Curso	**Eng. Informática**					*Ano letivo*	2019/2020
Unidade curricular	**Álgebra e Geometria Analítica**						
Ano curricular	1º	*Semestre*	1º	*Data*	21/02/2020	*Duração*	2h 00m

Exame de Recurso

(Cotação)

1. Considere os complexos $z, w \in \mathbb{C}$.

(2.0) **a)** Calcule os complexos $z \in \mathbb{C}$ que verificam a equação, $z^2 = -\overline{z}$.

(2.0) **b)** Determine a imagem do conjunto $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-4| < 2\,|z-1|\}$. por meio da transformação,

$$w = \frac{-1}{\overline{z}}.$$

2. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (2,-1,1)$.

(3.0) **a)** Mostre que $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são linearmente independentes e determine o subespaço gerado $F = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle$.

(2.0) **b)** Mostre que os vetores $(1,0,1)$ e $(-2,0,-2)$ pertencem ambos a F mas não constituem uma base desse subespaço.

(3.0) **3.** Usando o método de eliminação de Gauss, calcule a matriz inversa de,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

4. Considere os pontos $A = (4,2,1)$ e $B = (1,0,-4)$ e os vetores de $\mathbb{R}^3$, $\vec{u} = (1,2,3)$, e $\vec{v} = (-1,0,-1)$.

(2.0) **a)** Determine a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

(2.0) **b)** Mostre que os vetores $\overrightarrow{AB}$, e $\vec{u} \wedge \vec{v}$ são ortogonais.

(2.0) **c)** Calcule a equação cartesiana do plano α que passa por A e é perpendicular $\vec{v}$.

(2.0) **d)** Determine a distância do ponto B ao plano α.

Resolução

1.

(2.0) **a)** $z^2 = -\overline{z} \iff \rho^2 \operatorname{cis}(2\theta) = \rho \operatorname{cis}(-\theta+\pi) \iff \rho^2 = \rho \wedge 2\theta = -\theta + \pi + 2k\pi$

$\iff \rho^2 - \rho = 0 \wedge 3\theta = \pi + 2k\pi \iff \rho(\rho-1) = 0 \wedge \theta = \frac{\pi+2k\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z}.$

$(\rho = 0 \vee \rho = 1) \wedge \theta = \frac{(2k+1)\pi}{3}, \quad k \in \mathbb{Z} \iff \rho = 0 \vee (\rho = 1 \wedge (\theta = \frac{\pi}{3} \vee \theta = \frac{3\pi}{3} \vee \theta = \frac{5\pi}{3}))$

$z = 0 \vee z = \frac{1}{2} + \frac{i\sqrt{3}}{2} \vee z = -1 \vee z = \frac{1}{2} - \frac{i\sqrt{3}}{2}$

(2.0) **b)** $|z-4| < 2\,|z-1|$ com, $\quad w = \dfrac{-1}{\overline{z}} \iff z = -\dfrac{1}{\overline{w}}.$

$\left|-4 - \frac{1}{\overline{w}}\right|^2 < 4\left|-1 - \frac{1}{\overline{w}}\right|^2 \iff |-4\overline{w} - 1|^2 < 4|-\overline{w} - 1|^2 \iff (-4x-1)^2 + 16y^2 < 4\left((-x-1)^2 + y^2\right)$

$16x^2 + 8x + 16y^2 + 1 < 4x^2 + 8x + 4y^2 + 4 \iff x^2 + y^2 - \frac{1}{4} < 0.$

2. $\vec{u} = (1,2,3)$ e $\vec{v} = (2,-1,1)$.

(3.0) **a)** $\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = 0 \implies (\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta, 3\alpha + \beta) = (0,0,0) \implies \alpha = 0 \wedge \beta = 0$, portanto são linearmente independentes

O subespaço gerado $F = \langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}\}.$

$(\alpha + 2\beta, 2\alpha - \beta, 3\alpha + \beta) = (x,y,z) \iff x = z - y \wedge \alpha = \frac{y}{5} + \frac{z}{5} \wedge \beta = \frac{2z}{5} - \frac{3y}{5}$

$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x = z - y\} = \{(z-y, y, z),\ y,z \in \mathbb{R}\}.$

(2.0) **b)** $(1,0,1) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \frac{1}{5}\vec{u} + \frac{2}{5}\vec{v}$ e $(-2,0,-2) = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = -\frac{2}{5}\vec{u} - \frac{4}{5}\vec{v}$, pertencem ambos a F

Não constituem uma base desse subespaço pois são linearmente dependentes $(-2,0,-2) = -2\,(1,0,1)$.

(3.0) **3.**

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{L_2-L_1 \\ L_3-2L_1}]{a_{11}=1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[4L_2+L_3]{a_{22}=-1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[a_{33}=1]{\substack{L_2-L_3 \\ L_1-L_3}}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & 7 & -4 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[a_{22}=-1]{L_1-2L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[a_{22}=-1]{-L_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -6 & 4 & 1 \end{array}\right].$$

4. $A=(4,2,1)$ e $B=(1,0,-4)$ e $\vec{u}=(1,2,3)$, e $\vec{v}=(-1,0,-1)$.

(2.0) **a)** A área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dada pela norma do vetor

$$\vec{u}\wedge\vec{v}=\begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=(-2,-2,2)\ .$$

$$A=\|\vec{u}\wedge\vec{v}\|=\|(-2,-2,2)\|=2\sqrt{3}.$$

(2.0) **b)** $\overrightarrow{AB}=(-3,-2,-5)$.

$\overrightarrow{AB}\,|\,(\vec{u}\wedge\vec{v})=(-3,-2,-5)\,|\,(-2,-2,2)=6+4-10=0$, portanto os vetores são ortogonais.

(2.0) **c)** A equação cartesiana do plano α que passa por A e é perpendicular $\vec{v}$ está definida por

$$(P-A)\,|\,\vec{v}=0 \Longleftrightarrow (x-4,y-2,z-1)|(-1,0,-1)=0 \Longleftrightarrow -x-z+5=0.$$

(2.0) **d)** A distância do ponto B ao plano α, onde $\vec{n}_\alpha=\vec{v}=(-1,0,-1)$, é dada por,

$$\left\|\operatorname{proj}_{\vec{n}_\alpha}(\overrightarrow{AB})\right\|=\left|\frac{\overrightarrow{AB}\,|\,\vec{n}}{\vec{n}\,|\,\vec{n}}\right|\,\|\vec{n}\|=\frac{8}{2}\|\vec{n}\|=4\sqrt{2}.$$