedidas com um eliminando os menos bem sucedidos** (destacado por nós). Se os jogadores confiam uns nos outros ou não é menos importante a longo prazo do que se as condições estão maduras para que eles construam um padrão estável de cooperação entre si. Axelrod (1984, p.182) (tradução nossa). [7]

[7] *The foundation of cooperation is not really trust, but the durability of the relationship. When the conditions are right, the players can come to cooperate with each other through trial-and-error learning about possibilities for mutual rewards, through imitation of other successful players, or even through a blind process of selection of the more successful strategies with a weeding out of the less successful ones. Whether the players trust each other or not is less important in the long run than whether the conditions are ripe for them to build a stable pattern of cooperation with each other.*

Capítulo 6

Conclusão

Referências

index | TIOBE - The Software Quality Company.

(1993). Editorial Introduction. *Evolutionary Computation*, 1(1):iii–v.

Alander, J. and Nissen, V. (2000). An indexed bibliography of genetic algorithms in economics.

Arifovic, J. (1989). Learning by genetic algorithms in economic environments.

Axelrod, R. (1984). *The Evolution of Cooperation*. Basic, New York.

Back, T., Fogel, D. B., and Michalewicz, Z. (1997). *Handbook of Evolutionary Computation*. IOP Publishing Ltd., GBR, 1st edition.

Bagley, J. D. (1967). *The behavior of adaptive systems which employ genetic and correlation algorithms*. PhD thesis.

Bremermann, H. J. (1962). Optimization through evolution and recombination. page 12.

Bremermann H J, R. M. and S, S. Search by evolution biophysics and cybernetic. page 157–67.

Britannica, E. (2022). John henry holland.

Cavicchio, D. J. (1970). Adaptive search using simulated evolution. Accepted: 2006-02-03T18:12:14Z.

Cormen, T., Leiserson, C., Rivest, R., and Stein, C. (2009). *Introduction to Algorithms, third edition*. Computer science. MIT Press.

De Jong, A. K. (1975). *Analysis of the behavior of a class of genetic adaptive systems*. PhD thesis. Accepted: 2006-02-03T19:05:13Z.

Eiben, A., Hinterding, R., and Michalewicz, Z. (1994). Parameter control in evolutionary algorithms. *IEEE Transactions on Evolutionary Computation*.

Eiben, A. and Smith, J. (2015). *Introduction to Evolutionary Computing*. Natural Computing Series. Springer, Berlin, Heidelberg.

Fedeli, R., Polloni, E., and Peres, F. (2009). *Introdução à ciência da computação*. Cengage Learning, 2ª edição edition.

Fogel, L. J., Owens, A. J., and Walsh, M. J. (1966). Artificial intelligence through simulated evolution.

Frantz, D. R. (1972). *Nonlinearities in Genetic Adaptive Search.* PhD thesis, USA. AAI7311116.

Friedberg, R. M. (1958). A learning machine: Part i. *IBM Journal of Research and Development*, 2(1):2–13.

Friedberg, R. M., Dunham, B., and North, J. H. (1959). A learning machine: Part ii. *IBM J. Res. Dev.*, 3:282–287.

Goldberg, V. A. P. o. H. D. E. (1989). *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning.* Addison-Wesley Professional, Reading, Mass, 13th ed. edição edition.

Gorn, S., Bemer, R. W., and Green, J. (1963). American standard code for information interchange. *Communications of the ACM*, 6(8):422–426.

Holland, J. Nonlinear environments permitting efficient adaptation.

Holland, J. H. (1962). Outline for a logical theory of adaptive systems. *J. ACM*, 9(3):297–314.

Holland, J. H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems: An introductory analysis with applications to biology, control, and artificial intelligence.* The MIT Press, 2nd edition, mit press, 1992 edition.

Holland, J. H. (1992). Genetic Algorithms. *Scientific American*, 267(1):66–73. Publisher: Scientific American, a division of Nature America, Inc.

Holland, J. H. and Miller, J. H. (1986). Artificial adaptive agents in economic theory. *The American Economic Review*, 81(2):365–370.

Holland, J. H. and Miller, J. H. (1991). Artificial adaptive agents in economic theory. *American Economic Review*, 81(2):365–71.

Hollstien, R. (1971). *Artificial genetic adaptation in computer control systems.* PhD thesis.

Langdon, W. B. and Poli, R. (2002). *Foundations of Genetic Programming.* Springer, Berlin, Heidelberg.

Mitchell, M. (1998). *An Introduction to Genetic Algorithms.* The MIT Press.

Rechenberg, I., Toms, B., and Establishment, R. A. (1965). *Cybernetic Solution Path of an Experimental Problem:.* Library translation / Royal Aircraft Establishment. Ministry of Aviation.

Rosenberg, R. S. (1967). *Simulation of genetic populations with biochemical properties.* PhD thesis.

Weinberg, R. (1970). *Computer Simulation of a Living Cell.* PhD thesis.

Apêndices

Apêndice A

Sumário de Terminologia Natural e Terminologia Artificial

Terminologia Natural	Terminologia Artificial	Terminologia Artificial (Inglês)	Descrição Curta
Locus	Locus	*Locus*	Posição de um gene (ou característica) dentro de uma cadeia de caracteres.
Alelo	Alelo	*Alelle*	Valor do gene (ou característica), sendo 0 ou 1.
Gene	Característica	*Gene*	Característica, caractere ou algoritmo de uma cadeia de caracteres.
Bloco de construção	Bloco de Construção	*Building Block*	Subvetor de alto desempenho. Responsável por formar novos vetores.
Cromossomo ou Indivíduo	Vetor ou Cadeia de caracteres	*String*	Conjunto de características agrupadas através de um conjunto de caracteres. Cada matriz pode ser uma possível solução para um problema ou fazer parte de uma solução global.
Genótipo	Estrutura	*Structure*	Conjunto de vetores que mantém uma carga ou estrutura genética.
Fenótipo	Estrutura decodificada	*Decoded structure*	Nova carga ou estrutura genética após as alterações das características principais de uma
População	População	*Population*	Conjunto de indivíduos construídos, inicialmente, de forma aleatória, onde o AG irá realizar suas buscas. Cada geração é composta por uma população que pode ser uma possível solução para o problema de otimização.

Geração	Iteração	*Iteration*	Formação de uma nova população após a aplicação dos operadores de reprodução, cruzamento e mutação.
Reprodução ou Seleção	Operador de Reprodução	*Reproduction*	Seleção dos indivíduos com maior aptidão ao ambiente.
Cruzamento	Operador de Cruzamento	*Crossover*	Troca de genes, ou características, entre os indivíduos de uma população.
Mutação	Operador de Mutação	*Mutation*	Processo aleatório de alteração de uma ou mais características de um indivíduo.
Valor de Aptidão	Valor de Aptidão	*Fitness value*	Quantificação da qualidade de um indivíduo ou sua aptidão em relação ao ambiente.
Paisagem ou Horizonte de aptidão	Paisagem de Aptidão	*Fitness landscape*	Espaço pelo qual o AG faz sua busca por soluções, ou seja, diz respeito ao problema a ser resolvido.
Função de aptidão	Função objetivo	*objective function*	Função contendo os parâmetros para resolução do problema.

Apêndice B

Código: Exemplo de Aplicação de um AG simples em Python (Seção 5.1)

```
# -*- coding: utf-8 -*-

'''
Monolito de aplicacao de um AG simples para otimizacao da funcao f(x) = x^2
'''

# ------------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------------
# IMPORTACAO DAS BIBLIOTECAS
# ------------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------------

from statistics import mean
from typing import Union, List
import numpy as np
from collections import Counter
import pandas as pd
from pathlib import Path

import ipdb

ipdb.set_trace()

# from collections import Counter
# import numpy as np # biblioteca para diferentes calculos numericos
# import pandas as pd

# ------------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------------
# DEFINICAO DO PROBLEMA
# ------------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------------

# Definicao do Problema:
# # Dada uma Caixa Preta, contendo 5 interruptores com um sinal de entrada
# # de 0 ou 1 (Desligado ou Ligado), defina a configuracao de interruptores
# # com o maior sinal de saida (recompensa), atraves da maximizacao da fun-
# # cao objetivo f(x) = x**2, onde x pode apresentar qualquer inteiro na
# # intervalo [0, 31].
```

```
# #
# # Adaptado de Goldberg (1889)

# ------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------
# VARIAVEIS GLOBAIS
# ------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------

# Cada variavel global sera representada por letras maiusculas.

# ------------------------------------------------------------
# INDICADORES PARAMETRIZAVEIS
# ------------------------------------------------------------

# tamanho da populacao
N = 5
# numero de caracteres de cada matriz
NUM_CARACTERISTICAS = 5
# numero de caracteres de cada matriz
PROBABILIDADE_MUTACAO = 0.001
# indicador de uso do gerador de numeroes pseudo aleatorios
# se 1, entao usar gerador; se 0, nao usar;
USAR_RANDOMSTATE = 1
# indicador de uso da populacao gerada como exemplo na monografia ...
# DA COSTA, E. (2022) ou qualquer outra populacao predefinida
# se 1, entao usar populacao predeterminada; se 0, nao usar;
USAR_POPULACAO_INICIAL_PREDETERMINADA = 1
# indicador de uso da matriz nao selecionada para cruzamento no reservatorio
# de cruzamento. Esse caso ocorre quando a populacao tem numero par
# se 1, formar um par para a matriz nao selecionada, senao, ignorar matriz
CONSIDERAR_MATRIZ_SEM_PAR = 1
# numero maximo de geracoes (criterio de parada)
NUM_MAX_GERACOES = 2

# ------------------------------------------------------------
# VARIAVEIS DINAMICAS
# ------------------------------------------------------------

# contador de iteracoes (passagem de geracoes)
CONTADOR_GERACAO = 0
# ---
# populacao inicial gerada monografia DA COSTA, E. (2022)
POPULACAO_INICIAL_PREDEFINIDA = '01011001111011111110001011'
# populacao inicial gerada aleatoriamente
POPULACAO = {}
# ---
# dicionario com os dados dos processos do AG ate a aplicacao dos operadores
BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES = {}
# dicionario com os dados dos processos do AG ate a aplicacao dos operadores
BASE_POPULACOES_POS_OPERADORES = {}

# gerador de numeros pseudo aleatorios.
# necessario para replicacao dos resultados, quando se deseja os mesmos nu-
# meros de saida apos varias execucoes do script.
if (USAR_RANDOMSTATE == 0):
    rnd = np.random.RandomState()
else:
    rnd = np.random.RandomState(15)

# ------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------
# FUNCAO OBJETIVO E FUNCAO DE CONVERSAO DE VALORES DE BASE 2 PARA BASE 10
# ------------------------------------------------------------
```

```
# ————————————————————————————————————————

def funcao_objetivo(valor_x: Union[int, float]) -> Union[int, float]:
    """Funcao f(x) = x^2. Recebe o valor do alelo decodificado e retorna
    o valor de aptidao.

    Parameters
    ——————————
    valor_x : int | float
        Numero decodificado para aplicacao da funcao objetivo.

    Return
    ——————————
    int | float
        valor de aptidao.
    """
    return valor_x ** 2

def decodificacao_base_dois(matriz: List[str]) -> List[int]:
    """Decodificacao dos valores binarios do sistema numerico de base 2 para
    inteiros de base 10 ${a_{ij}}^{n-i}$.

    Parameters
    ——————————
    matriz : list
        Lista com os valores binarios para decodificacao.

    Return
    ——————————
    list
        uma lista com os valores binarios decodificados para base 10.
    """
    base = 2
    tamanho_matriz = len(matriz)
    lista_binarios = [_ for _ in range(tamanho_matriz)]
    lista_binarios_decodificados = []
    for id_binario in lista_binarios:
        valor_binario = int(matriz[id_binario])
        valor_base_dez = valor_binario * base ** (tamanho_matriz - 1 - id_binario)
        lista_binarios_decodificados.append(valor_base_dez)
    return lista_binarios_decodificados

# ————————————————————————————————————————————————
# ————————————————————————————————————————————————
# 1. CONSTRUCAO DA POPULACAO INICIAL
# ————————————————————————————————————————————————
# ————————————————————————————————————————————————

# opcoes de criterio de parada
OPCOES_CRITERIO_PARADA = ['num_maximo_geracoes', 'valor_aptidao_maximo_alcancado',
    'valor_aptidao_corrente_menor_que_anterior']
# ———
criterio_parada = OPCOES_CRITERIO_PARADA[1]
# ———
binario_num_max_geracoes = False
binario_valor_mais_aptidao_alcancado = False
binario_valor_aptidao_corrente_menor_que_anterior = False

# iterador de geracoes levando em consideracao os criterios de parada
while not (
    binario_num_max_geracoes if criterio_parada == 'num_maximo_geracoes' else (
        binario_valor_mais_aptidao_alcancado if criterio_parada == 'valor_aptidao_maximo_alcancado' else
            binario_valor_aptidao_corrente_menor_que_anterior
        )
```

```
):

print(f'Inicio: Populacao Inicial/Geracao {CONTADOR_GERACAO+1}' if CONTADOR_GERACAO
    == 0 else f'Inicio: Geracao {CONTADOR_GERACAO + 1}')

breakpoint()

# se base de dados das populacoes estiverem vazias, gera a populacao inicial
if not BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES and not
     BASE_POPULACOES_POS_OPERADORES:
    num_lancamentos = N * NUM_CARACTERISTICAS
    lados_moeda = [0, 1]
    probabilidades = [.5, .5]
    # lancamento da moeda para cada caracteristica da populacao
    lista_lancamentos_moeda = rnd.choice(lados_moeda, size=num_lancamentos, p=probabilidades)
    # ---
    # usar populacao inicial predefinida
    if USAR_POPULACAO_INICIAL_PREDETERMINADA == 1:
        lista_caracteres_predefinidos = [int(caractere) for caractere in
             POPULACAO_INICIAL_PREDEFINIDA]
        for id_caractere, caractere in enumerate(lista_caracteres_predefinidos):
            num_caractere = f'valor_alelo_{id_caractere+1}'
            POPULACAO[num_caractere] = caractere
    # usar populacao inicial aleatoria
    else:
        for id_lancamento, lancamento in enumerate(lista_lancamentos_moeda):
            num_lancamento = f'valor_alelo_{id_lancamento+1}'
            POPULACAO[num_lancamento] = lancamento
else:
    populacao_interior =
         BASE_POPULACOES_POS_OPERADORES.get(f'id_geracao_{CONTADOR_GERACAO-1}')
    alelos_populacao = []
    for matriz in populacao_interior:
        matriz_populacao_anteior = populacao_interior.get(matriz)['matriz_apos_operador_mutacao']
        for alelo in matriz_populacao_anteior:
            alelos_populacao.append(alelo)
    for id_alelo, alelo in enumerate(alelos_populacao):
        num_caractere = f'valor_alelo_{id_alelo+1}'
        POPULACAO[num_caractere] = alelo

# ------------------------------------------------------------
# 1.1 AGRUPAMENTO DOS CARACTERES DA POPULACAO (CRIACAO MATRIZES)
# ------------------------------------------------------------

# dicionario com as informacoes gerada das matrizes da populacao inicial
matrizes = {}
i = 0 # numero de particionamento inicial
for num_caracteristica in range(NUM_CARACTERISTICAS):
    lista_posicao_alelos_populacao = [locus for locus in range(len(POPULACAO))]
    lista_alelos_populacao = list(POPULACAO.values())
    # ---
    # quebra da populacao por individuo e caracteristicas
    alelos_lista = lista_posicao_alelos_populacao[i:i+NUM_CARACTERISTICAS]
    matriz_lista = lista_alelos_populacao[i:i+NUM_CARACTERISTICAS]
    locus_lista = [locus for locus in range(len(alelos_lista))]
    # ---
    # envio dos dados construidos para um dicionario
    key = f'id_{num_caracteristica+1}'
    matriz_str = ''.join([str(alelo) for alelo in matriz_lista])
    matrizes[key] = {
        'matriz': matriz_str,
        'lista_id_alelo_populacao': alelos_lista,
        'lista_locus': locus_lista,
        'lista_valor_alelo': matriz_lista,
```

```
    }
    i += NUM_CARACTERISTICAS

# ----------------------------------------------------------------
# 1.2 DECODIFICACAO DOS VALORES BINARIOS DAS MATRIZES
# ----------------------------------------------------------------

for id_matriz, matriz in enumerate(matrizes):
    alelos_int = matrizes.get(matriz)
    alelos_str = [str(alelo) for alelo in alelos_int['lista_valor_alelo']]
    # ---
    # conversao de base 2 para base 10
    alelos_decodificados = (decodificacao_base_dois(alelos_str))
    # conversao de base 2 para base 10 levando em considracao que todos os valores dos alelos sao 1
    # necessario para a definicao do criterio de parada
    alelos_decodificados_maximos = decodificacao_base_dois('1' * len(alelos_str))
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes.get(matriz).update({'lista_alelos_decodificados': alelos_decodificados})
    matrizes.get(matriz).update({'lista_alelos_decodificados_maximos': alelos_decodificados_maximos})

# ----------------------------------------------------------------
# 1.2.1 SOMA DOS VALORES DECODIFICADOS
# ----------------------------------------------------------------

for id_matriz, matriz in enumerate(matrizes):
    lista_alelos_decodificados = matrizes.get(matriz)['lista_alelos_decodificados']
    lista_alelos_decodificados_maximos = matrizes.get(matriz)['lista_alelos_decodificados_maximos']
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes.get(matriz).update({'valor_de_x': sum(lista_alelos_decodificados)})
    matrizes.get(matriz).update({'max_valor_de_x_possivel': sum(lista_alelos_decodificados_maximos)})

# ----------------------------------------------------------------
# ----------------------------------------------------------------
# 2 CALCULO DOS VALORES DE APTIDAO
# ----------------------------------------------------------------
# ----------------------------------------------------------------

for id_matriz, matriz in enumerate(matrizes):
    valor_x = matrizes.get(matriz)['valor_de_x']
    valor_maximo_x = matrizes.get(matriz)['max_valor_de_x_possivel']
    # ---
    valor_aptidao = funcao_objetivo(valor_x)
    valor_maximo_aptidao = funcao_objetivo(valor_maximo_x)
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes.get(matriz).update({'valor_aptidao': valor_aptidao})
    matrizes.get(matriz).update({'max_valor_aptidao_possivel': valor_maximo_aptidao})

# ----------------------------------------------------------------
# 2.1 ORDENACAO DAS MATRIZES
# ----------------------------------------------------------------

dicionario_matrizes_temp = {}
for matriz in matrizes:
    dicionario_matrizes_temp[matriz] = matrizes.get(matriz)['valor_aptidao']

matrizes_ordenadas = {}
for matriz in sorted(dicionario_matrizes_temp, key=dicionario_matrizes_temp.get, reverse=True):
    matrizes_ordenadas[matriz] = matrizes.get(matriz)

# ----------------------------------------------------------------
# 2.2 CALCULO DOS MINIMOS, MEDIOS, SOMAS E MAXIMOS DAS MATRIZES
```

```
# ————————————————————————————————————————

lista_ids_matrizes = [id_matriz for id_matriz in matrizes_ordenadas.keys()]

for matriz in matrizes_ordenadas:
    min_valor_x = min([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_de_x'] for _matriz in lista_ids_matrizes])
    media_valor_x = mean([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_de_x'] for _matriz in lista_ids_matrizes])
    soma_valor_x = sum([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_de_x'] for _matriz in lista_ids_matrizes])
    max_valor_x = max([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_de_x'] for _matriz in lista_ids_matrizes])
    # ———
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'min_valor_x': min_valor_x})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'media_valor_x': media_valor_x})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'soma_valor_x': soma_valor_x})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'max_valor_x': max_valor_x})

for matriz in matrizes_ordenadas:
    min_valor_aptidao = min([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_aptidao'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    media_valor_aptidao = mean([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_aptidao'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    soma_valor_aptidao = sum([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_aptidao'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    max_valor_aptidao = max([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['valor_aptidao'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    # ———
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'min_valor_aptidao': min_valor_aptidao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'media_valor_aptidao': media_valor_aptidao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'soma_valor_aptidao': soma_valor_aptidao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'max_valor_aptidao': max_valor_aptidao})

# ————————————————————————————————————————————————
# ————————————————————————————————————————————————
# 3. APLICACAO DOS OPERADORES
# ————————————————————————————————————————————————
# ————————————————————————————————————————————————

# ————————————————————————————————————————————————
# 3.1 REPRODUCAO
# ————————————————————————————————————————————————

# ————————————————————————————————————————————————
# 3.1.1 CALCULO DA PROBABILIDADE DE SELECAO
# ————————————————————————————————————————————————

for matriz in matrizes_ordenadas:
    valor_aptidao = matrizes_ordenadas.get(matriz)['valor_aptidao']
    soma_valor_aptidao = matrizes_ordenadas.get(matriz)['soma_valor_aptidao']
    probabilidade_selecao = (valor_aptidao / soma_valor_aptidao)
    probabilidade_selecao_norm = round(probabilidade_selecao * 100, 1)
    # ———
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'probabilidade_selecao': probabilidade_selecao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'probabilidade_selecao_norm': probabilidade_selecao_norm})

# ————————————————————————————————————————————————
# 3.1.2 CALCULO DO NUMERO ESPERADO DE REPRODUCOES
# ————————————————————————————————————————————————

for matriz in matrizes_ordenadas:
    valor_aptidao = matrizes_ordenadas.get(matriz)['valor_aptidao']
    media_valor_aptidao = matrizes_ordenadas.get(matriz)['media_valor_aptidao']
    num_esperado_reproducao = (valor_aptidao / media_valor_aptidao)
```

```
    num_esperado_reproducao_norm = round(num_esperado_reproducao, 2)
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'numero_esperado_reproducao_norm':
        num_esperado_reproducao_norm})

# ------------------------------------------------------------
# 3.1.3 SORTEIO DAS MATRIZES PARA REPRODUCAO
# ------------------------------------------------------------

lista_ids_matrizes = [matriz for matriz in matrizes_ordenadas]
probabilidades_reproducao = [matrizes_ordenadas.get(matriz)['probabilidade_selecao'] for matriz in
    matrizes_ordenadas]

# sorteio das matrizes para reproducao
matrizes_selecionadas_reproducao = list(rnd.choice(lista_ids_matrizes, size=len(lista_ids_matrizes),
    p=probabilidades_reproducao))

for matriz in matrizes_ordenadas:
    selecao_roleta = dict(Counter(matrizes_selecionadas_reproducao)).get(matriz)
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas[matriz].update({'numero_de_reproducoes': 0 if not selecao_roleta else
        selecao_roleta})

# ------------------------------------------------------------
# 3.1.4 CALCULO DOS MINIMOS, MEDIOS, SOMAS E MAXIMOS DAS MATRIZES
# ------------------------------------------------------------

lista_ids_matrizes = [id_matriz for id_matriz in matrizes_ordenadas.keys()]

for matriz in matrizes_ordenadas:
    min_probabilidade_selecao = min([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['probabilidade_selecao'] for
        _matriz in lista_ids_matrizes])
    media_probabilidade_selecao = mean([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['probabilidade_selecao'] for
        _matriz in lista_ids_matrizes])
    soma_probabilidade_selecao = sum([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['probabilidade_selecao'] for
        _matriz in lista_ids_matrizes])
    max_probabilidade_selecao = max([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['probabilidade_selecao'] for
        _matriz in lista_ids_matrizes])
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'min_probabilidade_selecao': min_probabilidade_selecao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'media_probabilidade_selecao': media_probabilidade_selecao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'soma_probabilidade_selecao': soma_probabilidade_selecao})
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'max_probabilidade_selecao': max_probabilidade_selecao})

for matriz in matrizes_ordenadas:
    min_numero_esperado_reproducao_norm =
        min([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_esperado_reproducao_norm'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    media_numero_esperado_reproducao_norm =
        mean([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_esperado_reproducao_norm'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    soma_numero_esperado_reproducao_norm =
        sum([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_esperado_reproducao_norm'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    max_numero_esperado_reproducao_norm =
        max([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_esperado_reproducao_norm'] for _matriz in
        lista_ids_matrizes])
    # ---
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'min_numero_esperado_reproducao_norm':
        min_numero_esperado_reproducao_norm})
```

```
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'media_numero_esperado_reproducao_norm':
            media_numero_esperado_reproducao_norm})
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'soma_numero_esperado_reproducao_norm':
            soma_numero_esperado_reproducao_norm})
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'max_numero_esperado_reproducao_norm':
            max_numero_esperado_reproducao_norm})

    for matriz in matrizes_ordenadas:
        min_numero_de_reproducoes = min([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_de_reproducoes'] for
            _matriz in lista_ids_matrizes])
        media_numero_de_reproducoes = mean([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_de_reproducoes']
            for _matriz in lista_ids_matrizes])
        soma_numero_de_reproducoes = sum([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_de_reproducoes'] for
            _matriz in lista_ids_matrizes])
        max_numero_de_reproducoes = max([matrizes_ordenadas.get(_matriz)['numero_de_reproducoes'] for
            _matriz in lista_ids_matrizes])
        # ---
        # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'min_numero_de_reproducoes': min_numero_de_reproducoes})
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'media_numero_de_reproducoes':
            media_numero_de_reproducoes})
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'soma_numero_de_reproducoes':
            soma_numero_de_reproducoes})
        matrizes_ordenadas.get(matriz).update({'max_numero_de_reproducoes':
            max_numero_de_reproducoes})

    # ------------------------------------------------------------
    # 3.2 CRUZAMENTO
    # ------------------------------------------------------------

    # ------------------------------------------------------------
    # 3.2.1 FORMACAO DOS PARES NO RESERVATORIO DE CRUZAMENTO
    # ------------------------------------------------------------

    # construcao de nova lista com as matrizes selecionadas para reproducao
    lista_matrizes_selecionadas_reproducao = []
    for matriz in matrizes_ordenadas:
        num_reproducao = matrizes_ordenadas.get(matriz)['numero_de_reproducoes']
        if num_reproducao != 0:
            lista_matrizes_reproducao = [matriz] * num_reproducao
            for matriz_reproducao in lista_matrizes_reproducao:
                lista_matrizes_selecionadas_reproducao.append(matriz_reproducao)

    # construcao do reservatorio de cruzamento com as matrizes reproduzidas
    matrizes_reservatorio_cruzamento = {}
    for id_matriz, matriz in enumerate(lista_matrizes_selecionadas_reproducao):
        id_matriz_reservatorio = f'id_matriz_reservatorio_acasalamento_{id_matriz}'
        # envio das informacoes das matrizes reproduzidas para um novo dicionario
        matrizes_reservatorio_cruzamento[id_matriz_reservatorio] = {
            'id_matriz': matriz,
            'matriz': matrizes_ordenadas.get(matriz)['matriz'],
            'lista_valor_alelo': matrizes_ordenadas.get(matriz)['lista_valor_alelo']
        }

    # lista contendo as matrizes sorteadas, de forma excludente, para cruzamento
    matrizes_selecionadas_cruzamento = []
    for matriz in matrizes_reservatorio_cruzamento:
        lista_matrizes = [
            id_matriz for id_matriz
            in matrizes_reservatorio_cruzamento
            if id_matriz != matriz
            and id_matriz not in matrizes_selecionadas_cruzamento
        ]
        # sorteio das matrizes e construcao da lista de pares
```

```
    if lista_matrizes:
        probabilidades = [1 / len(lista_matrizes) for _ in lista_matrizes]
        matriz_sorteada = rnd.choice(lista_matrizes, size=1, p=probabilidades)[0]
        matrizes_selecionadas_cruzamento.append(matriz_sorteada)

# novo dicionario com as matrizes do reservatorio de cruzamento formadas
pares_reservatorio_cruzamento = {}
i = 0
for id_par in range(int(len(matrizes_selecionadas_cruzamento) / 2)):
    par = matrizes_selecionadas_cruzamento[i:i+2]
    pares_reservatorio_cruzamento[f'par_{id_par}'] = {
        'ids_matrizes_pares': par,
        'par_com_matriz_nao_selecionada': False
    }
    i += 2

# no caso do numero de matrizes no reservatorio de cruzamento ser imprar,
# uma matriz ficara de fora do cruzamento. Para este caso, caso seja
# necessario considera—la, esta matriz nao selecionada formara par com
# uma matriz da lista de matrizes que ja possuem par
if CONSIDERAR_MATRIZ_SEM_PAR == 1:
    matrizes_selecionadas = []
    for par in pares_reservatorio_cruzamento:
        par_matrizes = pares_reservatorio_cruzamento.get(par)['ids_matrizes_pares']
        for matriz in par_matrizes:
            matrizes_selecionadas.append(matriz)
    # ———
    matriz_nao_selecionada = list(set(matrizes_reservatorio_cruzamento) - set(matrizes_selecionadas))
    # ———
    if matriz_nao_selecionada:
        probabilidades = [1 / len(matrizes_selecionadas) for _ in matrizes_selecionadas]
        # sorteio de matriz dentre as que ja foram sorteadas anteriormente
        matriz_sorteada = rnd.choice(matrizes_selecionadas, size=1, p=probabilidades)[0]
        num_par = len(pares_reservatorio_cruzamento)
        # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
        pares_reservatorio_cruzamento.update(
            {
                f'par_{num_par}':
                    {
                        'ids_matrizes_pares': [matriz_nao_selecionada[0], matriz_sorteada],
                        'par_com_matriz_nao_selecionada': True
                        }
                }
                )

# alimentacao do dicionario de matrizes pares
for par in pares_reservatorio_cruzamento:
    par_matrizes = pares_reservatorio_cruzamento.get(par)['ids_matrizes_pares']
    id_matriz_1, id_matriz_2 = par_matrizes[0], par_matrizes[1]
    # ———
    matriz_1 = matrizes_reservatorio_cruzamento.get(id_matriz_1)['matriz']
    matriz_2 = matrizes_reservatorio_cruzamento.get(id_matriz_2)['matriz']
    # ———
    lista_valor_alelo_1 = matrizes_reservatorio_cruzamento.get(id_matriz_1)['lista_valor_alelo']
    lista_valor_alelo_2 = matrizes_reservatorio_cruzamento.get(id_matriz_2)['lista_valor_alelo']
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    pares_reservatorio_cruzamento.get(par).update({
        'matrizes_pares': [matriz_1, matriz_2],
        'lista_valor_alelo_matrizes_pares': [lista_valor_alelo_1, lista_valor_alelo_2]
    })

# ————————————————————————————————————————————
# 3.2.2 SORTEIO DOS PONTOS DE CRUZAMENTO
# ————————————————————————————————————————————
```

```
# escolha aleatoria do ponto de corte para cruzamento entre os pares
for par in pares_reservatorio_cruzamento:
    matrizes_pares = pares_reservatorio_cruzamento.get(par)
    matriz_1, matriz_2 = matrizes_pares['matrizes_pares'][0], matrizes_pares['matrizes_pares'][1]
    lista_valor_alelo_1, lista_valor_alelo_2 = matrizes_pares['lista_valor_alelo_matrizes_pares'][0],
        matrizes_pares['lista_valor_alelo_matrizes_pares'][1]
    tamanho_matriz = int((len(matriz_1) + len(matriz_2)) / 2) - 1
    # sorteio do ponto de cruzamento para troca de informacoes
    pontos_corte = [ponto+1 for ponto in range(tamanho_matriz)]
    probabilidades = [1 / tamanho_matriz for _ in range(tamanho_matriz)]
    ponto_sorteado = rnd.choice(pontos_corte, size=1, p=probabilidades)[0]
    # ---
    # inclusao dos pontos de cruzamento e ponto de cruzamento sorteado
    lista_valor_alelo_1, lista_valor_alelo_2 = [str(alelo) for alelo in lista_valor_alelo_1], [str(alelo) for alelo
        in lista_valor_alelo_2]
    lista_alelo_ponto_corte_1 = '.'.join(lista_valor_alelo_1[:ponto_sorteado]) + '|' +
        '.'.join(lista_valor_alelo_1[ponto_sorteado:])
    lista_alelo_ponto_corte_2 = '.'.join(lista_valor_alelo_2[:ponto_sorteado]) + '|' +
        '.'.join(lista_valor_alelo_2[ponto_sorteado:])
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    pares_reservatorio_cruzamento.get(par).update({
        'ponto_corte_cruzamento': ponto_sorteado,
        'ponto_corte_cruzamento_matrizes_pares': [lista_alelo_ponto_corte_1, lista_alelo_ponto_corte_2]
    })

# ----------------------------------------------------------
# 3.2.3 CRIACAO DAS NOVAS MATRIZES
# ----------------------------------------------------------

# troca de informaoess entre as matrizes pares
for par in pares_reservatorio_cruzamento:
    matrizes_pares = pares_reservatorio_cruzamento.get(par)
    ponto_cruzamento = matrizes_pares['ponto_corte_cruzamento']
    matriz_1, matriz_2 = matrizes_pares['matrizes_pares'][0], matrizes_pares['matrizes_pares'][1]
    # cruzamento das matrizes
    matriz_cruzada_1, matriz_cruzada_2 = matriz_1[:ponto_cruzamento] + matriz_2[ponto_cruzamento:],
        matriz_2[:ponto_cruzamento] + matriz_1[ponto_cruzamento:]
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    pares_reservatorio_cruzamento.get(par).update({
        'matrizes_pares_cruzadas': [matriz_cruzada_1, matriz_cruzada_2]
    })

# ---

# criacao de lista temporaria de dicionarios com as infos das matrizes pares
lista_dict_temp = []
for par in pares_reservatorio_cruzamento:
    matrizes_pares = pares_reservatorio_cruzamento.get(par)['ids_matrizes_pares']
    for matriz in matrizes_pares:
        infos_dict = {**{'id_par': par}, **pares_reservatorio_cruzamento.get(par)}
        lista_dict_temp.append(infos_dict)

# dicionario com as informacoes das matrizes apos o cruzamento
matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento = {}
for id_matriz_cruzada, matriz_cruzada in enumerate(lista_dict_temp):
    id_matriz_cruzada_reservatorio = f'id_matriz_cruzada_reservatorio_{id_matriz_cruzada}'
    # novo id da matriz apos o cruzamento
    matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento[id_matriz_cruzada_reservatorio] = {
        'informacao_pares': matriz_cruzada
    }
    # alimentacao do dicionario com as informacoes da matriz respectiva
    # se id_matriz_par for par, entao pegar o primeiro valor das listas
    # se id_matriz_par for impar, entao pegar o segundo valor das listas
```

```
    if (id_matriz_cruzada % 2) == 0: # par
        matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento.get(id_matriz_cruzada_reservatorio).update({
            'id_matriz_pai': matriz_cruzada.get('ids_matrizes_pares')[0],
            'matriz_pai': matriz_cruzada.get('matrizes_pares')[0],
            'lista_valor_alelo_matriz_pai': matriz_cruzada.get('lista_valor_alelo_matrizes_pares')[0],
            'ponto_cruzamento': matriz_cruzada.get('ponto_corte_cruzamento'),
            'ponto_corte_cruzamento_matriz_pai':
                matriz_cruzada.get('ponto_corte_cruzamento_matrizes_pares')[0],
            'matriz_filha': matriz_cruzada.get('matrizes_pares_cruzadas')[0],
            'lista_valor_alelo_matriz_filha': [alelo for alelo in
                matriz_cruzada.get('matrizes_pares_cruzadas')[0]]
        })
    else: # impar
        matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento.get(id_matriz_cruzada_reservatorio).update({
            'id_matriz_pai': matriz_cruzada.get('ids_matrizes_pares')[1],
            'matriz_pai': matriz_cruzada.get('matrizes_pares')[1],
            'lista_valor_alelo_matriz_pai': matriz_cruzada.get('lista_valor_alelo_matrizes_pares')[1],
            'ponto_cruzamento': matriz_cruzada.get('ponto_corte_cruzamento'),
            'ponto_corte_cruzamento_matriz_pai':
                matriz_cruzada.get('ponto_corte_cruzamento_matrizes_pares')[1],
            'matriz_filha': matriz_cruzada.get('matrizes_pares_cruzadas')[1],
            'lista_valor_alelo_matriz_filha': [alelo for alelo in
                matriz_cruzada.get('matrizes_pares_cruzadas')[1]]
        })

# ------------------------------------------------------------
# 3.3 MUTACAO
# ------------------------------------------------------------

# aplicacao do operador de mutacao
for matriz in matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento:
    alelos_matriz_filha =
        matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento.get(matriz)['lista_valor_alelo_matriz_filha']
    # lista com os alelos apos o operador de mutacao
    alelos_apos_mutacao = []
    for alelo in alelos_matriz_filha:
        if int(alelo) == 0:
            alelos = [0, 1] # possibilidades
            probabilidades = [1-PROBABILIDADE_MUTACAO, PROBABILIDADE_MUTACAO] #
                probabilidade de nao mutacao e mutacao
            alelo_apos_operador = rnd.choice(alelos, size=1, p=probabilidades)[0]
            alelos_apos_mutacao.append(alelo_apos_operador)
        else:
            alelos = [1, 0] # possibilidades
            probabilidades = [1-PROBABILIDADE_MUTACAO, PROBABILIDADE_MUTACAO] #
                probabilidade de nao mutacao e mutacao
            alelo_apos_operador = rnd.choice(alelos, size=1, p=probabilidades)[0]
            alelos_apos_mutacao.append(alelo_apos_operador)
    # ---
    alelos_apos_mutacao_str = [str(alelo) for alelo in alelos_apos_mutacao]
    alelos_matriz_filha =
        matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento.get(matriz)['lista_valor_alelo_matriz_filha']
    mutacoes_esperadas = N * NUM_CARACTERISTICAS * PROBABILIDADE_MUTACAO
    # alimentacao dos resultados do dicionario das matrizes
    matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento.get(matriz).update({
        'matriz_apos_operador_mutacao': ''.join(alelos_apos_mutacao_str),
        'lista_valor_alelo_matriz_apos_operador_mutacao': alelos_apos_mutacao_str,
        'houve_mutacao': 0 if alelos_apos_mutacao_str == alelos_matriz_filha else 1, # 0 se nao houve
            mutacao; 1 se houve;
        'num_esperado_mutacoes': mutacoes_esperadas
    })

# ------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------
```

```
    # ALIMENTACAO DAS BASES FINAIS
    # ------------------------------------------------------------
    # ------------------------------------------------------------

    id_geracao = f'id_geracao_{CONTADOR_GERACAO}'

    BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES[id_geracao] = matrizes_ordenadas
    BASE_POPULACOES_POS_OPERADORES[id_geracao] = matrizes_cruzadas_reservatorio_cruzamento

    print(f'Fim: Populacao Inicial/Geracao {CONTADOR_GERACAO+1}' if CONTADOR_GERACAO ==
        0 else f'Fim: Geracao {CONTADOR_GERACAO+1}')

    # ------------------------------------------------------------
    # ------------------------------------------------------------
    # ALIMENTACAO DOS BINARIOS DOS CRITERIOS DE PARADA
    # ------------------------------------------------------------
    # ------------------------------------------------------------

    # binario_num_max_geracoes
    if (CONTADOR_GERACAO+1 == NUM_MAX_GERACOES):
        binario_num_max_geracoes = True

    # binario_valor_mais_aptidao_alcancado
    for matriz in matrizes_ordenadas:
        valor_aptidao = matrizes_ordenadas.get(matriz)['valor_aptidao']
        max_valor_aptidao_possivel = matrizes_ordenadas.get(matriz)['max_valor_aptidao_possivel']
        if (valor_aptidao == max_valor_aptidao_possivel):
            binario_valor_mais_aptidao_alcancado = True

    # binario_valor_aptidao_corrente_menor_que_anterior
    if CONTADOR_GERACAO >= 1:
        soma_valor_aptidao_geracao_corrente = []
        soma_valor_aptidao_geracao_anterior = []
        for geracao in BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES:
            geracao_corrente =
                BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES.get(f'id_geracao_{CONTADOR_GERACAO}')
            geracao_anterior =
                BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES.get(f'id_geracao_{CONTADOR_GERACAO-1}')
            lista_soma_valor_aptidao_geracao_corrente = []
            lista_soma_valor_aptidao_geracao_anterior = []
            for matriz in geracao_corrente:
                lista_soma_valor_aptidao_geracao_corrente.append(geracao_corrente.get(matriz)['soma_valor_aptidao'])
            for matriz in geracao_anterior:
                lista_soma_valor_aptidao_geracao_anterior.append(geracao_anterior.get(matriz)['soma_valor_aptidao'])
            soma_valor_aptidao_geracao_corrente.append(mean(lista_soma_valor_aptidao_geracao_corrente))
            soma_valor_aptidao_geracao_anterior.append(mean(lista_soma_valor_aptidao_geracao_anterior))
        # ---
        if (soma_valor_aptidao_geracao_corrente < soma_valor_aptidao_geracao_anterior):
            binario_valor_aptidao_corrente_menor_que_anterior = True

    CONTADOR_GERACAO += 1

# ------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------
# SALVAMENTO DAS BASES FINAIS (JSON)
# ------------------------------------------------------------
# ------------------------------------------------------------

nome_arquivos = 'informacoes_ag_simples'

try:
    Path('data').mkdir(exist_ok=False)
    pd.DataFrame(BASE_POPULACOES_PRE_OPERADORES).to_json(f'data/{nome_arquivos}_pre_operadores.json',
        indent=4)
```

```
        pd.DataFrame(BASE_POPULACOES_POS_OPERADORES).to_json(f'data/{nome_arquivos}_pos_operadores.json',
            indent=4)
    except OSError:
        print('Nao foi possivel salvar os arquivos.')
```