1.3 - Estudo de algumas funções elementares.

1.3.1 - Função Polinomial.

Polinómio ou função polinomial é toda a expressão da forma $\boxed{a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + ... + a_{n-1} x + a_n}$, em que $a_0, a_1, ... a_n$ são números reais $(a_0 \neq 0)$ e chamam-se os coeficientes do polinómio, x é a variável e n é um expoente natural que identifica o grau do polinómio.

Exemplo: $P(x) = 3x + 2$ é um polinómio de grau 1, enquanto que $Q(x) = 3x^5 + 5x^3$ é um polinómio de grau 5.

- Operações com polinómios:

  - **Adição**: adicionam-se os coeficientes dos termos homólogos.

  Exemplo: $(3x^2 + x + 1) + (5x^2 + 3) = (3+5)x^2 + x + 1 + 3 = 8x^2 + x + 4$.

  - **Multiplicação**: multiplica-se cada termo de um polinómio por todos os termos do outro e, em seguida, adicionam-se os termos homólogos.

  Exemplo:
  $(5x^2 + 3).(3x^2 + x + 1) = 15x^4 + 5x^3 + 5x^2 + 9x^2 + 3x + 3 = 15x^4 + 5x^3 + 14x^2 + 3x + 3$
  .

  - **Divisão**: A divisão efetua-se recorrendo a um algoritmo idêntico ao da divisão de números naturais.

A divisão só é possível quando o grau do dividendo é superior ou igual ao grau do divisor e termina quando o grau do resto for inferior ao grau do divisor.

Assim, a divisão do polinómio $P_1(x)$ pelo polinómio $P_2(x)$ consiste em determinar o quociente $Q(x)$ e o resto $R(x)$ tal que $\frac{P_1(x)}{P_2(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{P_2(x)}$.

Exemplo:

$\begin{array}{l\|l} -6x^3+3x^2+0x+2 & \underline{2x^2+1} \\ & \end{array}$	Começa-se por escrever ordenadamente, o dividendo e o divisor segundo as potências decrescentes de x.
$\begin{array}{l\|l} -6x^3+3x^2+0x+2 & \underline{2x^2+1} \\ & -3x \end{array}$	Dividem-se os termos de maior grau de dividendo e do divisor $-6x^3 : 2x^2 = -3x$. O resultado é o termo do quociente.
$\begin{array}{l\|l} -6x^3+3x^2+0x+2 & \underline{2x^2+1} \\ \underline{6x^3 \qquad +3x} & -3x \\ \quad 3x^2+3x+2 & \end{array}$	Multiplica-se o divisor pelo termo do quociente, escreve-se o simétrico desse produto e adiciona-se ao dividendo, obtendo assim o resto parcial.
$\begin{array}{l\|l} -6x^3+3x^2+0x+2 & \underline{2x^2+1} \\ \underline{6x^3 \qquad +3x} & -3x+3/2 \\ \quad 3x^2+3x+2 & \\ \quad \underline{-3x^2 \qquad -3/2} & \\ \qquad 3x+1/2 & \end{array}$	Divide-se o termo de maior grau do resto parcial pelo termo de maior grau do divisor. $3x^2 : 2x^2 = 3/2$ O resultado é o segundo termo do quociente. Repete-se, em seguida, todo o processo.

Portanto, $\frac{-6x^3+3x^2+2}{2x^2+1} = -3x + \frac{3}{2} + \frac{3x+\frac{1}{2}}{2x^2+1}$

- Um número real r diz-se **<u>raiz ou zero</u>** do polinómio $P(x)$ se $P(r) = 0$.

Teorema Fundamental da Álgebra: Um polinómio de grau n possui n raízes.

Tais raízes podem ser reais ou complexas, bem como podem ser múltiplas (repetidas).

- Designando por $r_1, r_2, ..., r_n$ as raízes (reais) de um polinómio $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n$ de grau n, então o polinómio $P(x)$ pode ser escrito na chamada **forma fatorizada**:

$$P(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2)...(x - r_n).$$

Exemplos:

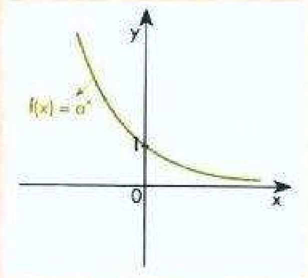
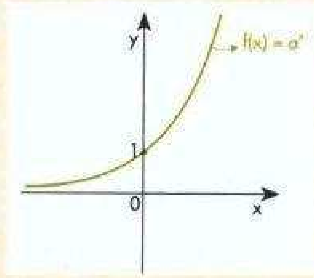
1. O polinómio $x^2 - 4$ tem raízes -2 e 2, pelo que se pode escrever na forma fatorizada: $(x + 2)(x - 2)$.

2. O polinómio $x^3 - 3x^2 + 2x$ tem raízes 0, 1 e 2, pelo que a sua forma fatorizada é $x(x - 1)(x - 2)$.

1.3.2 - Função exponencial (de base $a \in R^{+} \setminus \{1\}$)

Conta a lenda que um rei solicitou aos seus súditos que lhe inventassem um novo jogo, a fim de diminuir o seu tédio. O melhor jogo teria direito a realizar qualquer desejo. Um dos seus súditos inventou, então, o jogo de xadrez. O Rei ficou maravilhado com o jogo e viu-se obrigado a cumprir a sua promessa. Chamou, então, o inventor do jogo e disse que ele poderia pedir o que desejasse. O astuto inventor pediu então que as 64 casas do tabuleiro do jogo de xadrez fossem preenchidas com moedas de ouro, seguindo o seguinte critério: na primeira casa seria colocada uma moeda e em cada casa seguinte seria colocado o dobro de moedas que havia na casa anterior. O Rei considerou o pedido fácil de ser atendido e ordenou que providenciassem o pagamento. Tal foi sua surpresa quando os tesoureiros do reino lhe apresentaram a conta, pois apenas na última casa o total de moedas era aproximadamente 9 223 300 000 000 000 000. Não se pode esquecer ainda que o valor entregue ao inventor seria a soma de todas as moedas contidas em todas as casas. O rei estava falido!

Portanto, a função exponencial cresce ou decresce muito rapidamente. Ela desempenha um papel fundamental na Matemática e nas ciências afins, como a Física, Química, Engenharias, Astronomia, Economia, Biologia, Psicologia e outras.

$0 < a < 1$	$a > 1$
$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$	$f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longrightarrow a^x$	$x \longrightarrow a^x$
	
• Domínio = $\mathbb{R}$	• Domínio = $\mathbb{R}$
• Contradomínio = $\mathbb{R}^+$	• Contradomínio = $\mathbb{R}^+$
• f é injectiva	• f é injectiva
• $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$	• $f(x) > 0,\ \forall x \in \mathbb{R}$
• f é continua e diferenciável em $\mathbb{R}$	• f é continua e diferenciável em $\mathbb{R}$
• *A função é estritamente decrescente.*	• *A função é estritamente crescente.*
• $\lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty$	• $\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty$
• $\lim_{x \to +\infty} a^x = 0$	• $\lim_{x \to -\infty} a^x = 0$
• $y = 0$ é assimptota horizontal	• $y = 0$ é assimptota horizontal

<u>Propriedades operatórias</u>:

Seja $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $x, y \in$ *domínio da função*, então:

- $a^0 = 1$
- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$
- $\left(ab\right)^x = a^x . b^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-x} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^x$

<u>Caso particular $a = e$</u>. Número de Neper – número irracional e transcendente, aproximadamente e=2,7182818284590452353602874...

A função exponencial e^x modela fenómenos de importância vital, nos mais variados campos da ciência: físico-químicas, biológicas, económicas, agronómicas, geográficas, médicas, sociais, etc.
Como é óbvio, são válidas as propriedades relativas ao caso $a > 1$.

1.3.3 - Função logarítmica (base $a \in R^+ \setminus \{1\}$)

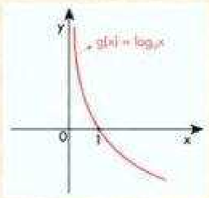
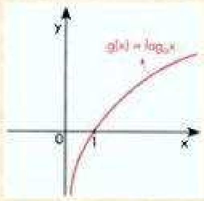
Joost Bürgi, um relojoeiro suíço a serviço do Duque de Hesse-Kassel, foi o primeiro a formar uma concepção sobre logaritmos. O método dos logaritmos naturais foi proposto pela primeira vez em 1614, em um livro intitulado *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* escrito por John Napier, Barão de Merchiston na Escócia, quatro anos após a publicação de sua memorável invenção. Este método contribuiu para o avanço da ciência, e especialmente a astronomia, fazendo com que cálculos muito difíceis se tornassem possíveis. Anterior à invenção de calculadoras e computadores, era uma ferramenta constantemente usada em observações, navegação e outros ramos da matemática prática. Um exemplo frequente e útil de aplicação desta função são as escalas logarítmicas. Uma escala logarítmica é uma escala que usa o logaritmo de uma grandeza em vez da grandeza propriamente dita. Exemplos conhecidos de tais escalas são a Escala de Richter e escala de magnitude de momento (MMS) para a intensidade de terremotos e movimento na Terra; bel e decibel e neper para potência acústica (*loudness*) e potência elétrica; cent, semitom, tom, e oitava para o intervalo relativo de notas na música; logit em Estatística; Entropia em termodinâmica; pH para acidez; Escala de magnitude estelar para a luminosidade de estrelas; Escala de Krumbein para o tamanho dos grãos em Geologia; Escala de Kardashev para o avanço tecnológico na Física, entre outras.

Trata-se da função inversa da função exponencial, portanto $(a^x)o(\log_a x) = Id_{R^+}$ e $(\log_a x)o(a^x) = Id_R$,

$\boxed{\log_a x = y \Leftrightarrow x = a^y}$, isto é,

logaritmo de um número real positivo ***x*** *é o número real* y *a que se deve elevar a base para se obter* x**.**

Ou seja, o logaritmo é o expoente que uma dada base deve ter para produzir certa potência.

$0 < a < 1$	$a > 1$
$g: IR^+ \longrightarrow IR$ $x \longrightarrow \log_a x$	$g: IR^+ \longrightarrow IR$ $x \longrightarrow \log_a x$
	
• Domínio = IR^+	• Domínio = IR^+
• Contradomínio = IR	• Contradomínio = IR
• g é injectiva	• g é injectiva
• $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$	• $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1$
• g é continua e diferenciável em IR^+	• g é continua e diferenciável em IR^+
• A função é estritamente decrescente.	• A função é estritamente crescente.
• $\lim_{x\to 0^+} \log_a x = +\infty$	• $\lim_{x\to 0^+} \text{loga } x = -\infty$
• $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = -\infty$	• $\lim_{x\to +\infty} \log_a x = +\infty$
• $x = 0$ é assimptota vertical	• $x = 0$ é assimptota vertical

<u>Propriedades operatórias</u>:

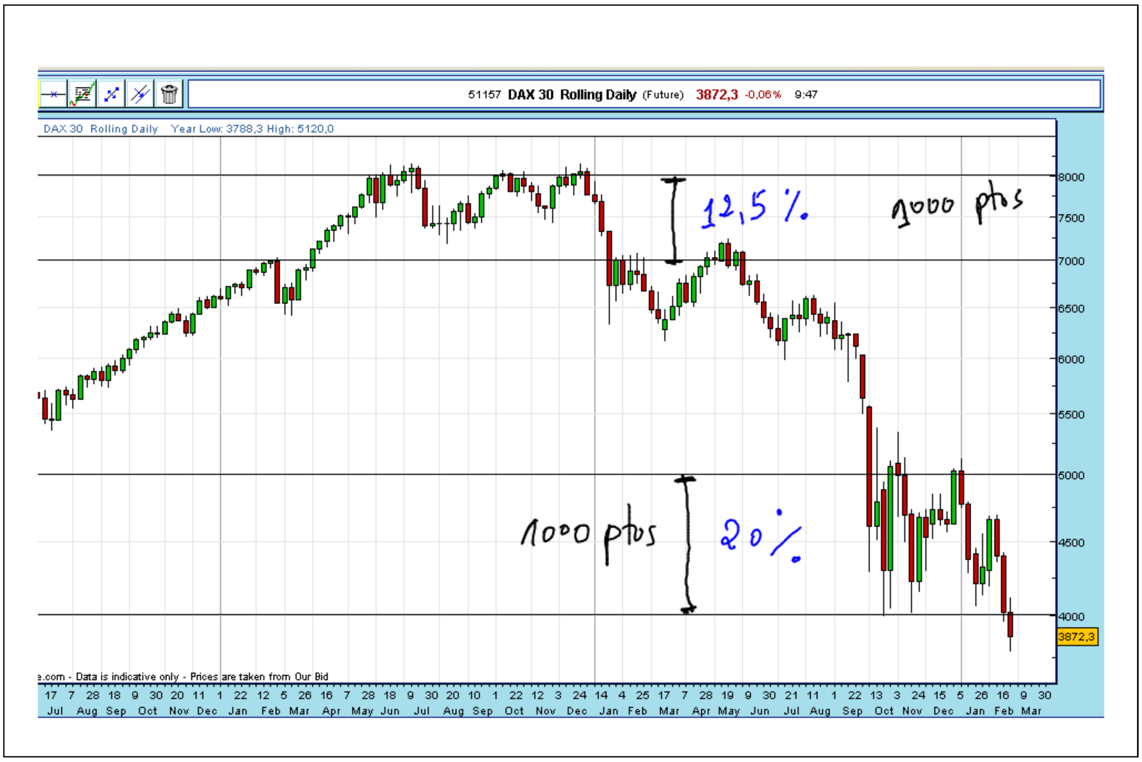
Sendo $x, y \in R^+$ e $a \in R^+ \setminus \{-1\}$, então

- $\log_a 1 = 0$
- $\log_a a = 1$

- $\log_a (x.y) = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \left(\frac{x}{y} \right) = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^y = y \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$

Caso particular $\underline{a = e}$**:** $\ln x = \log_a x$. Neste caso , temos o chamado *logaritmo neperiano* ou *logaritmo natural.*

➢ **Exemplo** de aplicação da **escala logarítmica** a um índice:



1.3.4 - Funções trigonométricas circulares.

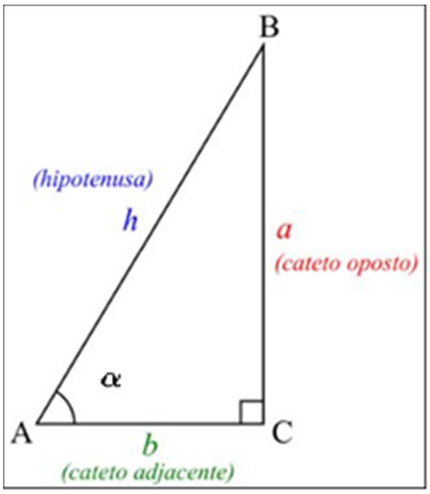
A palavra **trigonometria** tem origem nos termos gregos: tri(três), gono(ângulos) e metron(medida), significando assim **"medida dos triângulos".**

Inicialmente considerada como uma extensão da geometria, a trigonometria já era estudada pelos babilônios, que a utilizavam para resolver problemas práticos de Astronomia e de Navegação. Aliás, foram os astrónomos como o grego Hiparco (190 aC – 125 aC), considerado o pai da Astronomia e da Trigonometria, que estabeleceu as primeiras relações entre os lados e os ângulos de um triângulo retângulo.

No século VIII com o apoio de trabalhos hindus, matemáticos árabes contribuíram notavelmente para o avanço da trigonometria. Este avanço continuou após a construção da primeira tábua trigonométrica, por um matemático alemão, nascido em Baviera, chamado Georg Purback (1423-1461). Porém o primeiro trabalho matemático sobre trigonometria foi o "tratado dos triângulos", escrito pelo matemático alemão Johann Müller, também chamado Regiomontanus. Sabe-se que Regiomaontanus foi discipulo de Purback.

Atualmente a trigonometria não se limita apenas a estudar triângulos. A sua aplicação estende-se a outros campos da matemática, bem como a outros campos da atividade humana como a Eletricidade, a Mecânica, a Acústica, a Música, Engenharias, etc.

As funções trigonométricas são funções angulares, definidas como razões de dois lados de um **triângulo retângulo**.



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{a}{h}$$

$$\cos\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{b}{h}$$

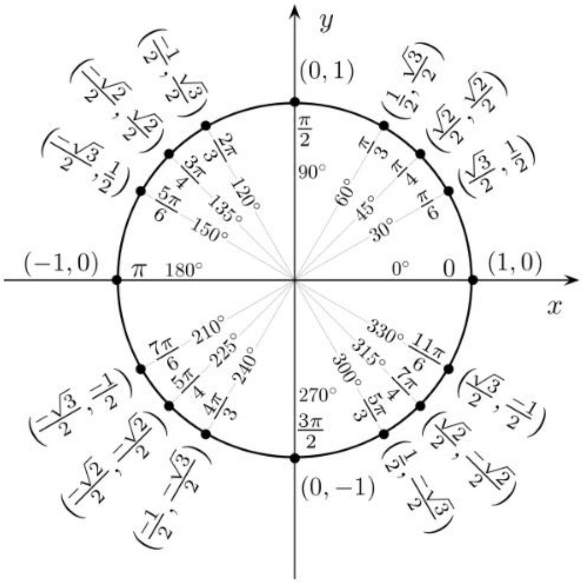
$$\tan\alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{a}{b}$$

$$\cot\alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{cateto oposto}} = \frac{b}{a}$$

A relação entre os lados do triângulo não depende da escolha particular do triângulo, mas apenas dos ângulos do triângulo.

Portanto, a definição das funções trigonométricas pode ser generalizada para um ângulo real qualquer através do chamado **círculo trigonométrico**. O círculo trigonométrico é um círculo de raio unitário centrado na origem de um sistema de coordenadas cartesianas.

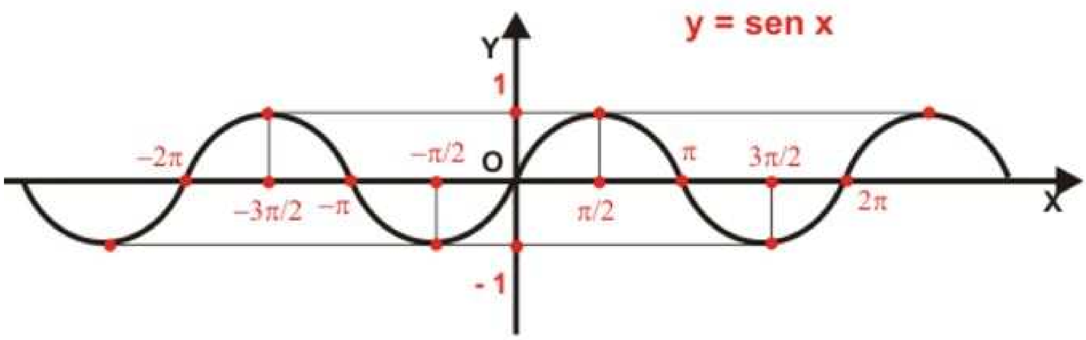
O círculo unitário tem perímetro 2π que corresponde a $360°$ de amplitude do ângulo giro. Considerando os ângulos notáveis nesse círculo, obtêm-se os valores (x, y) em que x é o cosseno e y o seno do mesmo ângulo.



Podemos também considerar as funções trigonométricas num **plano cartesiano**, em que o eixo das abcissas equivale ao ângulo em radianos e o eixo das ordenadas ao contradomínio da função.

1.3.4.1 – Função seno

Designamos a função seno por $\operatorname{sen} x$ ou $\sin x$, sendo que tem domínio R e contradomínio o intervalo $[-1,1]$.
O gráfico da função seno forma uma sinusoide ou onda sinusoidal que se repete em intervalos de amplitude 2π, sendo por isso uma função **periódica** com período 2π.

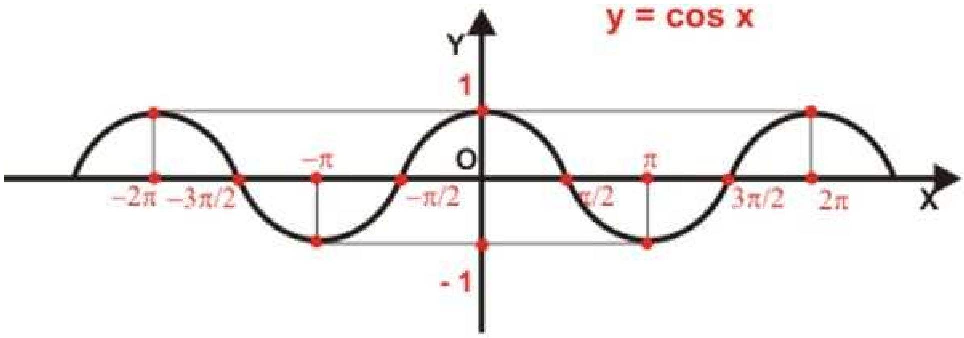


A função seno caracteriza-se também por ser uma função **ímpar**, dado que $\sin(-x) = -\sin x$.

1.3.4.2 – Função cosseno

Designamos a função cosseno por $\cos x$, sendo que tem domínio R e contradomínio o intervalo $[-1,1]$.

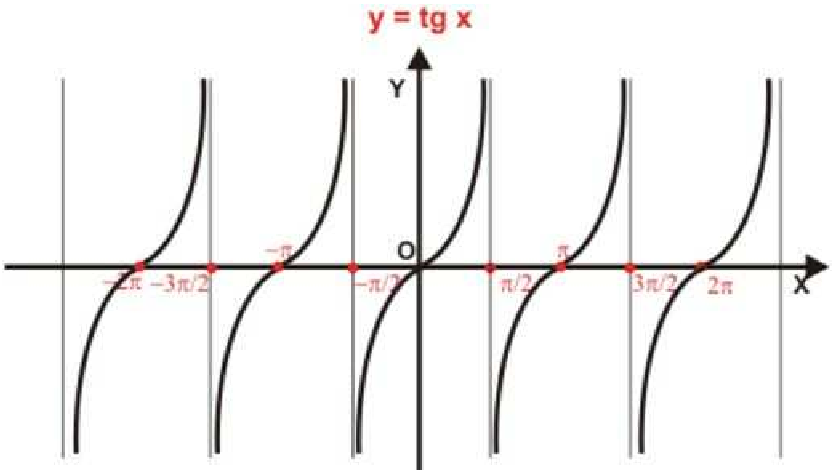
O gráfico da função cosseno forma uma sinusoide ou onda cosinusoidal que se repete em intervalos de amplitude 2π, sendo por isso uma função **periódica** com período 2π.



A função cosseno caracteriza-se também por ser uma função **par**, dado que $\cos(-x) = \cos x$.

1.3.4.3 – Função tangente

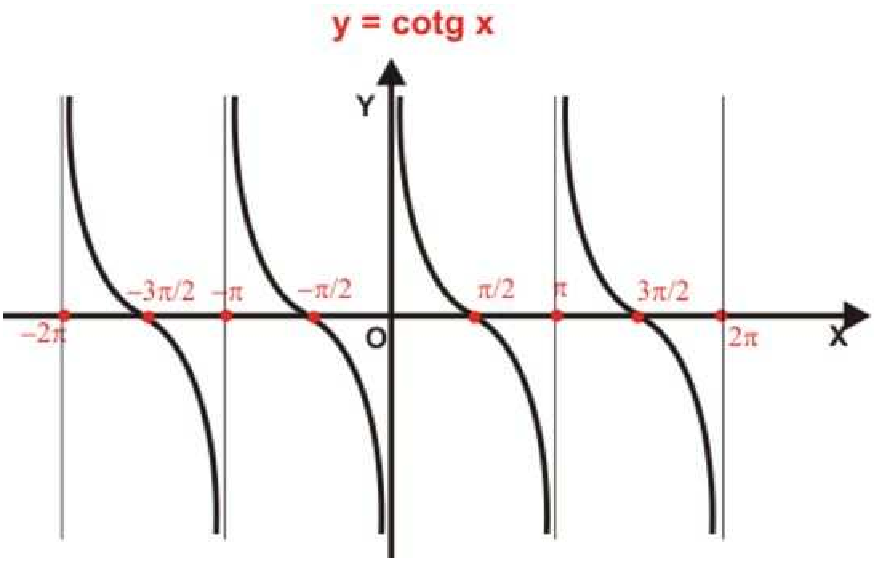
Designamos a função tangente por $\operatorname{tg} x$, sendo definida pela razão entre a função seno e a função cosseno, $\operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$. Tem domínio R exceto os números reais que anulam a função cosseno ($x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$) e tem contradomínio R. A função tangente é **periódica**, sendo seu período π.



A função tangente caracteriza-se também por ser uma função **ímpar**, dado que $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

1.3.4.4 – Função cotangente

Designamos a função cotangente por $\operatorname{cotg} x$, sendo definida como a função inversa da função tangente, $\operatorname{cotg} x = \dfrac{1}{\operatorname{tg} x} = \dfrac{\cos x}{\sin x}$. Tem domínio R exceto os números reais que anulam a função seno ($x = k\pi, k \in Z$) e tem contradomínio R.
A função cotangente é **periódica**, sendo seu período π.



A função cotangente caracteriza-se também por ser uma função **ímpar**, dado que $\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$.

1.3.5 - Funções trigonométricas circulares inversas.

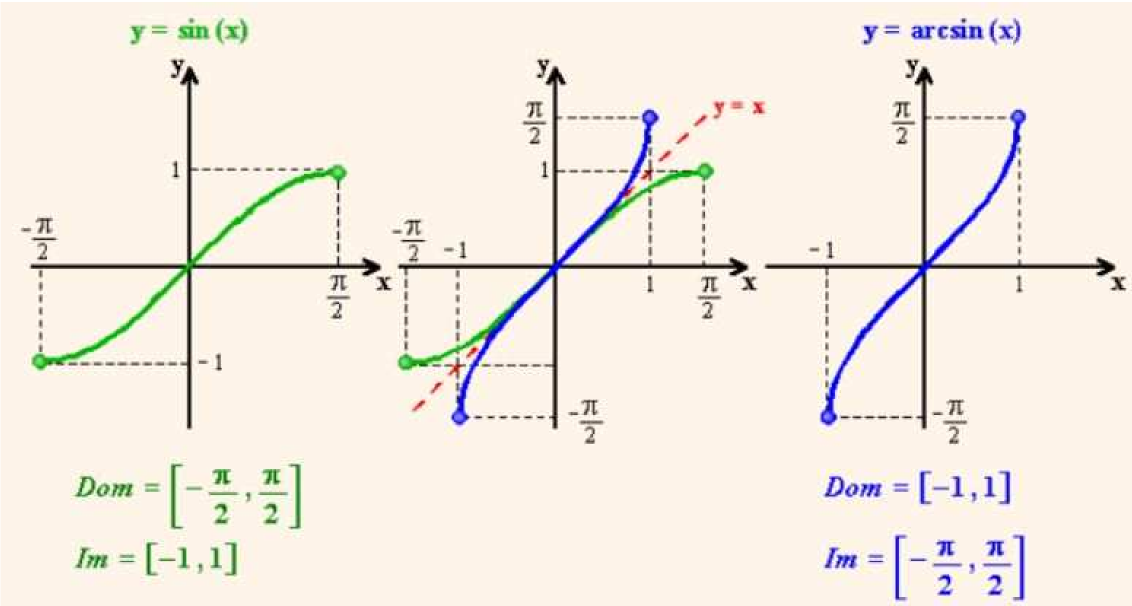
Como sabemos, só funções injetivas são invertíveis. Acontece que as funções trigonométricas circulares não são injetivas em todo o seu domínio. Por isso, no sentido de se poderem definir as respetivas inversas, habitualmente consideram-se restrições dos domínios de modo que sejam injetivas nessas partes do domínio.

1.3.5.1 – Função arco seno.

Ainda que possamos considerar infinitas restrições onde a função seno é invertível, o intervalo $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ é a restrição normalmente considerada e designase por **restrição principal**. Neste intervalo, a função seno é injetiva e assume todos os valores do intervalo $[-1,1]$.

Assim, definimos

$$\arcsin : [-1,1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$
$$x \to \arcsin(x)$$

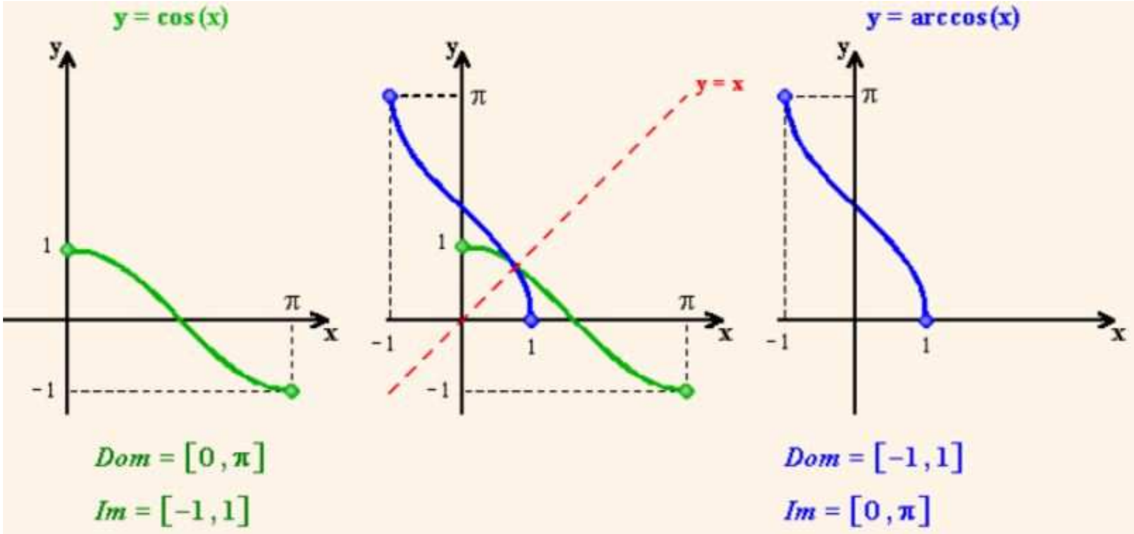


1.3.5.2 – Função arco cosseno.

O intervalo $[0,\pi]$ é a **restrição principal** considerada para o cosseno. Neste intervalo, a função cosseno é injetiva e assume todos os valores do intervalo $[-1,1]$.

Assim, definimos

$$\arccos : [-1,1] \longrightarrow [0,\pi]$$
$$x \to \arccos(x)$$

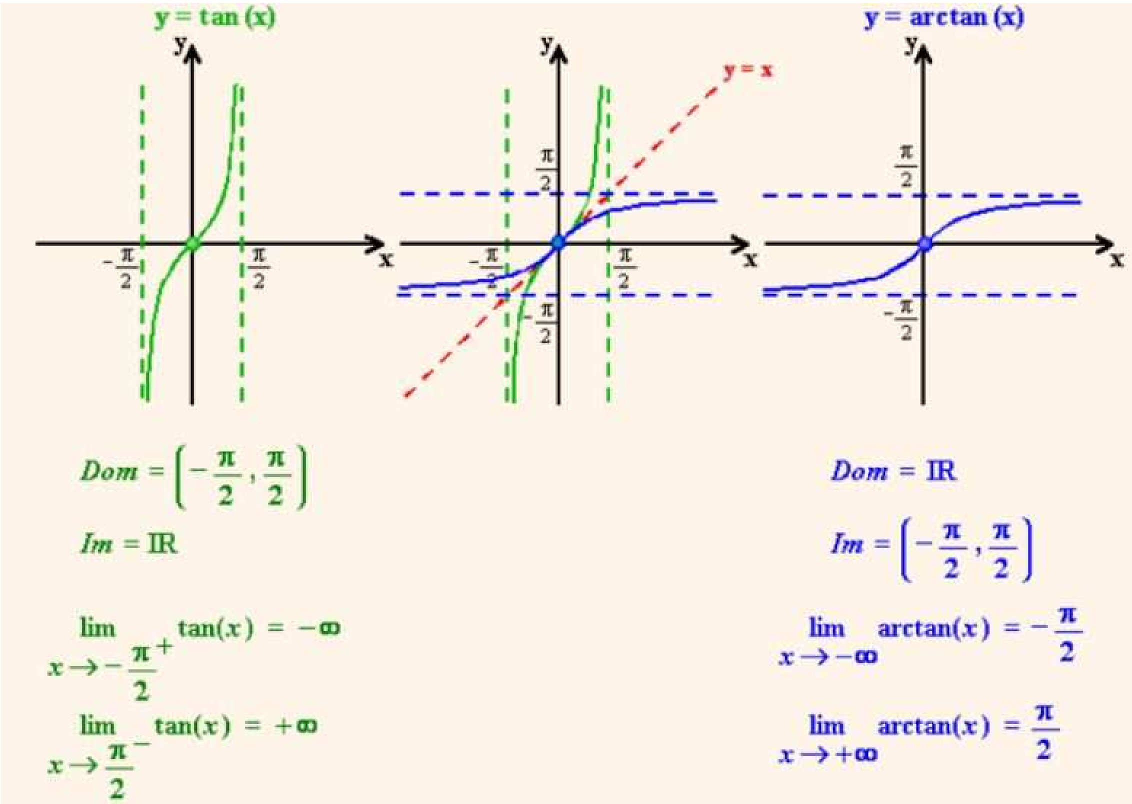


1.3.5.3 – Função arco tangente.

O intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ é a **restrição principal** considerada para a tangente. Neste intervalo, a função tangente é injetiva e assume todos os valores em R.

Assim, definimos

$$\begin{aligned} \arctan : R &\longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\\ x &\to \arctan(x) \end{aligned}$$

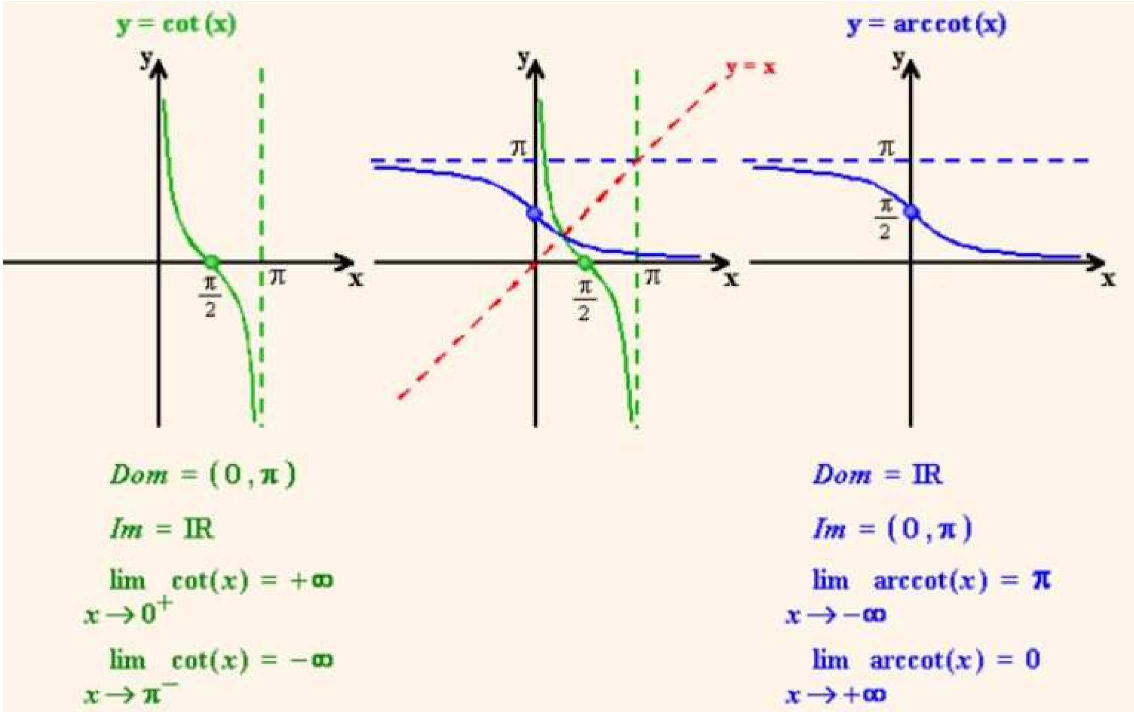


1.3.5.4 – Função arco cotangente.

O intervalo $]0,\pi[$ é a **restrição principal** considerada para a cotangente. Neste intervalo, a função cotangente é injetiva e assume todos os valores em R.

Assim, definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{arccotan}: R &\longrightarrow]0,\pi[\\ x &\rightarrow \operatorname{arccotan}(x) \end{aligned}$$



➤ Algumas fórmulas trigonométricas:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\cos x.\cos y = \frac{1}{2}[\cos(x+y) + \cos(x-y)]$
$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos\ 2x)$	$\sin x.\sin y = \frac{1}{2}[\cos(x-y) - \cos(x+y)]$
$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos\ 2x)$	$\sin x - \sin y = 2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$\sin 2x = 2\sin x.\cos x$	$\cos x - \cos y = -2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right).\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)$
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos(x+y) = \cos x.\cos y - \sin x.\sin y$
$1 + \text{tg}^2 = \sec^2 x$	$\sin(x+y) = \cos x.\sin y + \sin x.\cos y$
$1 + \text{cotg}^2 = \text{cosec}^2 x$	$\text{tg}(x+y) = \frac{\text{tg}\ x + \text{tg}\ y}{1 - \text{tg}\ x.\text{tg}\ y}$
$\sin x.\cos y = \frac{1}{2}[\sin(x+y) + \sin(x-y)]$	$\text{cotg}(x+y) = \frac{\text{cotg}\ x.\text{cotg}\ y - 1}{\text{cotg}\ x + \text{cotg}\ y}$

Exercícios propostos:

1. Determine o domínio de cada uma das seguintes funções:

a) $f_1(x) = \ln\left(x^2+1\right)$ b) $f_2(x) = \log_5(x-3)$

c) $f_3(x)\dfrac{\sqrt{4x-x^2}}{\log x}$ d) $f_4(x) = \dfrac{2}{\cos x}$

e) $f_5(x) = \tan\left(x+\dfrac{\pi}{2}\right)$ f) $f_6(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

2. Determine o domínio e contradomínio das funções que se seguem:

a) $f(x) = \arccos\left(x+\dfrac{x^2}{2}\right)$ b) $g(x) = \dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,cotg}(x+3) - \dfrac{\pi}{4}$ c) $h(x) = 2 - \log_5(x-3)$.

3. Verifique quais das seguintes funções são pares e quais são ímpares:

a) $f_1(x) = \dfrac{1}{2}\left(a^x + a^{-x}\right)$

b) $f_2(x) = \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$

c) $f_3(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$

d) $f_4(x) = \dfrac{\cos x^3}{x}$

4. Averigue se as seguintes funções são periódicas e, em caso afirmativo, indique os respetivos períodos positivos mínimos:

a) $g_1 = \sin(x+5)$ b) $g_2 = \pi + \cos(7x)$ c) $g_4 = \tan(x-2)$

5. Defina, sempre que possível, a função inversa de cada uma das seguintes funções:

a) $g_1 = 3 - e^{x-1}$ b) $g_2 = \ln(2-x)$

6. Considere a função real de variável real $f(x) = 2 + e^{\frac{2}{x-1}}$.

a) Determine o domínio e contradomínio de f;

b) Determine x tal que: $f^{-1}(x) = 0$.

7. Resolva as seguintes equações:

a) $e^x = e^{-2x}$

b) $8^x - 3\times 2^x + 1 = 0$

c) $2\ln x - \ln(x+1) = 3\ln 2$