Um conjunto K munido das aplicações		
$\oplus : K \times K \longrightarrow K$ $(a,b) \dashrightarrow a+b$	$\odot : K \times K \longrightarrow K$ $(a,b) \dashrightarrow a.b$	
$(K,\oplus,\odot)$ Corpo		
Operação Soma $(K,\oplus)$		
$a+b \in K$	Fechado	Grupoide
$(a+b)+c = a+(b+c)$	Associativa	Semigrupo
$\exists \mathbf{0} \in K : \forall a \in K, \quad \mathbf{0}+a = a+\mathbf{0} = a$	Elemento Neutro	Grupo
$\forall a \in K, \exists -a \in K : -a+a = a-a = \mathbf{0}$	Elemento Simétrico	
$\forall a,b \in K, a+b = b+a$	Comutativa	Grupo Comutativo ou Abeliano
Operação Soma e Produto $(K,\oplus,\odot)$		
$a.b \in K$	Fechado	
$(a.b).c = a.(b.c)$	Associativa	
$a.(b+c) = a.b+b.c$	Distributiva	Anel $(K,\oplus,\odot)$
$\forall x,y \in K, \quad x.y = y.x$	Comutativo	Anel Comutativo
$\exists \mathbf{1} \in K : \forall a \in K, \mathbf{1}.a = a.\mathbf{1} = a$	Elemento Neutro	Corpo $(K,\oplus,\odot)$
$\forall a \in K, a \neq \mathbf{0}, \exists a^{-1} \in K : a^{-1}.a = a.a^{-1} = 1$	Elemento Inverso	

$(K,\oplus,\odot)$ um corpo comutativo E um conjunto munido das seguintes operações:	
$+ : E \times E \longrightarrow E$ $(u,v) \dashrightarrow u+v$	$\times : K \times E \longrightarrow E$ $(\lambda,u) \dashrightarrow \lambda u$
$(E, +_{E\times E}, \times_{K\times E})$ Espaço vetorial	
Operação Soma $(E,+)$	
$\forall u,v \in E, \quad u+v \in E$	Fechado
$\forall u,v \in E, \quad u+v = v+u$	Comutativa
$\forall u,v,w \in E, \ (u+v)+w = u+(v+w)$	Associativa
$\exists \vec{\mathbf{0}} \in E : \forall u \in E, \ u+\vec{\mathbf{0}} = u$	Elemento Neutro
$\forall u \in E, \exists -u \in E : -u+u = \vec{\mathbf{0}}$	Elemento Simétrico
Operação Soma e Produto por um escalar $(E,+,\times)$	
$\forall u \in E, \forall \lambda \in K, \ \lambda u \in E$	Fechado
$\forall u \in E, \forall \lambda,\mu \in K, \ \mu(\lambda u) = (\mu\lambda)u$	Associativa
$\forall u \in E, \ \mathbf{1}.u = u$	Produto pelo escalar unidade
$\forall u \in E, \forall \lambda,\mu \in K, (\mu+\lambda)u = \mu u + \lambda u$	Distributiva 1
$\forall u,v \in E, \forall \lambda \in K, \lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v$	Distributiva 2

Capítulo 2

Espaços Vetoriais

2.1 Definição

Definição 2.1.1 *Dado um conjunto E e um corpo comutativo $(\mathbb{K},+,.)$, diz-se que E é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ se existirem duas aplicações,*

$$\begin{array}{rcl} + : E\times E & \longrightarrow & E\,. \\ (u,v) & \longmapsto & u+v \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{rcl} \times : \mathbb{K}\times E & \longrightarrow & E\,, \\ (\lambda,u) & \longmapsto & \lambda u \end{array}$$

satisfazendo as seguintes condições:

1. $\forall u,v\in E\,,\ u+v\in E$
2. $\forall u,v\in E\,,\ u+v=v+u$
3. $\forall u,v,w\in E\,,\ (u+v)+w=u+(v+w)$
4. $\exists 0\in E\ :\forall\ u\in E,\ 0+u=u+0=u$
5. $\forall u\in E,\ \exists(-u)\in E:(-u)+u=u+(-u)=0$
6. $\forall u\in E\,,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}\ \lambda u\in E$
7. $\forall u\in E\,,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}\ \mu(\lambda u)=(\mu\lambda)u$
8. $\forall u\in E\,, 1\,u=u$
9. $\forall u\in E\,,\ \forall\lambda,\mu\in\mathbb{K}\ (\lambda+\mu)u=\lambda u+\mu u$
10. $\forall u,v\in E\,,\ \forall\lambda\in\mathbb{K}\ \lambda(u+v)=\lambda u+\lambda v$

Aos elementos de um espaço vetorial E chamam-se genericamente **vectores***, e aos elementos do corpo $\mathbb{K}$* **escalares***.*

Notação:

$$(E, +, \times),$$

onde $+$ é a operação soma de dois vetores de E e $\times$ representa o produto de um vetor por um escalar.

Observação 2.1.1

- *O elemento neutro da adição é único e designa-se zero* 0*, origem ou vetor nulo de* E.
- *Define-se a diferença de dois vectores* $u,\ v \in E$*, por* $u - v = u + (-v)$.
- *Se* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$*, E diz-se um espaço vetorial real. Se* $\mathbb{K} = \mathbb{C}$*, E diz-se um espaço vetorial complexo.*

Exemplo 2.1.1

1. $(\mathbb{R}_{\mathbb{R}}, +, \times)$ *é um espaço vetorial real.*
2. $(\mathbb{C}_{\mathbb{R}}, +, \times)$ *é um espaço vetorial real.*
3. $(\mathbb{C}_{\mathbb{C}}, +, \times)$ *é um espaço vetorial complexo.*
4. $\big(\mathbb{R}^n, +, \times\big)$*, onde, para* $(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{R}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{R}$,
   $(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$,
   $\lambda(u_1, u_2, \dots, u_n) := (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$
   é um espaço vetorial real.
5. $\big(\mathbb{C}^n, +, \times\big)$*, onde, para* $(u_1, u_2, \dots, u_n), (v_1, v_2, \dots, v_n) \in \mathbb{C}^n$ *e* $\lambda \in \mathbb{C}$,
   $(u_1, u_2, \dots, u_n) + (v_1, v_2, \dots, v_n) := (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \dots, u_n + v_n)$,
   $\lambda(u_1, u_2, \dots, u_n) := (\lambda u_1, \lambda u_2, \dots, \lambda u_n)$
   é um espaço vetorial complexo.
6. *O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n,* P_n*,* $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$*, com a operação soma de polinómios e produto por um númeror real é um espaço vetorial real.*
7. *O conjunto dos polinómios de grau igual a n,* $P_{(n)}$*,* $a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$*, com* $a_n \neq 0$*, com a operação soma de polinómios e produto por um númeror* ***real não*** *é um espaço vetorial real, pois* $(x^n - x^n = 0 \notin P_{(n)})$.
8. $\big(\mathbb{R}^+, \oplus, \otimes\big)$*, é um espaço vetorial real, onde*
   $u \oplus v := uv$,
   $\lambda \otimes u := u^\lambda$

Propriedades 2.1.1 *Seja E um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$, $u, v, w \in E$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.*

1. $0_{\mathbb{K}} u = 0_E$
2. $\lambda 0_E = 0_E$
3. $-u = (-1)u$
4. $-(-u) = u$
5. $-(u+v) = -u - v$
6. $\lambda(u-v) = \lambda u - \lambda v$
7. $(\lambda - \mu)u = \lambda u - \mu u$
8. $\lambda(-u) = -\lambda u$
9. $(-\lambda)u = -\lambda u$
10. $(-\lambda)(-u) = \lambda u$
11. $\lambda u = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \vee u = 0$
12. $\lambda u = \lambda v \wedge \lambda \neq 0 \Longrightarrow u = v$
13. $\lambda u = \mu u \wedge u \neq 0 \Longrightarrow \lambda = \mu$
14. $u + v = u + w \Longrightarrow v = w$
15. $u + v = w + v \Longrightarrow u = w$

Dem.

1. $0_{\mathbb{K}} u + u = (0_{\mathbb{K}} + 1)u = u, \forall u \in E$
2. $\lambda 0_E + u \overset{se\ \lambda \neq 0}{=} \lambda 0_E + \lambda \lambda^{-1} u = \lambda(0_E + \lambda^{-1} u) = \lambda(\lambda^{-1} u) = u$
3. $-1u + u = (-1+1)u = 0u = 0$
4. $-(-u) + (-u) = [-(-1)]u - u = 1u - u = 0$
5. $-(u+v) + (u+v) = -u + u + -v + v = 0 + 0 = 0$
6. $\lambda(u-v) = \lambda(u + (-v)) = \lambda u + \lambda(-1v) = \lambda u + (-\lambda)v = \lambda u - \lambda v$
7. $(\lambda - \mu)u = (\lambda + (-\mu))u = \lambda u + (-\mu)u = \lambda u - \mu u$
8. $\lambda(-u) + \lambda(u) = \lambda(-u + u) = 0$
9. $(-\lambda)u + \lambda(u) = (-\lambda + \lambda)u = 0_{\mathbb{K}} u = 0_E$
10. $(-\lambda)(-u) + (-\lambda u) = (-\lambda)(-u + u) = -\lambda 0_E = 0_E$
11. $\lambda u = 0 \Longleftrightarrow \lambda = 0 \vee u = 0$.

    ($\Longleftarrow$) *prop. 1. e 2.*

    ($\Longrightarrow$)

    Se $\lambda \neq 0 \Longrightarrow \lambda^{-1}\lambda u = \lambda^{-1} 0 \Longrightarrow 1u = 0 \Longrightarrow u = 0$.

    Se $\lambda = 0$ *também se verifica o resultado, pois* $0u = 0$.
12. $\lambda u = \lambda v \wedge \lambda \neq 0 \Longrightarrow \lambda^{-1}\lambda u = \lambda^{-1}\lambda v \Longrightarrow u = v$
13. $\lambda u - \mu u = 0 \wedge u \neq 0 \Longrightarrow (\lambda - \mu)u = 0 \wedge u \neq 0 \overset{prop.\ 11.}{\Longrightarrow} (\lambda - \mu) = 0$

14. $u+v=u+w \Longrightarrow -u+u+v=-u+u+w \Longrightarrow v=w$

15. $u+v=w+v \Longrightarrow u+v-v=w+v-v \Longrightarrow u=w$ $\square$

De seguida, estabelece-se a noção de subespaço vetorial de um espaço vetorial E e as condições imprescindíveis para que um subconjunto de E o seja de facto.

2.2 Subespaço Vetorial

Definição 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Um subconjunto F de E diz-se um subespaço vetorial de E se for ele próprio um espaço vetorial para as operações já definidas em E (e em $F \subseteq E$).*

Havendo propriedades que se verificam automaticamente, por as operações em causa já estarem definidas em E, falta estabelecer que condições são realmente imprescindíveis para assegurar que um determinado subconjunto de E seja de facto um subespaço vetorial. O próximo teorema dá resposta a esta questão.

Teorema 2.2.1 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F um subconjunto de E. O subconjunto F é um subespaço vetorial de E sse verificar:*

i) $F \neq \emptyset$;

ii) $x+y \in F, \quad \forall x, y \in F$;

iii) $\lambda x \in F, \quad \forall x \in F, \forall \lambda \in \mathbb{K}$.

Dem. $(\Longrightarrow)$ *Se F é um subespaço vetorial de E, então é ele próprio um espaço vetorial, verificando as condições, de* 1 *a* 10*, da Definição 2.1.1, e em particular verifica* $i)$ $ii)$ *e* $iii)$.

$(\Longleftarrow)$ *As condições* 1 *e* 6 *são verificadas por coincidirem com as hipóteses* $ii)$ *e* $iii)$. *As condições* $2, 3, 7, 8, 9$ *e* 10 *são verificadas em E e, portanto, verificam-se naturalmente ainda em $F \subseteq E$. A condição* 4 *verifica-se porque, para um determinado vetor $u \in F \neq \emptyset$, tem-se que $(0_{\mathbb{K}}).u = 0_E \in F$. Por último, a condição* 5 *verifica-se porque, para qualquer vetor $u \in F$, tem-se que $(-1).u = -u \in F$.* $\square$

De acordo com a demonstração o Teorema 2.2.1, o vetor nulo pertence necessáriamente a qualquer subespaço vetorial. Por outro lado, o subconjunto formado apenas pelo vetor nulo de E é um subespaço vetorial de E.

Observação 2.2.1 *Todo o espaço vetorial E admite pelo menos um dois subsespaços vetoriais, chamados subespaços triviais.*

i) $F = \{0_E\}$, *subespaço nulo;*

ii) $F = E$.

Exemplo 2.2.1

1. *O conjunto dos polinómios de grau menor ou igual a n,* P_n, $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$, *com a operação soma de polinómios e produto de um polinómio por um númeror real é um subespaço vetorial real do espaço vetorial de todos os polinómios.*

2. *O conjunto das funções de classe* C^1 *em* $[a,b]$, $C^1[a,b]$ *é um subespaço vetorial do espaço vetorial das funções contínuas em* $[a,b]$.

3. *O conjunto dos vetores múltiplos de um vetor dado* $v \in \mathbb{K}^n$, $\langle v \rangle = \{\lambda v \,:\, \lambda \in \mathbb{K}\}$.

Teorema 2.2.2 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. A interseção de dois subespaços vetoriais é ainda um subespaço vetorial de E.*

Dem. *Sejam F e G dois subespaços vetoriais de E e que, portanto verificam as condições* $i)$ $ii)$ *e* $iii)$ *do Teorema 2.2.1. O subconjunto $F \cap G$ verifica ainda,*

i) $0 \in F \cap G \neq \emptyset$;

ii) Sejam $x, y \in F \cap G$. *Como F e G são subespaços vetoriais de E então* $x + y \in F$ *e* $x + y \in G$, *pelo que,* $x + y \in F \cap G$;

iii) Seja $\lambda \in \mathbb{K}$ *e* $x \in F$, *então* $\lambda x \in F$ *e* $\lambda x \in G$, *ou seja,* $\lambda x \in F \cap G$. □

Ao contrário da operação interseção, a reunião de subespaços $F \cup G$, de uma forma geral, não é um subespaço vetorial. Por exemplo, considerando o subespaço definido no item 3 do exemplo 2.2.1, a reunião de dois destes subespaços $\langle u \rangle = \{\lambda u \,:\, \lambda \in \mathbb{K}\}$ e $\langle v \rangle = \{\lambda v \,:\, \lambda \in \mathbb{K}\}$,

$$\langle u \rangle \cup \langle v \rangle = \{w \in \mathbb{K} \,:\, w = \lambda u \vee w = \lambda u\},$$

não é um subespaço (o vetor soma $u + v$, Figura 2.1, não é múltiplo de nenhum deles a não ser que os vetores u e v sejam, eles próprios, múltiplos um do outro).

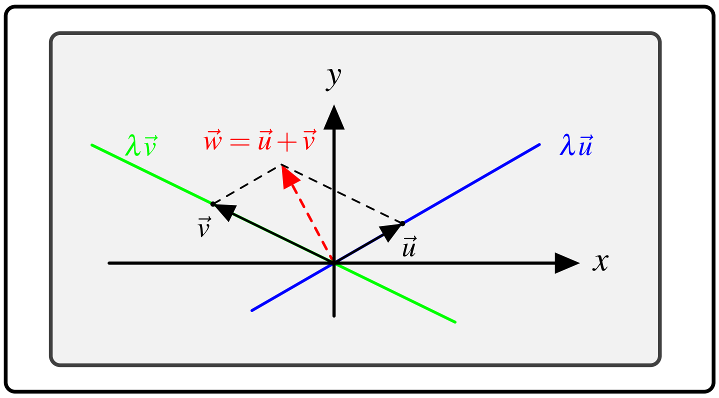

Figura 2.1: Reunião dos subespaços $\langle u\rangle \cup \langle v\rangle$.

É no entanto possível, considerar um subconjunto de E que contém ambos os subespaços e é ainda um subespaço vetorial.

Definição 2.2.2 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F e G dois subespaços vetoriais de E. Define-se* **soma dos subespaços** *F e G como sendo o conjunto $F+G=\{u+v\,:\, u\in F \text{ e } v\in G\}$.*

Teorema 2.2.3 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. A soma de dois subespaços vetoriais é ainda um subespaço vetorial de E.*

Dem. *Sejam F e G dois subespaços vetoriais de E. O subconjunto $F+G$ verifica ainda,*

i) $0=0+0\in F+G\neq\emptyset$;

ii) *Sejam $x,y\in F+G$, isto é, $x=u_1+v_1$ e $y=u_2+v_2$.*

A soma $x+y$ verifica, $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)=(u_1+u_2)+(v_1+v_2)\in F+G$;

iii) *Seja $\lambda\in\mathbb{K}$ e $x=u_1+v_1\in F+G$, então $\lambda x=\lambda u_1+\lambda v_1\in F+G$.* □

Exemplo 2.2.2 *Considerando dois subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^2$, como aquele referido no ponto 3 do exemplo 2.2.1, múltiplos de um vetor ou "gerados" por um determinado vetor, neste caso, $v_1=(1,1)$ e $v_2=(-1,1)$,*

$$\langle v_1\rangle=\{\lambda_1 v_1\,:\,\lambda_1\in\mathbb{R}\}\quad e\quad \langle v_2\rangle=\{\lambda_2 v_2\,:\,\lambda_2\in\mathbb{R}\},$$

a soma destes subespaços é o subespaço definido por,

$$\begin{aligned}\langle v_1\rangle+\langle v_2\rangle &= \{w=w_1+w_2\,,\quad w_1\in\langle v_1\rangle\,,\, w_2\in\langle v_2\rangle\}\\ &= \{w=\lambda_1 v_1+\lambda_2 v_2\,,\quad \lambda_1\,,\lambda_2\,\in\mathbb{R}\}\,.\end{aligned}$$

A Definição 2.2.2 permite precisamente criar um subespaço $F+G$ que, por construção, ainda contém o vetor soma v_1+v_2. Neste caso particular (situação semelhante à da Figura 2.1), o vetor nulo é o único vetor que pertencente simultaneamente a $\langle(1,1)\rangle$ e $\langle(-1,1)\rangle$. Com efeito, seja w um vetor que admite as duas caraterizações, $w=\alpha(1,1)$ e $w=\beta(-1,1)$. Então,

$$\alpha(1,1)=\beta(-1,1) \iff (\alpha,\alpha)=(-\beta,\beta) \iff \begin{cases} \alpha=-\beta \\ \alpha=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=-\beta \\ -\beta=\beta \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases}.$$

Isto é, $w=\alpha(1,1)=\beta(-1,1)=(0,0)$.

Por outro lado, aparentemente (tendo ainda como referência a Figura 2.1), qualquer vetor de $\mathbb{R}^2$ pode ser representado como soma de um vetor de $\langle(1,1)\rangle$ com um vetor de $\langle(-1,1)\rangle$. Seja $w=(x,y)$ um vetor qualquer de $\mathbb{R}^2$. Basta averiguar se será sempre possível escrever w na forma,

$$\begin{aligned} w &= \alpha v_1+\beta v_2 \\ (x,y) &= \alpha(1,1)+\beta(-1,1) \\ &= (\alpha,\alpha)+(-\beta,\beta) \\ &= (\alpha-\beta,\alpha+\beta) \end{aligned}$$

Isto é,

$$\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\alpha+\beta \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} y-x=2\beta \\ x+y=2\alpha \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \beta=\frac{y-x}{2} \\ \alpha=\frac{y+x}{2} \end{cases}.$$

Desta forma, como as operações que determinam α e β são sempre possíveis, qualquer vetor $w=(x,y)\in\mathbb{R}^2$ pode ser representado por $(x,y)=\frac{y+x}{2}(1,1)+\frac{y-x}{2}(-1,1)$.

Com base nos resultados do exemplo 2.2.2, considera-se a seguinte definição.

Definição 2.2.3 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F e G dois subespaços vetoriais de E.*

i) Se $F\cap G=\{0\}$ diz-se que a soma dos dois subespaços vetoriais $F+G$ é soma direta e representa-se por $F\oplus G$.

ii) Se $F\cap G=\{0\}$ e $F\oplus G=E$, diz-se que os dois subespaços vetoriais F e G são complementares.

Teorema 2.2.4 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F e G dois subespaços vetoriais de E. O subespaço soma, é soma direta $H=F\oplus G$ se e só se todo o vetor $w\in H$ escreve-se de forma única como $w=u+v$, com $u\in F$ e $v\in G$*

Dem. ($\Longrightarrow$) *Se existissem duas representações $w = u_1 + v_1$ e $w = u_2 + v_2$, então $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$ ou, de outra forma,*

$$\underbrace{u_1 - u_2}_{\in F} = \underbrace{v_2 - v_1}_{\in G}.$$

Por ser soma direta, o único vetor comum a ambos os subespaços é o vetor nulo, pelo que $u_1 - u_2 = 0 = v_2 - v_1$. Isto é, $u_1 = u_2 \ \wedge \ v_2 = v_1$.

($\Longleftarrow$) *Seja $w \in F \cap G$ um vetor qualquer. Então $w = u + 0, \quad u \in F$ e $w = 0 + v, \quad v \in G$. Assim $u + 0 = 0 + v$. Como, por hipótese, a representação deste vetor é única, tem-se que $u = 0 \wedge 0 = v$. Isto é, $w = 0$.* $\square$

Neste contexto, refira-se ainda que a noção de soma de dois subespaços pode generalizar-se para um número finito de subespaços. Pensando no caso particular de subespaços "gerados" por um vetor, $\langle v_1 \rangle \, , \ \langle v_2 \rangle \, , \ \ldots \langle v_n \rangle$, os vetores do subespaço soma representam-se por,

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \, .$$

Definição 2.2.4 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$.*
*Dados n vetores de E, $v_1, v_2, \ldots, v_n$ chama-se **Subespaço Gerado** pelos n vetores ao subespaço formado pelos vetores w da forma,*

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n \, . \tag{2.2.1}$$

*Diz-se que o vetor w é uma **Combinação Linear** dos n vetores de E e λ_1, λ_2, λ_n os seus coeficientes. O subespaço em questão é o subespaço soma de $\langle v_1 \rangle \, , \ \langle v_2 \rangle \, , \ \ldots \langle v_n \rangle$ e designa-se por,*

$$\langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle \, ,$$

onde $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são chamados os vetores geradores do subespaço.

Exemplo 2.2.3

1. *Mostre que os vetores $v_1 = (1,0)$ e $v_2 = (0,1)$ geram $\mathbb{R}^2$. Isto é, pretende-se provar que qualquer elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ pode escrever-se como combinação linear de v_1, v_2. Assim, considera-se,*

$$\begin{aligned} (x,y) &= \lambda_1(1,0) + \lambda_2(0,1) \\ (x,y) &= (\lambda_1, 0) + (0, \lambda_2) = (\lambda_1, \lambda_2) \end{aligned}$$

pelo que,

$$\begin{cases} \lambda_1 = x \\ \lambda_2 = y \end{cases}.$$

Isto é, qualquer elemento $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *pode escrever-se como combinação linear de* v_1, v_2 *bastando para isso considerar* $\lambda_1 = x$ *e* $\lambda_2 = y$. *Logo* $\langle v_1, v_2 \rangle = \mathbb{R}^2$.

2. *Determine o subespaço gerado pelo conjunto de vetores* $A = \{(1,-2,-1), (2,1,1)\}$.

$$\langle (1,-2,-1), (2,1,1) \rangle = \{w \in \mathbb{R}^3 : w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} (x,y,z) &= \lambda_1(1,-2,-1) + \lambda_2(2,1,1) \\ (x,y,z) &= (\lambda_1, -2\lambda_1, -\lambda_1) + (2\lambda_2, \lambda_2, \lambda_2) \\ (x,y,z) &= (\lambda_1 + 2\lambda_2, -2\lambda_1 + \lambda_2, -\lambda_1 + \lambda_2) \end{aligned}$$

pelo que,

$$\begin{cases} x = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ y = -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ z = -\lambda_1 + \lambda_2 \end{cases} \iff \begin{cases} x + z = 3\lambda_2 \\ y = -2\lambda_1 + \lambda_2 \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x+z}{3} \\ 2\lambda_1 = -y + \lambda_2 \\ \cdots \end{cases} \iff$$

$$\begin{cases} \lambda_2 = \frac{x+z}{3} \\ 2\lambda_1 = -y + \frac{x+z}{3} \\ \cdots \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x+z}{3} \\ 2\lambda_1 = -y + \frac{x+z}{3} \\ z = \frac{y}{2} - \frac{x+z}{6} + \frac{x+z}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_2 = \frac{x+z}{3} \\ 2\lambda_1 = -y + \frac{x+z}{3} \\ 6z = 3y + x + z \end{cases}$$

Logo $\langle v_1, v_2 \rangle = \{w = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3y + x - 5z = 0\} = \{(5z - 3y, y, z) : y,z \in \mathbb{R}\}$.

Observação 2.2.2

1. *A Definição 2.2.4 generaliza-se ainda para qualquer subconjunto de E. Dado* $S \subseteq E$, $\langle S \rangle$ *representa o menor subespaço de E que contém S.*

   Dito de outra forma, para todo o subespaço F de E que contenha S tem-se $\langle S \rangle \subseteq F$.

2. *De acordo com a Definição 2.2.4, cada vetor* $w \in \langle v_1, v_2, \ldots, v_n \rangle$ *escreve-se na forma* $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$. *Falta saber se esta representação do vetor w é única. Considerando o resultado do Teorema 2.2.4, para a soma de dois subsespaços, isso acontece quando* $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2 \rangle = \{0\}$, *ou geometricamente (Figura 2.1), quando os vetores* v_1 *e* v_2 *não forem múltiplos um do outro.*

3. *Exigir que* $\langle v_1 \rangle \cap \langle v_2 \rangle = \{0\}$ *é equivalente a considerar (Teorema 2.2.4) que o vetor nulo* $0 \in E$*, admite uma única combinação linear* $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 = 0$*, que é precisamente aquela que resulta de considerar,*

$$\lambda_1 = 0 \ \wedge \ \lambda_2 = 0\,.$$

4. *Intuitivamente (considerando* $u = v_1$ *e* $v = v_2$ *na Figura 2.1), se os vetores* v_1 *e* v_2 *forem múltiplos um do outro, o subespaço gerado pelos dois vetores é igual ao subespaço gerado por um deles, isto é,*

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle \ \ ou \ \ \langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2 \rangle\,.$$

   Neste contexto, coloca-se a questão de identificar sob que condições é que se pode reduzir o número de vetores geradores de um determinado subespaço ou, de outra forma, como saber se existem vetores "dispensáveis".

Os conceitos da Observação 2.2.2 são agora formalizados na secção 2.3.

2.3 Dependência e Independência Linear

Definição 2.3.1 *Seja* E *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$ *e* $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, n vetores de E.*
Diz-se que os n vetores[1] *são* ***Linearmente Independentes*** *se nenhum deles for combinação linear dos restantes. Caso contrário, os vetores dizem-se linearmente dependentes.*

Propriedades 2.3.1

1. *O vetor nulo é sempre linearmente dependente de qualquer outro vetor* $(0 = 0v)$*, ou de qualquer conjunto de vetores, pois é sempre possível considerar a combinação linear* $0 = 0v_1 + 0v_2 + \cdots + 0v_n$ *(**Combinação Linear Trivial ou Forma Trivial**).*

2. *Se* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é um conjunto de vetores linearmente independente qualquer subconjunto de S é ainda um conjunto de vetores linearmente independente.*

3. *Se subconjunto de S é um conjunto de vetores linearmente dependente então* $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é também um conjunto de vetores linearmente dependente.*

[1] Considerando $n > 1$. Se $n = 1$ o vetor v_1 é linearmente independente se $v_1 \neq 0$.

Voltando a considerar $u = v_1$ e $v = v_2$ na Figura 2.1, se os vetores v_1 e v_2 forem múltiplos um do outro, então são linearmente dependentes, $v_2 = \lambda v_1$ (e um deles é dispensável, $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1 \rangle$ ou $\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_2 \rangle$).

Teorema 2.3.1 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes se e só se não for possível escrever o vetor nulo como combinação linear destes n vetores para além da forma trivial.*

Dem. ($\Longrightarrow$) *Se o vetor nulo admitir uma combinação linear não trivial destes n vetores $0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ então, pelo menos um dos coeficientes é não nulo, $\lambda_i \neq 0$. Nestas condições, passando a parcela $\lambda_i v_i$ para o 1º membro e dividindo tudo por $-\lambda_i$, tem-se,*

$$v_i = -\frac{\lambda_1}{\lambda_i} v_1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_i} v_2 + \cdots - \frac{\lambda_n}{\lambda_i} v_n ,$$

o que mostra que, nestas condições, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seriam linearmente dependentes o que contraria a hipótese. Portanto não poderá existir uma combinação linear nula destes n vetores para além da forma trivial.

($\Longleftarrow$) *Se um dos vetores fosse combinação linear dos restantes, por exemplo,*

$$v_k = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n ,$$

então, passando v_k para o 2º membro, viria,

$$0 = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_{k-1} v_{k-1} - 1 v_k + \lambda_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \lambda_n v_n ,$$

que corresponderia a uma combinação linear nula para além da forma trivial, $\lambda_k = -1 \neq 0$, o que, por hipótese, não pode existir. Assim, nenhum dos vetores pode ser combinação linear dos restantes e, desta forma, os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ são linearmente independentes. □

Na prática, o resultado do Teorema 2.3.1 acaba por ser mais usado na determinação de vetores linearmente independentes do que a própria Definição 2.3.1. Para esse efeito, consideram-se os seguintes exemplos.

Exemplo 2.3.1

1. *Mostre que $\{(0,0,0,-10), (0,2,5,4), (1,2,-1,7), (0,0,-1,7)\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes de $\mathbb{R}^4$.*

Seja a combinação linear nula,

$$\lambda_1(0,0,0,-10)+\lambda_2(0,2,5,4)+\lambda_3(1,2,-1,7)+\lambda_4(0,0,-1,7)=(0,0,0,0)\,.$$

Desta forma, tem-se,

$$\begin{cases} \lambda_3=0 \\ 2\lambda_2+2\lambda_3=0 \\ 5\lambda_2-\lambda_3-\lambda_4=0 \\ -10\lambda_1+4\lambda_2+7\lambda_3+7\lambda_4=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3=0 \\ \lambda_2=0 \\ \lambda_4=0 \\ \lambda_1=0 \end{cases}.$$

Logo, a única combinação linear nula possível é a trivial, e portanto os vetores são linearmente independentes.

2. *Seja P_2 o espaço vetorial dos polinómios de coeficientes reais na variável x $(\mathbb{R}[x])$ e de grau menor ou igual a 2. Verifique se os polinómios $p_1(x)=1+x$, $p_2(x)=2-x^2$ e $p_3(x)=x-x^2$ são linearmente independentes.*

   Seja,

$$\begin{aligned} \lambda_1p_1(x)+\lambda_2p_2(x)+\lambda_3p_3(x) &= 0 \iff \\ (\lambda_1+2\lambda_2)+(\lambda_1+\lambda_3)x+(-\lambda_2-\lambda_3)x^2 &= 0+0x+0x^2\,. \end{aligned}$$

   Desta forma, tem-se,

$$\begin{cases} \lambda_1+2\lambda_2=0 \\ \lambda_1+\lambda_3=0 \\ -\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2\lambda_2 \\ -2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -\lambda_2-\lambda_3=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-2\lambda_2 \\ -2\lambda_2+\lambda_3=0 \\ -3\lambda_2=0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_1=0 \\ \lambda_3=0 \\ \lambda_2=0 \end{cases},$$

   logo os polinómios $p_1(x)$, $p_2(x)$ e $p_3(x)$ são linearmente independentes.

3. *Voltando ao exemplo 2.2.2, considerando os dois vetores de $\mathbb{R}^2$, $v_1=(1,1)$ e $v_2=(-1,1)$ e a combinação linear nula,*

$$\begin{aligned} \lambda_1v_1+\lambda_2v_2 &= 0 \\ (\lambda_1,\lambda_1)+(-\lambda_2,\lambda_2) &= (0,0) \\ (\lambda_1-\lambda_2,\lambda_1+\lambda_2) &= (0,0)\,, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 2\lambda_2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{cases} .$$

Isto é, os vetores $v_1 = (1,1)$ *e* $v_2 = (-1,1)$ *são linearmente independentes, tal como já tinha sido verificado no exemplo 2.2.2.*

4. *Repetindo o processo, acrescentando agora um terceiro vetor* $v_3 = (0,2)$ *de* $\mathbb{R}^2$*, e uma combinação linear nula,*

$$\begin{aligned} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 &= 0 \\ (\lambda_1, \lambda_1) + (-\lambda_2, \lambda_2) + (0, 2\lambda_3) &= (0,0) \\ (\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3) &= (0,0)\,, \end{aligned}$$

então,

$$\begin{cases} \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda_1 = \lambda_2 \\ \lambda_3 = -\lambda_2 \end{cases} .$$

Isto é, os vetores $v_1 = (1,1)$, $v_2 = (-1,1)$ *e* $v_3 = (0,2)$ *são linearmente dependentes, pois é possível considerar uma combinação linear nula para além da trivial.*

No entanto, estes três vetores ainda geram o espaço $\mathbb{R}^2$, $\langle\, v_1\,,\, v_2\,,\, v_3\,\rangle = \mathbb{R}^2$*, tal como já acontecia com os dois primeiros,* $\langle\, v_1\,,\, v_2\,\rangle = \mathbb{R}^2$*. Falta portanto definir qual o número mínimo (e indispensável) de vetores que ainda geram o espaço vetorial* $\mathbb{R}^2$.

O próximo teorema establece um critério para a determinação do conjunto mínimo de geradores de um espaço vetorial E.

Teorema 2.3.2 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$ e $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ um conjunto de vetores geradores de E. O conjunto B contém o número mínimo (e indispensável) de geradores de E se e só se os vetores em questão são linearmente independentes.*

Dem. ($\Longrightarrow$) *Se conjunto B contém o número mínimo (e indispensável) de geradores de E, significa que gera E, isto é, qualquer vetor w de E pode escrever-se na forma,*

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k v_k + \cdots + \lambda_n v_n\,,$$

mas, sendo um conjunto minimal, significa também que, se lhe for retirado um dos seus vetores, o conjunto restante deixa de gerar o espaço todo E.

Neste contexto, se porventura, os vetores em causa fossem linearmente dependentes, então haveria pelo menos um vetor v_k *que seria combinação linear dos restantes, isto é,*

$$v_k = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n \,.$$

Desta forma, o vetor w *viria representado por,*

$$w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{k-1} v_{k-1} + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \alpha_n v_n) + \cdots + \lambda_n v_n \,,$$

sem que esta última expressão dependesse de v_k*, sendo* w *um vetor qualquer de* E*. Isto é, o conjunto* $B \setminus \{v_k\}$ *ainda seria gerador de* E *o que contraria a hipótese. Logo os vetores* $v_1, v_2, \ldots, v_n$ *são necessariamente linearmente independentes.*

$(\Longleftarrow)$ *Se o conjunto* B *tivesse vetores para além do número mínimo de geradores de* E*, então poder-se-ia dispensar um desses vetores (por ex. o vetor* v_k*) continuando os restantes a gerar todo o espaço* E*. Inclusivemente, o próprio vetor* v_k *também seria representado por uma combinação linear do tipo,*

$$v_k = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_{k-1} v_{k-1} + \beta_{k+1} v_{k+1} + \cdots + \beta_n v_n \,,$$

o que iria contradizer a hipótese de os vetores serem linearmente independentes. Logo, o resultado. Se os vetores $v_1, v_2, \ldots, v_n$*, enquanto geradores de* E*, são linearmente independentes o conjunto* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *contém o número mínimo (e indispensável) de geradores de* E*.* $\square$

2.4 Bases e Dimensão

Definição 2.4.1 *Seja* E *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. A um* ***conjunto de vetores*** $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$*, nas condições do Teorema 2.3.2,* ***linearmente independentes e geradores*** *de* E*, chama-se uma* ***Base de*** E*.*

Teorema 2.4.1 *Seja* E *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Se* $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ *é uma base de de* E *cada vetor* $w \in E$ *escreve-se de forma única como combinação linear dos vetores da base* $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$*.*
Nestas condições, os coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ *designam-se por* ***Coordenadas de*** w ***na base*** B*.*

Dem. *Que cada cada vetor $w \in E$ se escreve como combinação linear dos vetores da base é imediato pois este conjunto é geraor de E. O que está aqui em causa é a unicidade.*
Se existissem duas combinações lineares distintas para um determinado vetor w, $w = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ e $w = \mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n$, com $(\lambda_i \neq \mu_i)$ para algum i, então a equação,

$$\begin{aligned} (\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n) - (\mu_1 v_1 + \mu_2 v_2 + \cdots + \mu_n v_n) &= 0 \\ (\lambda_1 - \mu_1) v_1 + (\lambda_2 - \mu_2) v_2 + \cdots + (\lambda_n - \mu_n) v_n &= 0 \end{aligned}$$

representaria uma combinação linear nula não trivial (com $(\lambda_i - \mu_i) \neq 0$), o que contradiz a hipótese de os vetores $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ serem linearmente independentes. Portanto todo o vetor $w \in E$ escreve-se de forma única como combinação linear dos vetores da base. □

Definição 2.4.2 *Seja E um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Se uma base de B de E for constituída por um número finito*[1] *de elementos n, diz-se que E tem* ***Dimensão*** *n.*
Notação: $\dim(E) = n$.
Convenção: $\dim(\{0\}) = 0$.

Na Definição 2.4.2 fica subentendido que este número é independente da base escolhida. Se eventualmente existisse outra base de E com um número superior de vetores (por ex. $n+1$ vetores), $B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$, então para cada vetor u_i de B', existiriam coordenadas únicas $\alpha_{1i}, \alpha_{2i}, \ldots, \alpha_{ni}$ tais que,

$$u_i = \alpha_{1i} v_1 + \alpha_{2i} v_2 + \ldots + \alpha_{ni} v_n, \qquad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n+1.$$

Considerando o sistema,

$$\begin{cases} \alpha_{11} x_1 + \alpha_{12} x_2 + \ldots + \alpha_{1n} x_n + \alpha_{1(n+1)} x_{n+1} = 0 \\ \alpha_{21} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \ldots + \alpha_{2n} x_n + \alpha_{2(n+1)} x_{n+1} = 0 \\ \qquad \vdots \\ \alpha_{n1} x_1 + \alpha_{n2} x_2 + \ldots + \alpha_{nn} x_n + \alpha_{n(n+1)} x_{n+1} = 0 \end{cases}$$

que é posssível e indeterminado (uma vez que o número de variáveis $n+1$ é superior ao número de equações n, Teorema 3.5.3, Capítulo 3), admitirá, portanto, uma solução não nula $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n, \beta_{n+1}$. Nestas condições,

[1] Neste caso E diz-se um espaço vetorial de dimensão finita. Por exemplo, o conjunto $\mathbb{R}[x]$ dos polinómios numa variável x e coeficientes em $\mathbb{R}$, é um espaço vetorial de dimensão infinita, pois não é possível limitar o número de vetores geradores e linearmente independentes, x^p, com $p = 0, 1, \ldots, n, \ldots$.

a combinação linear,

$$\begin{aligned}
\beta_1 u_1+\beta_2 u_2+\cdots+\beta_n u_n+\beta_{n+1}u_{n+1} &= \beta_1\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j1}v_j\Big)+\beta_2\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j2}v_j\Big)+\cdots\\
&\qquad\cdots+\beta_n\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{jn}v_j\Big)+\beta_{n+1}\Big(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j(n+1)}v_j\Big)\\
&= \underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{1k}\beta_k\Big)}_{=0}v_1+\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{2k}\beta_k\Big)}_{=0}v_2+\cdots+\underbrace{\Big(\sum_{k=1}^{n+1}\alpha_{nk}\beta_k\Big)}_{=0}v_n=0
\end{aligned}$$

sendo nula e não trivial, implicaria a dependência linear dos vetores $\{u_1, u_2, \ldots, u_n, u_{n+1}\}$, contrariando a hipótese de estes formarem uma base de E.

Teorema 2.4.2 *Seja E um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$. Então:*

i) Qualquer conjunto de n vectores linearmente independentes é uma base de E;

ii) Qualquer conjunto de n vectores geradores de E é uma base de E.

Dem.

i) Se o conjunto de n vectores linearmente independentes $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ não gerasse o espaço E, haveria pelo menos um vetor $w \in E$ que não se representaria como combinação linear dos vetores v_i. Desta forma $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, w\}$ seria um conjunto de $n+1$ vetores linearmente independentes e portanto $\dim(E) \geq n+1 > n$, o que iria contrariar a hipótese.

ii) Se n vectores geradores de E, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ não fosse um conjunto de vectores linearmente independentes, um destes vetores, por exemplo v_1, seria combinação linear dos restantes, $v_1 = \lambda_2 v_2 + \cdots + \lambda_n v_n$ e portanto existiria um conjunto de geradores de E, $\{v_2, \ldots, v_n\}$, com $n-1$ vetores e, desta forma, $\dim(E) \leq n-1 < n$, o que negaria a hipótese. $\square$

Corolário 2.4.1 *Seja E um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F um subespaço de E. Então:*

i) $\dim(F) \leq n$;

ii) $\dim(F) = n$ se e só se $F = E$.

Teorema 2.4.3 *Seja E um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F e G dois subespaços de E. Então:*

$$\dim(F+G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)\,. \tag{2.4.1}$$

Dem. *Como o subespaço soma $F+G$ corresponde aos vetores de E que se expressam como soma de um vetor de F com um vetor de G e o subespaço interseção $F \cap G$ representa os vetores de E que pertencem simultaneamente a F e G, pode considerar-se o seguinte: se $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é uma base de $F \cap G$ este conjunto pode ser completado até se obter, quer uma base de F, $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l\}$, quer uma base de G, $\{v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_m\}$. Nestes termos, $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_m\}$ será uma base [1] de $F+G$. Sendo possível esta abordagem [2] , tem-se que*

$$\dim(F+G) = k+l+m\,,\ \ \dim(F) = k+l\,,\ \ \dim(G) = k+m \quad e \quad \dim(F \cap G) = k\,,$$

o que valida a equação (2.4.1). □

Corolário 2.4.2 *Seja E um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$ e F e G dois subespaços de E tais que $F \cap G = \{0\}$. Então:*

$$\dim(F \oplus G) = \dim(F) + \dim(G)\,. \tag{2.4.2}$$

Observação 2.4.1 *Considerando duas bases de E, um espaço vetorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{K}$,*

$$B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \quad e \quad B' = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}\,,$$

o Teorema 2.4.1 estabelece que, para cada vetor $w \in E$, existem coordenadas únicas, $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ e $\beta_1', \beta_2', \ldots, \beta_n'$, deste vetor nas bases B e B' respetivamente, tais que,

$$\begin{aligned} w &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \\ &e \\ w &= \beta_1' u_1 + \beta_2' u_2 + \cdots + \beta_n' u_n \end{aligned}$$

[1] Atendendo às hipóteses, $\{v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_m\}$ é necessáriamente um conjunto de vetores linearmente independentes uma vez que pertencem a diferentes subespaços. Falta apenas ver que são geradores de $F+G$. Dado um vetor z pertencente à soma $F+G$, então $z = z_1 + z_2$, com $z_1 \in F$ e $z_2 \in G$. Nestas condições, $z_1 = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_k v_k + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l$ e $z_2 = \lambda_1' v_1 + \cdots + \lambda_k' v_k + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m$. Isto é, $z = (\lambda_1 + \lambda_1')v_1 + \cdots + (\lambda_k + \lambda_k')v_k + \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_l u_l + \beta_1 w_1 + \cdots + \beta_m w_m$. Portanto $\langle v_1, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l, w_1, \ldots, w_m \rangle = F+G$.

[2] Se $F = F \cap G$ então $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ é também uma base de F. Caso contrário existe pelo menos um vetor u_1, não nulo, que pertence a F e não pertence a $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k \rangle$, pelo que $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1 \rangle \subseteq F$. Poderá assim iterar-se este processo, um número finito de vezes (F tem dimensão finita), até se obter uma base de F, $\langle v_1, v_2, \ldots, v_k, u_1, \ldots, u_l \rangle = F$. Evidentemente, tem-se o mesmo resultado para o subespaço G.

Trata-se de averiguar de que forma se relacionam entre si essas mesmas coordenadas.
Com base no mesmo Teorema 2.4.1, para cada vetor u_i de B', existirão coordenadas únicas $\alpha_{1i}\,,\ \alpha_{2i}\,,\ \ldots\,,\ \alpha_{ni}\,,$ *tais que,*

$$\begin{aligned}
u_1 &= \alpha_{11}v_1+\alpha_{21}v_2+\ldots+\alpha_{n1}v_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k1}v_k \\
u_2 &= \alpha_{12}v_1+\alpha_{22}v_2+\ldots+\alpha_{n2}v_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k2}v_k \\
&\vdots \\
u_n &= \alpha_{1n}v_1+\alpha_{2n}v_2+\ldots+\alpha_{nn}v_n=\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}v_k
\end{aligned}$$

Assim, o vetor w *será representado na base* B *através da seguinte sequência de cálculo,*

$$\begin{aligned}
w &= \beta_1'u_1+\beta_2'u_2+\cdots+\beta_n'u_n \\
w &= \beta_1'\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k1}v_k\right)+\beta_2'\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{k2}v_k\right)+\cdots+\beta_n'\left(\sum_{k=1}^{n}\alpha_{kn}v_k\right) \\
&= \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{1j}\beta_j'\right)}_{\beta_1}v_1+\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{2j}\beta_j'\right)}_{\beta_2}v_2+\cdots+\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n}\alpha_{nj}\beta_j'\right)}_{\beta_n}v_n
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\beta_i=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\beta_j'\ ,\quad \forall\, i=1\,,2\,,\ldots\,,n\,.$$

No próximo Capítulo, estas relações poderão ser representadas por,

$$\begin{bmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \vdots\\ \beta_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\ \alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\ \vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\ \alpha_{n1}&\alpha_{n2}&\cdots&\alpha_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\beta_1'\\ \beta_2'\\ \vdots\\ \beta_n'\end{bmatrix}\ .$$