3.3- Primitivação por partes.

Sejam $f, g : I \to R$, I intervalo de R, tais que f é primitivável em I e g é derivável em I. Então $f.g$ é primitivável em I e

$$\boxed{\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx.g(x) - \int \left[\int f(x)dx.g'(x)\right]dx},$$

a menos de uma constante.

Consideremos as funções h e g tais que h é primitivável em I e g derivável em I.

Então,

$$[h(x).g(x)]' = h'(x).g(x) + h(x).g'(x),$$

isto é, $$h'(x).g(x) = [h(x).g(x)]' - h(x).g'(x).$$

Primitivando ambos os membros da igualdade, obtemos

$$\int h'(x).g(x)dx = h(x).g(x) - \int h(x).g'(x)dx.$$

Considerando $h'(x) = f(x)$, isto é, $h(x) = \int f(x)dx$, resulta

$$\int [f(x).g(x)]dx = \int f(x)dx.g(x) - \int \left[\int f(x)dx.g'(x)\right]dx.$$

Exemplos:

1. $\int \ln x dx = \int 1 \cdot \ln x dx = x \ln x - \int x \frac{1}{x} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + c = x(\ln x - 1) + c$.

2. $\int e^x x dx = \int e^x dx . x - \int \left(\int e^x dx . x'\right) dx = e^x . x - \int e^x dx = e^x . x - e^x + c = e^x (x - 1) + c$.

3. $\int x\ln x dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \int\left(\frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{1}{2}\int x dx = \frac{x^2}{2}.\ln x - \frac{x^2}{4} + c$.

4. $\int x^2 e^{-x}dx = \int e^{-x}x^2 dx = -e^{-x}x^2 - \int\left(-e^{-x}\right).(2x)dx = -e^{-x}x^2 + 2\int e^{-x}.xdx \overset{\substack{\text{novamente por partes}\\ \downarrow}}{=}$

$= -e^{-x}x^2 + 2\left\{-e^{-x}x - \int\left(-e^{-x}\right).1dx\right\} = -e^{-x}x^2 - 2e^{-x}.x + 2\int e^{-x}dx = -e^{-x}x^2 - 2xe^{-x} - 2e^{-x} + c$.

5. $\int \frac{\ln(\ln x)}{x}dx = \int \tfrac{1}{x}\ln(\ln x)dx = \ln|x|.\ln(\ln x) - \int \ln|x|.\frac{(\ln x)'}{\ln x}dx = \ln|x|.\ln(\ln x) - \int \tfrac{1}{x}dx =$

$= \ln|x|.\ln(\ln x) - \ln|x| + c = \ln|x|.[\ln(\ln x) - 1] + c$.

6. $\int \frac{x}{\cos^2 x}dx = \int \frac{1}{\cos^2 x}\cdot xdx = \tan x \cdot x - \int \tan x dx = x\tan x + \ln|\cos x| + c$.

7. $\int e^x 2^x dx = e^x 2^x - \int e^x 2^x \ln 2 dx = e^x 2^x - \ln 2\int e^x 2^x dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (1+\ln 2)\int e^x 2^x dx = e^x 2^x \Leftrightarrow \int e^x 2^x dx = \frac{e^x 2^x}{(1+\ln 2)} + c$.

8. $\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x dx \overset{\substack{\text{novamente por partes}\\ \downarrow}}{=} e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)dx\right] =$

$= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\int e^x \sin x dx = e^x \sin x - e^x \cos x \Leftrightarrow \int e^x \sin x dx = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + c$.

9. $\int \frac{x\cdot \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x\cdot\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\arcsin x dx = -\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\arcsin x + \int\left(1-x^2\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx =$

$= -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + \int 1dx = -\sqrt{1-x^2}\arcsin x + x + c$.

10. $\int (\sec x \cdot \operatorname{cosec} x)^2 dx = \int \sec^2 x \cdot \operatorname{cosec}^2 x dx = \tan x \cdot \operatorname{cosec}^2 x - \int \tan x \cdot \left(\frac{1}{\sin^2 x}\right)' dx =$

$= \tan x \cdot \operatorname{cosec}^2 x - \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{-2\sin x \cos x}{\sin^4 x} dx = \tan x \cdot \operatorname{cosec}^2 x + 2\int \frac{1}{\sin^2 x} dx =$

$= \tan x \cdot \operatorname{cosec}^2 x - 2\operatorname{cotg} x + c$.

11. $\int \cos x \cdot \ln|1+\cos x| dx = \sin x \cdot \ln(1+\cos x) - \int \sin x \cdot \frac{-\sin x}{1+\cos x} dx =$

$= \sin x \cdot \ln(1+\cos x) + \int \frac{\sin^2 x}{1+\cos x} dx == \sin x \cdot \ln(1+\cos x) + \int \frac{1-\cos^2 x}{1+\cos x} dx =$

$= \sin x \cdot \ln(1+\cos x) + \int \frac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{1+\cos x} dx = \sin x \cdot \ln(1+\cos x) + \int (1-\cos x) dx =$

$= \sin x \cdot \ln(1+\cos x) + x - \sin x + c$.

3.4- Primitivação de potências de funções trigonométricas.

3.4.1 – Potências ímpares de seno e cosseno.

Destaca-se uma unidade à potência ímpar e o fator resultante passa-se para a co-função através da fórmula fundamental: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$.

Exemplos:

1. $\int \cos^3 x dx = \int (\cos x \cdot \cos^2 x) dx = \int \cos x (1-\sin^2 x) dx = \int \cos x dx - \int (\cos x \cdot \sin^2 x) dx =$

$= \sin x - \frac{1}{3}\sin^3 x + c$.

2. $\int \sin^5 x dx = \int \sin x \cdot \sin^4 x dx = \int \sin x \cdot (\sin^2 x)^2 dx = \int \sin x \cdot (1-\cos^2 x)^2 dx =$

$= \int \sin x \cdot (1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x) dx = \int \sin x dx - 2\int (\sin x \cdot \cos^2 x) dx + \int (\sin x \cdot \cos^4 x) dx =$

$= -\cos x + \frac{2}{3}\cos^2 x - \frac{1}{5}\cos^5 x + c$.

3.4.2 – Potências pares de seno e cosseno.

Passa-se para o arco duplo através das fórmulas:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x) \ \text{ e } \ \cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) .$$

Exemplos:

1. $\int \cos^2 x dx = \int \frac{1}{2}(1+\cos 2x) dx = \frac{1}{2}\int 1 dx + \frac{1}{2}\int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\sin 2x + c$.

2. $\int \sin^4 x dx = \int \left(\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\right)^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x) dx =$

$= \frac{1}{4}\left\{\int 1 dx - 2\int \cos 2x dx + \int \cos^2 2x dx\right\} = \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \int \frac{1}{2}(1+\cos 4x) dx\right\} =$

$= \frac{1}{4}\left\{x - \sin 2x + \frac{1}{2}x + \frac{1}{8}\sin 4x\right\} + c = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{1}{32}\sin 4x + c$.

3.4.3 – Potências pares e ímpares de tangente e cotangente.

Destaca-se $\tan^2$ ou cotan^2 e aplica-se uma das fórmulas:

$$\tan^2 x = \sec^2 x - 1 \ \text{ ou } \ \operatorname{cotan}^2 x = \operatorname{cosec}^2 x - 1 .$$

Exemplos:

1. $\int \tan^5 x dx = \int (\tan^3 x \cdot \tan^2 x) dx = \int \tan^3 x(\sec^2 x - 1) dx = \int (\tan^3 x \cdot \sec^2 x) dx - \int \tan^3 x dx =$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int (\tan x \cdot \tan^2 x) dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x(\sec^2 x - 1) dx =$

$= \frac{1}{4}\tan^4 x - \int \tan x \cdot \sec^2 x dx + \int \tan x dx = \frac{1}{4}\tan^4 x - \frac{1}{2}\tan^2 x - \ln|\cos x| + c$.

2. $\int \text{cotan}^2 x dx = \int (\text{cosec}^2 x - 1) dx = \int \text{cosec}^2 x dx - \int 1 dx = \text{cotan} x - x + c$.

3.4.4 – Potências pares de secante e cossecante.

Destaca-se $\sec^2$ ou cosec^2 e ao fator resultante aplica-se uma das fórmulas:

$$\sec^2 x = \tan^2 x + 1 \text{ ou } \text{cosec}^2 x = \text{cotan}^2 x + 1.$$

Exemplos:

1. $\int \sec^4 x dx = \int (\sec^2 x \cdot \sec^2 x) dx = \int \sec^2 x(\tan^2 x + 1) dx = \int (\sec^2 x \cdot \tan^2 x) dx + \int \sec^2 x dx =$

$= \frac{1}{3}\tan^3 x + \tan x + c$.

2. $\int \text{cosec}^6 x dx = \int (\text{cosec}^2 x \cdot \text{cosec}^4 x) dx = \int \text{cosec}^2 x(\text{cotan}^2 x + 1)^2 dx =$

$= \int \text{cosec}^2 x(\text{cotan}^4 x + 2\text{cotan}^2 x + 1) dx = \int \text{cosec}^2 x \cdot \text{cotan}^4 x dx + 2\int \text{cosec}^2 x \cdot \text{cotan}^2 x dx +$

$+ \int \text{cosec}^2 x dx = \frac{1}{5}\text{cotan}^5 x + \frac{2}{3}\text{cotan}^3 x + \text{cotan} x + c$.

3.4.5 – Potências ímpares de secante e cossecante.

Destaca-se $\sec^2$ ou cosec^2 e aplica-se o método de primitivação por partes, começando por este fator.

Exemplo:

$$\int \sec^3 x dx = \int \sec^2 x \cdot \sec x dx = \tan x \cdot \sec x - \int (\tan x \cdot \sec x . \tan x) dx =$$

$$= \tan x \cdot \sec x - \int (\tan^2 x \cdot \sec x) dx = \tan x \cdot \sec x - \int (\tan^2 x) \sec x dx =$$

$$= \tan x \cdot \sec x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx = \tan x \cdot \sec x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2\int \sec^3 x dx = \tan x \cdot \sec x + \int \sec x dx \Leftrightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\left[\tan x \cdot \sec x + \int \sec x dx\right] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int \sec^3 x dx = \frac{1}{2}\left[\tan x \cdot \sec x + \ln\left|\sec x + \tan x\right|\right] + c .$$

Exercícios propostos:

1. Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de primitivação por partes:

a) $x\,e^{-x}$ b) $2x^3 e^x$ c) $e^{x-1} 3^x$

d) $x \,\text{sen}\, x$ e) $x \sec^2 x$ f) $\text{sen}\, x . \ln(1 + \text{sen}\, x)$

g) $2x \ln^2 x$ h) $\cos^2 x . \text{sen}\, x . e^{\cos x}$ i) $\log^2 3x$

j) $\text{arc tg}\, x$ k) $\text{arc cos} \frac{1}{x}$ l) $\cos(\ln x)$

m) $\ln \frac{x}{x-1}$ n) $e^{-2x} \text{sen}\, x$ o) $x^3 e^x$

2. Calcule as primitivas das seguintes funções trigonométricas:

a) $\cos^3 x$ b) $\text{sen}^3 x$ c) $\text{sen}^2 x$ d) $\cos^4 x$

e) $\operatorname{cotg}^3 x$ f) $\sec^4 x$ g) $\operatorname{tg}^4 x$ h) $\operatorname{cosec}^3 x$

i) $\dfrac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^4 x}$ j) $\cos x \cdot \operatorname{sen}^2 x$ k) $\dfrac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}$ l) $\sin^5 x.\sqrt[3]{\cos x}$