Matrizes

Exercício 1 *Dadas as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \end{bmatrix} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} -5 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 \end{bmatrix}.$$

calcule:

a) $2A + 4B$

b) $4(A+B) - BA$

c) $A(A-B)$

d) BB

Exercício 2 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -3 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \\ 2 & -5 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Determine AB e AC e diga qual o valor lógico da implicação: $AB = AC \implies B = C$

Exercício 3 *Determine as matrizes permutáveis (comutáveis) com M, sendo:*

a) $M = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

c) $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 4 *Determine, usando a definição, a inversa de cada uma das matrizes:*

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ *b)* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 5 *Considere as matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & -3 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & -5 \end{bmatrix}.$$

Resolva a equação $C^T A^T X C - C = 0$.

Exercício 6 *Considere a seguinte equação matricial* $\left[\left(A^T\right)^{-1} X\right]^T + (AB)^{-1} = A$*, onde A, B e X são matrizes quadradas de ordem 3 e de coeficientes reais.*

a) Determine X sabendo que $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) Qual a dimensão do núcleo de A? Justifique a sua resposta.

Exercício 7 *Use o método de eliminação de Gauss para resolver os seguintes sistemas de equações lineares.*

a) $\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ -3x + 2y + z = -7 \\ -2x + y + 2z = -3 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ 3x + 5y + 7z = 1 \end{cases}$ *c)* $\begin{cases} x - y - 3z + 4t = 1 \\ x + y + z + 2t = -1 \\ -y - 2z + t = 1 \\ x + 2y + 3z + t = -2 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x - 2y + 3z - 4t + 2w = -2 \\ x + 2y - 3z - w = -3 \\ x - y + 2z - 3t = 10 \\ y - z - t - 2w = -5 \\ 2x + 3y - z + t + 4w = 1 \end{cases}$ *e)* $\begin{cases} 5x + y + z = 3 \\ 4y + 4t = 4 \\ 2z + t = -4 \\ -2x + y + 4t = -1 \end{cases}$

Exercício 8 *Calcule as inversas das seguintes matrizes*

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 9 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$ d) $D = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício 9 *Determine a base e a dimensão do núcleo das seguintes matrizes:*

a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$

Exercício 10 *Resolva os seguintes sistemas homogéneos*

a) $\begin{cases} y+2z+w=0 \\ x+2y+2z=0 \\ -2x+4y+2z+3w=0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 3x+2y+z-w-t=0 \\ x-y-z-t+2w=0 \\ -x+2y+3z+t-w=0 \end{cases}$

Exercício 11 *Dada a matriz real*

$$A = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

resolva a equação matricial $AXA^{-1} = A + I_3$.

Exercício 12 *Calcule a inversa da matriz A e determine a solução da equação $AX + C = B$, onde A, B, e C são as seguintes matrizes*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad e \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Exercício 13 *Considere A e B duas matrizes simétricas. Em que condições pode afirmar que AB e AB^T são matrizes simétricas.*

Exercício 14 *Determine, usando condensação, a inversa da matriz*

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 15 *Determine a base e a dimensão do espaço nulo da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 5 & 1 \\ 5 & 15 & 12 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exercício 16 *Discuta, em função dos parâmetros reais a, b e c, o seguinte sistema de equações lineares:*

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ 2x + 6y - 11z = b \\ x - 2y + (7 + a)z = c \end{cases}$$

Exercício 17 *Sejam A e B duas matrizes quadradas de ordem n simétricas. Prove que se AB é simétrica então A e B são permutáveis (comutam).*