Exemplo 3.4.3 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 3} .$$

Pretende-se identificar a característica da matriz usando o método da condensação (este valor é, no máximo, igual 3*). Assim,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{troca } L_1 \text{ e } L_3]{a_{11}=a_{21}=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4-L_1 \\ L_5-L_1}]{a_{11}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{troca } L_2 \text{ e } L_3]{a_{22}=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Tem-se portanto, $\mathrm{r}(A) = 3 = n < m = 5$.

3.5 Sistemas de Equações Lineares

Definição 3.5.1 *Um sistema de m equações lineares com n incógnitas é um conjunto de equações da forma,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} , \tag{3.5.1}$$

onde os elementos a_{ij}, b_i *são escalares,* $(a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 1,2,\ldots,m, \forall\, j = 1,2,\ldots,n)$ *e* x_j *são as n variáveis do sistema,* $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Se considerarmos $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a matriz dos coeficientes do sistema (3.5.1), $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ a matriz dos termos independentes b_i, e $x \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ a matrix das variáveis, $(j = 1, 2, \ldots, n)$,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}, \qquad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m\times 1}, \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n\times 1}, \tag{3.5.2}$$

então o sistema pode ser representado matricialmente por,

$$Ax = b. \tag{3.5.3}$$

Definição 3.5.2 *Uma solução do sistema linear* (3.5.3) *(ou* (3.5.1)*) é uma matriz coluna,*

$$s = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{bmatrix}_{n\times 1}$$

que satisfaz a equação (3.5.3) *ou cada uma das equações de* (3.5.1)*, quando substituímos* $x_1 = s_1,\ x_2 = s_2,\ \ldots,\ x_n = s_n$.
Ao conjunto de todas as soluções do sistema chama-se ***Conjunto Solução*** *ou* ***Solução Geral*** *do sistema.*

Dependendo do seu conjunto solução, um sistema carateriza-se nos termos da seguinte definição.

Definição 3.5.3 *O sistema diz-se,*

- ***Impossível*** *se não tiver solução;*
- *Possível se existir pelo menos uma solução, distinguindo-se, neste caso, duas situações,*
  - ***Possível determinado*** *se admitir apenas uma solução;*
  - ***Possível indeterminado*** *se existir mais do que uma solução (uma infinidade de soluções).*

Exemplo 3.5.1 *Seja o sistema,*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2 & = & 10 \\ x_2+2x_3 & = & -5 \\ -\ x_3 & = & 7 \end{array}\right. . \tag{3.5.4}$$

Determina-se facilmente a solução do sistema (3.5.4) *resolvendo-o de baixo para cima, calculando o valor de* x_3 *na 3ª equação e substituindo o valor encontrado nas equações anteriores, repetindo este processo para o cálculo de* x_2 *e* x_1*, na 2ª e na 1ª equação, respetivamente.*

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2 & = & 10 \\ x_2+2x_3 & = & -5 \\ x_3 & = & -7 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1+2x_2 & = & 10 \\ x_2 & = & -5-2(-7) \\ x_3 & = & -7 \end{array}\right.$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1+2x_2 & = & 10 \\ x_2 & = & 9 \\ x_3 & = & -7 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & 10-2(9) \\ x_2 & = & 9 \\ x_3 & = & -7 \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} x_1 & = & -8 \\ x_2 & = & 9 \\ x_3 & = & -7 \end{array}\right. .$$

Escrevendo o sistema (3.5.4) *na forma matricial, tem-se,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}_{3\times 1} .$$

No exemplo 3.5.1 observa-se que a matriz dos coeficientes do sistema é triangular superior o que justifica a facilidade de cálculo da respetiva solução.

Em certa medida este é o objetivo principal do método de resolução de sitemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss. Para isso são necessários os seguintes resultados.

Definição 3.5.4 *Dois sistemas lineares* $Ax = b$ *e* $Cx = d$ *dizem-se equivalentes se têm o mesmo conjunto solução.*

Teorema 3.5.1 *Seja $Cx = d$ um sistema linear obtido a partir do sistema $Ax = b$ através das mesmas operações elementares sobre linhas, quer sobre a matriz dos coeficientes A, quer sobre a matriz b dos termos independentes. Então os sistemas lineares $Ax = b$ e $Cx = d$ são equivalentes.*

Dem. *De acordo com a Observação 3.3.2, pontos 3 e 4, as operações elementares sobre linhas de uma matriz $A_{m\times n}$, são obtidas multiplicando essa matriz à esquerda pelas matrizes elementares correspondentes, $A' = P_{m\times m}A_{m\times n}$. Desta forma, se $C = PA$ e $d = Pb$, com P uma matriz elementar (ou um produto de matrizes elementares) então,*
– se x é solução de $Ax = b$, multiplicando ambos os membros por P vem $PAx = Pb \Longleftrightarrow Cx = d$, pelo que x é também solução do sistema $Cx = d$;
– reciprocamente, se x é solução de $Cx = d$ obtém-se o mesmo resultado muitiplicando ambos os membros por P^{-1}, que existe segundo o ponto 3. da Observação 3.3.2. □

De modo a poder aplicar o resultado do Teorema 3.5.1 garantindo que se efectuam exatamente as mesmas operações elementares sobre as linhas das matrizes A e b, considera-se a seguinte **Matriz Aumentada**,

$$\left[\,A\,\middle|\,b\,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)} . \tag{3.5.5}$$

Desta forma, o **Método de Eliminação de Gauss** permite resolver sistemas de equações lineares através da condensação da matriz aumentada, usando operações elementares sobre as linhas desta matriz,

$$\left[\,A\,\middle|\,b\,\right] \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \quad \left[\,C\,\middle|\,d\,\right] = \left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & c_{1p+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2p} & c_{2p+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{pp} & c_{pp+1} & \cdots & c_{pn} & d_p \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)} ,$$

garantindo que os sistemas, inicial e final, $\left[\,A\,\middle|\,b\,\right]$ e $\left[\,C\,\middle|\,d\,\right]$, são equivalentes e, portanto, têm o mesmo conjunto solução.

Exemplo 3.5.2 *Seja o sistema,*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 4 \end{cases} . \tag{3.5.6}$$

Escrevendo o sistema (3.5.6) *na forma matricial,*

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}_{3\times 1},$$

pode, desta forma, ser resolvido recorrendo à condensação da matriz aumentada, usando operações elementares sobre as linhas da matriz,

$$\left[\, A \,\middle|\, b \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \end{array}\right]_{3\times 4}.$$

Assim,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 - 3L_1 \\ L_3 - 2L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & -10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right],$$

uma vez obtida uma linha da matriz A nula, volta-se à forma inicial, com o sistema de equações lineares,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 \ = \ 4 \\ \qquad 8x_2 - 2x_3 \ = -10 \\ \qquad\qquad\qquad 0 = -4 \dashleftarrow \textit{Impossvel} \end{cases},$$

o que traduz um sistema ***Impossível****, portanto sem solução.*

Observação 3.5.1 *Note-se que a relação entre os valores da característica da matriz do sistema e da matriz aumentada é a seguinte,* $\mathrm{r}(A) = 2 < \mathrm{r}([A|b]) = 3$. *É portanto determinante que, sempre que* $\mathrm{r}(A) = p < \mathrm{r}([A|b])$*, o sistema correspondente seja impossível, pois implica a existência de uma linha idêntica a*

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right].$$

Isto é, sem perda de generalidade, pode supor-se que a matriz aumentada é do tipo

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & c_{1p+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2p} & c_{2p+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{pp} & c_{pp+1} & \cdots & c_{pn} & d_p \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_{p+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & d_m \end{array}\right]_{m\times(n+1)},$$

com $d_{p+1} \neq 0$, *que se traduz numa equação impossível do tipo* $0 = d_{p+1}$.

Exemplo 3.5.3 *Seja o sistema,*

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}. \tag{3.5.7}$$

Escrevendo o sistema (3.5.7) *na forma matricial,*

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}_{3\times3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}_{3\times1},$$

e recorrendo à condensação da matriz aumentada, tem-se,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -4 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-3L_1 \\ L_3-2L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & -10 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Assim, voltando à forma inicial, e resolvendo o sistema de equações lineares daí resultante, obtém-se,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = 4 \\ \qquad 8x_2 - 2x_3 = -10 \\ \qquad\qquad 0 = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = 4 + 2(-\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3) - x_3 \\ x_2 = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 \\ 0 = 0 \checkmark \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3 \\ 0 = 0 \checkmark \end{cases}.$$

Trata-se portanto de um sistema com uma infinidade de soluções, do tipo $[\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_3, -\frac{5}{4} + \frac{1}{4}x_3, x_3]^T$, $x_3 \in \mathbb{R}$, *isto é, é um* ***Sistema Possível Indeterminado***.

Observação 3.5.2 *As soluções do sistema anterior podem ser decompostas em,*

$$\begin{bmatrix} \frac{3}{2}-\frac{1}{2}x_3 \\ -\frac{5}{4}+\frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{4} \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = s+u \quad ,$$

onde a primeira matriz s *é uma solução particular do sistema original e a segunda matriz* u *verifica,*

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad .$$

Ou seja, independentemente do valor de x_3*,* $u=[-\frac{1}{2}x_3,\,\frac{1}{4}x_3,\,x_3]^T$ *é solução do sistema* $Ax=0$.

3.5.1 Sistema Homogéneo Associado

Definição 3.5.5 *Ao conjunto de soluções do* ***Sistema Homogéneo*** $Ax=0$*, com* $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$*, chama-se Núcleo (ou Espaço Nulo ou Kernel) e designa-se por* $N(A)$ *(ou* $\ker(A)$*).*

Propriedades 3.5.1 *As soluções* $u,v \in \ker(A)$ *do sistema homogéneo* $Ax=0$*, formam um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^n$*, verificando, entre outras, as seguintes propriedades:*

- *A matriz nula,* $u=[0,0,\dots,0]^T$*, é sempre solução do sistema,* $0 \in \ker(A)$*;*
- *A soma de duas (ou mais soluções) ainda é solução do sistema,* $u+v \in \ker(A)$*;*
- *O produto de uma solução* u *por um escalar* $\lambda \in \mathbb{R}$ *ainda é solução do sistema,* $\lambda u \in \ker(A)$.

Dem. *Sejam* $u,v \in \ker(A)$.

- $A0=0$*, pelo que a matriz nula é sempre solução do sistema,* $0 \in \ker(A)$*;*
- $A(u+v)=Au+Av=0+0=0$*, pelo que a soma de duas soluções ainda é solução do sistema,* $u+v \in \ker(A)$*;*
- $A(\lambda u)=\lambda(Au)=\lambda 0=0$*, logo o produto* λu *ainda é solução do sistema, i.e.* $\lambda u \in \ker(A)$. □

Teorema 3.5.2 *Se o sistema $Ax = b$ for possível, o seu conjunto de soluções S escreve-se na forma,*

$$S = s + \ker(A)\,,$$

onde s é uma solução particular do sistema $Ax = b$.

Dem. *Seja s uma solução particular do sistema $Ax = b$. Se w é qualquer outra solução do sistema $Ax = b$, então a matriz diferença $u = w - s \in \ker(A)$, pois, $A(w-s) = Aw - As = b - b = 0$. Portanto, qualquer outra solução w escreve-se na forma $w = s + u$, com $u \in \ker(A)$, isto é, $S \subseteq s + \ker(A)$.*
Seja u uma solução qualquer do sistema homogéneo, $Ax = 0$. Como $A(s+u) = As + Au = b + 0 = b$, então a soma $s + u$ é ainda solução de $Ax = b$, isto é, $s + \ker(A) \subseteq S$.
Conclusão, $S = s + \ker(A)$. □

O resultado do Teorema 3.5.2 é ainda válido quando $\ker(A) = \{0\}$. Nesse caso, o conjunto solução é formado por uma única solução, $S = s + \ker(A) = s + \{0\} = \{s\}$, ou seja o sistema é determinado.

A resolução do sistema homogéneo $Ax = 0$ associado ao sistema original $Ax = b$, passa pela aplicação das mesmas operações elementares sendo que a matriz aumentada ao longo de todo o processo será sempre da forma $[A|0]$.

Observação 3.5.3 *No exemplo 3.5.3, o sistema homogéneo associado $Ax = 0$ teria, desta forma, o mesmo processo de cálculo, com exceção da última coluna que se manteria sempre nula,*

$$\left[\, A \,\middle|\, b \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

e que resulta no seguinte sistema final,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ \qquad 8x_2 - 2x_3 &= 0 \\ \qquad\qquad 0 &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 - 2x_2 &= -x_3 \\ \qquad 8x_2 &= 2x_3 \\ \qquad\ 0 &= 0 \checkmark \end{cases}.$$

Note-se que, ignorando a última linha que é redundante, o sistema daí resultante é "possível e determinado", uma vez que a respetiva matriz ampliada,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 8 & 2 \end{array}\right],$$

tem característica 2 igual ao número de "variáveis básicas", logo, a sua solução é dada por,

$$\begin{cases} x_1 \quad = -\frac{1}{2}x_3 \\ \quad x_2 = \quad \frac{1}{4}x_3 \end{cases},$$

resultado dependente do valor de x_3, uma "variável livre" do sistema. Assim, o núcleo do sistema homogéneo associado, $Ax = 0$, é formado por todas as matrizes da forma,

$$u = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}x_3 \\ \frac{1}{4}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_3 \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \\ 1 \end{bmatrix} \quad ,$$

onde a solução $v = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1]^T$ é um gerador desse subespaço, obtido quando considerando $x_3 = 1$.

Observação 3.5.4 *Ainda no exemplo 3.5.3, tem-se,* $\mathrm{r}(A) = 2 = \mathrm{r}([A|b])$. *É portanto de esperar que sempre que* $\mathrm{r}(A) = p = \mathrm{r}([A|b])$ *o sistema correspondente seja possível. Atendendo ao facto de esse valor p ser inferior ao número de incógnitas n, $p = 2 < 3 = n$, o sistema será possível mas indeterminado, pois, tal como no exemplo anterior, a matriz aumentada será da forma,*

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & c_{1p+1} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2p} & c_{2p+1} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{pp} & c_{pp+1} & \cdots & c_{pn} & d_p \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]_{m\times(n+1)} ,$$

o que se traduz em várias equações redundantes, do tipo $0 = 0$, *representando condições universais, e as restantes, serão apenas p equações envolvendo $n > p$ variáveis o que justifica o seu grau de indeterminação (n-p). Um sistema nestas condições terá p* ***variáveis básicas*** *e $(n - p)$* ***variáveis livres****. Com efeito, considerando a matriz aumentada do sistema homogéneo associado $Ax = 0$,*

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & c_{1p+1} & \cdots & c_{1n} & 0 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2p} & c_{2p+1} & \cdots & c_{2n} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{pp} & c_{pp+1} & \cdots & c_{pn} & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right]_{m\times(n+1)} ,$$

ignorando as últimas $(m-p)$ linhas nulas, tem-se,

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1p}x_p+c_{1p+1}x_{p+1}+\cdots+c_{1n}x_n & = & 0 \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2p}x_p+c_{2p+1}x_{p+1}+\cdots+c_{2n}x_n & = & 0 \\ & \vdots & \\ c_{pp}x_p+c_{pp+1}x_{p+1}+\cdots+c_{pn}x_n & = & 0 \end{array}\right. ,$$

ou, de forma equivalente,

$$\left\{\begin{array}{rcl} c_{11}x_1+c_{12}x_2+\cdots+c_{1p}x_p & = & -c_{1p+1}x_{p+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ c_{22}x_2+\cdots+c_{2p}x_p & = & -c_{2p+1}x_{p+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ & \vdots & \\ c_{pp}x_p & = & -c_{pp+1}x_{p+1}-\cdots-c_{pn}x_n \end{array}\right. .$$

Este último sistema pode considerar-se associado à seguinte matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1p} & -c_{1p+1}x_{p+1}-\cdots-c_{1n}x_n \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2p} & -c_{2p+1}x_{p+1}-\cdots-c_{2n}x_n \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{pp} & -c_{pp+1}x_{p+1}-\cdots-c_{pn}x_n \end{array}\right] ,$$

envolvendo p variáveis básicas, $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, e $(n-p)$ variáveis livres, $(x_{p+1}, x_{p+2}, \ldots, x_n)$. De acordo com as Propriedades 3.5.1, o núcleo do sistema homogéneo associado, $Ax = 0$, é formado por todas as matrizes da forma,

$$u = x_{p+1}\left[\begin{array}{c} \\ u_1 \\ \\ \end{array}\right] + x_{p+2}\left[\begin{array}{c} \\ u_2 \\ \\ \end{array}\right] + \cdots + x_n\left[\begin{array}{c} \\ u_{n-p} \\ \\ \end{array}\right] ,$$

onde as soluções u_i, $i = 1, \ldots, (n-p)$, geradores desse subespaço, são obtidos de forma independente quando se considera

$$\left\{\begin{array}{l} x_i = 1 \\ x_j = 0 \quad se\ j \neq i \end{array}\right. .$$

Exemplo 3.5.4 *Seja o sistema,*

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 7x_4 = 2 \end{cases} . \tag{3.5.8}$$

Considerando a matriz aumentada e usando operações elementares sobre as linhas dessa matriz, tem-se,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 2 \\ 1 & 3 & 4 & 7 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2 - L_1 \\ L_3 - L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 - 2L_2]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Desta forma, $\mathrm{r}(A) = 2 = \mathrm{r}([A|b]) < n = 4$, *logo o sistema* (3.5.8) *terá* $p = 2$ *variáveis básicas e* $(n-p) = 2$ *variáveis livres. Ignorando a última linha da matriz, o respetivo sistema homogéneo associado* $Ax = 0$ *é equivalente a,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \left(x_3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

Assim, resolvendo os sistemas de forma independente, considerando no primeiro $x_3 = 1$ *e* $x_4 = 0$ *e* $x_3 = 0$ *e* $x_4 = 1$, *no segundo, tem-se,*

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

obtém-se,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2 \\ x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 = -3 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = -1 \\ x_2 = -2 \end{cases},$$

sabendo que as matrizes $u = [-1,-1,1,0]^T$ *e* $v = [-1,-2,0,1]^T$ *são geradoras do* $\ker(A)$. *Relativamente ao sistema completo, considerando as variáveis livres nulas,* $x_3 = 0$ *e* $x_4 = 0$, *vem*

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases},$$

pelo que, a matriz $s = [2,0,0,0]^T$ *é uma solução particular do sistema completo.*

O conjunto solução do sistema (3.5.8) *é dado por,* $s+\alpha u+\beta v$*, com* $\alpha,\ \beta\in\mathbb{R}$,

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-\alpha-\beta \\ -\alpha-2\beta \\ \alpha \\ \beta \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.5.5 *Seja o sistema,*

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 = 2 \\ 2x_1 - \ \ x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}. \tag{3.5.9}$$

Escrevendo o sistema na forma matricial,

$$Ax = b \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}_{3\times 1} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 8 \end{bmatrix}_{3\times 1},$$

e recorrendo à condensação da matriz aumentada, tem-se,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & 8 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-3L_1 \\ L_3-2L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & -10 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-\frac{3}{8}L_2]{a_{22}=8} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 8 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{15}{4} \end{array}\right].$$

Voltando à forma inicial, e resolvendo o sistema obtém-se,

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + \ \ x_3 = \ \ 4 \\ \qquad 8x_2 - 2x_3 = -10 \\ \qquad\qquad \frac{3}{4}x_3 = \ \ \frac{15}{4} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 - 2x_2 \ \ = \ \ 4-5 \\ \qquad 8x_2 \ \ = -10+10 \\ \qquad\quad x_3 = \ \ 5 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 \qquad = -1 \\ \quad x_2 \ \ = \ \ 0 \\ \qquad x_3 = \ \ 5 \end{cases}.$$

Trata-se portanto de um sistema com uma única solução, $s=[-1,0,5]^T$*, isto é,* ***Possível e Determinado****.*

Observação 3.5.5 *Neste último exemplo, a característica da matriz do sistema é igual à característica da matriz aumentada,* $\mathrm{r}(A)=3=\mathrm{r}([A|b])$ *e, por sua vez, também igual ao número de incógnitas* $n=3$.
O sistema correspondente é, desta forma, possível e determinado, pois significa que a matriz aumentada é da

forma,

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} & d_1 \\ 0 & c_{22} & \cdots & c_{2n} & d_2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & c_{nn} & d_n \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{m\times(n+1)} ,$$

pelo que, ignorando as várias equações redundantes $(0 = 0)$*, resulta num sistema de n equações, envolvendo n variáveis, que determinam a existência de uma única solução.*

Com base nas Observações 3.5.1, 3.5.4 e 3.5.5, é agora evidente o resultado do seguinte teorema.

Teorema 3.5.3 [1] *Seja* $[A|b]$ *a matriz aumentada associada a um sistema linear com n incógnitas.*

- *Se* $\mathrm{r}(A) < \mathrm{r}([A|b])$ *então o sistema é impossível (não tem qualquer solução).*
- *Se* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|b]) = n$ *então o sistema é possível e determinado (tem uma única solução).*
- *Se* $\mathrm{r}(A) = \mathrm{r}([A|b]) < n$ *então o sistema é possível e indeterminado (tem uma infinidade de soluções).*

Exemplo 3.5.6 *Seja o sistema,*

$$\begin{cases} x_1 - \ \ x_2 + \ \ x_3 + 4x_4 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + \ \ x_3 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 8x_4 = 1 \end{cases} . \tag{3.5.10}$$

Recorrendo à forma matricial e condensando a respetiva matriz aumentada, tem-se,

$$\left[\, A \,\middle|\, b \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 4 & 0 \\ 4 & 2 & 2 & 8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-3L_1 \\ L_3-2L_1 \\ L_4-4L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 8 & -2 & -10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 10 & -2 & -8 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4-\frac{5}{4}L_2]{a_{22}=8}$$

[1] Também designado por Teorema de Rouché.

$$\xrightarrow[L_4-\frac{5}{4}L_2]{a_{22}=8}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 8 & -2 & -10 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1\end{array}\right]\xrightarrow[\text{Troca } L_3\rightleftharpoons L_4]{a_{33}=0}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 8 & -2 & -10 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right]=\left[\,C\,\middle|\,d\,\right].$$

Tem-se que $\mathrm{r}(A)=\mathrm{r}([A|b])=4=n$*. Assim, o sistema é possível e determinado, tem uma única solução que pode ser calculada voltando à forma inicial de sistema,*

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ \ x_3+\ \ 4x_4=0\\ \quad\ \ 8x_2-2x_3-10x_4=0\\ \qquad\quad \frac{1}{2}x_3+\ \frac{9}{2}x_4=1\\ \qquad\qquad\quad -\ \ 4x_4=0\end{cases},$$

cuja solução é dada por,

$$\begin{cases} x_1-2x_2+\ x_3 = 0\\ \quad 8x_2-2x_3=0\\ \qquad \frac{1}{2}x_3=1\\ \qquad\quad x_4=0\end{cases}\iff\begin{cases} x_1-2x_2=-2\\ \quad 8x_2=4\\ \qquad x_3=2\\ \qquad x_4=0\end{cases}\iff\begin{cases} x_1=-1\\ x_2=\frac{1}{2}\\ x_3=2\\ x_4=0\end{cases}.$$

Portanto, a matriz $s=[-1,\frac{1}{2},2,0]^T$ *é a uma única solução do sistema.*

Outra alternativa de cálculo da solução s*, passa por continuar com a condensação de* $[C|d]$*, até se obter uma matriz aumentadada da forma,*

$$\left[\,I_n\,\middle|\,d'\,\right].$$

Com efeito,

$$\left[\,C\,\middle|\,d\,\right]=\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 4 & 0\\ 0 & 8 & -2 & -10 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{L_3+\frac{9}{8}L_4\\ a_{44}=-4}]{\substack{L_1+L_4\\ L_2-\frac{5}{2}L_4}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 8 & -2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[a_{33}=\frac{1}{2}]{\substack{L_1-2L_3\\ L_2+4L_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -2\\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{\substack{L_1+\frac{1}{4}L_2\\ a_{22}=8}}\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 8 & 0 & 0 & 4\\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -4 & 0\end{array}\right]\xrightarrow[\substack{2L_3\\ -\frac{1}{4}L_4}]{\frac{1}{8}L_2}$$

$$\xrightarrow[\substack{2L_3\\ -\frac{1}{4}L_4}]{\frac{1}{8}L_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n & d' \end{array}\right]$$

Neste caso a solução é facilmente identificada, $s = d'$, pois o sistema resultante é imediato,

$$\begin{cases} x_1 \qquad = -1 \\ \quad x_2 \qquad = \frac{1}{2} \\ \qquad x_3 \quad = 2 \\ \qquad\quad x_4 = 0 \end{cases}.$$

3.5.2 Matriz Inversa

Como dito, o método de condensação de uma matriz, para além de permitir a identificação da sua característica, é ainda usado no cálculo da matriz inversa. Para esse efeito considera-se o seguinte resultado.

Teorema 3.5.4 *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada e $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$ uma matriz coluna.*
O sistema associado a $Ax = b$ tem uma única solução se e só se A for invertível. Neste caso a solução x é dada por

$$x = A^{-1}b\,.$$

Dem.
($\Longleftarrow$) *Se a matriz A for invertível, então multiplicando ambos os membros de $Ax = b$ por A^{-1} obtém-se, $A^{-1}Ax = A^{-1}b \Longleftrightarrow I_nx = A^{-1}b \Longleftrightarrow x = A^{-1}b$.*
Por outro lado, se existisse outra solução do mesmo sistema, $Ax' = b$ então, multiplicando a diferença de ambas pela matriz A, obtinha-se $A(x-x') = Ax - Ax' = b - b = 0$, pelo que, multiplicando ambos os membros por A^{-1}, $A^{-1}A(x-x') = A^{-1}0 \Longleftrightarrow I(x-x') = 0$, isto é, $x = x'$. Portanto, se a matriz A for invertível, cada sistema da forma $Ax = b$ tem uma única solução.
($\Longrightarrow$) *Se $Ax = b$ tem uma única solução para cada $b \in M_{n\times 1}(\mathbb{R})$, em particular, considerando as n colunas*

da matriz identidade,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 \end{array}\right], \quad \cdots \quad \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 1 \end{array}\right] \tag{3.5.11}$$

cada um dos sistemas associado às matrizes aumentadas (ver Exemplo 3.5.6), tem uma única solução, x_i *e portanto, tem-se,*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \left[\begin{bmatrix} \\ x_1 \\ \\ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \\ x_2 \\ \\ \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} \\ x_n \\ \\ \end{bmatrix} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I_n$$

ou seja, a matriz A é invertível e $A^{-1} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$. □

Observação 3.5.6 *É evidente que se a característica de A for n então a matriz é regular uma vez que é possível o cálculo da sua inversa (cada um dos sistemas* (3.5.11) *é possível e determinado).*

Reciprocamente, se a matriz A é regular então cada sistema da forma $Ax = b$ *tem uma única solução o que obriga a verificar-se o resultado* $\mathrm{r}(A) = n$.

De acordo ainda com o resultado do Terorema 3.5.4, se a matriz for regular, a resolução de n sistemas do tipo (3.5.11)*, permite calcular cada uma das colunas de* A^{-1}.

Resolvendo em simultâneo os n sistemas, considerando uma única matriz aumentada

$$\left[\, A \,\middle|\, I_n \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right]$$

é possível o cálculo integral da matriz inversa de A.

Na prática procede-se à condensação total[1] *da matriz aumentada assim construída.*

[1] Método de Gauss-Jordan

Cálculo da Matriz Inversa - Condensação total da Matriz Aumentada

Caso exista, a inversa de uma matriz A pode ser calculada através de um número finito de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada,

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]. \tag{3.5.12}$$

de modo a obter-se a matriz identidade I_n no primeiro bloco de (3.5.12),

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \quad \rightsquigarrow \quad \left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right]. \tag{3.5.13}$$

Por construção, a matriz B calculada no segundo bloco de (3.5.13) é a matriz inversa de A, isto é, tem-se,

$$\left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]. \tag{3.5.14}$$

Exemplo 3.5.7 *Cálculo da matriz inversa da matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

Considerando a condensação total da matriz aumentada, tem-se

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_2-2L_1]{a_{11}=2} \left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_1+\frac{4}{5}L_2]{a_{22}=-5}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & -5 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[-\frac{L_2}{5}]{\frac{L_1}{2}} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} I_n & A^{-1} \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.5.8 *Cálculo da matriz inversa da matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

Considerando a condensação total da matriz aumentada, tem-se

$$\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\frac{1}{2}L_1+L_2]{a_{11}=2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[\frac{8}{3}L_2+L_3]{a_{22}=-\frac{3}{2}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[a_{33}=\frac{14}{3}]{L_2-\frac{3}{14}L_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[a_{22}=-\frac{3}{2}]{L_1+\frac{2}{3}L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{8}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{3}{2} & 0 & \frac{3}{14} & \frac{3}{7} & -\frac{3}{14} \\ 0 & 0 & \frac{14}{3} & \frac{4}{3} & \frac{8}{3} & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{-\frac{2}{3}L_2 \\ \frac{3}{14}L_3}]{\frac{1}{2}L_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{3}{14} \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{4}{7} & \frac{1}{7} & -\frac{1}{14} \\ -\frac{1}{7} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{2}{7} & \frac{4}{7} & \frac{3}{14} \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.5.9 *Cálculo da matriz inversa da matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando a condensação total da matriz aumentada, tem-se

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3-3L_1 \\ L_4+L_1}]{\substack{a_{11}=1 \\ L_2-2L_1}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_2 \rightleftharpoons L_4]{a_{22}=0} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & -2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[L_4-\frac{1}{2}L_3]{a_{33}=2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -7 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_3-\frac{14}{5}L_4 \\ a_{44}=-\frac{5}{2}}]{\substack{L_1+\frac{6}{5}L_4 \\ L_2+\frac{6}{5}L_4}} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[a_{33}=2]{L_2-\frac{1}{2}L_3} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{3}{5} & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{9}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[a_{22}=4]{L_1-\frac{1}{4}L_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 4 & 0 & 0 & \frac{6}{5} & \frac{13}{5} & -\frac{9}{5} & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & -\frac{8}{5} & -\frac{14}{5} & \frac{12}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{\frac{1}{2}L_3 \\ -\frac{2}{5}L_4}]{\frac{1}{4}L_2} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{10} & \frac{13}{20} & -\frac{9}{20} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{array}\right]$$

Portanto,

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{10} & \frac{11}{20} & -\frac{3}{20} & -\frac{1}{4} \\ \frac{3}{10} & \frac{13}{20} & -\frac{9}{20} & \frac{1}{4} \\ -\frac{4}{5} & -\frac{7}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 0 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 3.5.10 *Cálculo da matriz inversa da matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Considerando a condensação total da matriz aumentada, tem-se,

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-L_1 \\ L_3-4L_1 \\ L_4-3L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 1 & -4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & -3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right],$$

não sendo possível continuar o cálculo pois $\mathrm{r}(A) = 3 < 4 = \mathrm{r}([A \mid I\,])$ *(a linha* 4 *é nula).*
Logo, pelo Teorema 3.5.4, a matriz A é singular (não admite inversa).