2.4 - Equação da tangente e equação da normal a uma curva.

A equação da reta tangente à curva $y = f(x)$, no ponto $x = x_0$, é definida por $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

A reta normal à curva $y = f(x)$, no ponto $x = x_0$, é a reta perpendicular à reta tangente à curva neste ponto, sendo definida por $y - f(x_0) = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0)$.

Exemplo: Para $f(x) = x^3 - 3x + 2$, pretende-se determinar as equações da reta tangente e da reta normal à curva $y = f(x)$, no ponto $x_0 = 2$.

$f(2) = 8 - 6 + 2 = 4$,

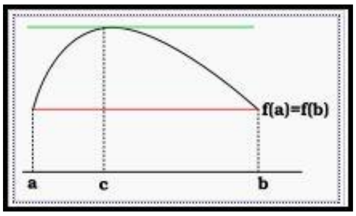
$f'(x) = 3x^2 - 3$, $\quad f'(2) = 9$.

Eq. tangente: $y - 4 = 9(x - 2) \Leftrightarrow y = 9x - 14$.

Eq. normal: $y - 4 = -\frac{1}{9}(x - 2) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{9}x + \frac{38}{9}$.

2.5- Teorema de Rolle.

<u>Teorema de Rolle</u>: Seja $f : [a,b] \to R$ contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$, com $f(a) = f(b)$. Então, $\exists c \in]a,b[$ tal que $f'(c) = 0$.



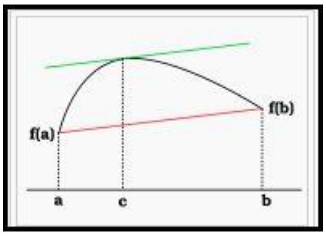
A tangente ao gráfico de f, no ponto c, é horizontal.

<u>Corolário 1:</u> Entre dois zeros consecutivos da função, existe pelo menos um zero da derivada.

<u>Corolário 2:</u> Entre dois zeros consecutivos da derivada, existe no máximo um zero da função.

2.6 - Teorema de Lagrange.

<u>Teorema do valor médio de Lagrange</u>: Seja $f:[a,b]\to R$ contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$. Então, $\exists c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.



Geometricamente, isto significa que a tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa *c* é paralela à secante que passa pelos pontos de abcissa *a* e *b*.

Demonstração: Considera-se a função g definida por $g(x)=f(x)-\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}.x$, a qual se encontra nas condições da hipótese do teorema de Rolle. Aplicando o teorema de Rolle à função g, obtemos a tese do teorema de Lagrange.

g é contínua em $[a,b]$ e derivável em $]a,b[$.

$$g(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.a = \frac{f(a)(b-a)-[f(b)-f(a)].a}{b-a} =$$

$$= \frac{b.f(a)-a.f(a)-a.f(b)+a.f(a)}{b-a} = \frac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a}.$$

Por outro lado,

$$g(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.b = \frac{f(b)(b-a)-[f(b)-f(a)].b}{b-a} =$$

$$= \frac{b.f(b)-a.f(b)-b.f(b)+b.f(a)}{b-a} = \frac{b.f(a)-a.f(b)}{b-a}.$$

Portanto, $g(a) = g(b)$.

Aplicando o teorema de Rolle a g, $\exists c \in]a,b[: g'(c) = 0$.

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

$$g'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \ \square$$

Exemplo: Aplicando o teorema de Lagrange à função $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, pretende-se determinar o valor intermédio a que se refere o teorema, no intervalo $[-1,1]$.

$\exists c \in]-1,1[$ tal que $f'(c) = 0$.

$$f'(x) = \left(x^{\frac{4}{3}}\right)' = \tfrac{4}{3}x^{\frac{1}{3}}, \qquad f'(c) = 0 \Rightarrow \tfrac{4}{3}c^{\frac{1}{3}} = 0 \Rightarrow c = 0\,.$$

2.7- Teorema de Cauchy. Regra de Cauchy para o cálculo de limites.

<u>Teorema do valor médio de Cauchy</u>: Sejam $f, g : [a,b] \to R$ contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em $]a,b[$, com $g'(x)$ não nula em $]a,b[$. Então, $\exists c \in]a,b[$ tal que $\dfrac{f'(c)}{g'(c)} = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \quad [g(a) \neq g(b)]$.

Demonstração: Considera-se a função h definida por $h(x) = f(x) - \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.g(x)$, a qual se encontra nas condições da hipótese do teorema de Rolle. Aplicando o teorema de Rolle à função h, obtemos a tese do teorema de Cauchy.

Observação: O teorema de Cauchy é uma generalização do teorema de Lagrange, pois se considerarmos $g(x) = x$, obtemos exatamente o teorema de Lagrange.

<u>Corolário-Regra de Cauchy</u> (para o calculo de limites): Nas condições do teorema, se $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$, então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, desde que o limite do segundo membro exista.

Observações:

1. Pode existir $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ sem que exista $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

2. Após uma aplicação da regra de Cauchy, se a indeterminação persistir, pode aplicar-se novamente a mesma regra, desde que se continuem a cumprir as condições da hipótese do teorema.

3. A regra de Cauchy também se pode aplicar em casos de indeterminações do tipo $\dfrac{\infty}{\infty}$ e $0\times\infty$, sendo que no último caso escrevemos um dos termos a dividir invertido.

Exemplos:

1. $$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x+1}=1$$

2. $$\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to 0^+} e^{-x} = 1.$$

3. $$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(\sin x)}{(\pi-2x)^2} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{\cos x}{\sin x}}{-4(\pi-2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{-4(\pi-2x)\sin x} \overset{R.C.}{=}$$
$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{-\sin x}{8\sin x-4(\pi-2x)\cos x} = -\frac{1}{8}.$$

4. $$\lim_{x\to 0^+} x^{\sin x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\ln x^{\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} e^{\sin x.\ln x} = \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{\frac{1}{\sin x}}} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos x}{\sin^2 x}}} =$$
$$= \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{\sin^2 x}{x\cos x}} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{2\sin x.\cos x}{\cos x - x.\sin x}} = e^0 = 1.$$

2.8 – Derivadas sucessivas de ordem *n*>1.

Função derivada de ordem dois de uma função f é uma função cujo domínio é o conjunto de todos os pontos em que f' tem derivada finita e em que a cada ponto do seu domínio faz corresponder a derivada da função f' nesse ponto. Representa-se por f''.

Da mesma forma se definem as derivadas de terceira ordem, e assim sucessivamente até à derivada de ordem n $(n \in \mathrm{N})$, as quais se representam por f''', $f^{(iv)}$, …, $f^{(n)}$.

Exemplos: Para cada uma das funções indicadas a seguir, pretende-se determinar a respetiva derivada de ordem *n*:

1. $f_1(x) = \ln(1+x)$

$$f_1'(x) = \frac{1}{1+x}; \qquad f_1''(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}; \qquad f_1'''(x) = \frac{2}{(1+x)^3};$$

$$f_1^{(IV)}(x) = \frac{-3\cdot 2}{(1+x)^4}; \qquad f_1^{(V)}(x) = \frac{4\cdot 3\cdot 2}{(1+x)^5};$$

generalizando, podemos admitir que $f_1^{(n)}(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$.

Finalmente, fazemos a chamada **prova por indução** no sentido de garantir a validade da igualdade anterior para todo $n \in \mathrm{N}$.

O **Método de Indução Matemática** é um método de demonstração elaborado com base no Princípio de Indução Finita, frequentemente

utilizado para provar que certas propriedades são verdadeiras para todos os números naturais.
Este método consiste em dois passos:

1. **Base de indução**: Estabelecer a propriedade para o primeiro dos números naturais, ou seja para $n=1$;
2. **Passo de indução**: Estabelecer que, caso a propriedade se verifique para um número natural *n* (Hipótese de Indução), então ela também é verificada para o número natural seguinte *n* + 1 (Tese).

No caso do nosso exemplo, considerando $n=1$, resulta $f_1'(x)=\dfrac{(-1)^2 0!}{(1+x)^1}=\dfrac{1}{1+x}$, que se revela válida em conformidade com a primeira derivada calculada anteriormente.

Em segundo lugar, admitindo como válida a nossa hipótese de indução, $f_1^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}$, vamos provar a tese:

$$f_1^{(n+1)}(x)=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+x)^{n+1}}.$$

Então,

$$f_1^{(n+1)}(x)=\left(f_1^{(n)}\right)'(x)=\left(\frac{(-1)^{n+1}(n-1)!}{(1+x)^n}\right)'=(-1)^{n+1}(n-1)!\left(\frac{1}{(1+x)^n}\right)'=$$

$$=(-1)^{n+1}(n-1)!\frac{-n}{(1+x)^{n+1}}=\frac{(-1)^{n+2}n!}{(1+x)^{n+1}},$$

tal como se pretendia.

2. $f_2(x)=x.e^{-x}$

$f_2'(x)=e^{-x}+x(-e^{-x})=e^{-x}(1-x)$;

$f_2''(x) = -e^{-x}(1-x) + e^{-x}(-1) = -e^{-x}(2-x)$;

$f_2'''(x) = e^{-x}(2-x) + e^{-x} = e^{-x}(2-x+1) = e^{-x}(3-x)$;

$f_2^{(IV)}(x) = -e^{-x}(3-x) - e^{-x} = -e^{-x}(4-x)$;

generalizando, podemos admitir que $f_2^{(n)}(x) = (-1)^{n+1}e^{-x}(n-x)$.

Prova por indução:

1) Para $n = 1$, resulta $f_2'(x) = (-1)^{1+1}e^{-x}(1-x) = e^{-x}(1-x)$, que se revela válida em conformidade com a primeira derivada calculada anteriormente.
2) No sentido de provarmos a tese $f_2^{(n+1)}(x) = (-1)^{n+2}e^{-x}(n+1-x)$,

$$f_2^{(n+1)}(x) = \left(f_2^{(n)}\right)'(x) = \left((-1)^{n+1}e^{-x}(n-x)\right)' = (-1)^{n+1}\left(e^{-x}(n-x)\right)' =$$
$$= (-1)^{n+1}\left(-e^{-x}(n-x) - e^{-x}\right) = (-1)^{n+1}(-e^{-x})\left(n-x+1\right) = (-1)^{n+2}e^{-x}(n+1-x),$$

como se pretendia.

Exercícios propostos:

1. Determine as equações da reta tangente e da reta normal ao gráfico das seguintes funções, nos pontos indicados:

   a) $y = \dfrac{x^2}{x^2 - 1}$, $\quad x_0 = 2$,

   b) $y = x^{\frac{1}{4}} + 2x^{\frac{3}{4}}$, $\quad x_0 = 16$,

   c) $y = x^2 - 1$, $\quad x_0 = 1$.

2. Averigue se o teorema de Rolle é aplicável às funções seguintes, nos intervalos indicados:

   a) $f(x) = x^3 - x$, $\quad$ em $[0,1]$;

   b) $g(x) = \dfrac{x}{x^2 - 2}$, $\quad$ em $[-1,2]$;

   c) $h(x) = e^{x^2-1} + 1$, $\quad$ em $[-1, 1]$;

   d) $i(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 4x + 3}{x - 2} & \text{se } x \neq 2, \\ 5 & \text{se } x = 2. \end{cases}$, $\quad$ em $[1, 3]$.

3. Mostre que o teorema de Rolle é aplicável às funções que se seguem e determine o valor intermédio respetivo onde a derivada é nula, nos intervalos indicados:

   a) $f(x) = 2x^2 - 8x + 3$, no intervalo $[1, 3]$;

   b) $g(x) = e^{x^2-1} + 1$, no intervalo $[-1, 1]$;

   c) $h(x) = \ln(\sin x)$, no intervalo $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right]$;

4. Mostre que o teorema de Lagrange é aplicável às funções que se seguem e determine o valor intermédio respetivo a que o Teorema se refere, nos intervalos indicados:

   a) $f(x) = 3x^2 + 1$, no intervalo $[-1, 2]$;

b) $g(x) = \ln(1+x)$, no intervalo $[0,1]$;

c) $h(x) = \begin{cases} 5 - x^2 & \text{se} \quad x \leq 1, \\ \dfrac{3}{x} + x & \text{se} \quad x > 1. \end{cases}$, no intervalo $[0,3]$;

d) $i(x) = e^{x^2-4} + x$, no intervalo $[-1,1]$;

e) $j(x) = \ln(x+1)$, no intervalo $\left[0, \dfrac{1}{e}\right]$.

e) $l(x) = \sin x$, no intervalo $\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

5. Averigue se é possível aplicar o teorema de Cauchy às seguintes funções nos intervalos indicados:

a) $f_1(x) = e^{x^2-1} + x$ e $g_1(x) = 2x$ em $[-1,1]$;

b) $f_2(x) = \cos(2x)$ e $g_2(x) = \sin(x)$ em $\left[-\dfrac{\pi}{3}, \dfrac{\pi}{3}\right]$;

c) $f_3(x) = x^3$ e $g_3(x) = x^2$ em $[-2,2]$.

6. Aplicando o Teorema de Cauchy às funções que se seguem, nos respetivos intervalos, determine os pontos c a que o teorema se refere:

a) $f_1(x) = (x+1)^2$ e $g_1(x) = 3x^2$ em [1, 3].

b) $f_2(x) = e^{x^2-1} + x$ e $g_2(x) = 2x$ em [-1, 1].

7. Utilizando a regra de Cauchy, calcule os seguintes limites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\dfrac{x-2}{x}\right)}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^3}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3\, e^{-x}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to0^+} x^x$

e) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{\ln x}}$

f) $\lim\limits_{x\to 1} x^{\frac{1}{1-x}}$

g) $\lim\limits_{x\to+\infty} (x+1)^{\frac{1}{x^2}}$

h) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\operatorname{sen} x}$

i) $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x$

k) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x-\operatorname{sen} x}{x^3}$

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2-\operatorname{sen}^2 x}{x^4}$

m) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log x}{x^3}$

n) $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^x$

o) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (1+\cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$

p) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\log_2(x+1)}{x}$

q) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{e^{1/x}}{\operatorname{cotg} x}$

r) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} (\operatorname{sen} x-\cos x)^{\operatorname{tg} x}$

8. Determine a derivada de ordem n das funções que se seguem, fazendo a respetiva prova por indução:

a) $f_1(x)=\frac{1}{1+x}$

b) $f_2(x)=\dfrac{1-x}{1+x}$

c) $f_3(x)=e^{\frac{x}{2}}$

c) $f_4(x)=\ln x$

d) $f_5(x)=\sin x$