4 – Cálculo Integral em *IR*.

4.1- Noção de integral definido. Propriedades fundamentais.

Definição: Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado de R. Uma sucessão de pontos $d=(x_0,x_1,...,x_n)$ tal que $a=x_0<x_1<...<x_n=b$, chama-se **partição** (ou **decomposição**) do intervalo $[a,b]$ de vértices $x_0,x_1,...,x_n$.

Define-se diâmetro ou norma da partição d como sendo $\|d\|=\max\limits_{1\le i\le n}(x_i-x_{i-1})$.

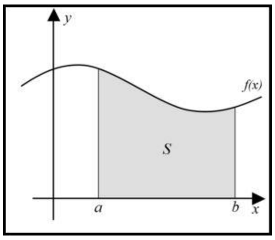
Uma partição q do mesmo intervalo $[a,b]$ diz-se um refinamento da partição d ou que é uma partição mais fina do que a partição d se $d\subseteq q$, ou seja, se $\|d\|\ge\|q\|$.

Definição: Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado de R, $f[a,b]:\to R$ uma função limitada, $d=(x_0,x_1,...,x_n)$ uma partição do intervalo $[a,b]$, e $\xi=(\xi_1,...,\xi_n)$ uma sucessão de pontos tais que $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, $i=1,...,n$.

Chama-se **soma de Riemann** de f sobre $[a,b]$, relativamente à partição d, a $\boxed{S(f,d)=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i-x_{i-1})}$.

De uma forma simplista, diz-se que a soma de Riemann é convergente se existir o limite $\lim\limits_{\|d\|\to 0} S(f,d)=I$. Nesta situação, a função f diz-se integrável (à Riemann) em $[a,b]$ e $\boldsymbol{I=\int_a^b f(x)dx}$ diz-se o **integral** de f em $[a,b]$.

O integral $\int_a^b f(x)dx$ corresponde à área da região plana limitada pelo gráfico da função f, pelo eixo das abcissas e pelas retas $x=a$ e $x=b$ (para *f* positiva, se *f* for negativa a área corresponderá ao simétrico do integral).



Propriedades:
Sendo f e g funções integráveis em $[a,b]$, então

- $\int_a^b k.f(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ (k constante);
- $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$;
- $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$;
- Para $a < c < b$,

  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$;
- $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$.

4.2- Teorema fundamental do cálculo integral.

Teorema: Sendo f contínua em $[a,b]$, então a função $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, dita função integral definido, é derivável em $[a,b]$ e $F'(x) = f(x)$.

Corolário-Fórmula de Barrow: Nas condições do teorema, para F uma primitiva de f em $[a,b]$, então $\boxed{\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)}$.

Exemplos:

1. $\int_1^2 x^2dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 = \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}$.

2. $\int_0^1 k.xdx = k\int_0^1 xdx = \frac{k}{2}\left[x^2\right]_0^1 = \frac{k}{2}(1-0) = \frac{k}{2}$.

3. $\int_1^4 e^x dx = \left[e^x\right]_1^4 = e^4 - e$.

4. $\int_0^{2\pi} \sin x dx = \left[-\cos x\right]_0^{2\pi} = \cos 0 - \cos 2\pi = 0$.

5. $\int_2^3 \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}dx = \int_2^3 x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\int_2^3 2x\left(x^2-1\right)^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(x^2-1\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_2^3 = \left[\sqrt{x^2-1}\right]_2^3 =$

$= \sqrt{8} - \sqrt{3} = 2\sqrt{2} - \sqrt{3}$.

6. $\int_e^{e^2} \frac{1}{x\ln x}dx = \left[\ln\left|\ln x\right|\right]_e^{e^2} = \ln\left|\ln e^2\right| - \ln\left|\ln e\right| = \ln 2 - 0 = \ln 2$.

7. $\int_2^4 \frac{3x^5}{x^3-x}dx = (*)$

$\frac{3x^5}{x^3-x} = 3x^2 + 3 + \frac{3x}{x^3-x}$, dado que

$$
\begin{array}{r|l}
3x^5 & x^3 - x \\
\hline
-3x^5 + 3x^3 & 3x^2 + 3 \\
\cline{1-1}
3x^3 & \\
\cline{1-1}
-3x^3 + 3x & \\
\cline{1-1}
3x &
\end{array}
$$

$(*) = \int_2^4 \left[3x^2 + 3 + \frac{3x}{x^3-x}\right]dx = \left[x^3\right]_2^4 + 3\left[x\right]_2^4 + 3\int_2^4 \frac{x}{x\left(x^2-1\right)}dx =$

$= 64 - 8 + 3(4-2) + 3\int_2^4 \frac{1}{(x-1)(x+1)}dx = (**)$

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}\Rightarrow 1=A(x+1)+B(x-1)\Rightarrow 1=(A+B)x+A-B\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}A+B=0\\A-B=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A=\frac{1}{2}\\B=-\frac{1}{2}\end{cases}$$

$$(**)=62+3\int_2^4\left(\frac{\frac{1}{2}}{x-1}-\frac{\frac{1}{2}}{x+1}\right)dx=62+\frac{3}{2}\left[\ln|x-1|-\ln|x+1|\right]_2^4=62+\frac{3}{2}(\ln 3-\ln 1-\ln 5+\ln 3)=$$

$$=62+\frac{3}{2}(2\ln 3-\ln 5)=62+3\ln 3-\frac{3}{2}\ln 5.$$

4.3- Integração por partes.

Sendo f e g funções de classe C^1 em $[a,b]$, então

$$\boxed{\int_a^b[f'(x).g(x)]dx=[f(x).g(x)]_a^b-\int_a^b[f(x).g'(x)]dx}$$

Exemplos:

1. $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{e}x\ln x\ dx=\left[\frac{x^2}{2}\ln x\right]_{\frac{1}{2}}^{e}-\int_{\frac{1}{2}}^{e}\left(\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\right)dx=\frac{1}{2}\left(e^2\ln e-\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\int_{\frac{1}{2}}^{e}x\ dx=$

$$=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4}\left[x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{e}=\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{8}\ln 2-\frac{1}{4}\left(e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}e^2+\frac{1}{8}\ln 2+\frac{1}{16}.$$

2. $\int_0^1 e^x 2^x dx = \left[e^x 2^x\right]_0^1 - \ln 2\int_0^1 e^x 2^x dx = 2e - 1 - \ln 2\int_0^1 e^x 2^x dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+\ln 2)\int_0^1 e^x 2^x dx = 2e-1 \Leftrightarrow \int_0^1 e^x 2^x dx = \dfrac{2e-1}{1+\ln 2}$.

4.4- Integração por substituição.

Seja f uma função contínua em $[a,b]$, φ uma função de classe C^1 em I tal que $\varphi(I) \subseteq [a,b]$, $\varphi(\alpha) = a$ e $\varphi(\beta) = b$, então, fazendo a mudança de variável $x = \varphi(t)$, temos $\boxed{\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta \left[f(\varphi(t)).\varphi'(t)\right]dt}$.

Exemplos:

1. $\int_0^3 \dfrac{x}{\sqrt{x+1}} dx =$ Mudança de variável: $\sqrt{x+1} = t \Rightarrow x = t^2 - 1 \Rightarrow dx = 2t$

$= \int_1^2 \dfrac{t^2-1}{t} \cdot 2t\, dt = 2\int_1^2 \left(t^2-1\right)dt =$ $x = 0 \Rightarrow t = 1 \wedge x = 3 \Rightarrow t = 2$

$= 2\int_1^2 \left(t^2-1\right)dt = 2\left\{\dfrac{1}{3}\left[t^3\right]_1^2 - \left[t\right]_1^2\right\} = 2\left\{\dfrac{1}{3}(8-1) - (2-1)\right\} = \dfrac{8}{3}$.

2. $\int_2^3 \dfrac{2^x}{2^x - 2^{-x}} dx$

Mudança de variável: $2^x = t \Rightarrow x = \log_2 t \Rightarrow \varphi'(t) = \dfrac{1}{t\ln 2}$.

$x = 2 \Rightarrow t = 4 \wedge x = 3 \Rightarrow t = 8$

$$\int_2^3 \frac{2^x}{2^x-2^{-x}}dx = \int_4^8 \frac{t}{t-t^{-1}}\cdot\frac{1}{t\ln 2}dt = \frac{1}{\ln 2}\int_4^8 \frac{1}{t-t^{-1}}dt = \frac{1}{\ln 2}\int_4^8 \frac{t}{t^2-1}dt = \frac{1}{\ln 2}\int_4^8 \frac{t}{(t-1)(t+1)}dt = (*)$$

$$\frac{t}{(t-1)(t+1)} = \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t+1} \Rightarrow t = A(t+1)+B(t-1) \Rightarrow t = (A+B)t + A - B \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A+B=1 \\ A-B=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$(*) = \frac{1}{2\ln 2}\int_4^8\left(\frac{1}{t-1}+\frac{1}{t+1}\right)dt = \frac{1}{2\ln 2}\left\{\left[\ln|t-1|\right]_4^8 + \left[\ln|t+1|\right]_4^8\right\} =$$

$$= \frac{1}{2\ln 2}\left(\ln 7 - \ln 3 - \ln 9 + \ln 5\right) = \frac{1}{2\ln 2}\ln\tfrac{21}{5}\,.$$

Exercícios propostos:

1. Calcule os seguintes integrais definidos:

a) $\int_2^3 \left(x^2-2\right)dx$ b) $\int_0^1 x\,e^{x^2}\,dx$ c) $\int_0^2 x\sqrt{4-x^2}\,dx$

d) $\int_{-2}^5 |x-3|\,dx$ e) $\int_1^e \ln x\,dx$ f) $\int_1^e \frac{\ln x}{x^3}\,dx$

g) $\int_0^{15} \frac{x}{\left(1+x^2\right)^{\frac{3}{4}}}\,dx$ h) $\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} x\,\mathrm{arcsen}\left(x^2\right)dx$ i) $\int_0^{2\pi} \cos^4 x\,dx$

j) $\int_1^4 \frac{x^5-x}{3x^3}\,dx$ k) $\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{4x^2+9}}\,dx$ l) $\int_6^9 \left(\sqrt{2x}+\sqrt{\tfrac{1}{2}x}\right)dx$

m) $\int_{-1}^{0} x^2\left(5x^3+1\right)^4 dx$ n) $\int_{1}^{2} x^{-2}\operatorname{sen}\frac{1}{x}\, dx$ o) $\int_{-5}^{-3} \frac{x^4+x-3}{x^3}\, dx$

2. Calcule os seguintes integrais, usando as substituições indicadas:

a) $\int_{-1}^{1} \frac{2}{e^x+1}\, dx$; $x=-\ln t$.

b) $\int_{0}^{1} x\left(3x^2-1\right)^5 dx$; $3x^2-1=t$.

c) $\int_{0}^{3} \frac{x}{\sqrt{x+1}}\, dx$; $\sqrt{x+1}=t$.