Espaços Vetoriais

Exercício 1 *Considere em* $\mathbb{R}^2$ *definidas as seguintes operações:*

a) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ *e* $\lambda(a,b)=(\lambda a,1)$

b) $(a,b)+(c,d)=(a+c,0)$ *e* $\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$

c) $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ *e* $\lambda(a,b)=(\lambda a,\lambda b)$

Justifique se $\mathbb{R}^2$ *algebrizado com cada par de operações é ou não um espaço vetorial sobre* $\mathbb{R}$*.*

Exercício 2 *Seja* A *um conjunto não vazio, e seja* E *um espaço vetorial sobre um corpo* $\mathbb{K}$*. Designemos por* $F(A,E)$ *o conjunto de todas as aplicações de* A *em* E*. Prove que* $F(A,E)$ *é um espaço vetorial sobre* $\mathbb{K}$*, para as seguintes operações:*

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),\ \forall x\in A$$
$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x),\ \forall x\in A$$

onde f *e* g *designam dois elementos quaisquer de* $F(A,E)$ *e* λ *um qualquer elemento de* $\mathbb{K}$*.*

Exercício 3 *Indique, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^3$ *são subspaços vetoriais de* $\mathbb{R}^3$*.*

a) $A=\{(x,y,z):x=-y\}$

b) $A=\{(x,y,z):2x+y-z=0\}$

c) $A=\{(x,y,z):x+5y=0\}$

d) $A=\{(x,y,z):x<1-y\}$

e) $A=\{(x,y,z):x+y+z=0\wedge x-y+z=0\}$

f) $A=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2\leq 4\}$

Exercício 4 *Indique, justificando, quais dos seguintes subconjuntos de* $\mathbb{R}^4$ *são subspaços vetoriais de* $\mathbb{R}^4$.

a) $A = \{(x,y,z,w) : x+y+z = 0 \wedge w \in \mathbb{Z}\}$

b) $A = \{(x,y,z,w) : z = 0\}$

Exercício 5 *Em* $\mathbb{R}^3$*, considere os conjuntos:* $S = \{(x,y,z) : x+2y+z = 0\}$ *e* $T = \{(x,y,z) : z-3x = 0\}$ *Mostre que* $S \cap T$ *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 6 *Verifique se* $G = \{a+ib \in \mathbb{C} : b = a+1\}$*, suconjunto de* $\mathbb{C}$*, é um subespaço:*

a) Do espaço linear real.

b) Do espaço linear complexo.

Exercício 7 *Verifique quais dos seguintes conjuntos são subespaços vetoriais de* P_n *([1]).*

a) $A = \{p \in P_n : p(0) = 0\}$

b) $B = \{p \in P_n : p(-x) = p(x)\}$

Exercício 8 *Sejam* $a = (1,2)$ *e* $b = (-1,-1)$ *vetores de* $\mathbb{R}^2$*. Escreva, se possível, cada um dos vetores como combinação linear de a e b.*

a) $(1,3)$

b) $(2,2)$

Exercício 9 *Relacione* x, y *e* z *de modo que o vetor* (x,y,z) *seja uma combinação linear dos vetores* $(1,2,3)$ *e* $(1,-1,0)$.

---

[1] O conjunto P_n, dos polinómios reais de grau menor ou igual a n, algebrizado com a adição usual de polinómios e a multiplicação usual de um número real por um polinómio é um espaço vetorial real.

Exercício 10 *Dados os polinómios* $p_1(x) = x^2 + 5x - 6$, $p_2(x) = x^2 + 1$ *e* $p_3(x) = 3x - 1$.

a) *Calcule k de modo que o polinómio* $p(x) = (k-1)x^2 + x$ *seja uma combinação linear de* $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$.

b) *Determine uma relação entre* a, b *e* c *de modo a que o polinómio* $q(x) = ax^2 + bx + c$ *seja uma combinação linear de* $p_1(x)$ *e* $p_2(x)$.

Exercício 11 *Averigue se* $\mathbb{R}^2$ *é ou não gerado por cada um dos seguintes pares de vetores:*

a) $(1,1)$ *e* $(2,-2)$

b) $(0,-1)$ *e* $(3,4)$

c) $(0,2)$ *e* $(-1,1)$

d) $(2,3)$ *e* $(-2,-3)$

Exercício 12 *Determine o subespaço gerado pelos vetores* $(0,-1,-1)$ *e* $\left(1, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 13 *Mostre que o subespaço de* $\mathbb{R}^4$ *gerado pelos vetores* $u = (1,2,3,4)$, $v = (1,-1,2,0)$ *e* $t = (1,0,1,0)$ *é* $S = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : x - y - z + w = 0\}$.

Exercício 14 *Averigue se são linearmente independentes os seguintes vetores:*

a) $(1,2)$ *e* $(-1,0)$

b) $(2,3)$ *e* $(-2,-3)$

c) $(1,0,0)$ *e* $(2,0,0)$

d) $(3,1,4)$, $(4,5,1)$ *e* $(1,1,1)$

e) $(0,0,0,-10)$, $(0,2,5,4)$, $(0,0,-1,47)$ *e* $(1,2,-1,7)$

Exercício 15 *Seja* P_2 *o espaço vetorial dos polinómios na variável x, de coeficientes reais, com grau igual ou menor a dois. Averigue se são linearmente independentes os seguintes elementos de* P_2*:*

$$1 + x, \quad 2 - x^2 \quad e \quad x - x^2.$$

Exercício 16 *Considere os vetores* $a = (1,1,1)$, $b = (1,1,2)$ *e* $c = (1,2,3)$ *vetores de* $\mathbb{R}^3$.

a) *Mostre que* a, b *e* c *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$.

b) *Determine as coordenadas do vetor* $d = (6,8,1)$ *nessa base.*

Exercício 17 *Considere os vetores* $u = (1,3,4)$, $v = (-1,1,2)$ *e* $w = (3,0,1)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

a) *Qual a dimensão do subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *gerado por* u, v *e* w.

b) *Determine as coordenadas do vetor* $t = (2,5,-1)$ *na base* $\{u,v,w\}$.

Exercício 18 *Considere os vetores* $a = (1,1,1)$ *e* $b = (1,0,1)$ *de* $\mathbb{R}^3$.

a) *Mostre que os vetores são linearmente independentes.*

b) *Mostre que* $\{a,b\}$ *gera o subespaço* A *de* $\mathbb{R}^3$ *constituido pelo vetores* (x,y,z) *tais que* $x - z = 0$.

c) *Indique a dimensão de* A.

Exercício 19 *Considere em* $\mathbb{R}^3$, *o subespaço vetorial* $B = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y + 3z = 0\}$.

a) *Mostre que* $\{(-2,1,0),(-3,0,1),(-1,-1,1)\}$ *gera* B, *mas não é uma base de* B.

b) *Determine uma base e a dimensão de* B.

Exercício 20 *Seja* C *o conjunto de elementos de* $\mathbb{R}^4$ *da forma* $(a,0,b,4a+5b)$ *onde* a *e* $b \in \mathbb{R}$,

a) *Mostre que* C *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determine uma base e a dimensão de* C.

c) *Verifique se o vetor* $(2,0,-1,3)$ *pertence a* C *e obtenha as suas coordenadas na base indicada na alínea anterior.*

Exercício 21 *Determine a dimensão e uma base do subespaço:*

a) $T = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 : y+z+w=0\}$ *de* $\mathbb{R}^4$.

b) *Gerado pelos vetores* $(4,5,6)$ *e* $(7,8,9)$ *em* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 22 *Seja* P_n *o conjunto dos polinómios de grau não superior a* n.

a) *Prove que* $\left\{1, 1+x, 1+x^2\right\}$ *é uma base de* P_2.

b) *Escreva na base anterior, o polinómio* $p(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Exercício 23 *Considere os ternos de* $\mathbb{R}^3$, $u = (1,2,3)$ *e* $v = (2,-1,1)$.

a) *Escreva uma condição que caracterize o subespaço de* $\mathbb{R}^3$ *gerado por* u *e* v.

b) *Mostre que* $(1,0,1)$ *e* $(0,1,1)$ *pertencem ao subespaço referido na alínea anterior.*

c) *Indique a dimensão do subespaço.*

Exercício 24 *Considere os vetores de* $\mathbb{R}^3$, $a = (i,j,k)$, $b = (i,0,k)$ *e* $c = (i,0,0)$.
Mostre que os vetores a, b *e* c *formam uma base de* $\mathbb{R}^3$ *se* $i,j,k \neq 0$.

Exercício 25 *Considere o seguinte subconjunto de* $\mathbb{R}^4$, $G = \{(a,b,c,d) : c = 3a \wedge d = 0\}$.

a) *Mostre que* G *é um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^4$.

b) *Determine a dimensão de* G *indicando uma base.*

Exercício 26 *Seja* P_n *o conjunto dos polinómios de grau não superior a* n. *Considere os polinómios definidos por:*

$$p_1(x) = 1, \quad p_2(x) = x-1, \quad p_3(x) = x^2-1 \quad e \quad p_4(x) = x^3-1$$

Mostre que $p_1(x)$, $p_2(x)$, $p_3(x)$ *e* $p_4(x)$ *formam uma base de* P_3.

Exercício 27 *No espaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$, $V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 2x+y-2z = k+2,\, k \in \mathbb{R}\right\}$.

a) Indique, justificando, para que valores de k *é* V *um subespaço vetorial de* $\mathbb{R}^3$.

b) Para $k = -2$,

i) Encontre uma base para V.

ii) Defina o elemento genérico de $V \cap S$, *onde* $S = \langle (1,-1,0),(0,1,1) \rangle$.