2.9- Fórmula de Taylor.

O Teorema de Taylor estabelece que uma função derivável até à ordem *n* pode ser aproximada, numa vizinhança de um ponto dado, por um único polinómio de grau *n* designado por polinómio de Taylor.

<u>Teorema de Taylor</u>: Seja $f:[a,b]\to R$ derivável até à ordem n+1 em $[a,b]$ **.** Então, $\exists c\in\,]a,b[$ tal que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(b-a)^2 f''(a)+\ldots+\frac{1}{n!}(b-a)^n f^{(n)}(a)+R_n\text{, em que}$$

$$R_n=\frac{1}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}f^{(n+1)}(c)\quad \text{é chamado resto de ordem } n.$$

Se considerarmos $x\in[a,b]$, aplicando o teorema em $[a,x]$, obtemos a chamada **fórmula de Taylor:**

$$f(x)=f(a)+(x-a)f'(a)+\frac{1}{2!}(x-a)^2 f''(a)+\ldots+\frac{1}{n!}(x-a)^n f^{(n)}(a)+R_n(x)\text{, em que}$$

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}(\xi)\text{ , com }\xi\in\,]a,x[\,.$$

Dado que $a<\xi<x$, podemos escrever $\xi=a+\theta(x-a)$, com $0<\theta<1$ e neste caso obtemos o chamado **resto de Lagrange:**

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right],\quad 0<\theta<1.$$

Se $f^{(n+1)}$ for contínua em $[a,x]$, então $\lim\limits_{x\to a} f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]=f^{(n+1)}(a)$,

ou seja $f^{(n+1)}\left[a+\theta(x-a)\right]=f^{(n+1)}(a)+\alpha(x)$, com $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$ e neste caso

obtemos o chamado **resto de Peano:**

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\left[f^{(n+1)}(a)+\alpha(x)\right],\ \text{com}\ \lim_{x\to a}\alpha(x)=0\,.$$

No caso em que se considera $a=0$, obtemos a chamada **série de Maclaurin:**

$$f(x)=f(0)+xf'(0)+\frac{1}{2!}x^2f''(0)+...+\frac{1}{n!}x^nf^{(n)}(0)+R_n(x)\,,$$

com resto de Lagrange

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}f^{(n+1)}(\theta x)\ ,\quad 0<\theta<1\,,$$

ou resto de Peano

$$R_n(x)=\frac{1}{(n+1)!}x^{n+1}\left[f^{(n+1)}(0)+\alpha(x)\right],\qquad \lim_{x\to 0}\alpha(x)=0\,.$$

Exemplo: No sentido de escrevermos a série de MacLaurin com respetivo resto de Lagrange da função $f(x)=\frac{1-x}{1+x}$, comecemos por determinar a sua derivada de ordem *n*:

$$f'(x)=\frac{-2}{(1+x)^2};\qquad f''(x)=\frac{4}{(1+x)^3};\qquad f_1^{\,///}(x)=\frac{-12}{(1+x)^4};$$

$$f_1^{(IV)}(x)=\frac{48}{(1+x)^5};\qquad f_1^{(V)}(x)=\frac{-240}{(1+x)^6};$$

generalizando, podemos admitir que $f^{(n)}(x)=\frac{(-1)^n2(n)!}{(1+x)^{n+1}}$.

Prova por indução:

1) Para $n=1$, resulta $f'(x)=\frac{(-1)^1 2.1!}{(1+x)^1}=\frac{-2}{1+x}$, que se revela válida em conformidade com a primeira derivada calculada anteriormente.

2) Admitindo como válida a nossa hipótese de indução, $f^{(n)}(x)=\dfrac{(-1)^n 2(n)!}{(1+x)^{n+1}}$, vamos provar a tese: $f^{(n+1)}(x)=\dfrac{(-1)^{n+1}2(n+1)!}{(1+x)^{n+2}}$.

Então,

$$f_1^{(n+1)}(x)=\left(f_1^{(n)}\right)'(x)=\left(\frac{(-1)^n 2(n)!}{(1+x)^{n+1}}\right)'=(-1)^n 2(n)!\left(\frac{1}{(1+x)^{n+1}}\right)'=$$

$$=(-1)^n 2(n)!\frac{-(n+1)(1+x)^n}{\left((1+x)^{n+1}\right)^2}=(-1)^{n+1}2(n+1)!\frac{1}{(1+x)^{2n+2-n}}=\frac{(-1)^{n+1}2(n+1)!}{(1+x)^{n+2}},$$

tal como se pretendia.

Finalmente, podemos escrever a série de MacLaurin com o respetivo resto de Lagrange da função $f(x)$,

$$f(x)=1-2x+2x^2+\ldots+(-1)^n 2x^n+R_n(x),$$

$$\text{com } R_n(x)=\frac{(-1)^{n+1}2x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+2}}\ ,\quad 0<\theta<1.$$

2.10 - Pesquisa de extremos locais.

Definição: Sendo $f: D\subseteq R\to R$, a um ponto de D, diz-se que

(i) f tem um máximo local em a sse

$\exists\delta>0:\ \forall x\in D,\ |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)<f(a)$;

(ii) f tem um mínimo local em a sse

$\exists\delta>0:\ \forall x\in D,\ |x-a|<\delta\Rightarrow f(x)>f(a)$.

Teorema: Sendo $f: D\subseteq R\to R$, derivável em $a\in D$, se f tem um extremo local em a, então $f'(a)=0$.

Observação: O recíproco do teorema precedente é falso, ou seja, pode acontecer que $f'(a)=0$ e a função *f* não ter qualquer extremo em a.

Para $f: I \to R$ **(** I intervalo de R**),**

(i) se $f'(x)>0$ em I**,** então *f* é crescente em I **;**

(ii) se $f'(x)<0$ em I**,** então *f* é decrescente em I **.**

Exemplos: Pretende-se determinar os extremos relativos das seguintes funções:

1. $f(x)=2x^4-12x^2+10$

$f'(x)=8x^3-24x$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 8x^3-24x=0 \Leftrightarrow 8x\left(x^2-3\right)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=-\sqrt{3} \vee x=\sqrt{3}$

x		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$	
$8x$	-	-	-	0	+	+	+
x^2-3	+	0	-	-	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\downarrow$	m	$\uparrow$	M	$\downarrow$	m	$\uparrow$

2. $g(x)=\left(3+\dfrac{x^2}{3}\right).e^{\frac{x}{3}}$

$$g'(x)=\frac{2}{3}xe^{\frac{x}{3}}+\left(3+\frac{x^2}{3}\right).\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(2x+3+\frac{x^2}{3}\right)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x^2+6x+9}{3}\right)=\frac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\,\frac{(x+3)^2}{3}\geq 0,\quad \forall x\in R.$$

Portanto, g não tem qualquer extremo.

- A fórmula de Taylor também nos permite concluir acerca dos extremos de uma função a partir das derivadas de ordem superior.

Para $f : I \to R$ (I intervalo de R), derivável até à ordem n em I, com derivadas nulas até à ordem n-1 em $a \in I$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, então da fórmula de Taylor com resto de Peano obtemos

$$f(x) = f(a) + \frac{1}{n!}(x-a)^n\left[f^{(n)}(a) + \alpha(x)\right], \text{ ou seja}$$

$$f(x) - f(a) = \frac{1}{n!}(x-a)^n\left[f^{(n)}(a) + \alpha(x)\right], \text{ com } \lim_{x \to a} \alpha(x) = 0 .$$

Note-se que, como $\lim_{x \to a} \alpha(x) = 0$, numa vizinhança de V de a, $f^{(n)}(a) + \alpha(x)$ e $f^{(n)}(a)$ têm o mesmo sinal. Portanto, nessa vizinhança V, o sinal de $f(x) - f(a)$ é o mesmo de $\frac{1}{n!}(x-a)^n\left[f^{(n)}(a)\right]$. Logo,

(i) Se n é par e $f^{(n)}(a) > 0$, então $f(x) - f(a) > 0$ na vizinhança V de a, ou seja a função f tem um mínimo local em a;

(ii) Se n é par e $f^{(n)}(a) < 0$, então $f(x) - f(a) < 0$ na vizinhança V de a, ou seja a função f tem um máximo local em a;

(iii) Se n é ímpar, o sinal de $(x-a)$ não é controlável, pelo que a função f não tem qualquer extremo em a.

Exemplos:

1. $f(x)=x^3$

$f'(x)=3x^2$,

$f'(x)=0 \Leftrightarrow x=0$.

$f''(x)=6x$,

$f''(0)=0$, pelo que se torna necessário calcularmos a derivada de ordem 3:

$f'''(x)=6$ e portanto $f'''(0)=6\neq 0$, significando isto que a função f não tem qualquer extremo em zero.

2. $g(x)=\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}+1$

$g'(x)=x^3-x^2$,

$g'(x)=0 \Leftrightarrow x^3-x^2=0 \Leftrightarrow x^2(x-1)=0 \Leftrightarrow x=0 \vee x=1$.

$g''(x)=3x^2-2x$,

$g''(1)=1>0$, logo g tem um mínimo local em 1;

$g''(0)=0$, pelo que se torna necessário calcularmos a derivada de ordem 3:

$g'''(x)=6x-2$ e $g'''(0)=-2\neq 0$, significando isto que a função g não tem qualquer extremo em zero.

2.11- Sentido da concavidade do gráfico de uma função.

Para $f : I \to R$ **(** I intervalo de R**),**

(i) se $f''(x) > 0$ em I**,** então o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para cima, em I **;**

(ii) se $f''(x) < 0$ em I**,** então o gráfico de *f* tem a concavidade voltada para baixo, em I **.**

Dá-se o nome de **ponto de inflexão** a um ponto que separa uma parte convexa de uma parte côncava do gráfico da função, ou seja, quando ocorre uma mudança de sinal da segunda derivada.

Quando existe, a segunda derivada nos pontos de inflexão é nula.

Exemplos: Pretende-se estudar o sentido da concavidade e determinar, se existirem, os pontos de inflexão das seguintes funções:

1. $f(x) = -x^4 + 6x - 4$

$f'(x) = -4x^3 + 6$,

$f''(x) = -12x^2 \leq 0, \quad \forall x \in R$,

pelo que, o gráfico de f tem a concavidade sempre voltada para baixo, não tendo pontos de inflexão.

2. $g(x)=\left(3+\dfrac{x^2}{3}\right).e^{\frac{x}{3}}$

$$g'(x)=\tfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(2x+3+\frac{x^2}{3}\right),$$

$$g''(x)=\tfrac{1}{9}e^{\frac{x}{3}}\left(2x+3+\frac{x^2}{3}\right)+\tfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(2+\tfrac{2}{3}x\right)=\tfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left[\tfrac{1}{3}\left(2x+3+\frac{x^2}{3}\right)+2+\tfrac{2}{3}x\right]=$$

$$=\tfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x^2}{9}+\tfrac{4}{3}x+3\right),$$

$$g''(x)=0\Leftrightarrow \tfrac{1}{3}e^{\frac{x}{3}}\left(\frac{x^2}{9}+\tfrac{4}{3}x+3\right)=0\Leftrightarrow \frac{x^2}{9}+\tfrac{4}{3}x+3\Leftrightarrow x^2+12x+27=0\Leftrightarrow x=-9\vee x=-3$$

x		-9		-3	
$g''(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	$\cup$	P.I.	$\cap$	P.I.	$\cup$

2.12- Assimptotas ao gráfico de uma função.

Assimptotas **verticais**: A recta de equação $x=a$ diz-se uma assimptota vertical ao gráfico da função *f* se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$.

Assimptotas **<u>não</u> verticais**: A recta de equação $y=mx+b$ diz-se uma assimptota ao gráfico da função *f* sse existirem números reais m e b tais que

$$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ e } b=\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-mx\right]$$

ou

$$m=\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} \text{ e } b=\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right].$$

Exemplo: $f(x) = \dfrac{2x}{1-x^2}$

$$D_f = \{x \in R : 1 - x^2 \neq 0\} = R \setminus \{-1,1\}$$

Assimptotas verticais:

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = \lim_{x\to 1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=1} \text{ assimptota.}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \lim_{x\to 1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$$

$$\lim_{x\to -1^+} f(x) = \lim_{x\to -1^+} \frac{2x}{1-x^2} = -\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=-1} \text{ assimptota.}$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \frac{2x}{1-x^2} = +\infty$$

Assimptotas **não** verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{1-x^2} = 0,$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2x}{1-x^2} = 0.$$

Portanto, temos $\boxed{y=0}$ assimptota (neste caso, horizontal).

Exercícios propostos:

1. Escreva a fórmula de Taylor, com resto de 3ª ordem, para a função $f(x)=\sqrt{x}$, para $a=1$.

2. Escreva a fórmula de Mac-Laurin, com resto de 2ª ordem, para a função $g(x)=\sqrt[3]{1+x}$.

3. Desenvolva em fórmula de Mac-Laurin das seguintes funções:

   a) $f_1(x)=\dfrac{1}{1-x}$; b) $f_2(x)=e^x$; c) $f_3(x)=\ln(x)$; d) $f_4(x)=\sin x$.

4. Estude quanto à monotonia as funções que se seguem e determine, caso existam, os respetivos extremos:

   a) $f_1(x)=-3x^5+5x^3+10$

   b) $f_2(x)=\dfrac{\ln x}{x^3}$

   c) $f_3(x)=2-e^{-x^4}$

   e) $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\left(e^x+e^{-x}\right) & \text{se} \quad x\le 0,\\[2ex] \dfrac{1}{1-x^2} & \text{se} \quad x>0.\end{cases}$

5. Estude quanto ao sentido da concavidade do gráfico e determine, caso existam, os pontos de inflexão das seguintes funções:

   a) $f_1(x)=x^2+2x-4$

   b) $f_2(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$

   c) $f_3(x)=\dfrac{x}{1+\ln x}$

   d) $f_4(x)=\begin{cases}\dfrac{2x}{1+x^2} & \text{se} \quad x\le 0,\\[2ex] 1-e^{3x} & \text{se} \quad x>0.\end{cases}$

6. Para cada uma das funções $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ e $g(x)=\dfrac{\ln x}{x}$,

a) Determine o seu domínio;

b) Determine as coordenadas dos pontos de máximo e/ou mínimo e os intervalo de monotonia;

c) Indique se a função tem pontos de inflexão e estude o sentido das concavidades do gráfico respetivo;

d) Determine as assimptotas ao gráfico.