# 1 - FUNÇÕES REAIS DE VARIÁVEL REAL

## 1.1 - Definição. Noções básicas.

**Definição de função:** Chama-se função ou aplicação, definida num conjunto $A \subseteq R$, com valores num conjunto $B \subseteq R$, a uma correspondência que associa a cada elemento $x \in A$ um **único** elemento $y \in B$.

Simbolicamente, uma função $f$ representa-se por

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow B \\ x &\rightarrow y = f(x) \end{aligned}$$

O elemento $y$ é chamado **imagem** de $x$ através de $f$ e denota-se por $f(x)$. A função $f$ também se designa por uma *função real de variável real.*

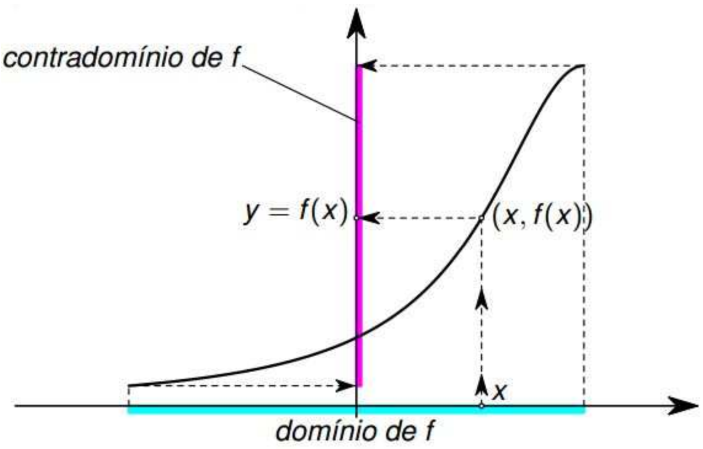
O conjunto $A$ dos valores *permitidos ou admissíveis* para $x$ chama-se **domínio** da função $f$.

O conjunto $B$ designa-se **conjunto de chegada**.

O conjunto de todas as imagens $y$ chama-se **contradomínio** da função $f$ e representa-se por $f(A) = \{f(x) : x \in A\}$**.**

Uma função além de poder ser representada através de uma expressão algébrica $f(x)$, também é suscetível de ser representada por um gráfico**.**

Chama-se **gráfico de uma função** $f$ ao conjunto de todos os pontos do plano cartesiano $(x, y) \in R^2$ tais que $x \in A$ e $y = f(x)$.




**Exemplos:** Pretende-se determinar o domínio de cada uma das seguintes funções reais de variável real:

**1.** $f_1(x) = \sqrt{x+3}$

$Df_1 = \{x \in R : x+3 \geq 0\} = \{x \in R : x \geq -3\} = [-3, +\infty[$

**2.** $f_2(x) = \sqrt[5]{x+3}$

$Df_2 = R$

**3.** $f_3(x) = \dfrac{x-1}{1+x}$

$Df_3 = \{x \in R : 1+x \neq 0\} = R \setminus \{-1\}$

**4.** $f_4(x) = \ln\left(\dfrac{x^3 - 3x + 2}{x+1}\right)$

$Df_4 = \left\{x \in R : \dfrac{x^3 - 3x + 2}{x+1} > 0 \wedge x+1 \neq 0\right\}$

1 é raiz do polinómio $x^3 - 3x + 2$, pela Regra de Ruffini,

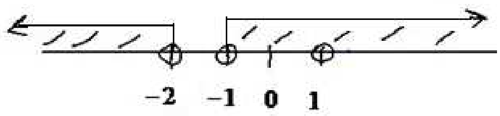
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & -3 & 2 \\ 1 & & 1 & 1 & -2 \\ \hline & 1 & 1 & -2 & \boxed{0} \end{array}$$

$$x^3 - 3x + 2 = (x-1)(x^2 + x - 2),$$

$$x^2 + x - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2} \Rightarrow x = \frac{-1 \pm 3}{2} \Rightarrow x = -2 \vee x = 1$$

| $x$ | | -2 | | -1 | | 1 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^3 - 3x + 2$ | - | 0 | + | + | + | 0 | + |
| $x + 1$ | - | - | - | 0 | + | + | + |
| $\frac{x^3 - 3x + 2}{x+1}$ | + | 0 | - | s/s | + | 0 | + |

$$\frac{x^3 - 3x + 2}{x+1} > 0 \Rightarrow x < -2 \ \vee \ -1 < x < 1 \ \vee \ x > 1$$




Portanto, $Df_4 = ]-\infty, -2[ \cup ]-1, 1[ \cup ]1, +\infty[$

### 1.1.1 Funções injetivas, funções sobrejetivas, funções monótonas, funções limitadas, funções pares, funções ímpares.

- Uma função $f : D \subseteq R \to R$ diz-se **injetiva** sse quaisquer que sejam

$$x, y \in D, \quad x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$$

ou, equivalentemente, $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Em termos da representação gráfica, uma função é injetiva sse nenhuma reta horizontal intersecta o seu gráfico em mais do que um ponto.

**Exemplos:**

1. $f_5(x) = |x|$ não é injetiva.

$f_5(-1) = |-1| = 1 = |1| = f_5(1)$

2. $f_6(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 1}$ é injetiva.

$$f_6(x) = f_6(y) \Rightarrow \frac{x^2-1}{x+1} = \frac{y^2-1}{y+1} \Rightarrow \frac{(x-1)(x+1)}{x+1} = \frac{(y-1)(y+1)}{y+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x - 1 = y - 1 \Rightarrow x = y.$$

- Uma função $f : D \to E$ diz-se **sobrejetiva** sse o contradomínio, $f(D)$**,** coincide com o conjunto de chegada, $E$**.**

  Formalmente, pode enunciar-se

$$\forall y \in E,\ \exists x \in D:\ \ y = f(x).$$

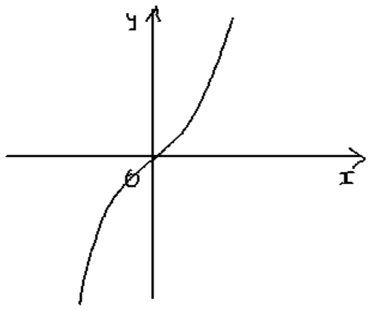
**Exemplos:**

1. $f_7 : R \to R$ **,** $f_7(x) = e^x$ não é sobrejetiva.

$f_7(R) = R^+ \neq R$

2. $f_8 : R \to R$, $f_8(x) = x^3$ é sobrejetiva.

$f_8(R) = R$




- Uma função $f : D \to E$ é **bijetiva** se for simultaneamente injetiva e sobrejetiva.

  Neste caso, diz-se que existe uma *correspondência biunívoca* ou uma *bijeção* entre os conjuntos $D$ e $E$.

  Formalmente, pode enunciar-se

$$\forall y \in E,\ \exists^1 x \in D: \ \ y = f(x)\,.$$

- Uma função $f : D \subseteq R \to R$ diz-se

- **Crescente** (no sentido estrito) sse $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) < f(y)$.
- **Decrescente** (no sentido estrito) sse $\forall x, y \in D$, $x < y \Rightarrow f(x) > f(y)$.
- **Monótona** sse é crescente ou decrescente.

## Exemplos:

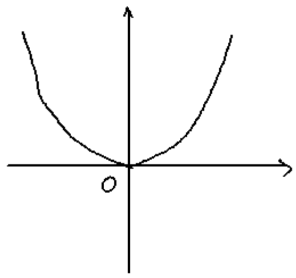
1. $f_9(x) = x^3$ é monótona crescente.

   $x < y \Rightarrow x^3 < y^3$

2. $f_{10}(x) = -x$ é monótona decrescente.

   $x < y \Rightarrow -x > -y$

3. $f_{11}(x) = x^2$ não é monótona.




- Uma função $f : D \subseteq R \to R$ diz-se **limitada** se o seu contradomínio for um conjunto limitado, ou seja, se $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M,\ \forall x \in D$.

## Exemplos:

**1.** $f_{12}(x) = x^3$ não é limitada.

**2.** $f_{13}(x) = \dfrac{1}{2+|x|}$ é limitada.

$f_{13}(0) = \dfrac{1}{2}, \qquad \lim\limits_{x \to \pm\infty} f_{13}(x) = 0,$

$f_{13}(R) = \left]0, \frac{1}{2}\right]$, $\qquad |f_{12}(x)| \leq M$ , basta considerar $M \geq \frac{1}{2}$.

➢ Uma função $f : D \subseteq R \to R$ diz-se

- **Par** se $\forall x \in D,\ f(-x) = f(x)$.
- **Ímpar** se $\forall x \in D,\ f(-x) = -f(x)$.
- **Periódica**, de período $t$, se $\forall x \in D,\ f(x) = f(x+t)$, onde $t$ é o menor número real positivo para o qual se verifica a igualdade.

**Exemplos:**

1. $f_{14}(x) = x^2$ é par.

   $f_{14}(-x) = (-x)^2 = x^2 = f_{14}(x), \quad \forall x \in R$.

2. $f_{15}(x) = x$ é ímpar.

   $f_{15}(-x) = -x = -f_{15}(x), \quad \forall x \in R$.

3. $f_{16}(x) = \sin x$ é ímpar e periódica de período $2\pi$.

   $f_{16}(-x) = \sin(-x) = \sin(x) = -f_{16}(x)$,

   $f_{16}(x+\pi) = \sin(x+\pi) = \sin(x) = f_{16}(x), \quad \forall x \in R$.

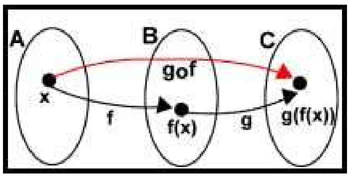
**Propriedades:**

- A única função par e ímpar ao mesmo tempo é a função nula $f(x) = 0$.
- A soma de duas funções pares é uma função par.
- A soma de duas funções ímpares é uma função ímpar.
- O produto de duas funções pares ou de duas funções ímpares é uma função par.

- O produto de uma função par com uma função ímpar é uma função ímpar.
- Há funções que não são nem pares nem ímpares.

## 2.2- Função composta e função inversa.

- Dadas as funções $f: A \rightarrow B$ e $g: D \subseteq B \rightarrow C$ define-se a **composição** das duas funções como sendo a função $gof: E \subseteq A \rightarrow C$, $E = \{x \in A: f(x) \in D\}$, $(gof)(x) = g(f(x))$, lendo-se $g$ composta com $f$.




**Exemplo:** $f(x) = 3 + x^2$ , $g(x) = \sqrt{x-4}$

$D_f = R$, $D_g = [4, +\infty[$, $D_g \subset f(R)$

$f(R) = [3, +\infty[$, $g([4, +\infty[) = R_0^+$

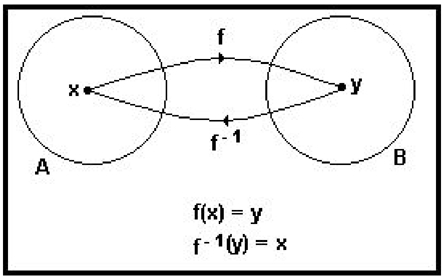
$(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g(3 + x^2) = \sqrt{3 + x^2 - 4} = \sqrt{x^2 - 1}$

$D_{g \circ f} = \{x \in R: 3 + x^2 \geq 4\} = R \setminus ]-1,1[$

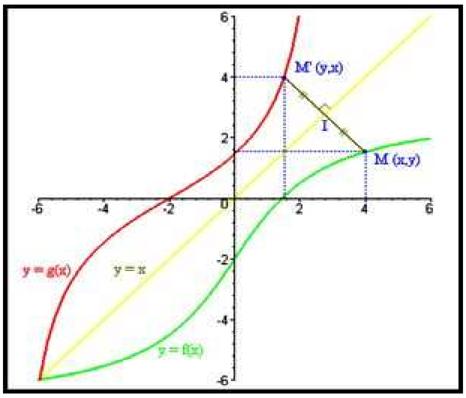
$$g \circ f : R \setminus ]-1,1[ \longrightarrow R_0^+$$
$$x \mapsto (g \circ f)(x) = \sqrt{x^2 - 1}$$

- Dada uma função $f: A \rightarrow B$, se existir outra função $g: B \rightarrow A$ tal que $gof = Id_A$ e $fog = Id_B$, então $g$ diz-se a função **inversa** de $f$ e denota-se por $f^{-1}$.

Uma função que tenha inversa diz-se **invertível**. Se uma função for invertível, então tem uma única inversa. A **condição necessária** para que uma função seja invertível é que seja **injetiva**.




Graficamente, a função inversa obtém-se por uma simetria em relação à reta $y = x$:




**Exemplo:** $f(x) = \sqrt{x-4}$

$D_f = [4,+\infty[, \quad CD_f = R_0^+$

$f(x) = f(y) \Rightarrow \sqrt{x-4} = \sqrt{y-4} \Rightarrow x-4 = y-4 \Rightarrow x = y$,

isto é, $f$ é injetiva, logo é invertível.

$y = f(x) \Rightarrow y = \sqrt{x-4} \Rightarrow y^2 = x-4 \Rightarrow x = y^2+4$,

pelo que $f^{-1}(y) = y^2+4$.

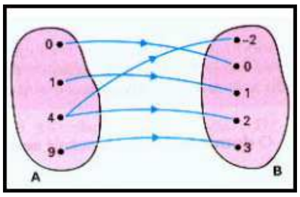
Portanto,

$$f^{-1} : R_0^+ \longrightarrow [4,+\infty[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x) = x^2 + 4$$

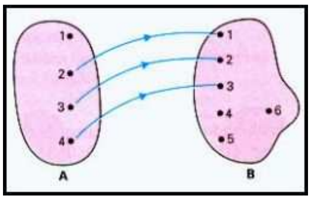
## Exercícios propostos:

1. Indique quais das seguintes correspondências são funções:

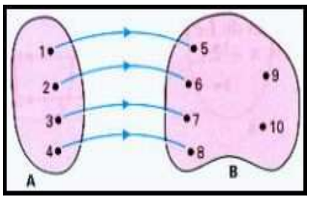
a)



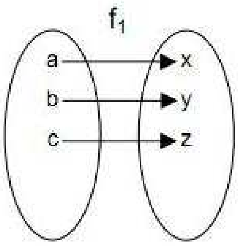

b)

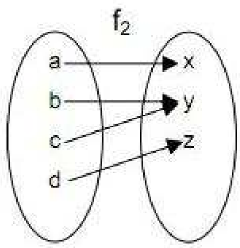


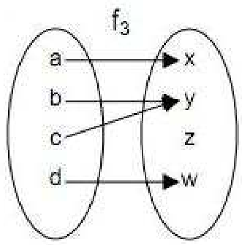

c)

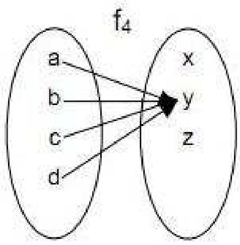



2. Identifique o domínio e o contradomínio de cada uma das funções representadas pelos seguintes diagramas:




3. Escreva o conjunto solução de cada uma das seguintes inequações:

a) $x^2 - 9 > 0$ b) $-x^3 + 4x^2 \leq 0$

c) $|x^2 - 1| \leq 3$ d) $|2x^2 - 3x| > 5$

e) $x^2 - 8x + 17 > 0$ f) $-2x^2 + 10x > 12$

g) $\dfrac{x-1}{2x+3} \leq 0$ h) $\dfrac{x}{2x+10} > 1$

i) $\dfrac{x-1}{x+3} > \dfrac{x}{x-6}$ j) $\dfrac{-x^2}{x-6} \geq 0$

4. Determine o domínio de cada uma das funções reais de variável real definida pelas seguintes expressões algébricas:

a) $\sqrt{x+2}$ b) $\dfrac{\sqrt[5]{1-x}}{|-5x+1|}$

c) $\dfrac{2}{16-x^2}$ d) $\sqrt{-x^2+x+2}$

e) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x}}$ f) $e^{\sqrt{\frac{x^2-1}{x}}}$

g) $\sqrt[6]{\dfrac{x-3}{x+2}}$ h) $2^{\frac{2+x}{x}}$

5. Verifique quais das seguintes funções são pares e quais são ímpares:

a) $f_1(x)=x^2-1$

b) $f_2(x)=2x^5$

c) $f_3(x)=\sqrt{1+x+x^2}-\sqrt{1-x+x^2}$

d) $f_4(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

6. Estude as funções que se indicam a seguir quanto à injetividade:

a) $f(x)=|\,x+1\,|-|\,x\,|$ b) $h(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$

7. Defina $g\circ f$, sendo: $f(x)=x+1$ e $g(x)=\dfrac{1+x^2}{x-1}$.

8. Defina, sempre que possível, a função inversa de cada uma das seguintes funções:

a) $g_1 = 2x + 3$  b) $g_2 = \sqrt[3]{1 - x^3}$  c) $g_3 = -1 + 2^{3x}$