Capítulo 1

Números Complexos

A necessidade de construção de novos tipos de números acompanha a história da Humanidade em geral e da Matemática em particular. Sem pretender uma descrição exaustiva dessa evolução, a necessidade de contar objetos deu certamente o mote para a linguagem dos números naturais $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$ (praticamente todas as civilizações criaram, de alguma forma, símbolos e operações para os expressar).

Só a discussão acerca da origem do número zero dá azo a inúmeros artigos e conjecturas (fala-se na origem hindu, associada ao conceito de meditação através do "esvaziamento" da mente), sabe-se apenas que o seu registo ocorreu em três civilizações: Babilónia, India e civilização Maia. De facto, na Europa, apenas foi introduzida na Idade Média, com a númeração árabe[2]. Inicialmente difícil imaginar essa representação do nada, do inexistente, o zero é também visto como uma das grandes invenções da humanidade, pois abriu espaço para a criação de todas as operações matemáticas em $\mathbb{N}_0$. Operações que, por sua vez, vieram criar novas necessidades e oportunidades para novos tipos de números:

- os números naturais negativos $\mathbb{N}^-$, que vieram resolver operações até então "impossíveis" $(3-5) =$??.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1\,, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

  conjunto dos números interios, $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- \cup \{0\}$;

- da "impossibilidade" da divisão inteira de dois naturais, surgem os números racionais,

$$\mathbb{Q} = \{p/q\,,\, p, q \in \mathbb{Z},\, q \neq 0\};$$

- da necessidade de lidar com medidas e relações geométricas impossíveis de representar na forma $\frac{p}{q}$ (por

[2]Os romanos desconheciam o zero, introduzido posteriormente pelos árabes, não existindo portanto nenhuma forma de representação deste valor (tinham apenas como base os números $I, II, III, IV, \ldots$.

ex. $\sqrt{2}$, π, ... , dízimas infinitas não periódicas), surgem os números reais,

$$\mathbb{R} = \{\text{Números Racionais}\} \cup \{\text{Números Irracionais}\};$$

Chegados a este ponto, da “impossibilidade” da operação radiciação índice par de números negativos (por ex. $\sqrt{-1}$) surgem os números complexos $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

O conjuntos dos números complexos $\mathbb{C}$ admite a seguinte caracterização:

$$\mathbb{C} = \{(a,b) \,:\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

1.1 Conceitos Fundamentais

Dois complexos (a,b) e (c,d) são iguais se e só se, $a = c$ e $b = d$,

$$\boxed{(a,b) = (c,d) \Longleftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}} \tag{1.1.1}$$

O conjunto $\mathbb{C}$ com as operações,

$$(a,b) + (c,d) = (a+c, b+d) \;,\; \forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} \;, \tag{1.1.2}$$

$$(a,b).(c,d) = (ac - bd, ad + bc) \;,\; \forall (a,b), (c,d) \in \mathbb{C} \;, \tag{1.1.3}$$

forma o corpo $(\mathbb{C}, +, .)$.

Para além destas, define-se ainda a operação o produto de um complexo (a,b) por um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, como,

$$\lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \;,\; \forall (a,b) \in \mathbb{C} \;. \tag{1.1.4}$$

Em termos de representação geométrica, um número complexo (a,b) é representado num referêncial cartesiano como se pode observar na Figura 1.1.

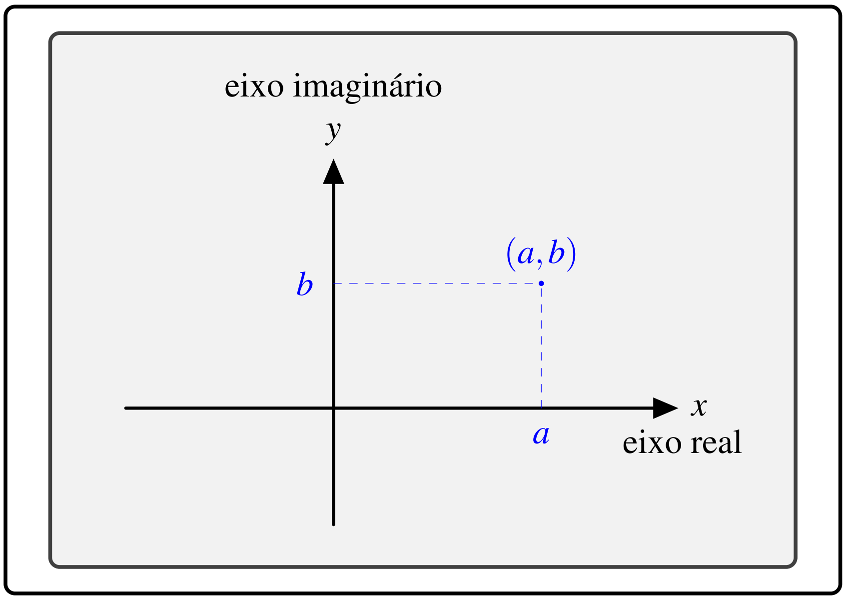

Figura 1.1: Plano de Argand

Os números reais $a \in \mathbb{R}$ estão identificados em $\mathbb{C}$ com o eixo real, e são da forma

$$(a,0) = a\,, \tag{1.1.5}$$

enquanto que os imaginários puros, são os que estão situados no eixo imaginário (eixo vertical), portanto da forma

$$(0,b) = bi\,. \tag{1.1.6}$$

A unidade $1 \in \mathbb{R}$ consiste em considerar $a = 1$ em (1.1.5) ,

$$(1,0) = 1\,.$$

Por outro lado, se $b = 1$ em (1.1.6), então

$$(0,1) = i\,.$$

Neste contexto, têm-se os seguintes resultados,

$$(a,b) = (a,0) + (0,b) = a + bi\,,$$

$$i^2 = (0,1).(0,1) = (0-1, 0-0) = (-1,0) = -1\,,$$

isto é, para $a,\, b \in \mathbb{R}$, tem-se,

$$\boxed{(a,b) = a + bi}\,, \tag{1.1.7}$$

$$\boxed{i^2 = -1}\,. \tag{1.1.8}$$

Generalizando o resultado da equação (1.1.8), com $i^0 = 1$, tem-se ainda,

$$\begin{aligned} i^0 &= 1 \\ i^1 &= i \\ i^2 &= -1 \\ i^3 &= -i \\ i^4 &= 1 \\ &\;\vdots \end{aligned}$$

isto é,

$$\boxed{i^n = i^r}\,, \tag{1.1.9}$$

onde r é o resto da divisão inteira de n por 4,

$$\begin{array}{ccc} n & & \underline{|\,4\quad} \\ & \ddots & k \\ & & r \end{array}\,, \qquad n = 4k + r\,, \qquad r, k \in \mathbb{N}\,,\ 0 \le r < 4\,.$$

Exemplo 1.1.1 *Com base na fórmula* (1.1.9) *calcule o valor de* i^{17}, i^{23} *e* i^{14}.

- *Como* $17 = 4 \times 4 + \boxed{1}$, *o resto da divisão de* 17 *por* 4 *é* $r = 1$, *tem-se* $i^{17} = i^1 = i$.
- $23 = 4 \times 5 + \boxed{3}$, *o resto da divisão de* 23 *por* 4 *é* $r = 3$, *tem-se* $i^{23} = i^3 = -i$.
- $14 = 4 \times 3 + \boxed{2}$, *o resto da divisão de* 14 *por* 4 *é* $r = 2$, *tem-se* $i^{14} = i^2 = -1$.

1.2 Forma Algébrica e Operações

De acordo com os resultados (1.1.7) e (1.1.8), $\mathbb{C}$ admite também a seguinte caracterização,

$$\mathbb{C} = \{a + bi\, :\, a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Definição 1.2.1 *Um número complexo* $z \in \mathbb{C}$ *diz-se representado na* ***Forma Algébrica*** *quando caracterizado por,*

$$\boxed{z = a + bi}\,. \tag{1.2.1}$$

Ao valor a *chama-se* ***Parte Real*** *e* b ***Parte Imaginária***, $(Re(z) = a,\ Im(z) = b)$.

Quando representados na forma algébrica $a+bi$, $c+di \in \mathbb{C}$, as operações (1.1.2), (1.1.3) e (1.1.4), com $\lambda \in \mathbb{R}$, traduzem-se na forma,

$$(a+bi)+(c+di) = (a+c)+(b+d)i\,, \tag{1.2.2}$$

$$(a+bi).(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i\,, \tag{1.2.3}$$

$$\lambda(a+bi) = (\lambda a)+(\lambda b)i\,. \tag{1.2.4}$$

Estas operações gozam das mesmas propriedades algébricas que as correspondentes no conjunto dos números reais: comutatividade, associatividade, distributividade da multiplicação em relação à adição.
Para além destas propriedades, tem-se que o complexo $0 = 0+i0$ é o elemento neutro da adição (o zero) e todo o complexo $z = a+bi$ admite **Simétrico**,

$$\boxed{-z = -a-bi},$$

de tal forma que $z+(-z) = 0$.

Relativamente à operação produto, o complexo $1 = 1+0i$ é o seu elemento neutro (ou unidade) e todo o complexo $z = a+bi \neq 0$ admite **Inverso**,

$$\boxed{z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi)}\,, \tag{1.2.5}$$

de tal forma que,

$$z.z^{-1} = 1\,.$$

Nestes termos, entende-se a operação **diferença** $z-w$ como a soma de z com o simétrico de w,

$$\boxed{z-w = z+(-w)}\,,$$

e o **quociente** $\frac{z}{w}$ como o produto de z com o inverso de w,

$$\boxed{\frac{z}{w} = z.\,w^{-1}}\,. \tag{1.2.6}$$

Exemplo 1.2.1 *Sejam $z = 1+i$ e $w = 1-\sqrt{3}i$. Calcule $-z$, $-w$, z^{-1} e $\frac{z}{w}$.*

- $-z = -1-i$, *e* $-w = -1+\sqrt{3}i$;
- $z^{-1} = \frac{1}{1^2+1^2}(1-i) = \frac{1}{2}(1-i) = \frac{1}{2}-\frac{1}{2}i$;
- $w^{-1} = \frac{1}{1^2+(-\sqrt{3})^2}(1-\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}(1-\sqrt{3}i) = \frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$;
- $\frac{z}{w} = z\,w^{-1} = \left(1+i\right)\left(\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i\right) = \left(1\times\frac{1}{4}-1\times\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(1\times\frac{\sqrt{3}}{4}+1\times\frac{1}{4}\right)i = \left(\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}\right)i$;

Definição 1.2.2 *Define-se* ***Conjugado*** *de um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$ como sendo o complexo $\bar{z}$ com a mesma parte real de z e parte imaginária simétrica,*

$$\boxed{\bar{z} = a - bi}\,. \tag{1.2.7}$$

Definição 1.2.3 *Define-se* ***Módulo*** *de um número complexo $z = a + bi \in \mathbb{C}$, ρ ou $|z|$ como sendo a distância no plano de Argand, do ponto com coordenadas $P(a,b)$ à origem $O(0,0)$,*

$$\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}}\ \ (= \rho)\,. \tag{1.2.8}$$

A cada complexo $z = a + bi$ corresponde o ponto do plano $P(a,b)$, que se designa por afixo de z. E essa correspondência é bijetiva.
No gráfico ao lado, consideram-se representados, o zero (ponto $O(0,0)$), a unidade, um número real a, um imaginário puro bi, um complexo genérico $z = a + bi \rightsquigarrow P(a,b)$, o seu conjugado $\bar{z} = a - bi \rightsquigarrow Q(a,-b)$ e o seu módulo

$$\rho = |z| = d(P,O) = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

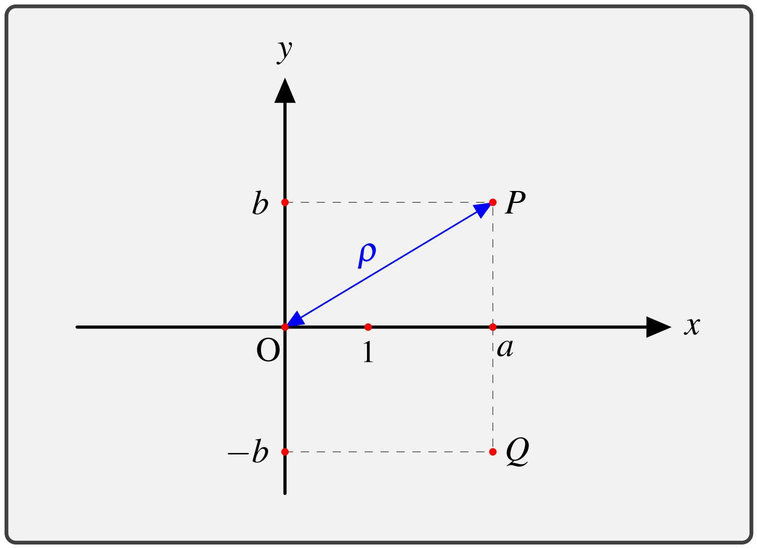

Figura 1.2: Plano de Argand

Propriedades 1.2.1 *Sejam $z = a + bi$, $w = c + di \in \mathbb{C}$, dois complexos e $\bar{z} = a - bi$, $\overline{w} = c - di$, os respetivos conjugados. Então,*

1. $\bar{\bar{z}} = z$;
2. $\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R}$, $(i.e.\ b = 0)$;
3. $\overline{z + w} = \bar{z} + \overline{w}$;
4. $\overline{z.w} = \bar{z}\,.\,\overline{w}$;
5. $z.\bar{z} = \rho^2$;

6. $z^{-1} = \frac{1}{\rho^2}\,\bar{z}$, *com* $z \neq 0$;

7. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $w \neq 0$;

8. $|z\,w| = |z|\;|w|$;

9. $|z+w| \leq |z| + |w|$, (*desigualdade triangular*) ;

10. $|z-w| \geq |z| - |w|$.

Dem.

1. $\bar{\bar{z}} = \overline{\overline{a+bi}} = \overline{a-bi} = a+bi = z$;

2. $\bar{z} = z \iff a-bi = a+bi \iff a = a \wedge -b = b \iff b = 0 \iff z \in \mathbb{R}$;

3. $\overline{z+w} = \overline{(a+c)+(b+d)i} = (a+c)-(b+d)i = a-bi+c-di = \overline{a+bi} + \overline{c+di} = \bar{z} + \overline{w}$;

4. $\overline{z.w} = \overline{(ac-bd)+(ad+cb)i} = (ac-bd)-(ad+cb)i = (ac-bd)+(-ad-cb)i =$
   $= (a-bi).(c-di) = \bar{z}\,.\,\overline{w}$;

5. $z.\bar{z} = (a+bi).(a-bi) = (aa-b(-b))+(ba+a(-b))i = a^2+b^2+0i = \rho^2$;

6. $z^{-1} = \frac{1}{a^2+b^2}(a-bi) = \frac{1}{\rho^2}\bar{z}$;

7. $\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \overline{\left(\frac{z}{|w|^2}\overline{w}\right)} = \frac{1}{|w|^2}\overline{z\,\overline{w}} = \frac{1}{|w|^2}\bar{z}\,w = \bar{z}\;\frac{1}{|\overline{w}|^2}w = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$, $w \neq 0$;

8. $|z\,w| = |(ac-bd)+(ad+bc)i| = \sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2} =$
   $= \sqrt{a^2c^2-2acbd+b^2d^2+a^2d^2+2adbc+b^2c^2} = \sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(d^2+c^2)} =$
   $= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} = |z|\,|w|$;

9. $|z+w|^2 = (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\bar{z}+\overline{w}) = z\bar{z}+z\overline{w}+\bar{z}w+w\overline{w} = |z|^2+z\overline{w}+\bar{z}w+|w|^2$.

   Como $\overline{z\overline{w}} = \bar{z}w$, *então* $z\overline{w}+\bar{z}w = 2Re(zw) \leq 2|z|\,|w|$.
   Assim, $|z|^2+z\overline{w}+\bar{z}w+|w|^2 \leq |z|^2+2|z|\,|w|+|w|^2 = (|z|+|w|)^2$.
   Logo, calculando a raiz quadrada de ambos os membros, tem-se $|z+w| \leq |z|+|w|$.

10. $|z-w|^2 = (z-w)\overline{(z-w)} = (z-w)(\bar{z}-\overline{w}) = z\bar{z}-z\overline{w}-\bar{z}w+w\overline{w} = |z|^2-z\overline{w}-\bar{z}w+|w|^2$.

    Como $z\overline{w}+\bar{z}w = 2Re(zw) \leq 2|z|\,|w| \implies -z\overline{w}-\bar{z}w \geq -2|z|\,|w|$.
    Assim, $|z|^2-z\overline{w}-\bar{z}w+|w|^2 \geq |z|^2-2|z|\,|w|+|w|^2 = (|z|-|w|)^2$.
    Logo, calculando a raiz quadrada de ambos os membros, tem-se $|z-w| \geq |z|-|w|$. □

1.3 Forma Trigonométrica e Operações

Os pontos do plano XOY, por outro lado, admitem outra identificação, para além das coordenadas cartesianas (a,b), chamadas coordenadas polares (ρ,θ)[1] que, no caso dos complexos se designa de **Forma Trigonométrica**. A primeira coordenada ρ já está representada no grafico anterior, falta definir o argumento θ.

De acordo com a construção (Figura 1.3),tem-se,

$$\begin{cases} a = \rho\cos(\theta) \\ b = \rho\,\mathrm{sen}(\theta) \end{cases} \implies \begin{cases} \cos(\theta) = \frac{a}{\rho} \\ \mathrm{sen}(\theta) = \frac{b}{\rho} \end{cases}, \tag{1.3.1}$$

ou ainda, $\tan(\theta) = \frac{b}{a}$.

Seja $z = a + bi$ um complexo e $P(a,b)$ respetivo ponto no plano.

O módulo de z, representa a distância $d(P,O)$,

$$\rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

O argumento de z, corresponde ao ângulo θ formado entre o eixo $\overrightarrow{OX}$ e a semi-reta $[OP]$,

$$\arg(z) = \arctan\left(\frac{b}{a}\right).$$

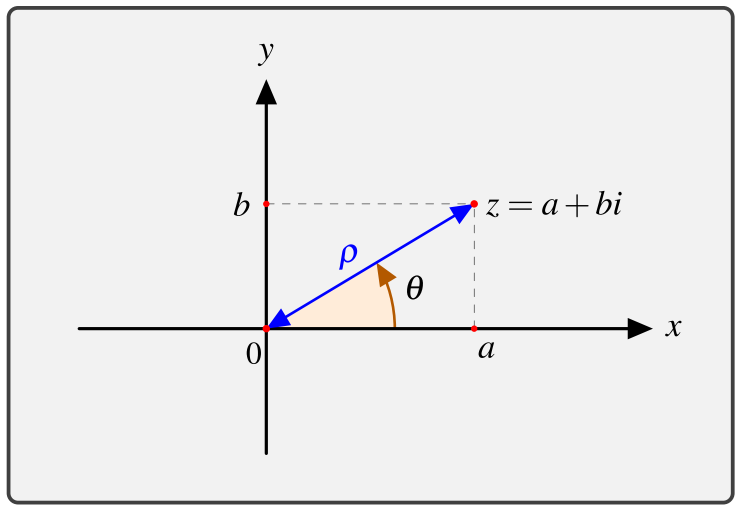

Figura 1.3: Forma Trigonométrica

Reciprocamente,

$$\begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{a^2+b^2} \\ \theta = \arccos\left(\frac{a}{\rho}\right) \\ \theta = \mathrm{arcsen}\left(\frac{b}{\rho}\right) \end{cases}, \tag{1.3.2}$$

onde $\theta \in [0, 2\pi[$ (argumento positivo mínimo).

[1] ρ, a distância do ponto P à origem O e θ, o ângulo formado entre o eixo $\overline{OX}$ e a semireta $[OP]$.

Definição 1.3.1 *Um número complexo $z \in \mathbb{C}$ diz-se representado na **Forma Trigonométrica** quando caracterizado por,*

$$z = \rho\left(\cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta)\right), \ \theta \in [0, 2\pi[. \tag{1.3.3}$$

É ainda usual abreviar a expressão $\cos(\theta) + \mathrm{sen}(\theta)i$ *e escrever simplesmete* $\mathrm{cis}(\theta)$ *ou* $e^{i\theta}$*,*

$$\mathrm{cis}(\theta) = e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\,\mathrm{sen}(\theta).$$

Tendo em conta os quocientes que definem as funções $\mathrm{tg}(x)$ e $\cot(x)$, apresentam-se os valores relativos aos principais ângulos do 1º quadrante, 0, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$.

x	$\mathrm{sen}(x)$	$\cos(x)$	$\mathrm{tg}(x)$	$\cot(x)$
0	0	1	0	$(+\infty)$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{2}$	1	0	$(+\infty)$	0

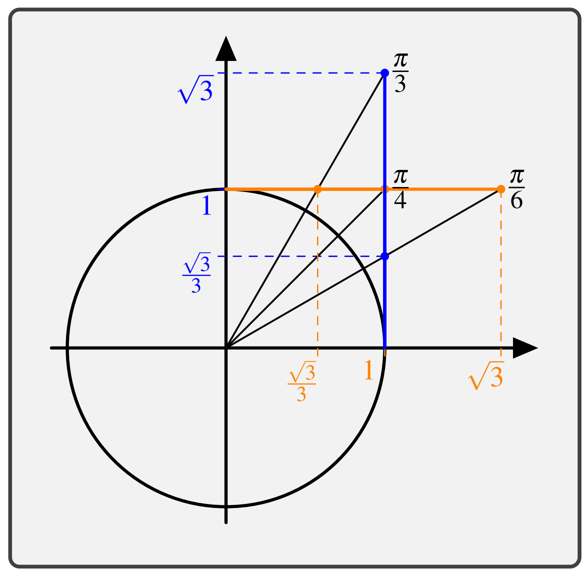

Figura 1.4: Quadro com os valores das funções trigonométricas relativos aos principais ângulos do 1º quadrante e a representação destes no círculo trigonométrico.

Exemplo 1.3.1 *Considerando os complexos do exemplo 1.2.1, represente $z = 1 + i$, $w = 1 - \sqrt{3}i$, $-z$, $-w$, $\bar{z}$, $\overline{w}$, z^{-1} e w^{-1} na forma trigonométrica.*

- $|z| = \sqrt{(1)^2 + (1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4}$. *Logo,* $z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$;
- $|-z| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{-1}{-1}\right) = \frac{5\pi}{4}$. *Logo,* $-z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{4}$;
- $|\bar{z}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{-1}{1}\right) = \frac{7\pi}{4}$. *Logo,* $\bar{z} = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{7\pi}{4}$;
- $|w| = \sqrt{(1)^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \arctan\left(\frac{-\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{5\pi}{3}$. *Logo,* $w = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{5\pi}{3}$;
- $|-w| = \sqrt{(-1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{-1}\right) = \frac{2\pi}{3}$. *Logo,* $w = 2\,\mathrm{cis}\,\frac{2\pi}{3}$;

- $|\overline{w}| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$, $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right) = \frac{\pi}{3}$. *Logo,* $w = 2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$;
- $z^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$, $|z^{-1}| = \frac{1}{|z|} = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\theta = \arctan\left(\frac{1/2}{-1/2}\right) = \frac{3\pi}{4}$. *Logo,* $z^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{cis}\frac{3\pi}{4}$;
- $w^{-1} = \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$, $|w^{-1}| = \frac{1}{|w|} = \frac{1}{2}$, $\theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}/4}{1/4}\right) = \frac{\pi}{3}$. *Logo,* $w^{-1} = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$;

Na Figura 1.5 apresentam-se os sinais das funções seno e cosseno nos quadrantes do círculo trigonométrico. tendo em conta a respetiva periodicidade.

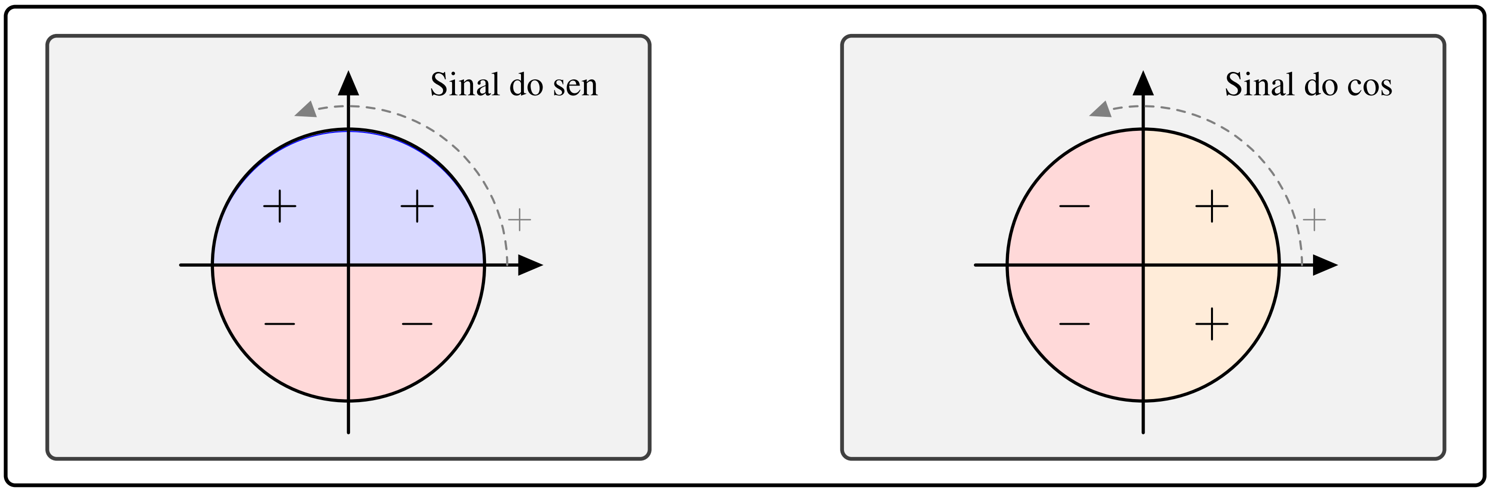

Figura 1.5: Sinal das funções seno e cosseno nos quadrantes do círculo trigonométrico.

Propriedades 1.3.1 *Sejam* $z = |z|\operatorname{cis}(\alpha)$, $w = |w|\operatorname{cis}(\beta) \in \mathbb{C}$ *dois números complexos representados na forma trigonométrica. Têm-se as seguintes propriedades:*

1. *Os complexos z e w são iguais se,*

$$\boxed{z = w \iff \begin{cases} |w| = |z| \\ \arg(w) = \arg(z) + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \end{cases}}; \tag{1.3.4}$$

2. *O conjugado de z verifica,*

$$\begin{cases} |\overline{z}| = |z| \\ \arg(\overline{z}) = -\arg(z) \end{cases};$$

3. *O inverso de $z \neq 0$ verifica,*

$$\begin{cases} |z^{-1}| = \frac{1}{|z|} \\ \arg(z^{-1}) = -\arg(z) \end{cases};$$

4. *as operações, produto* (1.2.3) *e quociente* (1.2.6) *escrevem-se na forma,*

   i) o produto,
$$\boxed{z.w = |z|\,|w|\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta)}\,; \tag{1.3.5}$$

   ii) o quociente
$$\boxed{\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\,\mathrm{cis}(\alpha-\beta)}\,,\ w \neq 0\,. \tag{1.3.6}$$

Dem.

1. *De* (1.1.1)*,* $z = w$ *se e só se* $Re(z) = Re(w) \wedge Im(z) = Im(w)$*. Na forma trigonométrica,*

$$\begin{cases} |z|\cos(\alpha) = |w|\cos(\beta) \\ |z|\,\mathrm{sen}(\alpha) = |w|\,\mathrm{sen}(\beta) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \quad |z|^2\cos^2(\alpha) = |w|^2\cos^2(\beta) \\ \underline{+|z|^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) = |w|^2\,\mathrm{sen}^2(\beta)} \\ |z|^2\cos^2(\alpha) + |z|^2\,\mathrm{sen}^2(\alpha) = |w|^2\cos^2(\beta) + |w|^2\,\mathrm{sen}^2(\beta) \end{cases},$$

   ou seja, $|z|^2\big(\cos^2(\alpha)+\mathrm{sen}^2(\alpha)\big) = |w|^2\big(\cos^2(\beta)+\mathrm{sen}^2(\beta)\big) \Longleftrightarrow |z|^2 = |w|^2$*, pelo que* $|z| = |w| \geq 0$*.*

   Admitindo que $|z| = |w|$*, então*

$$\begin{cases} \cos(\alpha) = \cos(\beta) \\ \mathrm{sen}(\alpha) = \mathrm{sen}(\beta) \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \beta = \alpha + 2k\pi\,,\ k \in \mathbb{Z}\,;$$

2. *O conjugado verifica,* $\overline{z} = |z|\big(\cos(\alpha) - \mathrm{sen}(\alpha)i\big) = |z|\big(\cos(-\alpha) + \mathrm{sen}(-\alpha)i\big) = |z|\,\mathrm{cis}(-\alpha)$*.*

3. *O inverso de* $z \neq 0$*, por definição, verifica* $z^{-1} = \frac{1}{z.\overline{z}}\overline{z} = \frac{1}{|z|^2}\overline{z}$*. Logo,*

$$\begin{cases} |z^{-1}| = \frac{1}{|z|^2}|\overline{z}| = \frac{1}{|z|^2}|z| = \frac{1}{|z|} \\ \arg(z^{-1}) = \arg(\overline{z}) = -\arg(z) \end{cases};$$

4. *as operações, produto* (1.2.3) *e quociente* (1.2.6) *escrevem-se na forma,*

   i) $z.w = |z|\big(\cos(\alpha)+\mathrm{sen}(\alpha)i\big).|w|\big(\cos(\beta)+\mathrm{sen}(\beta)i\big)$
$$= |z|\,|w|\,\big\{\big(\cos(\alpha)\cos(\beta) - \mathrm{sen}(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta)\big) + \big(\cos(\alpha)\,\mathrm{sen}(\beta) + \mathrm{sen}(\alpha)\cos(\beta)\big)i\big\}$$
$$= |z|\,|w|\big(\cos(\alpha+\beta) + \mathrm{sen}(\alpha+\beta)i\big) = |z|\,|w|\,\mathrm{cis}(\alpha+\beta);$$

   ii) o quociente, por definição, verifica,
$$\frac{z}{w} = z.w^{-1} = \big(|z|\,\mathrm{cis}(\alpha)\big)\big(\frac{1}{|w|}\mathrm{cis}(-\beta)\big) = |z|\frac{1}{|w|}\mathrm{cis}(\alpha+(-\beta)) = \frac{|z|}{|w|}\mathrm{cis}(\alpha-\beta). \qquad \square$$

Propriedades 1.3.2 (Fórmula de Moivre) *Seja* $z = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha), \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$. *Então,*

$$\boxed{z^n = |z|^n\ \mathrm{cis}(n\,\alpha)}\,. \tag{1.3.7}$$

Dem.

Para $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} z^1 &= |z|\,\mathrm{cis}(\alpha) = |z|^1\,\mathrm{cis}(1.\alpha); \\ &\vdots \\ z^n &= |z|^n\,\mathrm{cis}(n\alpha); \\ z^{n+1} &= z.z^n = \big(|z|\,\mathrm{cis}(\alpha)\big)\big(|z|^n\,\mathrm{cis}(n\alpha)\big) = |z|^{n+1}\,\mathrm{cis}\big((n+1)\alpha\big). \end{aligned}$$

Para $-n < 0$,

$$\begin{aligned} z^{-1} &= \frac{1}{|z|}\,\mathrm{cis}(-\alpha) = |z|^{-1}\,\mathrm{cis}(-1.\alpha) \\ &\vdots \\ z^{-n} &= \big(z^{-1}\big)^n = |z^{-1}|^n\,\mathrm{cis}\,\big(n(-\alpha)\big) = |z|^{-n}\,\mathrm{cis}(-n\alpha)\,. \end{aligned}$$

Para $n = 0$, $z^0 = z^1.z^{-1} = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha).|z|^{-1}\,\mathrm{cis}(-\alpha) = |z||z|^{-1}\,\mathrm{cis}(\alpha-\alpha) = |z|^0\,\mathrm{cis}(0.\alpha)$.

Portanto, $z^n = |z|^n\ \mathrm{cis}(n\,\alpha)\,, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$. □

Exemplo 1.3.2 *Seja* $z = 1 - i$, $w = 1 + 0i$ *e* $u = 0 + i$. *Calcule* z^3, w^{-2} *e* u^{22}. *Tem-se:*

- *Passando o complexo z para a forma trigonométrica, com,*

  $$|z| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \quad e \quad \arg(z) = \arctan(-1) = \tfrac{7\pi}{4},$$

  tem-se,

  $$z^3 = \big(\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\tfrac{7\pi}{4})\big)^3 = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\tfrac{21\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\tfrac{(2\times 8+5)\pi}{4}) = 2\sqrt{2}\,\mathrm{cis}(\tfrac{5\pi}{4}).$$

- $|w| = \sqrt{1^2+0^2} = 1$ *e* $\arg(w) = 0$, *pelo que,*

  $$w^{-2} = \big(1\,\mathrm{cis}(0)\big)^{-2} = 1^{-2}\,\mathrm{cis}(-2\times 0) = \mathrm{cis}(0).$$

- $|u| = \sqrt{0^2+1^2} = 1$ *e* $\arg(u) = \frac{\pi}{2}$, *logo,*

  $$u^{22} = \big(1\,\mathrm{cis}(\tfrac{\pi}{2})\big)^{22} = 1^{22}\,\mathrm{cis}(\tfrac{22\pi}{2}) = \mathrm{cis}(\tfrac{(5\times 4+2)\pi}{2}) = \mathrm{cis}(\pi).$$

Propriedades 1.3.3 (Fórmula de Moivre) *Seja* $z = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha), \in \mathbb{C}$ *e* $n \in \mathbb{Z}$. *Então,*

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\ \mathrm{cis}\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,. \tag{1.3.8}$$

Dem. *Seja* $w = |w|\,\mathrm{cis}(\theta)$ *um complexo tal que* $w^n = z$.

Nestas condições, tem-se que

$$|w|^n\,\mathrm{cis}(n\theta) = |z|\,\mathrm{cis}(\alpha) \overset{\text{Prop. 1.3.1}}{\iff} |w|^n = |z| \wedge n\theta = \alpha + 2k\pi \iff |w| = \sqrt[n]{|z|} \wedge \theta = \tfrac{\alpha+2k\pi}{n}. \qquad \square$$

Exemplo 1.3.3 *Considerando os complexos do exemplo 1.2.1, calcule e represente os afixos de* $\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{1+i}$ *e de* $\sqrt{w} = \sqrt{1-\sqrt{3}\,i}$.

- *Passando o complexo* z *para a forma trigonométrica, tem-se* $z = \sqrt{2}\,\mathrm{cis}\,\frac{\pi}{4}$.

  Assim,

  $$\sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{\sqrt{2}}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{\pi/4+2k\pi}{4}\right),$$

  ou

  $$\begin{aligned}
  k = 0 &\implies \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{\pi/4}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{\pi}{16}\right)\\
  k = 1 &\implies \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{\pi/4+2\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{9\pi}{16}\right)\\
  k = 2 &\implies \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{\pi/4+4\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{17\pi}{16}\right)\\
  k = 3 &\implies \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{\pi/4+6\pi}{4}\right) = \sqrt[8]{2}\,\mathrm{cis}\left(\tfrac{25\pi}{16}\right);
  \end{aligned}$$

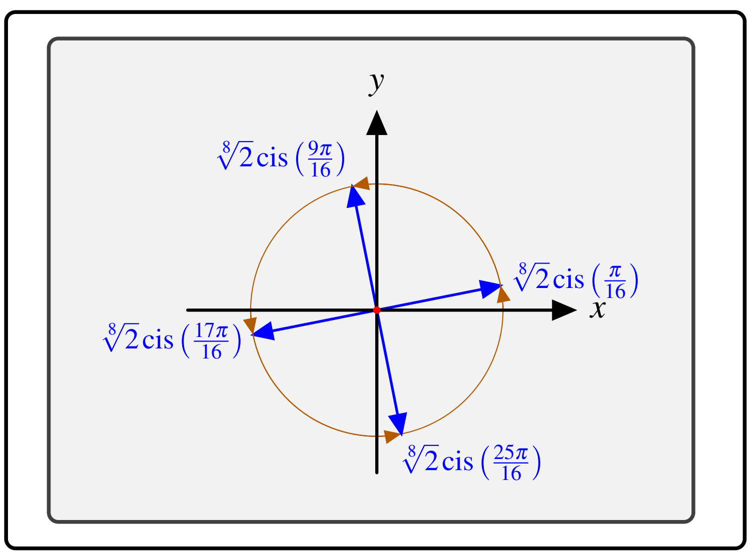

Figura 1.6: Raízes de $|z|$ na Forma Trigonométrica

- *Passando o complexo w para a forma trigonométrica, tem-se $w = 2\operatorname{cis}\frac{5\pi}{3}$. Assim,*

$$\sqrt[2]{w} = \sqrt[2]{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{5\pi/3+2k\pi}{2}\right),$$

  ou,

$$\begin{aligned} k=0 &\implies \sqrt[2]{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{5\pi/3}{2}\right) = \sqrt[2]{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{5\pi}{6}\right)\\ k=1 &\implies \sqrt[2]{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{5\pi/3+2\pi}{2}\right) = \sqrt[2]{2}\operatorname{cis}\left(\tfrac{11\pi}{6}\right); \end{aligned}$$

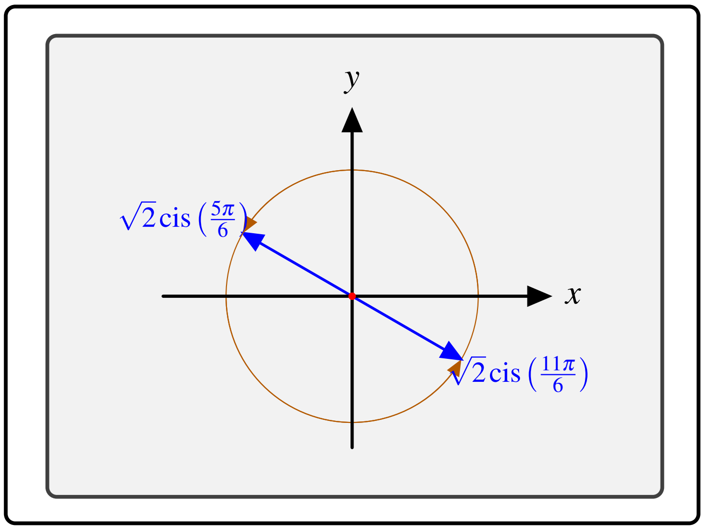

Figura 1.7: Raízes de $|w|$ na Forma Trigonométrica

Propriedades 1.3.4 (Fórmula de Moivre – Generalização) *Seja $z \in \mathbb{C}$, $t = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$, $q \neq 0$ com $mdc(p,q) = 1$. Então,*

$$z^t = z^{\frac{p}{q}} = \left(z^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\sqrt[q]{z}\right)^p = \sqrt[q]{z^p}\,. \tag{1.3.9}$$

Dem. *A fórmula é válida para o módulo $|z| \geq 0$, $|z|^t = \sqrt[q]{|z|^p} = \left(\sqrt[q]{z}\right)^p$. Pode assim considerar-se $z = cis(\alpha)$. Para $k = 0, 1, \ldots, q-1$, atendendo a* (1.3.4)*, $\operatorname{cis}(\alpha) = \operatorname{cis}(\alpha + 2m\pi)$, $\forall\, m \in \mathbb{Z}$, tem-se,*

$$\sqrt[q]{z^p} = \left(\operatorname{cis}(p\alpha)\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\operatorname{cis}(p\alpha + 2(p-1)k\pi)\right)^{\frac{1}{q}} = \operatorname{cis}\left(\tfrac{p\alpha+2(p-1)k\pi+2k\pi}{q}\right) = \operatorname{cis}\left(\tfrac{p\alpha+2pk\pi}{q}\right) = \operatorname{cis}\left(p\,\tfrac{\alpha+2k\pi}{q}\right) =$$
$$= \left(\operatorname{cis}(\tfrac{\alpha+2k\pi}{q})\right)^p = \left(\sqrt[q]{z}\right)^p$$

Generaliza-se ainda a fórmula (1.3.7) *para z^n, com $n \in \mathbb{Z}$, pois a expressão comum a $\sqrt[q]{z^p}$ e $\left(\sqrt[q]{z}\right)^p$ pode representar-se na forma,* $\operatorname{cis}\left(p\,\frac{\alpha+2k\pi}{q}\right) = \operatorname{cis}\left(\frac{p}{q}(\alpha+2k\pi)\right) = \operatorname{cis}\left(t(\alpha+2k\pi)\right) = \left(\operatorname{cis}(\alpha+2k\pi)\right)^t = z^t$. □

Na sequência de (1.3.9), são válidas as propriedades habituais das potências de números reais, relativamente às operações produto e quociente.