3.4- Primitivação de funções racionais.

Função racional é uma razão de polinómios na mesma variável, ou seja $\frac{f(x)}{g(x)}$, onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções polinomiais.

Uma função racional diz-se *própria* se o grau do polinómio do denominador é maior do que o grau do polinómio do numerador. Caso contrário, diz-se *imprópria*.

Toda a função racional imprópria pode ser escrita como a soma de um polinómio e de uma função racional própria, $\frac{f(x)}{g(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{g(x)}$, onde $Q(x)$ designa o quociente e $R(x)$ designa resto da divisão polinomial.

Exemplo:

$$\frac{x^3+2x^2+1}{x^3-x} = 1 + \frac{2x^2+x+1}{x^3-x}$$, dado que

$$\begin{array}{l|l} x^3+2x^2+1 & x^3-x \\ \hline \underline{-x^3+x} & 1 \\ 2x^2+x+1 & \end{array}$$

Chama-se fração simples a uma função racional própria do tipo $\frac{A}{(x-a)^k}$, $a, A \in R$, $k \in N$.

Sendo $\frac{R(x)}{P(x)}$ uma função racional própria, fatorizando o polinómio do denominador $P(x)$, obtemos fatores da forma $(x-a)^\alpha$ correspondentes a raízes reais a de multiplicidade α e/ou fatores da forma $\left[(x-p)^2+q^2\right]^\beta$ correspondentes a raízes complexas $p \pm iq$ de multiplicidade β.

No caso dos fatores $(x-a)^\alpha$ correspondentes a raízes reais, podemos escrever a função racional própria $\frac{R(x)}{P(x)}$ como soma de frações simples, em que cada fator $(x-a)^{\alpha}$ dará origem à soma das α frações simples

$$\frac{A_1}{(x-a)^{\alpha}}+\frac{A_2}{(x-a)^{\alpha-1}}+\ldots+\frac{A_{\alpha}}{(x-a)},$$

onde $A_1, A_2, \ldots, A_{\alpha}$ são constantes reais a determinar. Assim, a primitiva da função racional própria $\frac{R(x)}{P(x)}$, resume-se então à soma de primitivas da forma

$$\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx=\begin{cases} A\dfrac{(x-a)^{-k+1}}{-k+1}, & se \quad k>1, \\ A\ln|x-a|, & se \quad k=1. \end{cases}$$

No caso dos fatores $\left[(x-p)^2+q^2\right]^{\beta}$ correspondentes a raízes complexas $p \pm iq$, podemos escrever a função racional própria $\frac{R(x)}{P(x)}$ como soma de frações, em que cada fator $\left[(x-p)^2+q^2\right]^{\beta}$ dará origem à soma das β frações

$$\frac{P_1x+Q_1}{\left[(x-p)^2+q^2\right]^{\beta}}+\frac{P_2x+Q_2}{\left[(x-p)^2+q^2\right]^{\beta-1}}+\ldots+\frac{P_{\beta}x+Q_{\beta}}{x-p)^2+q^2},$$

onde $P_1, Q_1, P_2, Q_2, \ldots, P_{\beta}, Q_{\beta},$ são constantes reais a determinar.

Exemplos:

1. $$\int \frac{x^3+2x^2+1}{x^3-x}\,dx=\int\left(1+\frac{2x^2+x+1}{x^3-x}\right)dx=\int 1dx+\int\frac{2x^2+x+1}{x^3-x}\,dx=x+\int\frac{2x^2+x+1}{x\left(x^2-1\right)}\,dx=$$

$$=x+\int\frac{2x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}\,dx=(*)$$

$$\frac{2x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+1}\Rightarrow 2x^2+x+1=A\left(x^2-1\right)+B\left(x^2+x\right)+C\left(x^2-x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x^2+x+1=(A+B+C)x^2+(B-C)x-A \Rightarrow \begin{cases} A+B+C=2 \\ B-C=1 \\ -A=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ A=-1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} B+C=3 \\ \underline{B-C=1} \\ 2B=4 \Rightarrow B=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} --- \\ 2-C=1 \Rightarrow C=1 \\ --- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=-1 \\ B=2 \\ C=1 \end{cases}$$

$$(*)=x+\int \frac{-1}{x}+\frac{2}{x-1}+\frac{1}{x+1}\,dx = x-\ln|x|+2\ln|x-2|+\ln|x+1|+c\,.$$

2. $$\int \frac{x^2+10x+5}{x^2(3x^2-5)}\,dx=\frac{1}{3}\int \frac{x^2+10x+5}{x^2\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}\,dx=(*)$$

$$\frac{x^2+10x+5}{x^2\left(x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\left(x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}=\frac{A_1}{x^2}+\frac{A_2}{x}+\frac{B}{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}+\frac{C}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+10x+5=A_1\left(x^2-\tfrac{5}{3}\right)+A_2x\left(x^2-\tfrac{5}{3}\right)+Bx^2\left(x+\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)+Cx^2\left(x-\sqrt{\tfrac{5}{3}}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+10x+5=(A_2+B+C)x^3+\left(A_1+\sqrt{\tfrac{5}{3}}B-\sqrt{\tfrac{5}{3}}C\right)x^2-\tfrac{5}{3}A_2x-\tfrac{5}{3}A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2+B+C=0 \\ A_1+\sqrt{\frac{5}{3}}B-\sqrt{\frac{5}{3}}C=1 \\ -\frac{5}{3}A_2=10 \\ -\frac{5}{3}A_1=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ A_2=-6 \\ A_1=-3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=6 \\ \sqrt{\frac{5}{3}}B-\sqrt{\frac{5}{3}}C=4 \\ --- \\ --- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B+C=6 \\ \underline{B-C=4\sqrt{\frac{3}{5}}} \\ 2B=6+4\sqrt{\frac{3}{5}} \\ \Downarrow \\ B=3+2\sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} C=6-B=3-2\sqrt{\frac{3}{5}} \\ --- \\ --- \\ --- \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1=-3 \\ A_2=-6 \\ B=3+2\sqrt{\frac{3}{5}} \\ C=6-B=3-2\sqrt{\frac{3}{5}} \end{cases}$$

$$(*)=\frac{1}{3}\int\left(\frac{-3}{x^2}+\frac{-6}{x}+\frac{3+2\sqrt{\frac{3}{5}}}{x-\sqrt{\frac{5}{3}}}+\frac{3-2\sqrt{\frac{3}{5}}}{x+\sqrt{\frac{5}{3}}}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{3}\left\{-3.\frac{x^{-1}}{-1}-6\ln|x|+\left(3+2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\ln\left|x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right|+\left(3-2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\ln\left|x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right|\right\}+c=$$

$$=\frac{1}{x}-2\ln|x|+\left(1+\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\ln\left|x-\sqrt{\frac{5}{3}}\right|+\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}\right)\ln\left|x+\sqrt{\frac{5}{3}}\right|+c.$$

3. $\displaystyle\int\frac{x+3}{x(x^2+1)^2}dx=(*)$

$$\frac{x+3}{x(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{P_1x+Q_1}{(x^2+1)^2}+\frac{P_2x+Q_2}{x^2+1}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3=A(x^2+1)^2+(P_1x+Q_1)x+(P_2x+Q_2)x(x^2+1)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3=A(x^4+2x^2+1)+(P_1x^2+Q_1x)+(P_2x^4+P_2x^2+Q_2x^3+Q_2x)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow x+3=(A+P_2)x^4+Q_2x^3+(2A+P_1+P_2)x^2+(Q_1+Q_2)x+A\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+P_2=0\\Q_2=0\\2A+P_1+P_2=0\\Q_1+Q_2=1\\A=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=3\\P_1=-3\\Q_1=1\\P_2=-3\\Q_2=0\end{cases}$$

$$(*)=\int\left(\frac{3}{x}+\frac{-3x+1}{(x^2+1)^2}+\frac{-3x}{x^2+1}\right)dx=\int\frac{3}{x}dx+\int\frac{-3x+1}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{-3x}{x^2+1}dx=$$

$$=3\int\frac{1}{x}dx-3\int\frac{x}{(x^2+1)^2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx-3\int\frac{x}{x^2+1}dx=$$

$$=3\ln|x|-\frac{3}{2}\int 2x(x^2+1)^{-2}dx+\int\frac{1}{(x^2+1)^2}dx-\frac{3}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx=$$

$$= 3\ln|x| + \frac{3}{2}(x^2+1)^{-1} + \int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| = (**)$$

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \frac{1+x^2-x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \int \left[\frac{1+x^2}{(x^2+1)^2} + \frac{-x^2}{(x^2+1)^2}\right]dx =$$

$$= \int \frac{1}{x^2+1}\,dx - \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx = \arctan x - \int \frac{2x}{(x^2+1)^2}\cdot\frac{x}{2}\,dx =$$

$$= \arctan x - \int 2x(x^2+1)^{-2}\cdot\frac{x}{2}\,dx \underset{\text{por partes}}{\overset{\downarrow}{=}} \arctan x - \left\{-(x^2+1)^{-1}\cdot\frac{x}{2} - \int\left(-(x^2+1)^{-1}\cdot\frac{1}{2}\right)dx\right\} =$$

$$\arctan x + (x^2+1)^{-1}\cdot\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\int\frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + \frac{x}{2}(x^2+1)^{-1} - \frac{1}{2}\arctan x + c =$$

$$= \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2}(x^2+1)^{-1} + c$$

$$(**) = 3\ln|x| + \frac{3}{2}(x^2+1)^{-1} + \frac{1}{2}\arctan x + \frac{x}{2}(x^2+1)^{-1} - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c =$$

$$= 3\ln|x| + \frac{3+x}{2}(x^2+1)^{-1} + \frac{1}{2}\arctan x - \frac{3}{2}\ln\left|x^2+1\right| + c\,.$$

4. $$\int \frac{x^2+10x+5}{x^2\left(x^2+\frac{5}{3}\right)}\,dx = (*)$$

$$\frac{x^2+10x+5}{x^2\left(x^2+\frac{5}{3}\right)} = \frac{A_1}{x^2} + \frac{A_2}{x} + \frac{Px+Q}{x^2+\frac{5}{3}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+10x+5 = A_1\left(x^2+\frac{5}{3}\right) + A_2x\left(x^2+\frac{5}{3}\right) + (Px+Q)x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+10x+5 = A_1\left(x^2+\frac{5}{3}\right) + A_2\left(x^3+\frac{5}{3}x\right) + Px^3 + Qx^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+10x+5 = (A_2+P)x^3 + (A_1+Q)x^2 + \frac{5}{3}A_2x + \frac{5}{3}A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A_2 + P = 0 \\ A_1 + Q = 1 \\ \frac{5}{3}A_2 = 10 \\ \frac{5}{3}A_1 = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A_1 = 3 \\ A_2 = 6 \\ P = -6 \\ Q = -2 \end{cases}$$

$$(*) = \int \frac{3}{x^2} + \frac{6}{x} + \frac{-6x + -2}{x^2 + \frac{5}{3}}\, dx = 3\int x^{-2} dx + 6\int \frac{1}{x} dx - 6\int \frac{x}{x^2 + \frac{5}{3}} dx - 2\int \frac{1}{x^2 + \frac{5}{3}} dx =$$

$$= -3x^{-1} + 6\ln|x| - 6 \cdot \frac{1}{2}\int \frac{2x}{x^2 + \frac{5}{3}} dx - 2 \cdot \frac{3}{5}\int \frac{1}{\frac{x^2}{5/3} + 1} dx =$$

$$= -3x^{-1} + 6\ln|x| - 3\ln\left|x^2 + \frac{5}{3}\right| - \frac{6}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}\int \frac{\sqrt{3/5}}{\left(\frac{x}{\sqrt{5/3}}\right)^2 + 1} dx =$$

$$= -\frac{3}{x} + 6\ln|x| - 3\ln\left|x^2 + \frac{5}{3}\right| - 2\sqrt{\frac{3}{5}} \arctan \frac{x}{\sqrt{5/3}} + c\,.$$

Exercícios propostos:

- Calcule as primitivas das seguintes frações racionais:

a) $\dfrac{1}{(x-2)(x+2)}$ b) $\dfrac{x^4 + 3x^3}{x^2 - 3x + 2}$ c) $\dfrac{-x^3 - 5x + 9}{(x-1)^3(x+2)}$

d) $\dfrac{x^5 - 3x^3 + 2x^2 + x - 1}{x(x-1)^2}$ e) $\dfrac{x^4}{x^4 - 1}$ f) $\dfrac{x^3 + x - 1}{(x^2 + 4)^2}$

g) $\dfrac{1}{(x-1)^2(x+1)^2}$ h) $\dfrac{-2}{(x^2 - x)(x^2 + 1)}$ i) $\dfrac{1}{x^2(x^2 + 2)}$