

1.4 - Limites de funções reais de variável real.

Definição: Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a um ponto de acumulação de D , isto é, $a \in D^*$. O número real L diz-se o limite de f quando x tende para a , por valores diferentes de a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo: $f(x) = 2x - 1$ tem limite 5, quando x tende para 3.

Seja $\varepsilon > 0$.

$$|f(x) - L| = |2x - 1 - 5| = |2x - 6| = 2|x - 3| < 2\delta = \varepsilon, \text{ para } \delta = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Teorema (unicidade do limite): Sendo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D^*$, se existir $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$, então o limite é único.

Teorema (operações com limite): Sendo $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D_1^* \cap D_2^*$, com $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então

$$(i) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M ;$$

$$(ii) \quad \lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M ;$$

$$(iii) \quad \lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{L}{M} \quad (M \neq 0).$$

1.4.1 - Indeterminações: $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \times \infty, 0^0, \infty^0, 1^\infty$

Exemplos:

$$1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 - 3x^2 + x}{2x^2 + 3x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^3 - 3x + 1}{2x + 3} = \frac{0 - 0 + 1}{0 + 3} = \frac{1}{3}.$$

$$2. \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^4 - x^3 - 1}{x^6 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} - \frac{1}{x^6}}{1 - \frac{1}{x^6}} = \frac{0 - 0 - 0}{1 - 0} = \frac{0}{1} = 0.$$

$$3. \lim_{x \rightarrow 9} \frac{\sqrt{x} - 3}{x - 9} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{x - 9}{(x - 9)(\sqrt{x} + 3)} = \lim_{x \rightarrow 9} \frac{1}{\sqrt{x} + 3} = \frac{1}{6}.$$

$$4. \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{x^2 - 4}{x} \times \frac{3x + 1}{(x - 2)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x + 2)(x - 2)(3x + 1)}{x(x - 2)^2} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \left[\frac{(x + 2)(3x + 1)}{x(x - 2)} \right] = \frac{7.4}{2.0} = \infty$$

$$5. \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2 + x) - (x^2 + 1)}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - 1}{\sqrt{x^2 + x} + \sqrt{x^2 + 1}} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{1}{x}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x}} + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = \frac{1 - 0}{\sqrt{1 + 0} + \sqrt{1 + 0}} = \frac{1}{2}.$$

1.4.2 - Limites notáveis:

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{e^x - 1} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(x+1)} = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^p}{e^x} = 0 \quad (p \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{k}{x}\right)^x = e^k \quad (k \in \mathbb{R})$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$

1.4.3 - Limites laterais

Definição: Sendo $f:]a, c[\rightarrow \mathbb{R}$, o número real L diz-se o limite de f quando x tende para a , por valores à direita de a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$, sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: a < x < a + \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição: Sendo $f:]c, a[\rightarrow \mathbb{R}$, o número real L diz-se o limite de f quando x tende para a , por valores à esquerda de a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$, sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: a - \delta < x < a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Teorema: Sendo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D^*$, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ sse $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$ e

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

Exemplos:

$$1. \quad f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0.$$

$$\text{Portanto, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

$$2. \quad g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} 2 = 2.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow -1} g(x)$ não existe.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} 2 = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(-\frac{1}{x}\right) = -1.$$

Logo, $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ também não existe.

1.4.4 - Generalização do conceito de limite (limites no infinito e limites infinitos).

Definição: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com D um subconjunto de \mathbb{R} não majorado. Diz-se que f tem limite L , quando x tende para $+\infty$, e escreve-se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in D : x \geq a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição: Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, com D um subconjunto de \mathbb{R} não minorado. Diz-se que f tem limite L , quando x tende para $-\infty$, e escreve-se $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists a \in D : x \leq a \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, dado que para $\varepsilon > 0$,

$$x \geq a \Rightarrow \frac{1}{x} \leq \frac{1}{a} = \varepsilon, \text{ para } a = \frac{1}{\varepsilon}.$$

Definição: Sendo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D^*$, diz-se que f tem limite $+\infty$, quando x tende para a , por valores diferentes de a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$, sse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0 : \forall x \in D \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) > n.$$

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} = +\infty$, dado que para $n \in \mathbb{N}$,

$$|x| < \delta \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{\delta} = n, \text{ para } \delta = \frac{1}{n}.$$

Definição: Sendo $f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in D^*$, diz-se que f tem limite $-\infty$, quando x tende para a , por valores diferentes de a , e escreve-se $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$, sse

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \delta > 0: \forall x \in D \setminus \{a\}, |x - a| < \delta \Rightarrow f(x) < -n.$$

Exemplo: $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{-1}{(x-5)^2} = -\infty$, dado que para $n \in \mathbb{N}$,

$$|x - 5| < \delta \Rightarrow \frac{1}{|x-5|} > \frac{1}{\delta} \Rightarrow \frac{1}{(x-5)^2} > \frac{1}{\delta^2} \Rightarrow \frac{-1}{(x-5)^2} < -\frac{1}{\delta^2} = -n, \text{ para } \delta = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Teorema: Sendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = L$, $L \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, então

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = \begin{cases} +\infty, & \text{se } L > 0; \\ -\infty, & \text{se } L < 0; \end{cases}$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \begin{cases} +\infty, & \text{se } L > 0; \\ -\infty, & \text{se } L < 0; \end{cases}$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \left[\frac{g(x)}{f(x)} \right] = 0$.

Teorema: Sendo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty = \lim_{x \rightarrow a} g(x)$, então

- (i) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = +\infty$;
- (ii) $\lim_{x \rightarrow a} [-f(x) - g(x)] = -\infty$;
- (iii) $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = +\infty$;
- (iv) $\lim_{x \rightarrow a} \{[-f(x)] \cdot g(x)\} = -\infty$.

1.5 - Continuidade de funções reais de variável real.

Definição: Sendo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a um ponto de D , diz-se que f é contínua em a sse $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$, ou seja sse

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0: \forall x \in D, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Diz-se que f é descontínua no ponto a se não for contínua em a , o que acontece quando não existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ou, existindo o limite, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq f(a)$.

Diz-se que f é contínua em D quando for contínua em todos os pontos de D .

Observação: A continuidade define-se apenas para pontos do domínio da função, isto é, só faz sentido analisar a continuidade quando $a \in D$ (o que não acontece na definição de limite).

Exemplos:

1. $f_1(x) = 3x + 2$ é contínua em $x = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 2} (3x + 2) = 8 = f_1(2)$$

2. $f_2(x) = \frac{1}{x}$ é contínua em $D_{f_2} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

3. $f_3(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x - 4}$ é contínua em D_{f_3} ,

$$\begin{aligned} D_{f_3} &= \{x \in \mathbb{R} : x - 4 \neq 0 \wedge x^2 - 9 \geq 0\} = \{x \in \mathbb{R} : x \neq 4 \wedge (x \leq -3 \vee x \geq 3)\} = \\ &=]-\infty, -3] \cup [3, 4[\cup]4, +\infty[\end{aligned}$$

4. $f_4(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \geq 0, \\ 0, & \text{se } x < 0. \end{cases}$ não é contínua em $x = 0$.

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0^+} f_4(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^-} f_4(x) = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} f_4(x) \text{ não existe, pelo que } f_4(x) \text{ não}$$

é contínua em $x = 0$.

5. A função de $g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > -2, \\ 1 & \text{se } x = -2, \\ x + 5 & \text{se } x < -2, \end{cases}$ não é contínua no ponto $x = -2$.

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -2^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^+} (x^2 - 1) = 3 \\ \lim_{x \rightarrow -2^-} g(x) &= \lim_{x \rightarrow -2^-} (x + 5) = 3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 3$$

Mas $g(-2) = 1 \neq 3 = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) = 3$, logo g não é contínua em $x = -2$.

Teorema: Sendo $f, g : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas em $a \in D$, então também são contínuas em a :

- (i) $f \pm g$;
- (ii) $f \cdot g$;
- (iii) $\frac{f}{g}$, $g(a) \neq 0$;
- (iv) f^p , $p \in \mathbb{N}$.

Teorema (continuidade da composta): Sendo $f : D_1 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $a \in D_1$ e $g : D_2 \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $b = f(a) \in D_2$, então $g \circ f$ é contínua em a , sendo que $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(a)$.

Definição: Sendo $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, a um ponto de D , diz-se que

- (i) f é contínua à direita de a sse $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$;
- (ii) f é contínua à esquerda de a sse $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$.

Teorema: $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $a \in D$ sse é contínua simultaneamente à direita e à esquerda de a .

Exemplo: Pretende-se estudar a continuidade da função definida por

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x > 2, \\ 3 & \text{se } x = 2, \\ 7 & \text{se } x < 2. \end{cases}$$

Se $x < 2$: $g(x) = 7$ é contínua, pois trata-se de uma função constante.

Se $x > 2$: $g(x) = x^2 - 1$ é contínua, pois trata-se de uma função polinomial.

Se $x = 2$: $\lim_{x \rightarrow 2^-} g(x) = 7 \neq g(2)$, ou seja, g não é contínua à esquerda em $x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 2^+} (x^2 - 1) = 3 = g(2)$, isto é, g é contínua à direita em $x = 2$.

$\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ não existe, logo g não é contínua em $x = 2$.

2.5.1 - Teorema de Bolzano

Teorema (do valor intermédio de Bolzano-Cauchy): Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a, b]$, com $f(a) \neq f(b)$. Então f assume todos os valores intermédios entre $f(a)$ e $f(b)$.

Corolário: Nas condições da hipótese do teorema, se $f(a) \cdot f(b) < 0$, então $\exists c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Exemplos:

1. A equação $\sqrt[5]{x^2 - 1} = -x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0, 1[$.

$$\sqrt[5]{x^2 - 1} = -x \Leftrightarrow \underbrace{\sqrt[5]{x^2 - 1} + x}_{f(x)} = 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$$

A função f é contínua em R , pois trata-se da composição de funções contínuas em R . Em particular, f é contínua no intervalo $[0, 1]$.

$$f(0) = \sqrt[5]{-1} + 0 = -1, \quad f(1) = 0 + 1 = 1. \text{ Portanto, } f(0) \cdot f(1) < 0.$$

Ou seja, f está nas condições da hipótese do Corolário do Teorema de Bolzano.

Aplicando o Corolário referido, $\exists c \in]0, 1[: f(c) = 0 \Rightarrow \sqrt[5]{c^2 - 1} = -c$.

2. A função $f(x) = \arcsin\left(\frac{1}{2}x - 3\right)$ tem pelo menos um zero no intervalo $]5, 7[$.

$$f(5) = \arcsin\left(\frac{5}{2} - 3\right) = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \quad f(7) = \arcsin\left(\frac{7}{2} - 3\right) = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6},$$

pelo que $f(5) \cdot f(7) < 0$.

Por outro lado, f é contínua no intervalo $[5, 7]$.

Portanto, f está nas condições da hipótese do Corolário do Teorema de Bolzano, logo $\exists c \in]5, 7[: f(c) = 0$.

3. A equação $\tan x = 1 - x$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]0,1[$.

$$\tan x = 1 - x \Leftrightarrow \underbrace{\tan x + x - 1}_{g(x)} = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0$$

g é contínua no intervalo $[0,1]$, $g(0) = \tan 0 + 0 - 1 = -1 < 0$, $g(1) = \tan 1 + 1 - 1 = \tan 1 > 0$. Portanto, $f(0) \cdot f(1) < 0$.

Portanto, g está nas condições da hipótese do Corolário do Teorema de Bolzano.

Aplicando o Corolário referido, $\exists c \in]0,1[: g(c) = 0 \Rightarrow \tan c = 1 - c$.

2.5.2- Teorema de Weierstrass

Teorema (Weierstrass): Sendo $f : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua em $[a,b]$, então f atinge um máximo e um mínimo em $[a,b]$.

Exercícios:

1. Considere a função $f_1(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x < 2 \\ -2 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

Indique um intervalo onde não possa aplicar o Teorema de Bolzano à função f .

Resolução:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} f_1(x) = 3 \neq -2 = \lim_{x \rightarrow 2^+} f_1(x), \text{ pelo que não existe } \lim_{x \rightarrow 2} f_1(x).$$

Logo, $f_1(x)$ não é contínua em $x = 2$.

Portanto, o teorema de Bolzano não é aplicável a $f_1(x)$ em qualquer intervalo que contenha o ponto 2, por exemplo no intervalo $[0,3]$.

2. Considere a função $f_2(x) = 2 + \ln(5 - x)$ definida no intervalo $[2,4]$. Prove que a equação $f_2(x) = 3$ tem pelo menos uma solução em $]2,4[$.

Resolução:

$$f_2(x) = 3 \Leftrightarrow f_2(x) - 3 = 0 \Leftrightarrow \ln(5 - x) - 1 = 0.$$

Considerando $g(x) = \ln(5 - x) - 1$, $g(x)$ é contínua em $D_g =]-\infty, 5[$. Em particular, $g(x)$ é contínua em $[2,4] \subset D_g$.

$$\left. \begin{array}{l} g(2) = \ln 3 - 1 > 0 \\ g(4) = \ln 1 - 1 = -1 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow g(2) \cdot g(4) < 0,$$

Portanto, g está nas condições da hipótese do corolário do teorema de Bolzano.

Aplicando o corolário do teorema de Bolzano a g , $\exists c \in]2,4[$ tal que

$$g(c) = 0 \Rightarrow f_2(c) = 3.$$

3. Considere a função $f_3(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$. Justifique se existe algum $w \in]0,3[$ tal que $f_3(w) = \frac{1}{8}$.

Resolução:

$f_3(x)$ é contínua em \mathbb{R} . Em particular, $f_3(x)$ é contínua em $[0,3]$.

$$f_3(0) = 0, \quad f_3(3) = \frac{3}{10}, \text{ ou seja, } f_3(0) \neq f_3(3).$$

Portanto, $f_3(x)$ está nas condições da hipótese do teorema de Bolzano.

Aplicando o teorema de Bolzano à função $f_3(x)$,

$$\forall d \in]0, \frac{3}{10}[, \exists w \in]0, 3[: f_3(w) = d .$$

Como $\frac{1}{8} < \frac{3}{10}$, em particular podemos considerar $d = \frac{1}{8}$.

4. Considere a função $f_4(x) = \frac{2-4x}{x}$ definida no intervalo $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

Justifique se $f_4(x)$ atinge um máximo e um mínimo no intervalo referido.

Resolução:

$f_4(x)$ é contínua em $R \setminus \{0\}$, em particular $f_4(x)$ é contínua em $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

Pelo teorema de Weierstrass, $f_4(x)$ atinge um máximo e um mínimo em $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

5. Tendo em conta os possíveis valores de k , estude quanto à continuidade as seguintes funções:

$$5.1. \quad g_1(x) = \begin{cases} e^{-x+2} & \text{se } x \leq 0, \\ (x-e)^2 & \text{se } 0 < x \leq e, \\ \ln\left(\frac{k^2 x}{e}\right) & \text{se } x > e. \end{cases}$$

Resolução:

Se $x < 0$: $g_1(x) = e^{-x+2}$ é contínua (função exponencial).

Se $0 < x < e$: $g_1(x) = (x-e)^2$ é contínua, por se tratar de um polinómio.

Se $x > e$: $g_1(x) = \ln\left(\frac{k^2 x}{e}\right)$ é contínua (função logarítmica).

Se $x = 0$:

$$\left. \begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} g_1(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} e^{-x+2} = e^2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} g_1(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-e)^2 = e^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g_1(x) = e^2$$

$g_1(0) = e^2 = \lim_{x \rightarrow 0} g_1(x)$. Portanto, $g_1(x)$ é contínua no ponto zero.

Se $x = e$:

$$\lim_{x \rightarrow e^-} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow e^-} (x-e)^2 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow e^+} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow e^+} \ln\left(\frac{k^2 x}{e}\right) = \ln k^2$$

$$\ln k^2 = 0 \Leftrightarrow k^2 = e^0 \Leftrightarrow k^2 = 1 \Leftrightarrow k = -1 \vee k = 1$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow e} g_1(x) = 0$ se $k = -1 \vee k = 1$.

$g_1(e) = 0$, logo g_1 é contínua em $x = e$, para $k = -1 \vee k = 1$.

$$5.2. \quad g_2(x) = \begin{cases} \ln|k-x| & \text{se } x < 1, \\ 1 & \text{se } x = 1, \\ \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x-1)} & \text{se } x > 1. \end{cases}$$

Resolução:

Se $x < 1$: $g_2(x) = \ln|k-x|$ é contínua (função logarítmica).

Se $x > 1$: $g_2(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^{\ln(x-1)}$ é contínua por se tratar da composição de funções contínuas.

Se $x = 1$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} g_2(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \ln|k - x| = \ln|k - 1|$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} g_1(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x} \right)^{\ln(x-1)} = 1$$

$$\ln|k - 1| = 1 \Leftrightarrow |k - 1| = e \Leftrightarrow k - 1 = -e \vee k - 1 = e \Leftrightarrow k = -e + 1 \vee k = e + 1$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow 1} g_2(x) = 1$ se $k = -e + 1 \vee k = e + 1$, pelo que g_2 é

contínua em $x = 1$, para $k = -e + 1 \vee k = e + 1$.

Exercícios propostos:

1. Calcule os seguintes limites:

a) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x^4 - 3x^2 + x}{2x^2 + 3x}$

c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + 5x + 1}{2x^4 + 7x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}$

e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{2x^4 - 3}}{\sqrt[3]{x^2 - 1}}$

g) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^4 - 1}{x + 1}$

h) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{2x+1} - 3}{\sqrt{x-2} - \sqrt{2}}$

i) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(2x)}{\tan(2x)}$

j) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin(5x)}{x}$

k) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5 + x^2) - \ln 5}{x^2}$

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin(x)}{1 - \cos(x)}$

m) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x - 1|}{x - 1}$

n) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + |x|}{x}$

o) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \left(x + \frac{2x}{|x|} \right)$

p) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2}$

q) $\lim_{x \rightarrow 2} \left(\frac{x-2}{x^2-4} \right)^{x+2}$

r) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x-1}{x+3} \right)^{x^2+2}$

s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^{3x} - 1}$

t) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x}$

2. Calcule os limites laterais nos pontos que se indicam e diga, justificando, se existe o limite nesses pontos:

a) $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{se } x < 0 \\ x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}, \text{ em } x = 0$

b) $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{se } x < -1 \\ 2 & \text{se } -1 \leq x \leq 1 \\ -\frac{1}{x} & \text{se } x > 1 \end{cases}, \text{ em } x = 1 \text{ e } x = -1$

c) $h(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+1} & \text{se } x > -1 \\ -\frac{1}{2x} & \text{se } x \leq -1 \end{cases}, \text{ em } x = -1$

d) $j(x) = \frac{3x^2 + 2x}{|x|}, \text{ em } x = 0$

3. Estude quanto à continuidade cada uma das seguintes funções nos pontos indicados:

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} x^3 + x & \text{se } x \geq -1 \\ 1 - x & \text{se } x < -1 \end{cases} \quad \text{em } x = -1;$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ 2 & \text{se } x = 2 \\ |x| & \text{se } x > 2 \vee x \leq 1 \end{cases} \quad \text{em } x = 1 \text{ e } x = 2;$$

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x} & \text{se } x > 0 \\ e^{-x} & \text{se } x \leq 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0;$$

$$\text{d) } i(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{se } x \neq 0 \\ 5 & \text{se } x = 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0;$$

$$\text{e) } j(x) = \begin{cases} \log_2\left(\frac{x+2}{x+1}\right) & \text{se } x < 0 \\ 1 & \text{se } x = 0 \\ \frac{\sin(2x) + 2}{\tan x + 1} & \text{se } x > 0 \end{cases} \quad \text{em } x = 0;$$

4. Estude quanto à continuidade as funções que se seguem, para os possíveis valores dos parâmetros p e k :

$$\text{a) } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2} & \text{se } x \neq 1 \\ p + 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$\text{b) } g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)}{x^2 - x - 2} & \text{se } x > 2 \\ k & \text{se } x = 2 \\ \frac{e^{x-2} - 1}{3x - 6} & \text{se } x < 2 \end{cases}$$

$$\text{c) } h(x) = \begin{cases} \frac{2 \ln(x+1)^2}{\sin(2x)} & \text{se } x < 0 \\ \ln_{3/4} k & \text{se } x = 0 \\ \frac{1 - e^{4x}}{\tan(-2x)} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

$$\text{e) } i(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{|x|} & \text{se } x \neq 0 \\ p & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

5. Prove que a equação $x^3 - 2x + 5 = 0$ tem uma raiz no intervalo $] -3, 0[$.

6. Considere a função $g(x) = \frac{2-4x}{x}$ definida no intervalo $\left[\frac{1}{4}, 2\right]$.

a) Será que g atinge máximo nesse intervalo? E mínimo? Justifique.

b) Mostre que a função tem pelo menos um zero no interior do intervalo referido.