Capítulo 3

Matrizes

3.1 Definição e Conceitos Básicos

Definição 3.1.1 *Uma matriz* $A = [a_{ij}]_{m \times n}$, *do tipo* $m \times n$ *é um quadro constituído por* m *linhas e* n *colunas, com* $i, j \in \mathbb{N} : i = 1, 2, \ldots, m, \; j = 1, 2, \ldots, n$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \tag{3.1.1}$$

onde os elementos a_{ij} *são escalares,* $(a_{ij} \in \mathbb{R}, \; \forall \, i = 1, 2, \ldots, m, \; \forall \, j = 1, 2, \ldots, n)$.

A a_{ij} chama-se **Elemento Genérico** da matriz A e os índices i e j representam a ordem da linha e da coluna do elemento a_{ij}, respetivamente,

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{c} j \\ \blacktriangledown \end{array} \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & a_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \blacktriangleleft i \end{array} \; ;$$

Representa-se por $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes do tipo $m \times n$, introduzidas na Definição 3.1.1.

Conceitos Básicos

Igualdade de Matrizes - Duas matrizes A e B são iguais se forem do mesmo tipo $m \times n$ (mesmo número de linhas e colunas) e se os elementos homólogos (com os mesmos índices) forem iguais ($a_{ij} = b_{ij}$, $\forall\, i, j$);

Matriz Nula - Matriz nula é uma matriz em que todos os seus elementos são nulos, $O_{m\times n}$, com $o_{ij} = 0$, $\forall\, i, j$,

$$O_{m\times n} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m\times n} ;$$

Matriz Rectângular - Caso $m \neq n$ a matriz diz-se rectangular (matriz tipo $m \times n$),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}_{2\times 3} .$$

Destacam-se ainda os seguintes casos particulares:

Matriz Linha - Quando $m = 1$ e $n > 1$, obtém-se uma matriz formada por apenas uma linha e n colunas,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix}_{1\times n};$$

Matriz Coluna - Quando $m > 1$ e $n = 1$, obtém-se uma matriz formada por m linhas e apenas uma coluna,

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}_{m\times 1} .$$

Matriz Quadrada - Caso $m = n$ a matriz diz-se quadrada (matriz tipo $n \times n$ ou de ordem n),

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} .$$

Numa matriz quadrada, consideram-se as duas diagonais,

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad , \quad \boxed{\text{diagonal principal}},$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad , \quad \boxed{\text{anti diagonal}}.$$

Deste tipo de matrizes quadradas, destacam-se ainda os seguintes casos, particularmente importantes:

Matriz Diagonal - Uma matriz quadrada não nula diz-se diagonal se forem nulos todos os elementos fora da diagonal principal, isto é, $a_{ij} = 0,\ \forall\, i, j = 1\dots,n,\ i \neq j$ e $\exists i \in \{1,\dots,n\} : a_{ii} \neq 0$,

$$D = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} \quad ;$$

Matriz Identidade - Matriz identidade é a matriz diagonal com todos os elementos da diagonal principal iguais a 1, isto é, $a_{ij} = 0,\ \forall\, i, j = 1\dots,n,\ i \neq j$ e $a_{ii} = 1,\ \forall\, i = 1\dots,n$,

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n\times n} \quad ;$$

Matriz Escalar - Matriz escalar A é uma matriz diagonal com todos os elementos da diagonal principal iguais a $k \in \mathbb{R}$, isto é, $a_{ij} = 0,\ \forall\, i, j = 1\dots,n,\ i \neq j$ e $a_{ii} = k,\ \forall\, i = 1\dots,n$,

$$A = \begin{bmatrix} k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & k & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & k \end{bmatrix}_{n\times n} \quad ;$$

Matriz Triangular Superior (Inferior) - Uma matriz quadrada A não nula diz-se triangular superior (inferior) se forem nulos todos os elementos situados do lado de baixo (cima) da diagonal principal $a_{ii} = 0,\ \forall\, i, j = 1\dots,n,\ i > j \quad (a_{ii} = 0,\ \forall\, i, j = 1\dots,n,\ i < j)$,

$$T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1n} \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n}, \qquad \left(T = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \right);$$

3.2 Álgebra das Matrizes

Se, para além da informação guardada numa matriz, introduzirmos operações que permitem interagir e relacionar essa mesma informação então teremos uma ferramenta com mais potencial — $(M_{m\times n}(\mathbb{R}), +, .)$ um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$, onde estão definidas as seguintes operações com matrizes: $+$ soma de matrizes e $.$ multiplicação de uma matriz por um escalar.

3.2.1 Soma de Matrizes

Definição 3.2.1 *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ matrizes do tipo $m \times n$. Define-se soma das matrizes A e B como sendo a matriz $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que se obtém quando somando os elementos homólogos de A e B, isto é, $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, i = 1, 2, \dots, m,\ j = 1, 2, \dots, n$,*

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}. \tag{3.2.1}$$

Exemplo 3.2.1 *Sejam $A, B \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 7 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Segundo a Definição 3.2.1, tem-se

$$A+B=\begin{bmatrix} 2+1 & -3+5 \\ 0+4 & 7+1 \\ 10+3 & 21+(-1) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}.$$

Propriedades 3.2.1 (Soma de Matrizes) *Sejam $A,B,C,D,O \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $O_{m\times n}$ a matriz nula.*

Propriedade Associativa	$(A+B)+C=A+(B+C)$;
Propriedade Comutativa	$A+B=B+A$;
Existência do Elemento Neutro	$A+O=O+A=A$;
Existência do Elemento Simétrico	$A+(-A)=(-A)+A=O$;

3.2.2 Multiplicação de uma Matriz por um Escalar

Definição 3.2.2 *Sejam $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz do tipo $m\times n$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ um escalar. Define-se multiplicação da matriz A pelo escalar λ como sendo a matriz $C \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ que se obtém multiplicando todos os elementos de A pelo escalar λ, isto é, $c_{ij}=\lambda a_{ij}, i=1,2,\ldots,m,\ j=1,2,\ldots,n$,*

$$\lambda A=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}. \tag{3.2.2}$$

Exemplo 3.2.2 *Sejam $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ a matriz do exemplo 3.2.1 e $\lambda=-3$. Tem-se,*

$$-3A=-3\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 7 \\ 10 & 21 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -6 & 9 \\ 0 & -21 \\ -30 & -63 \end{bmatrix}.$$

Propriedades 3.2.2 (Multiplicação por um Escalar) *Sejam $A, B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ escalares.*

> **Propriedade Distributiva** $\lambda(A+B) = \lambda A + \lambda B$;
>
> **Propriedade Distributiva** $(\lambda+\mu)A = \lambda A + \mu A$;
>
> **Propriedade Associativa** $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;
>
> **Produto pela Unidade** $1A = A$;

3.2.3 Produto de Matrizes

Definição 3.2.3 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz do tipo $m \times n$ e $B \in M_{n\times p}(\mathbb{R})$ uma matriz do tipo $n \times p$. Define-se multiplicação da matriz A pela matriz B como sendo a matriz $C \in M_{m\times p}(\mathbb{R})$ obtida através de,*

$$c_{ij} = \sum_{l=1}^{n} a_{il} b_{lj} \ , \ \ i = 1,2,\ldots,m, \ j = 1,2,\ldots,p\,.$$

Em termos de matrizes, tem-se,

$$\begin{array}{c c} & \\ i \blacktriangleright & \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2}} & \boxed{\cdots} & & \boxed{a_{in}} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & j & & \\ & & \blacktriangledown & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & \boxed{b_{1j}} & \cdots & b_{1p} \\ b_{21} & \cdots & \boxed{b_{2j}} & \cdots & b_{2p} \\ \vdots & & \boxed{\vdots} & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & \boxed{b_{nj}} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} \end{array} = \begin{array}{c} j \\ \blacktriangledown \\ \begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & \boxed{a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \blacktriangleleft i \end{array} \ .$$

Isto é,

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \cdots & a_{11}b_{1p} + a_{12}b_{2p} + \cdots + a_{1n}b_{np} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n1} & \cdots & a_{21}b_{1p} + a_{22}b_{2p} + \cdots + a_{2n}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1}b_{11} + a_{i2}b_{21} + \cdots + a_{in}b_{n1} & \cdots & a_{i1}b_{1p} + a_{i2}b_{i,p} + \cdots + a_{in}b_{np} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n1} & \cdots & a_{m1}b_{1p} + a_{m2}b_{2p} + \cdots + a_{mn}b_{np} \end{bmatrix}_{m\times p} \ . \qquad (3.2.3)$$

Em termos de concordância de matrizes, a operação produto exige que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda, ou seja, é necessário o seguinte resultado,

$$A_{m\times n}\, B_{n\times p} = C_{m\times p}\ .$$

Exemplo 3.2.3 *Seja $A \in M_{3\times 2}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$,*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Segundo a Definição 3.2.3, tem-se

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\times 1+(-3)\times 4 & 2\times 5+(-3)\times 1 & 2\times 2+(-3)\times 0 & 2\times 0+(-3)\times 3 \\ 0\times 1+1\times 4 & 0\times 5+1\times 1 & 0\times 2+1\times 0 & 0\times 0+1\times 3 \\ 1\times 1+4\times 4 & 1\times 5+4\times 1 & 1\times 2+4\times 0 & 1\times 0+4\times 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 7 & 4 & -9 \\ 4 & 1 & 0 & 3 \\ 17 & 9 & 2 & 12 \end{bmatrix}$$

Exemplo 3.2.4 *Segundo a Definição 3.2.3, o produto das matrizes $A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{4\times 2}(\mathbb{R})$, fica definido por,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ -2 & -1 \\ 3 & 3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 4+2\times(-2)+2\times 3+1\times(-2) & 3\times 0+2\times(-1)+2\times 3+1\times 0 \\ -3\times 4+-3\times(-2)+1\times 3+2\times(-2) & -3\times 0+-3\times(-1)+1\times 3+2\times 0 \\ 0\times 4+1\times(-2)+2\times 3+3\times(-2) & 0\times 0+1\times(-1)+2\times 3+3\times 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 12 & 4 \\ -7 & 6 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

Propriedades 3.2.3 (Produto de Matrizes) *Sejam $A, B, C \in M(\mathbb{R})$ matrizes tipo compatíveis com as operações a seguir consideradas.*

Propriedade Associativa	$(AB)C = A(BC)$;
Propriedade Distributiva	$A(B+C) = AB + AC$;
Propriedade Associativa	$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$;
Produto pela Matriz Nula	$O_{mn}A_{np} = O_{mp}, \quad A_{np}O_{pm} = O_{nm}$;
Produto pela Matriz Identidade	$I_n A_{np} = A_{np}, \quad A_{np}I_p = A_{np}$;
Potência Natural de uma Matriz Quadrada	$A^k = \underbrace{AA\ldots A}_{k \text{ vezes}}, \; k \in \mathbb{N}, \qquad A^0 = I$;
Produto de Matrizes (Não Comutativo)	*De uma forma geral* $AB \neq BA$;

3.2.4 Matriz Inversa

Além das propriedades enunciadas para o produto de matrizes e da não comutatividade desta operação, interessa ainda definir o seguinte conceito.

Definição 3.2.4 *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada. Chama-se matriz inversa de A, a uma matriz $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ que verifica,*

$$AX = XA = I_n\,, \tag{3.2.4}$$

onde I_n representa a matriz identidade de ordem n.

Exemplo 3.2.5 *Seja,*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

A existir matriz inversa de A, $X \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$, por definição, terá que verificar (3.2.4)*. Assim,*

$$AX = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} x_{11}+x_{21} & x_{12}+x_{22} \\ x_{11}+2x_{21} & x_{12}+2x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21} = 1 \\ x_{11}+2x_{21} = 0 \\ x_{12}+x_{22} = 0 \\ x_{12}+2x_{22} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x_{11} = 2 \\ x_{21} = -1 \\ x_{12} = -1 \\ x_{22} = 1 \end{cases} \implies A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Facilmente se verifica que o produto à esquerda XA também verifica a condição exigida (3.2.4).

Teorema 3.2.1 *A matriz inversa de A se existir é única e designa-se por A^{-1}.*

Dem. *Sejam B e C inversas da matriz A. Então,*

- $AB = BA = I_n$;
- $AC = CA = I_n$.

Assim, aplicando a propriedade associativa do produto tem-se,

$$BAC = \begin{cases} (BA)C = I_nC = C \\ B(AC) = BI_n = B \end{cases},$$

logo, $B = BAC = C$. □

Observação 3.2.1 -

- *A matriz quadrada nula $O_{n\times n}$ não admite inversa pois o produto desta por qualquer outra matriz é sempre a matriz nula, Propriedade 3.2.3, $O_{n\times n}A_{n\times n} = O_{n\times n}$, e portanto nunca poderá verificar a condição $AA^{-1} = I_n$;*
- *Uma matriz quadrada que admite inversa diz-se regular e, em contraponto, diz-se singular caso contrário.*

Propriedades 3.2.4 (Matriz Inversa) *Sejam $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes regulares, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $k, l \in \mathbb{N}$. Verificam-se as seguintes propriedades:*

1. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$;
2. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$;
3. $\left(A^{-1}\right)^{k} = \left(A^{k}\right)^{-1} \ \left(:= A^{-k}\right)$;
4. $A^kA^l = A^{k+l}, \ \forall k, l \in \mathbb{Z}$;
5. $A^0 = I_n$;
6. $\left(A^k\right)^l = A^{kl}, \ \forall k, l \in \mathbb{Z}$;
7. $\left(\lambda A\right)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}, \ \lambda \neq 0$;

Dem.

1. $A^{-1}A = I_n$;

2. $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}A)B = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n$;

3. $\left(A^{-1}\right)^k\left(A^k\right) = \left(A^{-1}\right)^{k-1}(\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n})A^{k-1} = \left(A^{-1}\right)^{k-2}(\underbrace{A^{-1}A}_{=I_n})A^{k-2} = \cdots = I_n$;

4. $A^kA^l = (\underbrace{AA\ldots A}_{k\, vezes})(\underbrace{AA\ldots A}_{l\, vezes}) = A^{k+l}$, $\forall k,l \in \mathbb{Z}$;

5. $A^0 = A^1A^{-1} = I_n$;

6. $\left(A^k\right)^l = \underbrace{A^kA^k\ldots A^k}_{l\, vezes} = A^{kl}$, $\forall k,l \in \mathbb{Z}$;

7. $\left(\frac{1}{\lambda}A^{-1}\right)\left(\lambda A\right) = \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right)\left(A^{-1}A\right) = 1I_n = I_n$; $\square$

3.2.5 Matriz Transposta

Definição 3.2.5 *Seja $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz do tipo $m \times n$. Chama-se matriz transposta de A à matriz que se obtém desta trocando, ordenadamente, as linhas com as colunas. A matriz transposta de A representa-se por, A^T.*

$$A = [a_{ij}] = \begin{array}{r} \\ \\ i \blacktriangleright \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ \boxed{a_{i1} \quad a_{i2}} & & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

$$A^T = [a_{ji}] = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \phantom{a_{11}} & & i & & \phantom{a_{m1}} \\ & & \blacktriangledown & & \end{array} \\ \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{i1} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & \cdots & a_{i2} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{in} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m} \end{array}$$

Exemplo 3.2.6 *Sejam $A \in M_{2\times 4}(\mathbb{R})$ e $B \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$, as matrizes do exemplo 3.2.4,*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 & 1 \\ -3 & -3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Segundo a Definição 3.2.5, tem-se

$$A^T = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & -3 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \qquad B^T = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Propriedades 3.2.5 (Transposição de Matrizes) *Sejam $A, B \in M(\mathbb{R})$ matrizes tipo compatíveis com as operações a seguir consideradas e $\lambda \in \mathbb{R}$. Tem-se,*

1. $\left(A^T\right)^T = A$;
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$;
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$;
4. $\left(A^T\right)^k = \left(A^k\right)^T$;
5. $(AB)^T = B^T A^T$;
6. $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$;

Dem.

1. $\left(A^T\right)^T = \left([a_{ji}]\right)^T = [a_{ij}] = A$;
2. $(\lambda A)^T = ([\lambda a_{ji}])^T = [\lambda a_{ji}] = \lambda [a_{ji}] = \lambda A^T$;
3. $(A+B)^T = [a_{ij} + b_{ij}]^T = [a_{ji} + b_{ji}] = [a_{ji}] + [b_{ji}] = A^T + B^T$;
4. $(AB)^T = [\sum_k a_{ik} b_{kj}]^T = [\sum_k a_{jk} b_{ki}] = [\sum_k b_{ki} a_{jk}] = B^T A^T$;
5. $\left(A^T\right)^k = A^T A^T \ldots A^T = (AA \ldots A)^T = \left(A^k\right)^T$;
6. $\left(A^{-1}\right)^T A^T = \left(AA^{-1}\right)^T = \left(I_n\right)^T = I_n$; $\square$

Definição 3.2.6 *Seja $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada $n \times n$. Considera-se,*

Matriz Simétrica - *Uma matriz A diz-se simétrica se $A^T = A$;*

Traço - *Traço de uma matriz quadrada é a soma de todos os elementos da diagonal principal*

$$\operatorname{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\ .$$

Exemplo 3.2.7 *Seja $A \in M_{4\times 4}(\mathbb{R})$, a seguinte matriz quadrada,*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} .$$

De acordo com as definições3.2.6, a matriz A é simétrica uma vez que

$$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = A \, .$$

Por outro lado, o traço da matriz A tem o seguinte valor,

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i} = 5 + 3 + (-2) + (-4) = 2 \, .$$

Observação 3.2.2 *Na realidade uma matriz é simétrica se, visualmente, existir uma simetria dos seus elementos em relação à diagonal principal da matriz.*

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n\times n} , \qquad A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 7 \\ 4 & 3 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 7 & -2 & 0 & -4 \end{bmatrix} = A^T \, .$$

Propriedades 3.2.6 (Traço de uma Matriz) *Sejam $A, B \in M(\mathbb{R})$ matrizes compatíveis com as operações a seguir consideradas e $\lambda \in \mathbb{R}$. Então,*

1. $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$;

2. $\mathrm{tr}(\lambda A) = \lambda\, \mathrm{tr}(A)$;

3. $\mathrm{tr}(A^T) = \mathrm{tr}(A)$;

4. $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;

Dem.

1. $\mathrm{tr}(A+B)=\sum(a_{ii}+b_{ii})=\sum a_{ii}+\sum b_{ii}=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$;

2. $\mathrm{tr}(\lambda A)=\sum(\lambda a_{ii})=\lambda\sum a_{ii}=\lambda\,\mathrm{tr}(A)$;

3. $\mathrm{tr}(A^T)=\sum(a_{jj})=\mathrm{tr}(A)$;

4. $\mathrm{tr}(AB)=\sum_{i=1}^{n}(c_{ii})=\sum_{i=1}^{n}(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki})=\sum_{k=1}^{n}(\sum_{i=1}^{n}b_{ki}a_{ik})=\mathrm{tr}(BA)$;

□

3.3 Independência Linear de Linhas e Colunas de uma Matriz

3.3.1 Combinação Linear de Linhas e Colunas

Seja $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

e sejam,

$$L_1=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix},\quad L_2=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{bmatrix},\ \dots,\quad L_m=\begin{bmatrix} a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

as m linhas da matriz,

$$\begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{i2} \quad \cdots \quad a_{1n}} \\ \boxed{a_{21} \quad a_{22} \quad \cdots \quad a_{2n}} \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \ddots \quad\quad \vdots \\ \boxed{a_{m1} \quad a_{m2} \quad \cdots \quad a_{mn}} \end{bmatrix}_{m\times n}$$

e, de forma idêntica,

$$C_1=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\quad C_2=\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \dots,\quad C_n=\begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

as respetivas n colunas,

$$\left[\begin{array}{ccccc} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{matrix}} & \begin{matrix} \cdots \\ \cdots \\ \ddots \\ \cdots \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix}} \end{array}\right]_{m\times n}.$$

Chama-se **Combinação Linear das m linhas** a um expressão do tipo,

$$L = \lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m,$$

com $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m \in \mathbb{R}$. Neste caso, diz-se que a matriz linha L é uma combinação linear das m matrizes $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_m$.

De forma análoga, chama-se **Combinação Linear das n colunas** a um expressão do tipo,

$$C = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n,$$

com $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n \in \mathbb{R}$. Desta forma, diz-se que a matriz coluna C é uma combinação linear das n matrizes $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_n$.

Exemplo 3.3.1 *Sejam $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$,*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz linha nula, $L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, é uma combinação linear das linhas $L_1,\ L_2,\ L_3,\ L_4$, pois,

$$\begin{aligned} 3L_1 - 12L_2 - 4L_3 + 12L_4 &= \begin{bmatrix} 12 & 0 & 12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 24 & 12 & -12 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -12 & -12 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -24 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

A matriz coluna

$$C = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix},$$

é uma combinação linear das colunas $C_1,\ C_2,\ C_3$, pois,

$$-2C_1+2C_2+1C_3 = \begin{bmatrix} -8 \\ 4 \\ -6 \\ 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Dependendo do contexto e das dimensões das matrizes em causa, considera-se $\vec{0}$ a matriz linha nula ou a matriz coluna nula, isto é,

$$\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}_{1\times n} \qquad \text{ou} \qquad \vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}_{m\times 1}.$$

3.3.2 Linhas e Colunas Linearmente Independentes

Definição 3.3.1 *As matrizes linha $L_1, L_2, \ldots, L_m \in M_{1\times n}(\mathbb{R})$ (resp. as matrizes coluna $C_1, C_2, \ldots, C_n \in M_{m\times 1}(\mathbb{R})$) dizem-se linearmente independentes se o forem enquanto vetores de $\mathbb{R}^n$ (resp. $\mathbb{R}^m$), isto é,*

$$\lambda_1 L_1 + \lambda_2 L_2 + \cdots + \lambda_m L_m = \vec{0} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \ \cdots \\ \lambda_m = 0 \end{cases}.$$

$$\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_n C_n = \vec{0} \implies \begin{cases} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \ \cdots \\ \lambda_n = 0 \end{cases}.$$

Caso contrário, as linhas (colunas) dizem-se linearmente dependentes.

Exemplo 3.3.2 *Relativamente à matriz do exemplo anterior $A \in M_{4\times 3}(\mathbb{R})$ (ex. 3.3.1),*

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 4 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$