Dem.

1. $\operatorname{tr}(A+B) = \sum(a_{ii}+b_{ii}) = \sum a_{ii} + \sum b_{ii} = \operatorname{tr}(A) + \operatorname{tr}(B)$;

2. $\operatorname{tr}(\lambda A) = \sum(\lambda a_{ii}) = \lambda \sum a_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(A)$;

3. $\operatorname{tr}(A^T) = \sum(a_{jj}) = \operatorname{tr}(A)$;

4. $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{n}(c_{ii}) = \sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}) = \sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n} b_{ki}a_{ik}) = \operatorname{tr}(BA)$; $\square$

3.3 Independência Linear de Linhas e Colunas de uma Matriz

3.3.1 Combinação Linear de Linhas e Colunas

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

e sejam,

$$L_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix}, \ldots, \quad L_m = \begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

as m linhas da matriz,

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad\ \ \vdots \quad\ \ \ddots \quad\ \ \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

e, de forma idêntica,

$$C_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \ldots, \quad C_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

as respetivas n colunas,

$$\left[\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{array}{c} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{array}} & \boxed{\begin{array}{c} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{array}} & \begin{array}{c} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{array} & \boxed{\begin{array}{c} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{array}} \end{array}\right]_{m\times n}.$$

Chama-se **Combinação Linear das** m **linhas** a um expressão do tipo,

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m,$$

com $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m \in \mathbb{R}$. Neste caso, diz-se que a matriz linha L é uma combinação linear das m matrizes $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m$.

De forma análoga, chama-se **Combinação Linear das** n **colunas** a um expressão do tipo,

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n,$$

com $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$. Desta forma, diz-se que a matriz coluna C é uma combinação linear das n matrizes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Exemplo 3.3.1 *Sejam* $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$*,*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz linha nula, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$*, é uma combinação linear das linhas* $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$*, pois,*

$$\begin{aligned} 3L_1 - 12L_2 - 4L_3 + 12L_4 &= \begin{bmatrix} 12 & 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 12 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz coluna

$$C = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

é uma combinação linear das colunas $C_1,\ C_2,\ C_3$*, pois,*

$$-2C_1+2C_2+1C_3 \;=\; \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dependendo do contexto e das dimensões das matrizes em causa, considera-se $\vec{0}$ a matriz linha nula ou a matriz coluna nula, isto é,

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n} \qquad \text{ou} \qquad \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

3.3.2 Linhas e Colunas Linearmente Independentes

Definição 3.3.1 *As matrizes linha $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ $\big($resp. as matrizes coluna $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})\big)$ dizem-se linearmente independentes se o forem enquanto vetores de $\mathbb{R}^n$ $\big($resp. $\mathbb{R}^m\big)$, isto é,*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m = \vec{0} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \quad\cdots \\ \lambda_m = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n = \vec{0} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \quad\cdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}.$$

Caso contrário, as linhas (colunas) dizem-se linearmente dependentes.

Exemplo 3.3.2 *Relativamente à matriz do exemplo anterior $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ (ex. 3.3.1),*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

conclui-se que as linhas são linearmente dependentes, uma vez que se tem a seguinte combinação linear nula,

$$3L_1 - 12L_2 - 4L_3 + 12L_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

sem que para isso os parâmetros sejam todos nulos ($\lambda_1 = 3,\ \lambda_2 = -12,\ \lambda_3 = -4,\ \lambda_4 = 12$). *De forma alternativa, pode considerar-se a combinação linear nula,*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \lambda_3 L_3 + \lambda_4 L_4 = \vec{0} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 4\lambda_1 & 0 & 4\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\lambda_2 & -\lambda_2 & \lambda_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3\lambda_3 & 3\lambda_3 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2\lambda_4 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

que resulta num sistema,

$$\begin{cases} 4\lambda_1 - 2\lambda_2 + 3\lambda_3 - 2\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 4\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -\lambda_2 - 2\lambda_2 + \lambda_2 - 2\lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{4}\lambda_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_4 = -\lambda_2 \\ \lambda_3 = \frac{1}{3}\lambda_2 \\ \lambda_1 = -\frac{1}{4}\lambda_2 \end{cases},$$

que admite soluções para além da solução trivial (nula). Mais uma vez, conclui-se que as linhas de A são linearmente dependentes.
Por outro lado, considerando uma combinação linear nula das colunas C_1, C_2, C_3,

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_3 C_3 = \vec{0} \iff$$

$$\begin{bmatrix} 4\lambda_1 \\ -2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \\ -2\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\lambda_2 \\ 3\lambda_2 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_3 \\ \lambda_3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

obtém-se apenas a solução trivial,

$$\begin{cases} 4\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4\lambda_1 + 4\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{cases},$$

pelo que, as colunas da matriz A são linearmente independentes.

Neste exemplo, enquanto que o resultado obtido relativamente às colunas da matriz é claro (as 3 colunas da matriz são linearmente independentes), em relação às linhas sabe-se apenas que as 4 linhas são linearmente dependentes, mas resta a questão de saber qual o número máximo de linhas linearmente independentes e de que forma se podem identificar.

Para esse efeito, tem-se em conta a seguinte definição.

Definição 3.3.2 *Uma matriz $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ é uma* ***Matriz em Escada de Linhas*** *se verifica:*

i) Todas as linhas nulas (formadas inteiramente por zeros) estão por baixo das linhas não nulas;

ii) Por baixo (e na mesma coluna) do primeiro elemento não nulo de uma determinada linha (chamado elemento pivot), todas as entradas são nulas.

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \cdots & a_{1(p-1)} & a_{1p} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & 0 & \boxed{a_{23}} & a_{24} & \cdots & a_{2(p-1)} & a_{2p} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{a_{34}} & \cdots & a_{3(p-1)} & a_{3p} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \boxed{a_{4p}} & \cdots & a_{4n} \\ 0 & & \cdots & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & \cdots & & \cdots & & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} ;$$

O processo que permite calcular a matriz escada de linhas de uma matriz dada, baseia-se na aplicação das seguintes operações elementares sobre linhas[1].

Operações Elementares sobre as linhas de uma Matriz

1. **Troca de linhas;**

2. **Multiplicação de uma linha por uma constante diferente de zero;**

3. **Somar a uma linha uma outra linha multiplicada por uma constante.**

Exemplo 3.3.3 *Voltando novamente à matriz do exemplo anterior $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ (exemplo 3.3.1),*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

[1] Também designado por método de eliminação de Gauss, no contexto dos sistemas de equações lineares

tem-se,

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3-\frac{3}{4}L_1 \\ L_4+\frac{1}{2}L_1}]{\substack{a_{11}=4 \\ L_2+\frac{1}{2}L_1}} \begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+3L_2]{a_{22}=-1}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_4-\frac{1}{3}L_3]{a_{33}=6} \begin{bmatrix} \boxed{4} & 0 & 4 \\ 0 & \boxed{-1} & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{6} \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de onde resulta que há 3 *elementos pivots nas colunas* $1, 2$ *e* 3*, logo as três colunas originais* C_1, C_2 *e* C_3 *são linearmente independentes (colunas básicas) e formam uma base para o espaço colunas de A,*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Por outro lado, as linhas não nulas

$$\left\{ \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \right\}$$

formam uma base para o espaço linhas de A.

Exemplo 3.3.4 *Pretende-se determinar a matriz escada de linhas da matriz,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

com o objetivo de identificar uma base do espaço colunas e uma base para o espaço linhas. Tem-se,

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 6 & 3 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-2L_1 \\ L_3-3L_1}]{a_{11}=1} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \rightleftharpoons L_2]{L_2=0} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

de onde resulta que há 2 *elementos pivots nas colunas* 1 *e* 4*, logo as colunas originais* C_1 *e* C_4 *são linearmente independentes (colunas básicas) e formam uma base para o espaço colunas de A,*

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} \right\}.$$

Por outro lado, as linhas não nulas,

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

formam uma base para o espaço linhas de A.

Nos exemplos anteriores (3.3.3 e 3.3.4) verificou-se, em ambos os casos , que as matrizes têm o mesmo número de linhas e colunas linearmente independentes, respetivamente 3 e 2. De facto, esse é um resultado que se generaliza para o conjunto de todas as matrizes. Isto é, numa matriz qualquer o número máximo de linhas linearmente independentes coincide com o número máximo de colunas linearmente independentes. A esse valor em comum dá-se o nome de característica da matriz.

3.3.3 Característica de uma Matriz

Definição 3.3.3 *Característica de uma matriz é o número máximo de colunas (linhas) linearmente independentes. Notação:* $\mathrm{r}(A)$.

Observação 3.3.1

- *Numa matriz triangular (ou diagonal), a característica da matriz é igual ao número de elementos não nulos da diagonal principal;*
- *Em matrizes rectangulares, a característica da matriz é igual ao número de pivots da respetiva matriz em escada de linhas;*
- *A dependência e independência linear das colunas (linhas) de uma matriz (e por sua vez, a característica) não se altera quando se efectuam sobre esta as seguintes operações elementares.*

Voltando aos exemplos 3.3.3 e 3.3.4, tem-se que a característica destas matrizes é igual 3 e 2 respetivamente, o que corresponde ao valor máximo de linhas ou colunas linearmente independentes.

Podem ainda considerar-se operações elementares sobre colunas que, conjugadas com as operações sobre linhas, definidas anteriormente, se descrevem na seguinte forma.

Operações Elementares sobre Matrizes

1. **Troca de linhas (colunas);**
2. **Multiplicação de uma linha (coluna) por uma constante diferente de zero;**
3. **Somar a uma linha (coluna) uma outra linha (coluna) multiplicada por uma constante.**

Observação 3.3.2 *Operações elementares Vs Matriz elementar.*

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$.

1. *Uma matriz elementar de ordem n,* P_n *é obtida pela execução de uma operação elementar sobre a matriz identidade de ordem n* (I_n)*;*
2. *Uma matriz elementar* P_n *é do tipo 1, tipo 2 ou tipo 3 consoante o tipo da operação elementar que lhe deu origem;*
3. *As matrizes elementares são invertíveis e a inversa de uma matriz elementar é também uma matriz elementar.*
4. *As operações elementares sobre linhas (colunas) são obtidas multiplicando a matriz* $A_{m\times n}$ *à esquerda* $A' = P_{m\times m}A_{m\times n}$ *(respetivamente à direita,* $A' = A_{m\times n}P_{n\times n}$*) pelas matrizes elementares correspondentes.*

Uma vez que, Obs. 3.3.1, a característica de uma matriz não se altera quando se realizam sobre esta operações elementares, diz-se que a matriz original e a final (aquela obtida após essa operações) são equivalentes.

Definição 3.3.4 *Duas matrizes dizem-se equivalentes* $(A \sim B)$ *se uma delas puder ser obtida a partir da outra através de um número finito de operações elementares.*

Tendo também em conta que , numa matriz triangular ou diagonal, é muito simples identificar a característica da matriz (Obs. 3.3.1), basta identificar o número de elementos não nulos da diagonal principal $a_{i,i}$), é útil a definição de um processo que transforme uma matriz dada, numa matriz triangular que lhe seja equivalente. Esse processo designa-se por condensação da matriz[1].

[1]Também designado por método de eliminação de Gauss quando aplicado sobre linhas na resolução de sistemas de equações lineares. Quando a condensação da matriz é total também se designa por método de Gauss-Jordan

3.4 Condensação de uma Matriz

Para além da sua utilidade no identificação da característica de uma matriz, este método é ainda usado para o cálculo da matriz inversa, de determinantes e na resolução de sistemas de equações lineares.

Método da condensação de uma Matriz

Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz não nula.

1. Na coluna 1 escolhe-se o elemento redutor ou pivot $a_{11} \neq 0$ (mesmo que, para esse efeito, seja necessário uma troca de linhas ou colunas prévia);

$$A = \begin{bmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

2. Usando o elemento pivot $\boxed{a_{11}}$, anulam-se todos os restantes elementos da coluna 1 abaixo dessa linha $(a_{i1},\ i>1)$, recorrendo à operação elmentar 3, soma-se a linha $L_i,\ i>1$, com um múltiplo da linha L_1,

$$L_i' = -\frac{a_{i1}}{a_{11}}L_1 + L_i\ ,\ \ \forall\, i = 2, \dots m\ ,$$

$$A \sim A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & \boxed{a_{22}'} & a_{23}' & \cdots & a_{2n}' \\ 0 & a_{32}' & a_{33}' & \cdots & a_{3n}' \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & a_{m2}' & a_{m3}' & \cdots & a_{mn}' \end{bmatrix}_{m\times n} \quad ;$$

3. Repete-se o mesmo procedimento na coluna 2 escolhendo o elemento redutor ou pivot $a_{22}' \neq 0$ (a menos de uma troca de linhas ou colunas prévia);

4. Usando este novo elemento pivot $\boxed{a_{22}'}$, anulam-se todos os restantes elementos da coluna 2 abaixo dessa linha $(a_{i2},\ i>2)$, recorrendo à operação elmentar 3, soma-se a linha $L_i',\ i>2$ com um múltiplo da linha L_2',

$$L_i'' = -\frac{a_{i2}'}{a_{22}'}L_2' + L_i'\ ,\ \ \forall\, i = 3, \dots m\ ,$$

$$A \sim A'' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & a'_{23} & \cdots & a'_{2n} \\ 0 & 0 & \boxed{a''_{33}} & \cdots & a''_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & a''_{m3} & \cdots & a''_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad ;$$

5. O processo termina, quando se esgotarem as linhas ou colunas da matriz ou quando se obtém uma matriz condensada do tipo,

$$A \sim A''' = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} & a_{1p+1} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} & a'_{2p+1} & \cdots & a'_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a''^{\prime}_{pp} & a''^{\prime}_{pp+1} & \cdots & a''^{\prime}_{pn} \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array}\right]_{m\times n} \quad .$$

Como são não nulos os elementos da diagonal principal da matriz triangular superior,

$$A_{p\times p} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2p} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a''^{\prime}_{pp} \end{bmatrix}_{p\times p} \quad .$$

todas as linhas são linearmente independentes, representando também o número máximo de linhas linearmente independentes de A''', uma vez que as restantes são nulas.

Desta forma, a característica de A''' será dada pela dimensão da maior matriz triangular, com elementos principais não nulos, que foi possível obter a partir da matriz A. Isto é, a característica de A é igual a p,

$$\mathrm{r}(A) = p.$$

Exemplo 3.4.1 *Seja*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5 & -7\\ 2 & 3 & -3 & 14\end{bmatrix}_{4\times 4}.$$

Pretende-se identificar a característica da matriz usando o método da condensação. Assim,

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 1 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 1 & 5 & -7\\ 2 & 3 & -3 & 14\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-\frac{1}{2}L_1\\ L_3-\frac{1}{2}L_1\\ L_4-L_1}]{a_{11}=2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -8\\ 0 & 2 & -4 & 12\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_3-\frac{1}{5}L_2\\ L_4-\frac{4}{5}L_2}]{a_{22}=\frac{5}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4\\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{44}{5}\\ 0 & 0 & -\frac{22}{5} & \frac{44}{5}\end{bmatrix} \xrightarrow[L_3+L_4]{a_{33}=\frac{22}{5}} \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 2\\ 0 & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 4\\ 0 & 0 & \frac{22}{5} & -\frac{44}{5}\\ \hline 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Logo, $\mathrm{r}(A)=3<m,n$.

Exemplo 3.4.2 *Seja*

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5\end{bmatrix}_{3\times 5}.$$

Pretende-se identificar a característica da matriz (note-se que a característica é no máximo 3*).*

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 2 & -1 & 2 & 4\\ 3 & 3 & 3 & -3 & 5\end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_2-\frac{3}{2}L_1\\ L_3-\frac{3}{2}L_1}]{a_{11}=2} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ 0 & \frac{3}{2} & 6 & -\frac{15}{2} & \frac{7}{2}\end{bmatrix} \xrightarrow[L_3-3L_2]{a_{22}=\frac{1}{2}}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 3 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 2 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4\end{bmatrix} \xrightarrow[C_3 \leftrightarrows C_5]{\textit{troca de colunas}} \left[\begin{array}{ccc|cc} 2 & 1 & 1 & 3 & -2\\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{5}{2} & 2\\ 0 & 0 & -4 & 0 & 0\end{array}\right]$$

Assim, $\mathrm{r}(A)=3=m<n=5$.

Exemplo 3.4.3 *Seja*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{5\times 3}.$$

Pretende-se identificar a característica da matriz usando o método da condensação (este valor é, no máximo, igual 3*). Assim,*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textit{troca } L_1 \textit{ e } L_3]{a_{11}=a_{21}=0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\substack{L_4-L_1 \\ L_5-L_1}]{a_{11}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\textit{troca } L_2 \textit{ e } L_3]{a_{22}=0} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Tem-se portanto, $\mathrm{r}(A) = 3 = n < m = 5$.

3.5 Sistemas de Equações Lineares

Definição 3.5.1 *Um sistema de m equações lineares com n incógnitas é um conjunto de equações da forma,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \tag{3.5.1}$$

onde os elementos a_{ij}, b_i *são escalares,* $(a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}, \forall\, i = 1,2,\ldots,m, \forall\, j = 1,2,\ldots,n)$ *e* x_j *são as n variáveis do sistema,* $(j = 1,2,\ldots,n)$.

Se considerarmos $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, a matriz dos coeficientes do sistema (3.5.1), $b \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$ a matriz dos termos