3.4- Primitivação por substituição.

Este método consiste em transformar a função integranda numa outra função que seja possível primitivar pelos métodos conhecidos, através de uma mudança de variável conveniente.

A aplicação deste método justifica-se nos casos em que a primitiva inicial se revela difícil ou mesmo impossível de calcular de outro modo.

Existem várias mudanças de variável pré-definidas aplicáveis a determinado tipo de funções, para as quais dispomos de tabelas de substituição.

O método de primitivação por substituição assenta na inversão da regra de derivação da função composta. Portanto, teoricamente, dada a primitiva $\int f(x)dx$, fazendo a mudança de variável $x=\varphi(t)$, resulta $\boxed{\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)].\varphi'(t)dt}$.

Exemplos:

1. $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx$

Mudança de variável: $e^x=t \Rightarrow x=\underbrace{\ln t}_{\varphi(t)}$; $\varphi'(t)=\frac{1}{t}$.

$$\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\int \frac{t}{t+t^{-1}}.\frac{1}{t}dx=\int \frac{1}{t+\frac{1}{t}}dx=\int \frac{t}{t^2+1}dx=\frac{1}{2}\ln\left|t^2+1\right|+c.$$

Regressando à variável original, temos $\int \frac{e^x}{e^x+e^{-x}}dx=\frac{1}{2}\ln\left|e^{2x}+1\right|+c$.

2. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^5}}dx$

Mudança de variável: $x=t^m$, $m=m.m.c.(2,3)=6$. Ou seja, $x=t^6 \Rightarrow \varphi'(t)=6t^5$.

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^5}}dx=\int \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}-x^{\frac{5}{2}}}dx=\int \frac{1}{t^9-t^{10}}.6t^5dt=6\int \frac{t^5}{t^9(1-t)}dt=6\int \frac{1}{t^4(1-t)}dt=(*)$$

$$\frac{1}{t^4(1-t)}=\frac{A_1}{t^4}+\frac{A_2}{t^3}+\frac{A_3}{t^2}+\frac{A_4}{t}+\frac{B}{1-t}\Rightarrow 1=A_1(1-t)+A_2t(1-t)+A_3t^2(1-t)+A_4t^3(1-t)+Bt^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1=(B-A_4)t^4+(A_4-A_3)t^3+(A_3-A_2)t^2+(A_2-A_1)t+A_1 \Rightarrow \begin{cases} B-A_4=0 \\ A_4-A_3=0 \\ A_3-A_2=0 \\ A_2-A_1=0 \\ A_1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B=1 \\ A_4=1 \\ A_3=1 \\ A_2=1 \\ A_1=1 \end{cases}$$

$$(*)=6\int\left(\frac{1}{t^4}+\frac{1}{t^3}+\frac{1}{t^2}+\frac{1}{t}+\frac{1}{1-t}\right)dt=6\left\{\frac{t^{-3}}{-3}+\frac{t^{-2}}{-2}+\frac{t^{-1}}{-1}+\ln|t|-\ln|1-t|\right\}+c=$$

$$=-\frac{2}{t^3}-\frac{3}{t^2}-\frac{6}{t}+6\ln|t|-6\ln|1-t|+c.$$

Passando à variável original, $x=t^6 \Rightarrow t=\sqrt[6]{x}$, resulta

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^3}-\sqrt[3]{x^5}}dx=-\frac{2}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt[3]{x}}-\frac{6}{\sqrt[6]{x}}+6\ln\left|\sqrt[6]{x}\right|-6\ln\left|1-\sqrt[6]{x}\right|+c.$$

3. $\int \sqrt{4-x^2}\,dx$

Mudança de variável: $x = 2\sin t \Rightarrow \varphi'(t) = 2\cos t$.

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = \int \left[\sqrt{4-4\sin^2 t}\cdot 2\cos t\right]dt = 4\int \left[\sqrt{1-\sin^2 t}\cdot \cos t\right]dt = 4\int \cos^2 t\,dt =$$

$$= 4\int \cos^2 t\,dt = 4\int \frac{1}{2}(1-\cos 2t)\,dt = 2\int 1\,dt - 2\int \cos 2t\,dt = 2t - \sin 2t + c.$$

Voltando à variável original, $x = 2\sin t \Rightarrow t = \arcsin\frac{x}{2}$, donde

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx = 2\arcsin\frac{x}{2} - \sin\left(2\arcsin\frac{x}{2}\right) + c = 2\arcsin\frac{x}{2} - x\sqrt{1-\frac{x^2}{4}} + c =$$

$$= 2\arcsin\frac{x}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{4-x^2} + c.$$

4. $\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx$

Mudança de variável: $\cos x = t \Rightarrow x = \underbrace{\arccos t}_{\varphi(t)}$; $\varphi'(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx = \int \frac{\sqrt{1-t^2}}{t+t^2}\left(-\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\right)dt = -\int \frac{1}{t+t^2}\,dt = -\int \frac{1}{t(1+t)}\,dt =$$

$$= -\int \frac{1+t-t}{t(1+t)}\,dt = -\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{1+t}\right)dt = \int \frac{1}{1+t}\,dt - \int \frac{1}{t}\,dt = \ln|1+t| - \ln|t| + c.$$

Passando à variável original, obtemos

$$\int \frac{\sin x}{\cos x + \cos^2 x}\,dx = \ln|1+\cos x| - \ln|\cos x| + c.$$

5. $\int \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx$

Mudança de variável: $x = \tan t \Rightarrow \varphi'(t) = \sec^2 t = 1 + \tan^2 t$.

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx = \int \frac{1}{\left(1+\tan^2 t\right)\sqrt{1+\tan^2 t}} \cdot (1+\tan^2 t)dx = \int \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}}dx =$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1+\frac{\sin^2 t}{\cos^2 t}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{\cos^2 t+\sin^2 t}{\cos^2 t}}}dx = \int \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 t}}}dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\cos t}}dx =$$

$$= \int \cos t dx = \sin t + c\,.$$

Passando à variável original, $x = \tan t \Rightarrow t = \arctan x$, resulta

$$\int \frac{1}{\left(1+x^2\right)\sqrt{1+x^2}}dx = \sin(\arctan x) + c.\,.$$

Exercícios propostos:

- Calcule as primitivas das seguintes funções, utilizando o método de substituição:

a) $\frac{x^3}{\sqrt{2-x^2}}$ b) $\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}$ c) $\frac{1}{1+e^x}$

d) $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{3-x}}$ e) $\frac{\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}}$ f) $\frac{\sin x}{1-\cos x}$

g) $\frac{x^3}{x^8-5}$ h) $\frac{e^x+1}{e^{2x}+4}$ i) $\frac{5^x}{5^{3x}+5^{-x}}$

j) $\frac{\sqrt{x+2}}{\sqrt[3]{x+2}+1}$ k) $\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}$ l) $\frac{2}{\sqrt{5x+3}}$

m) $\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}$ n) $\dfrac{x^3}{\sqrt{x^2+9}}$ o) $\dfrac{-3x}{x^4+e^4}$

p) $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x+\cos x}$ q) $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x+\cos^2 x}$