Politécnico da Guarda – Escola Superior de Tecnologia e Gestão	**ENUNCIADO DE AVALIAÇÃO**	**MODELO** PED.018.01

Curso	**Eng. Informática**					*Ano letivo*	2019/2020
Unidade curricular	**Álgebra e Geometria Analítica**						
Ano curricular	1º	*Semestre*	1º	*Data*	04/12/2019	*Duração*	1h 15m

2º Teste

(Cotação)

1. Considere o subconjunto $F \subseteq \mathbb{R}^3$, definido por $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - z = 0\}$.

(3.0) **a)** Mostre que F é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

(2.0) **b)** Determine uma base e a dimensão de F.

(3.0) **c)** Calcule as coordenadas do vetor $(-3,4,-6)$ na base $\{(1,0,2),(0,1,0),(0,0,1)\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(2.0) **2.** Seja P_2 o espaço vetorial dos polinómios de grau menor ou igual a dois na variável x e com coeficientes reais e $p_1(x) = 1 + x^2$, $p_2(x) = 1 - x^2$ dois elementos deste conjunto. Mostre que o polinómio $p(x) = 2x$ não pertence ao subespaço gerado por $p_1(x)$, $p_2(x)$, $G = \langle (1+x^2),\, (1-x^2) \rangle$.

3. Sejam $A, B, C \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ as matrizes,

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad , \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 6 \\ 4 & -1 & 8 \end{bmatrix}.$$

(2.0) **a)** Mostre que $$AB = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad AC = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(2.0) **b)** Atendendo à igualdade $AB = AC$, verificada na alínea anterior, que pode afirmar acerca da existência de A^{-1}.

(2.0) **c)** Sabendo que B é uma matriz regular, resolva a equação matricial $(BX)^T + B^T = ABB^T$ em ordem a $X \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

(4.0) **d)** Usando o método de eliminação de Gauss caraterize o seguinte sistema e, se possível, determine a sua solução geral.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Formulário

• Subespaço vectorial de E $*$ $F \neq \emptyset$; $*$ $x+y \in F, \quad \forall x, y \in F$; $*$ $\lambda x \in F, \quad \forall x \in F\,, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.	• F e G subespaços de E $*$ $F+G = \{w \in E : w = u+v\,,\, u \in F\,,\, v \in G\}$ $*$ $\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$
$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Vetores Linearmente Ind. de E $*$ $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n = 0 \Longrightarrow \lambda_i = 0\,,\, \forall i$	$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ Vetores geradores de E $*$ $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n\,,\, \forall w \in E$
• $A = [a_{ij}]\,,\; B = [b_{ij}] \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\,,\; \lambda \in \mathbb{R}$ $*$ $A+B = [a_{ij} + b_{ij}]$ $*$ $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$ $*$ $AB = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}]$	• $A^T = [a_{ji}]$ $*$ $(A+B)^T = A^T + B^T$ $*$ $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ $*$ $(AB)^T = B^T A^T$ • $A^{-1}A = AA^{-1} = I_n$ $*$ $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$ $*$ $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ $*$ $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$

Resolução

1.

(3.0) **a)** $F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - z = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ pois, para todos os vetores (a_1,b_1,c_1), $(a_2,b_2,c_2) \in F$ e $\lambda \in \mathbb{R}$, tem-se

i) $2 \times 0 - 0 = 0 \implies (0,0,0) \in F \neq \emptyset$;

ii) $2(a_1+a_2) - (c_1+c_2) = (2a_1 - c_1) + (2a_2 - c_2) = 0 \implies (a_1,b_1,c_1) + (a_2,b_2,c_2) \in F$;

iii) $2(\lambda a_1) - (\lambda c_1) = \lambda(2a_1 - c_1) = 0 \implies \lambda(a_1,b_1,c_1) \in F$.

(2.0) **b)** $$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x - z = 0\} = \{(x,y,2x) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\} = \{x(1,0,2) + y(0,1,0) \,:\, x,y \in \mathbb{R}\}$$
$$= \langle (1,0,2), (0,1,0) \rangle \ , \quad \dim(F) = 2.$$

(3.0) **c)** $$(-3,4,-6) = \lambda_1(1,0,2) + \lambda_2(0,1,0) + \lambda_3(0,0,1) \iff (-3,4,-6) = (\lambda_1, \lambda_2, 2\lambda_1 + \lambda_3)$$
$$\iff \lambda_1 = -3\,,\ \lambda_2 = 4\,,\ \lambda_3 = 0$$

(2.0) **2.** $$2x = \lambda_1(1+x^2) + \lambda_2(1-x^2) \iff 0 + 2x + 0x^2 = (\lambda_1+\lambda_2) + 0x + (\lambda_1 - \lambda_2)x^2$$
$$\iff \begin{cases} 0 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 2 = 0 \ \rightarrow \ \text{Impossível} \\ 0 = \lambda_1 - \lambda_2 \end{cases} \implies p(x) = 2x \notin G.$$

3.

(2.0) **a)** $$AB = \begin{bmatrix} (-1)\times 0 + (-1)\times 1 + 1\times 2 & (-1)\times 1 + (-1)\times 2 + 1\times & (-1)\times(-2) + (-1)\times 4 + 1\times 4 \\ 0\times 0 + 2\times 1 + (-1)\times 2 & 0\times 1 + 2\times 2 + (-1)\times 1 & 0\times(-2) + 2\times 4 + (-1)\times 4 \\ (-1)\times 0 + 1\times 1 + 0\times 2 & (-1)\times 1 + 1\times 2 + 0\times 1 & (-1)\times(-2) + 1\times 4 + 0\times 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$AC = \begin{bmatrix} (-1)\times 1+(-1)\times 2+1\times 4 & (-1)\times 0+(-1)\times 1+1\times(-1) & (-1)\times 0+(-1)\times 6+1\times 8 \\ 0\times 1+2\times 2+(-1)\times 4 & 0\times 0+2\times 1+(-1)\times(-1) & 0\times 0+2\times 6+(-1)\times 8 \\ (-1)\times 1+1\times 2+0\times 4 & (-1)\times 0+1\times 1+0\times(-1) & (-1)\times 0+1\times 6+0\times 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 6 \end{bmatrix}.$$

(2.0) **b)** $\nexists A^{-1}$, pois caso existisse, multiplicando ambos os membros da equação $AB = AC$ por A^{-1}, viria

$$A^{-1}AB = A^{-1}AC \iff B = C,$$

o que é falso. Portanto A é uma matriz singular.

(2.0) **c)** $(BX)^T + B^T = ABB^T \iff (BX)^T = -B^T + ABB^T \overset{(\ )^T=(\ )^T}{\iff} BX = -B + BB^TA^T \iff$

$$\overset{B^{-1}\times(\ )=B^{-1}\times(\ )}{\iff} I_nX = -I_n + I_nB^TA^T \iff X = -I_n + B^TA^T \iff X = -I_n + (AB)^T.$$

$$X = -\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(4.0) **d)** $\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-L_1]{a_{11}=-1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3-L_2]{a_{22}=2} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right]$

$r(A) = 2 < r([A|b]) = 3$, logo o sistema é impossível!