2.11 - Estudo completo de funções.

1. Domínio.
2. Paridade.
3. Intervalos de monotonia, extremos locais (utilizando a derivada de primeira ordem).
4. Sentido da concavidade do gráfico e pontos de inflexão (utilizando a derivada de segunda ordem).
5. Assimptotas.
6. Intersecção com os eixos coordenados
$$\begin{cases} x: f(x)=0 & \text{intersecção com eixo dos } xx \\ y: f(0)=y & \text{intersecção com eixo dos } yy \end{cases}$$
7. Esboço do gráfico.

Exemplos:

1. $f_1(x)=\dfrac{x}{\ln x}$

1) $D_{f_1}=\{x\in R:\ln x\neq 0\wedge x>0\}=\{x\in R: x\neq 1\wedge x>0\}=]0,1[\cup]1,+\infty[$

2) $f_1(-x)=\dfrac{-x}{\ln(-x)}$ não está definida, pelo que f_1 não é par nem ímpar.

3) $f_1'(x)=\dfrac{\ln x - x.\frac{1}{x}}{\ln^2 x}=\dfrac{\ln x-1}{\ln^2 x}$

$f_1'(x)=0\Leftrightarrow \ln x-1=0\Leftrightarrow x=e$

x		1		e	
$f_1'(x)$	-	n.d.	-	0	+
$f_1(x)$	$\downarrow$	n.d.	$\downarrow$	m	$\uparrow$

$$f_1(e) = e\,, \qquad m \mapsto (e,e)$$

4) $$f_1''(x) = \frac{\frac{1}{x}.\ln^2 x - (\ln x - 1).2.\ln x.\frac{1}{x}}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\left(\ln^2 x - 2\ln^2 x + 2\ln x\right)}{\ln^4 x} = \frac{\frac{1}{x}\left(2\ln x - \ln^2 x\right)}{\ln^4 x}$$

$$f_1''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\ln x - \ln^2 x = 0 \Leftrightarrow \ln x(2 - \ln x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = 2\ (\ln x \neq 0) \Leftrightarrow x = e^2$$

x		1		e^2	
$f_1''(x)$	-	n.d.	+	0	-
$f_1(x)$	$\cap$	n.d.	$\cup$	P.I.	$\cap$

$$f_1(e^2) = \frac{e^2}{2}\,, \quad P.I. \mapsto \left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$$

5) <u>Assimptotas</u>:

Verticais: $\lim\limits_{x\to 1^\pm} f_1(x) = \lim\limits_{x\to 1^\pm} \frac{x}{\ln x} = \pm\infty \quad \Rightarrow \boxed{x=1}$ assimptota.

<u>Não</u> verticais: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0\,, \quad b = \lim_{x\to+\infty}\left[f_1(x) - mx\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} \overset{R.C.}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty\,.$$

$m^* = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\ln x}$ não tem significado.

Portanto, não existem assimptotas não verticais.

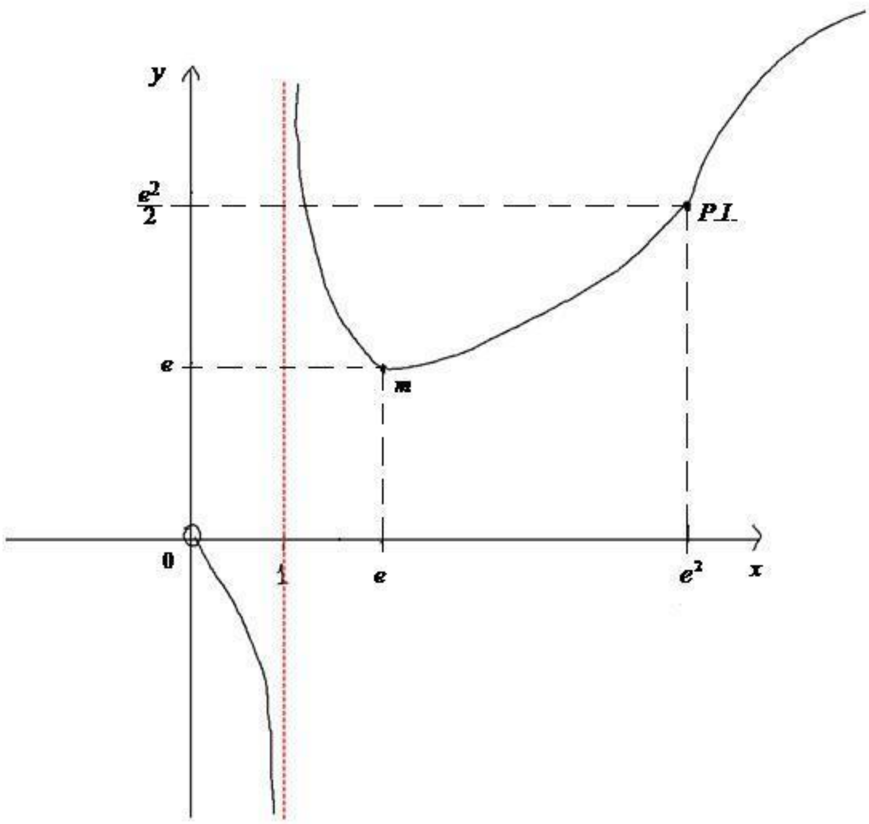
6) Intersecção com os eixos coordenados:

$x:\ f_1(x)=0 \Rightarrow \dfrac{x}{\ln x}=0$ $\leftarrow$condição impossível em D_{f_1}.

$y:\ f_1(0)=y$ $f_1(0)$ não está definida.

Ou seja, não há intersecção do gráfico de f_1 com qualquer dos eixos.

7) Gráfico:



$$\lim_{x\to 0^+} f_1(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{\ln x}=0.$$

2. $g(x) = x + \sqrt{x^2 - 1}$

1) $D_g = \{x \in \mathbb{R} : x^2 - 1 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -1 \vee x \geq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{]-1,1[\}$.

2) $g(-x) = -x + \sqrt{x^2-1} \neq g(x) ; -g(x)$, i.e., g não é par nem ímpar.

3) $g'(x) = 1 + \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{x^2-1} + x}{\sqrt{x^2-1}} = 0 \underset{x \neq -1,1}{\Leftrightarrow} \sqrt{x^2-1} = -x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^2$ impossível,

ou seja $g'(x) \neq 0$, $x \in \mathbb{R}\setminus\{[-1,1]\}$.

se $\underline{x < -1}$, $g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} < 0 \rightarrow g$ é decrescente.

se $\underline{x > 1}$, $g'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} > 0 \rightarrow g$ é crescente.

4) $g''(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right)' = \frac{\sqrt{x^2-1} - x \cdot \frac{1}{2}(x^2-1)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x}{x^2-1} =$

$= \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{\frac{x^2-1-x^2}{\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1} = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0,\ x \in \mathbb{R}\setminus\{[-1,1]\} \longrightarrow \cap$

5) Assimptotas :

Verticais :

Não há assimptotas verticais.

Não Verticais : $y = mx + b$

$$m = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\right) = \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}\right) =$$

$$= \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}\right) = 2$$

$$b = \lim_{x \to +\infty} \left[g(x) - mx\right] = \lim_{x \to +\infty} \left(x + \sqrt{x^2-1} - 2x\right) = \lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{\cancel{x^2} - 1 - \cancel{x^2}}{\sqrt{x^2-1} + x} = 0. \quad \boxed{y = 2x} \text{ Assimptota}$$

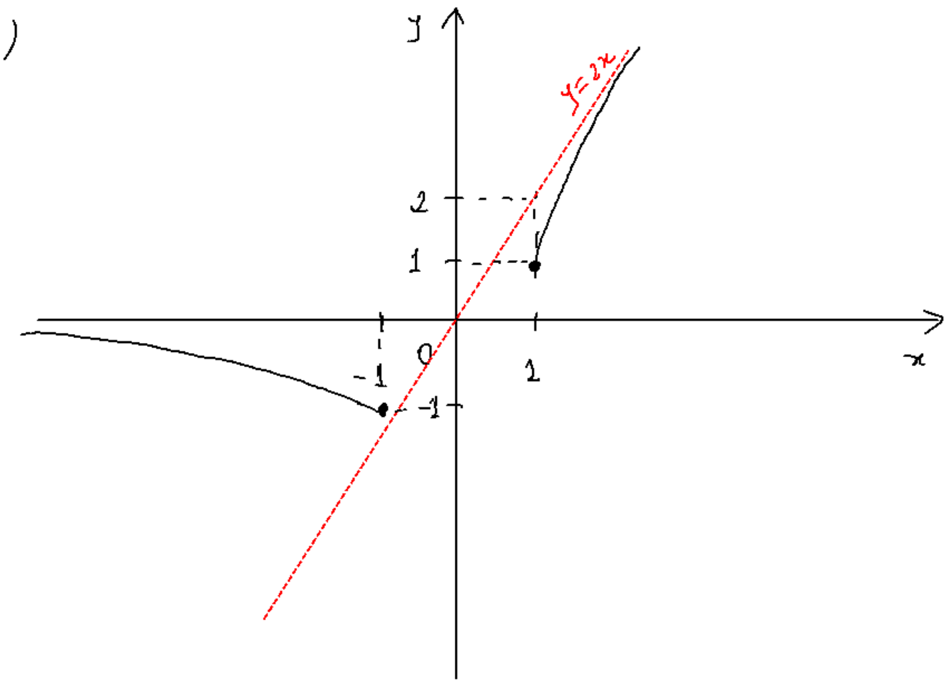
$$b' = \lim_{x \to -\infty} \left[g(x) - mx\right] = \lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{x^2-1} - x\right) = +\infty.$$

6) $\begin{cases} x : g(x) = 0 \\ y : g(0) = y \end{cases}$ $\quad 0 \notin D_g$

$g(x) = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2-1} = 0$ impossível.

Ou seja, não há intersecção c/ eixos.

7)



$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}-x} = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) = +\infty$$

3. $f(x) = x.e^{\frac{1}{x}}$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 0\} = \mathbb{R}\setminus\{0\}$

2) $f(-x) = -x\, e^{-\frac{1}{x}} \neq f(x);\ -f(x)$, isto é, f não é par nem ímpar.

3) $f'(x) = e^{\frac{1}{x}} + x\left(-\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right).$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 1-\frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x} = 0 \Leftrightarrow x = 1.$

x		0		1	
$f'(x)$	+	ND	−	0	+
$f(x)$	↗	ND	↘	m	↗

$f(1) = e \qquad m \to (1, e)$

4) $f''(x) = \left(e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right)' = -\frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\left(1-\frac{1}{x}\right) + e^{\frac{1}{x}} \frac{1}{x^2} =$

$= e^{\frac{1}{x}}\left(-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x^3} e^{\frac{1}{x}} \neq 0, \quad \forall_x$

$x > 0 \Rightarrow f''(x) > 0 \rightarrow \cup$

$x < 0 \Rightarrow f''(x) < 0 \rightarrow \cap$

5) Assimptotas :

Verticais: $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} x \cdot e^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to+\infty} \frac{e^y}{y} = +\infty.$

$y = \frac{1}{x}$

Portanto, $\underline{x = 0}$ é uma assimptota.

$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} x e^{\frac{1}{x}} = 0$

Não verticais: $y = mx + b$

$m = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} e^{\frac{1}{x}} = 1; \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} \left[f(x) - mx\right] =$

$= \lim_{x\to\pm\infty} \left[x e^{\frac{1}{x}} - x\right] = \lim_{x\to\pm\infty} x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{y\to 0} \frac{e^y - 1}{y} = 1$

$y = \frac{1}{x}$

$\boxed{y = x + 1}$ Assimptota.

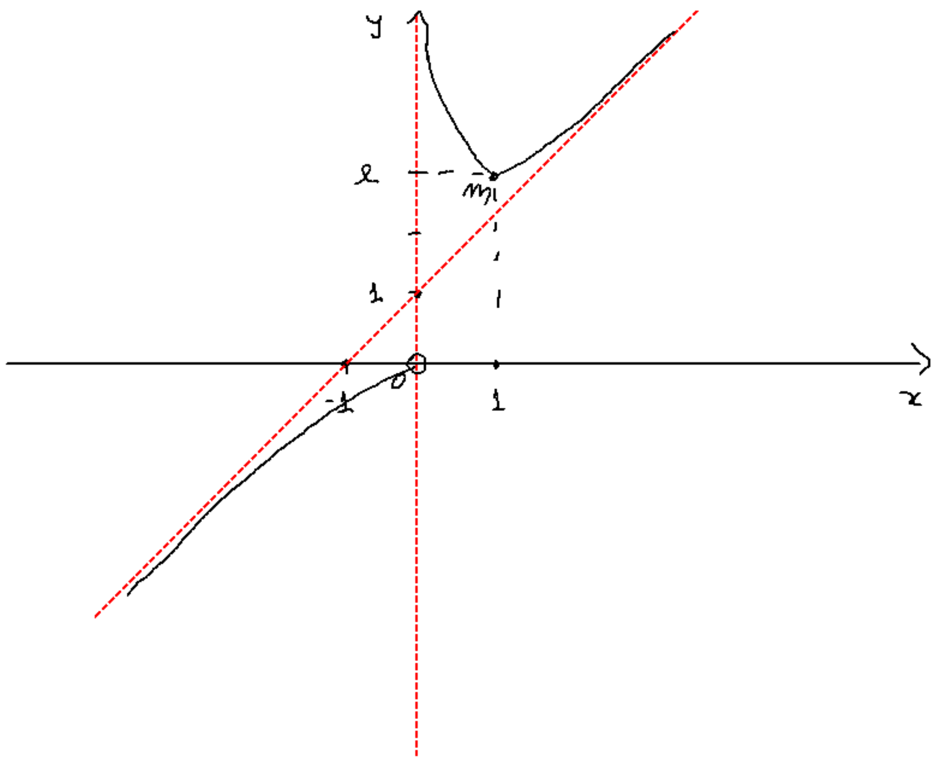
6) Intersecção c/ eixos :

x : $f(x) = 0 \Rightarrow x\,e^{\frac{1}{x}} = 0 \Rightarrow x = 0$. Mas $0 \notin D_f$!

y : $f(0) = y$

$\uparrow$ não existe, pq. $0 \notin D_f$. Portanto, não há intersecção do gráfico de f com os eixos coordenados.

7)



$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} x\,e^{\frac{1}{x}} = \pm\infty$$

Exercícios propostos:

- Faça o estudo completo das seguintes funções:

a) $f_1(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$

b) $f_2(x) = e^{-x^2}$

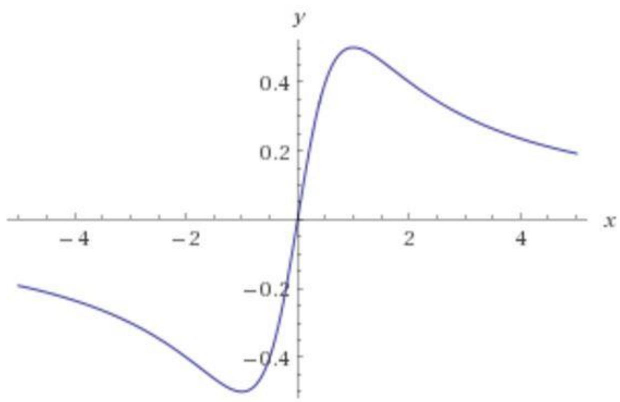
c) $f_3(x) = x + \sin x$

d) $f_4(x) = 2\cos(\frac{\pi}{3}x) - 3$

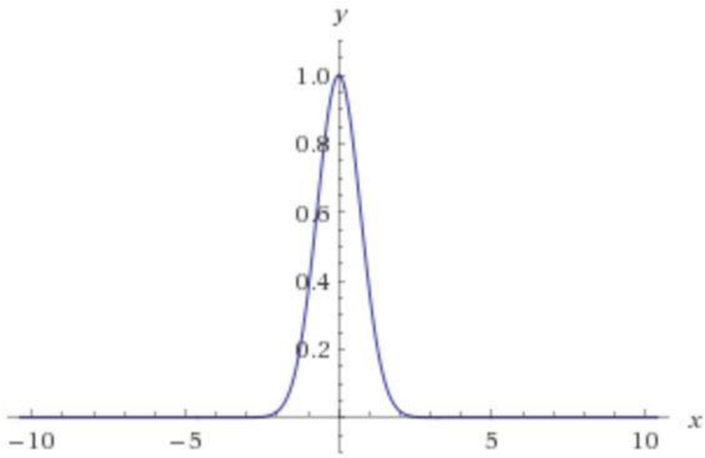
e) $f_5(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x-2}}$

Soluções:

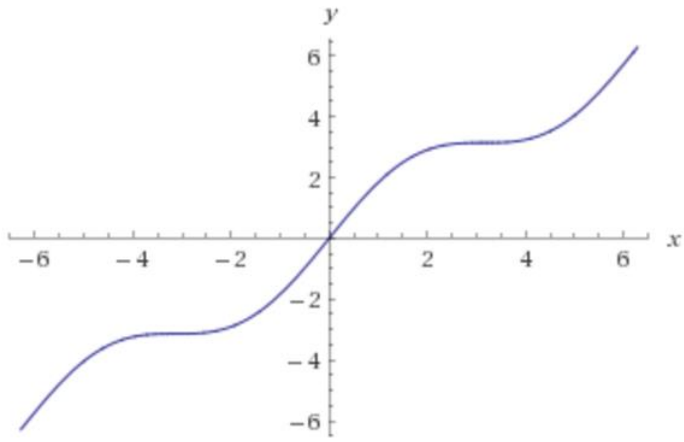
a)



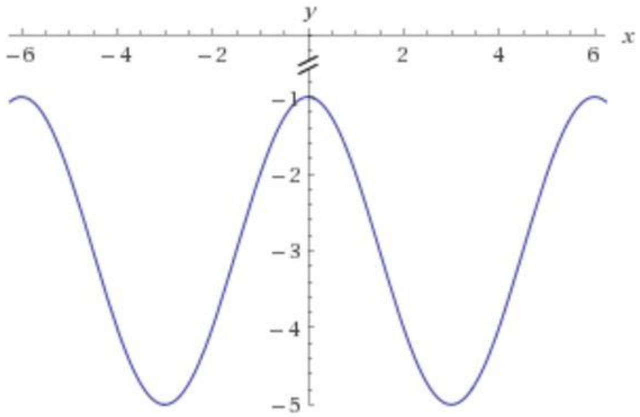
b)



c)



d)



e)