1.4 Conjuntos de Pontos Definidos por Condições sobre Complexos

Sejam $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, com $z = x + yi$, um complexo genérico (a variável), $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$ dois complexos e $r, \theta \in \mathbb{R}$.

Designam-se ainda por P, P_1, P_2 os afixos dos complexos z, z_1, z_2

1. A condição,

$$|z - z_1| = r\,, \tag{1.4.1}$$

define o conjunto dos pontos $P(x,y)$ cuja distância ao ponto $P_1(a,b)$ é igual a r. Assim,

$$\begin{cases} \text{se } \; r < 0 \implies \{\}\,; \\ \text{se } \; r = 0 \implies \{P_1\}\,; \\ \text{se } \; r > 0 \implies \text{Circunferência centrada em } P_1(a,b) \text{ e de raio } \sqrt{r}\,. \end{cases} \tag{1.4.2}$$

Com efeito, tem-se $|z - z_1|^2 = |(x-a) + (y-b)i|^2 = (x-a)^2 + (y-b)^2$, pelo que (1.4.2) traduz a equação $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ que, no caso de $r > 0$, representa uma circunferência centrada em $P_1(a,b)$ e de raio r.

A mesma equação $|z - z_1| = r$ é impossível se $r < 0$ e tem uma única solução $(x,y) = (a,b)$ se $r = 0$.

Substituindo em (1.4.1) o sinal "$=$" por "$<$" ou "$>$", obtém-se o interior (respetivamente, o exterior) da mesma circunferência, tal como apresentado na Figura 1.8;

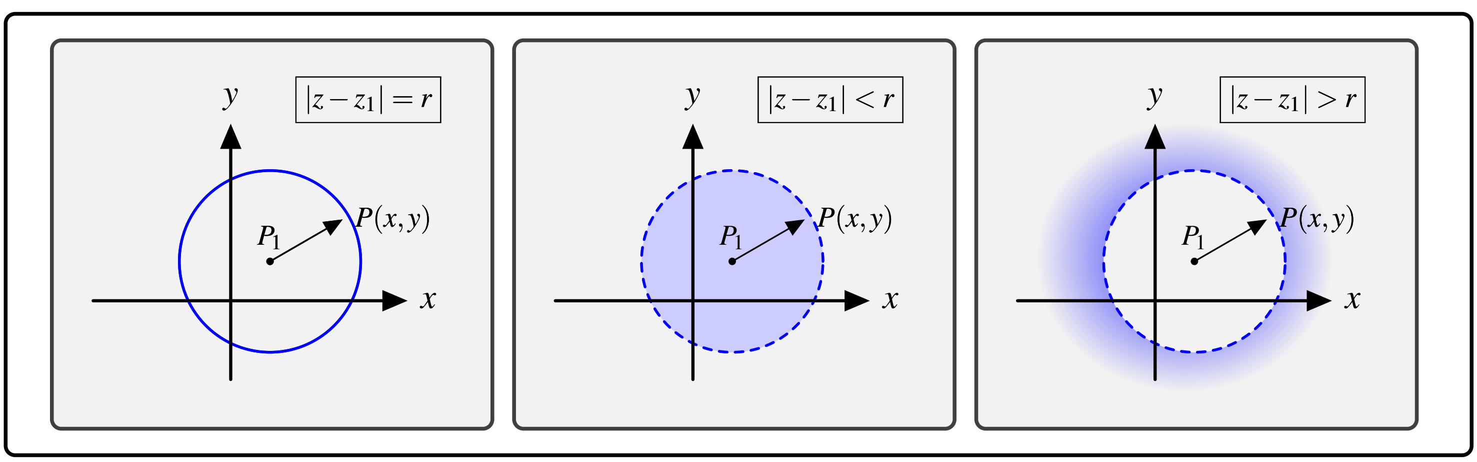

Figura 1.8: Circunferência centrada em $P_1(a,b)$ e de raio r.

2. A condição
$$|z - z_1| = |z - z_2|, \tag{1.4.3}$$
define o conjunto dos pontos $P(x,y)$ situados à mesma distância dos pontos P_1 e P_2, portanto a mediatriz do segmento de reta $[P_1, P_2]$.

Substituindo em (1.4.3) o sinal $=$ por $<$ ou $>$, obtém-se o semiplano, definido pela mesma mediatriz, que contém o ponto P_1 (respetivamente, o ponto P_2);

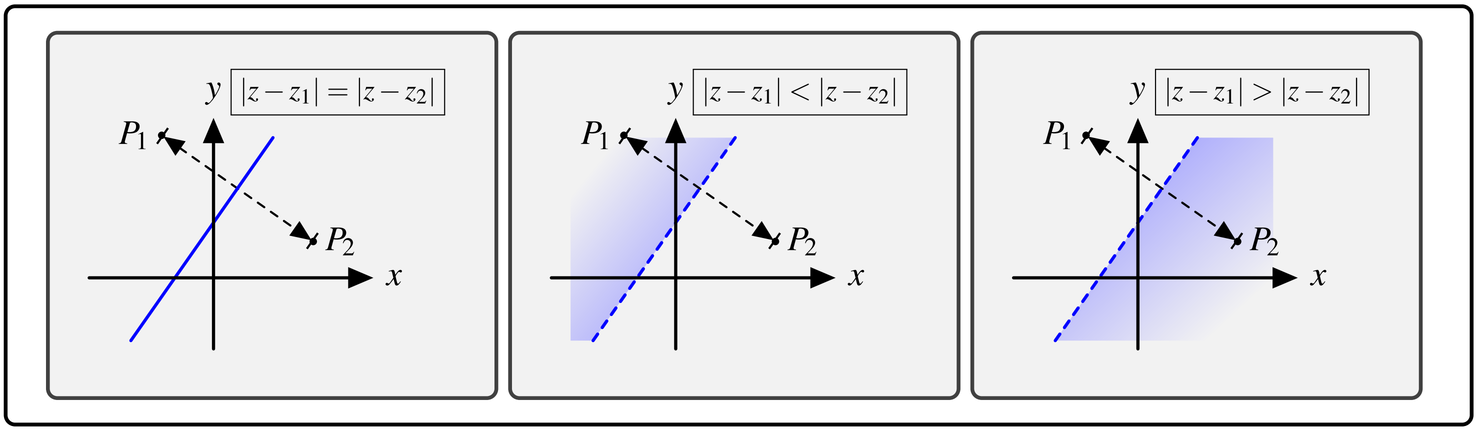

Figura 1.9: Mediatriz do segmento de reta $[P_1, P_2]$.

3. O conjunto definido pela condição
$$\arg(z - z_1) = \theta, \tag{1.4.4}$$
é a semireta com início no afixo P_1 e que forma um ângulo θ com a reta paralela ao eixo OX.

Tem-se $\arg(z - z_1) = \theta \implies \arg\big((x-a) + (y-b)i\big) = \theta \implies \frac{y-b}{x-a} = \operatorname{tg}(\theta)$. Ou seja, obtém-se a reta de equação $y = b + \operatorname{tg}(\theta)(x-a)$, que passa no ponto $P_1(a,b)$ e tem declive $m = \operatorname{tg}(\theta)$. Basta observar que a equação original representa apenas a semireta $\overrightarrow{P_1P}$.

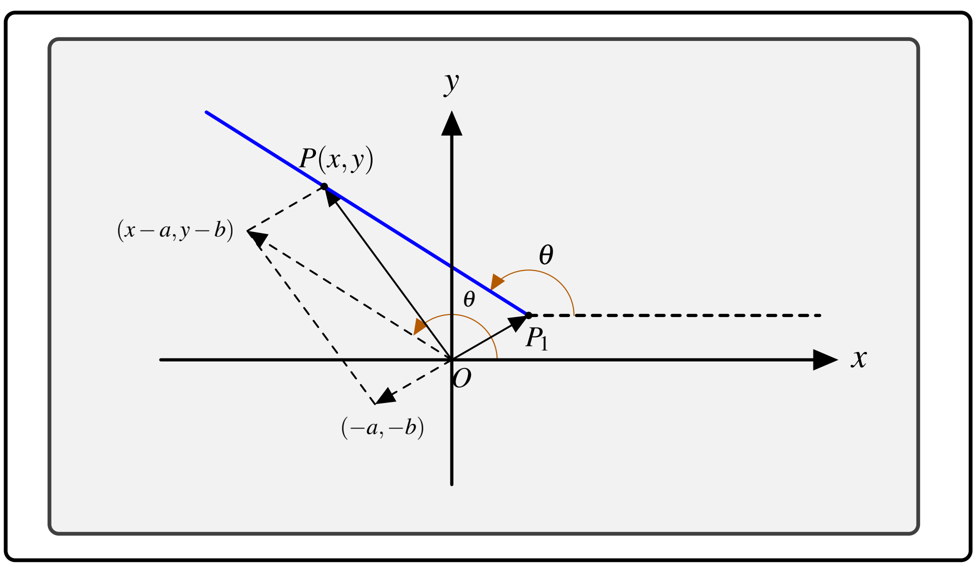

Figura 1.10: Semireta com início no afixo P_1 e que forma um ângulo θ com a reta paralela ao eixo OX.

Interessa agora determinar de que forma uma aplicação complexa de variável complexa transforma um ponto, ou mais geralmente, um conjunto de pontos definido por restrições sobre complexos.

1.5 Transformações Geométricas

Seja f uma função complexa de variável complexa, de $D \subseteq \mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$,

$$\begin{array}{rcl} f : D \subseteq \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & f(z) = w \end{array} .$$

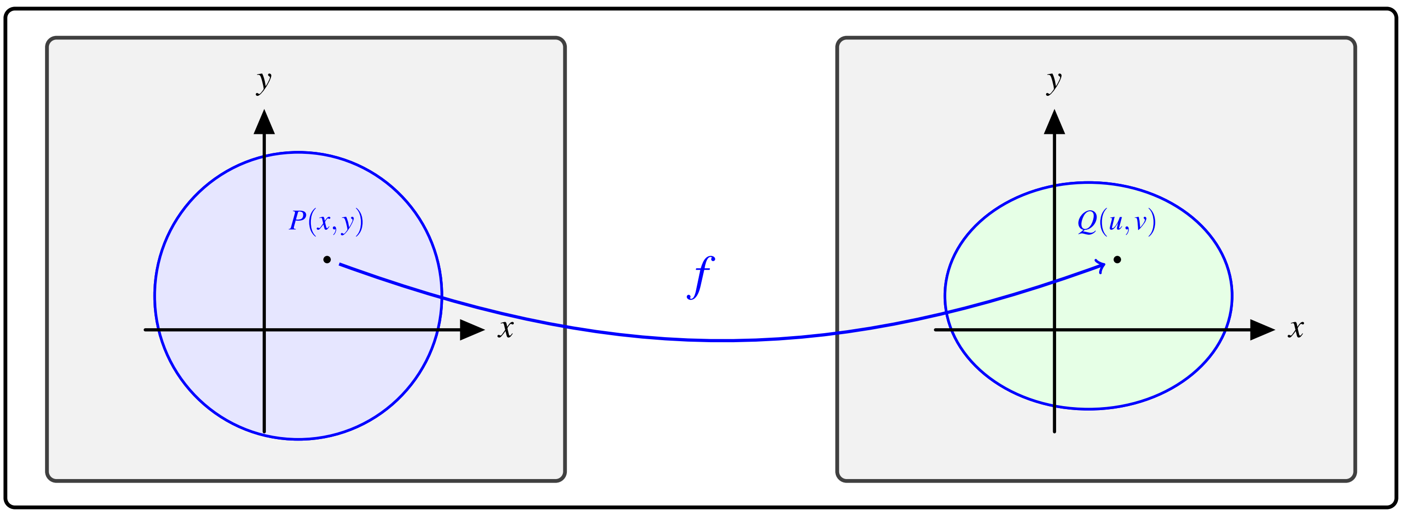

Figura 1.11: Representação do lugar geométrico definido pelo domínio de f e do seu transformado.

1.5.1 Produto por um Número Real — Homotetia

Seja $z \in \mathbb{C}$ e $k \in \mathbb{R}$. Graficamente, o produto $w = kz$ traduz uma homotetia de centro na origem $(0,0)$ e razão $|k|$.

Com efeito, se $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$, o número real k pode ser representado por $k = k \operatorname{cis}(0)$, se $k > 0$, ou $k = -k \operatorname{cis}(\pi)$, se $k < 0$.

Assim, o produto,

$$w = kz = \begin{cases} k\rho \operatorname{cis}(\theta) & , \text{ se } k > 0 \\ -k\rho \operatorname{cis}(\theta + \pi) & , \text{ se } k < 0 \end{cases} \tag{1.5.1}$$

representa,

$$\begin{cases} k>0 \quad \longrightarrow \quad \text{Homotetia Direta ou Positiva} & \begin{cases} k>1 & \to \text{Ampliação} \\ 0<k<1 & \to \text{Redução} \\ k=1 & \to \text{Isometria} \end{cases} \\ \\ k<0 \quad \longrightarrow \quad \text{Homotetia Inversa ou Negativa} & \begin{cases} k<-1 & \to \text{Ampliação} \\ -1<k<0 & \to \text{Redução} \\ k=-1 & \to \text{Simetria} \end{cases} \end{cases}$$

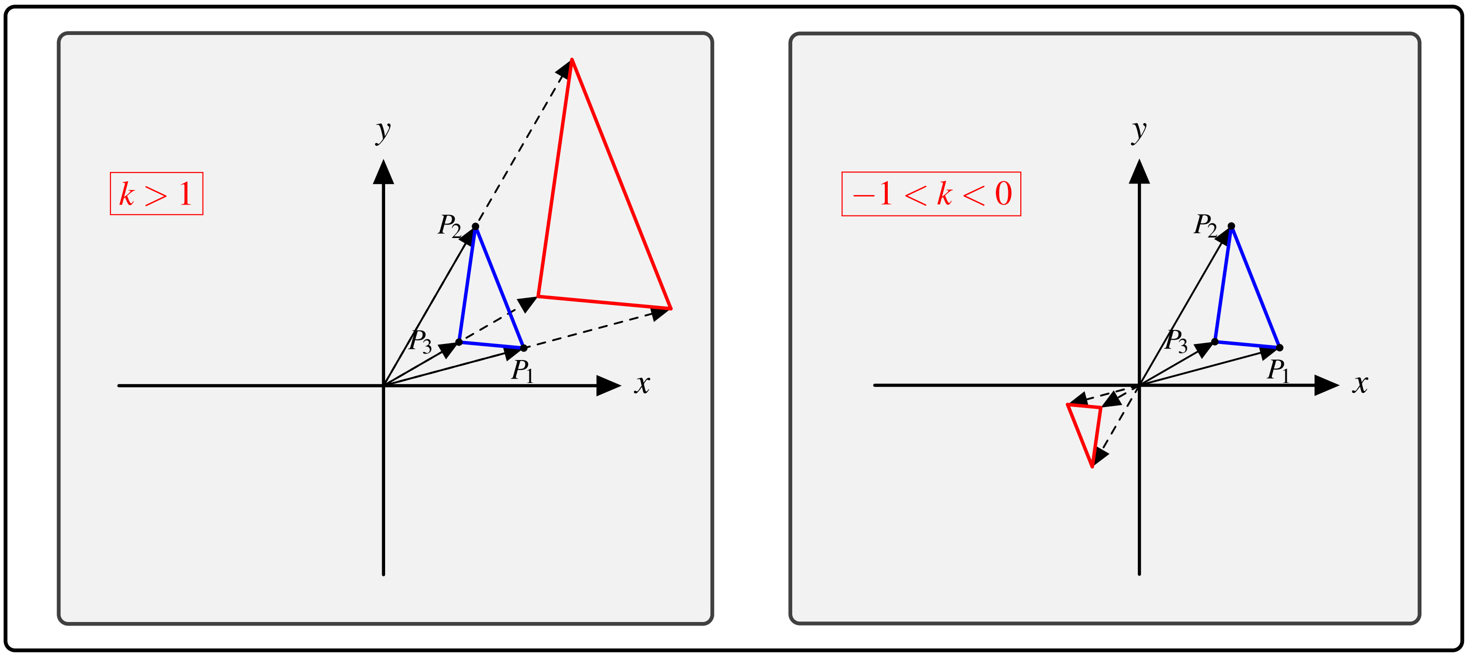

Figura 1.12: Homotetias – Direta, com $k>1$ e Inversa, com $-1<k<0$.

1.5.2 Produto por um Número Complexo Unitário — Rotação

Seja $z \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathbb{C}$, $u = \text{cis}(\alpha)$. Se $z = \rho\,\text{cis}(\theta)$, o produto,

$$w = u\,z = \rho\,\text{cis}(\theta+\alpha)\,, \tag{1.5.2}$$

traduz uma rotação de centro na origem $(0,0)$, uma vez que w é um complexo com o mesmo módulo que z e o seu afixo descreve um arco de circunferência de centro em $(0,0)$ e amplitude α.

1.5.3 Soma com um Número Complexo — Translação

Seja $z \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathbb{C}$. Se $z = x + yi$ e $u = a + bi$, a soma,

$$w = u + z = (x + a) + (y + b)i\,, \tag{1.5.3}$$

traduz uma translação dos afixos de z de valor igual ao módulo que u no sentido de $\overrightarrow{OU}$.

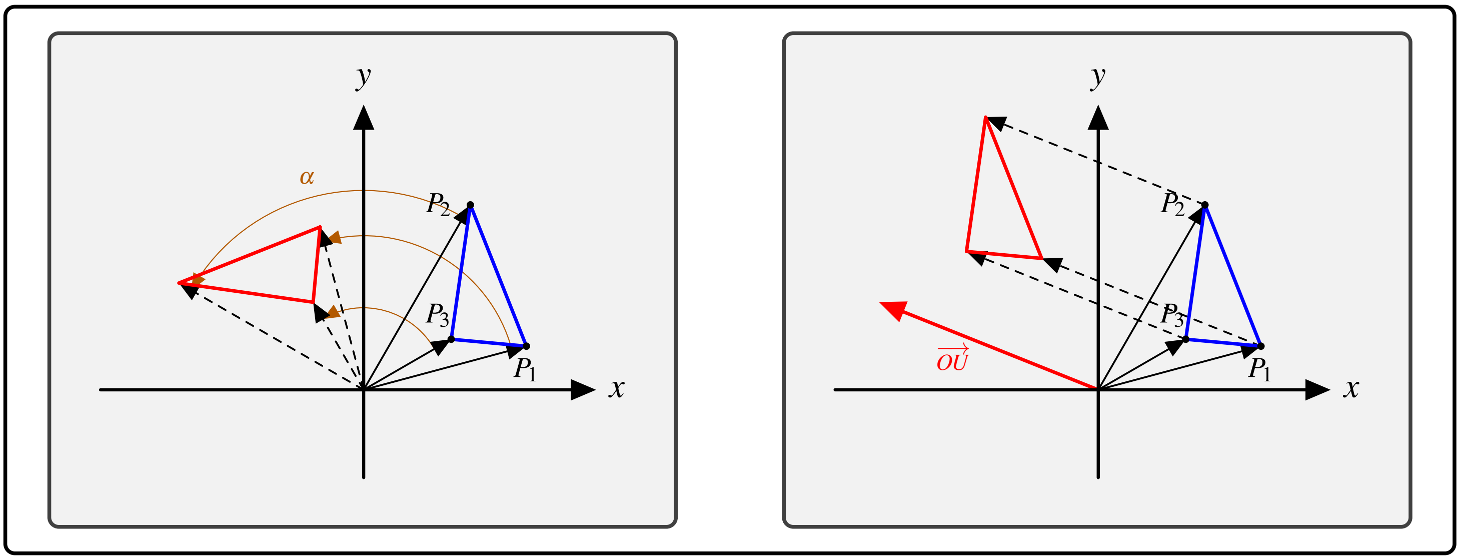

Figura 1.13: Rotação $\text{cis}(\alpha)z$ e Translação $u + z$

1.5.4 Conjugado — Reflexão (OX)

Seja $z \in \mathbb{C}$. A função que a cada $z = x + yi$ faz corresponder o seu conjugado,

$$w = \bar{z} = x - yi\,, \tag{1.5.4}$$

traduz uma reflexão dos afixos de z em relação ao eixo OX, pois se $z = |z|\,\text{cis}(\theta)$, então $w = |z|\,\text{cis}(-\theta)$

1.5.5 Produto por um Número Complexo — Transformação de semelhança

Seja $z \in \mathbb{C}$ e $u \in \mathbb{C}$. Se $z = \rho\,\text{cis}(\theta)$ e $u = \lambda\,\text{cis}(\alpha)$, o produto

$$w = u\,z = \rho\lambda\,\text{cis}(\theta + \alpha)\,, \tag{1.5.5}$$

traduz uma rotação de centro na origem $(0,0)$, o seu afixo descreve um arco de circunferência de centro em $(0,0)$ e amplitude α, seguida[1] de homotetia direta de razão $\lambda > 0$.

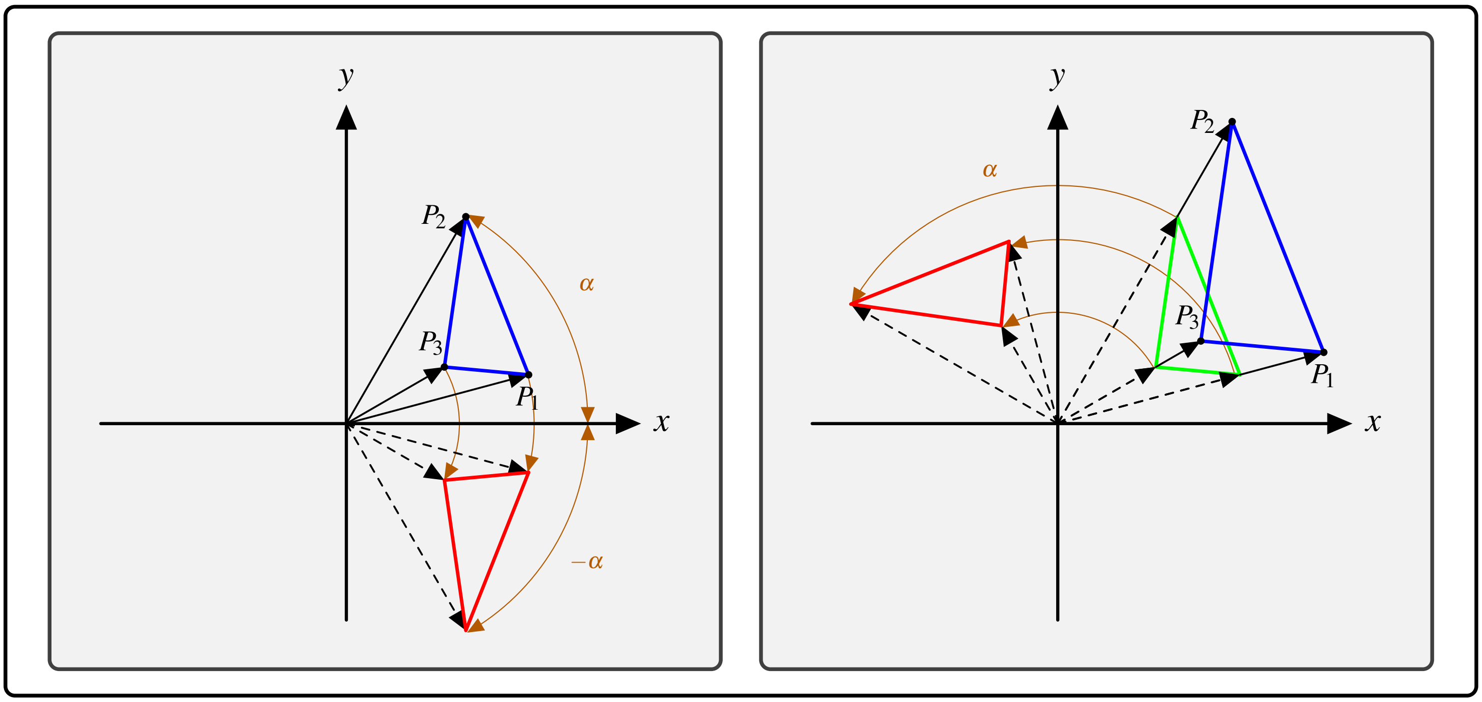

Figura 1.14: Reflexão $w = \bar{z}$ e Transformação de Semelhança $w = uz$

Exemplo 1.5.1 *A transformação de semelhança (homotetia de razão $r = 2$ + rotação de amplitude $\theta = \frac{\pi}{2}$),*

$$w = 2iz = f(z),$$

transforma a reta de equação, $2x + 2y = 1$ na reta $-u + v = 1$.

Com efeito, sejam $z = x + yi$, $w = u + vi$. Considerando $z = \frac{-iw}{2}$, tem-se,

$$x + yi = \frac{-i(u + vi)}{2} \Longleftrightarrow x + yi = \frac{v - ui}{2},$$

ou seja,

$$\begin{cases} x = \frac{v}{2} \\ y = -\frac{u}{2} \end{cases}$$

Substituindo na equação da reta, $2x + 2y = 1$, vem

$$2\,\frac{v}{2} + 2\,\frac{-u}{2} = 1 \Longleftrightarrow v - u = 1\,.$$

[1] A ordem da composição é indiferente: rotação seguida de homotetia ou homotetia seguida de rotação.

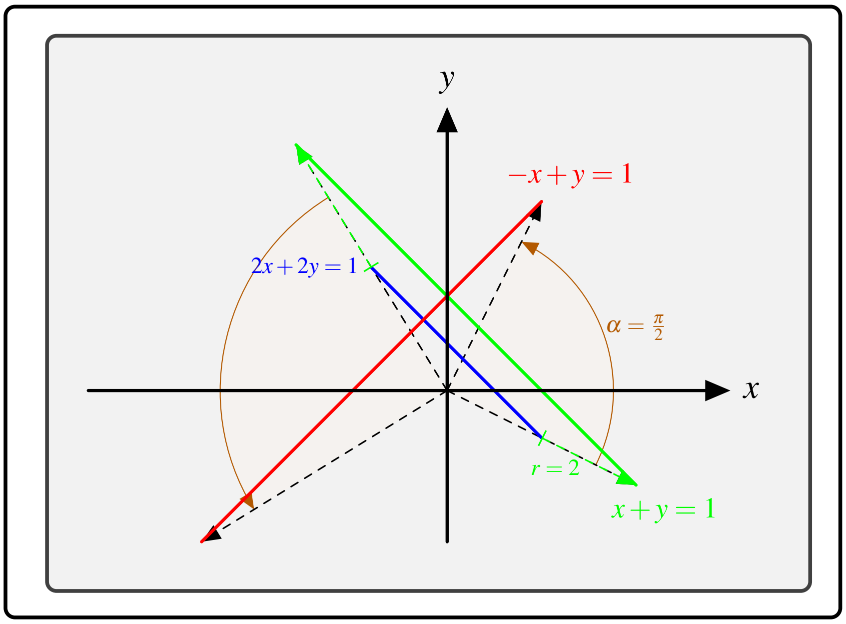

Figura 1.15: $S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 2x+2y=1\right\}$
$S'=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x+y=1\right\}$

1.5.6 Transformação do tipo $w=uz+v$

De acordo com os itens anteriores (equações (1.5.3) e (1.5.5)), uma transformação do tipo $w=uz+v$, com $u,\, v\in\mathbb{C}$, corresponde a compor uma transformação de semelhança uz com uma translação $uz+v$.

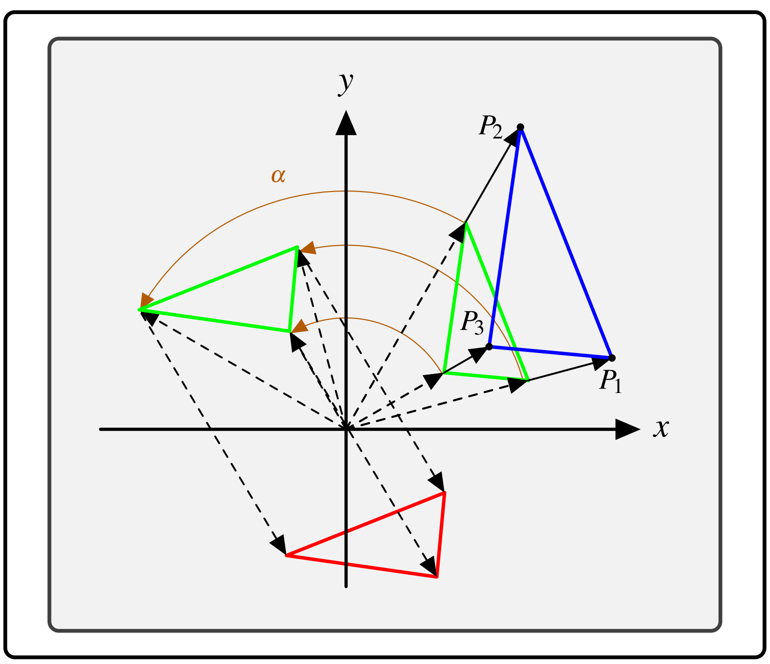

Figura 1.16: Transformação do tipo $w=uz+v$.

1.5.7 Inversão Geométrica $w = \frac{1}{\bar{z}}$

Seja $z \in \mathbb{C}$. Se $z = \rho \operatorname{cis}(\theta)$, então o quociente,

$$w = \frac{1}{\bar{z}} = \frac{\operatorname{cis}(0)}{\rho \operatorname{cis}(-\theta)} = \frac{1}{\rho} \operatorname{cis}(\theta)\,, \tag{1.5.6}$$

traduz uma transformação que mantém o argumento θ e inverte o valor do seu módulo $\frac{1}{\rho}$.

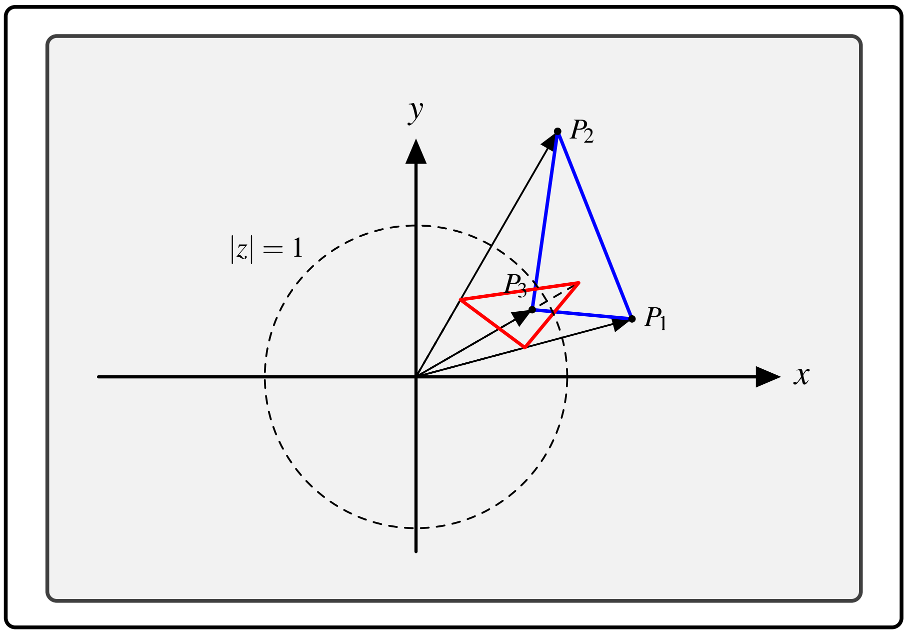

Figura 1.17: Inversão Geométrica.

A inversão geométrica $w = \frac{1}{\bar{z}}$, transforma,

$$\begin{aligned}
\text{Circunferência que não passa pela origem} &\rightsquigarrow \text{Circunferência que não passa pela origem}\\
\text{Circunferência que passa pela origem} &\rightsquigarrow \text{Reta que não passa pela origem}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{Reta que não passa pela origem} &\rightsquigarrow \text{Circunferência que passa pela origem}\\
\text{Reta que passa pela origem} &\rightsquigarrow \text{Reta que passa pela origem}
\end{aligned}$$

Com vista a determinar o transformado de um conjunto, seja S o conjunto dos números complexos $z \in \mathbb{C}$ tais que,

$$|z - \tfrac{c}{b}| = r \tag{1.5.7}$$

onde b, c e r são constantes $b, c \in \mathbb{C}$, $r \in \mathbb{R}^+$. Considerando o quadrado de cada um dos membros de (1.5.7) tem-se,

$$|z - \tfrac{c}{b}|^2 = r^2 \Longleftrightarrow (z - \tfrac{c}{b})(\overline{z - \tfrac{c}{b}}) = r^2.$$

Tendo em conta que $z\bar{z} = |z|^2$, então

$$(z - \tfrac{c}{b})(\bar{z} - \tfrac{\bar{c}}{\bar{b}}) = r^2 \Longleftrightarrow z\bar{z} - \tfrac{c}{b}\bar{z} - z\tfrac{\bar{c}}{\bar{b}} + \tfrac{c}{b}\tfrac{\bar{c}}{\bar{b}} = r^2$$

Passando todas as parcelas para o primeiro membro depois de multiplicadas por $b\overline{b}$, tem-se,

$$\underbrace{b\,\overline{b}}_{\lambda}z\,\overline{z}\underbrace{-\overline{b}c}_{\alpha}z\underbrace{-b\overline{c}}_{\overline{\alpha}}\overline{z}+\underbrace{c\overline{c}-b\overline{b}r^2}_{\gamma}=0\,.$$

onde λ, α, e γ são constantes λ, α, $\in \mathbb{C}$ e $\gamma \in \mathbb{R}$. Isto é,

$$\lambda z\,\overline{z}+\alpha z+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\gamma=0\,. \tag{1.5.8}$$

Considerando $z=x+yi$, $\alpha=x_0+y_0i$ e tendo em conta que,

$$\lambda z\overline{z}=\lambda(x^2+y^2) \quad \wedge \quad \alpha z+\overline{\alpha}\overline{z}=2Re(\alpha z)=2(xx_0-yy_0)\,,$$

tem-se,

$$\lambda(x^2+y^2)+2(xx_0-yy_0)+\gamma=0\,. \tag{1.5.9}$$

condição que define uma circunferência se $\lambda \neq 0$ ou uma reta, caso contrário, se $\lambda = 0$. Além disso, a Figura passa na origem $(0,0)$ apenas se $\gamma = 0$.

Assim, a inversão geométrica $w=\frac{1}{\overline{z}}$, transforma o conjunto S num conjunto S' que se obtém substituindo na equação (1.5.8), $z=\frac{1}{\overline{w}}$. Isto é,

$$\lambda\frac{1}{\overline{w}}\frac{1}{w}+\alpha\frac{1}{\overline{w}}+\overline{\alpha}\frac{1}{w}+\gamma=0\,,$$

ou seja, multiplicando todas as parcelas por $w\overline{w}$,

$$\lambda+\alpha w+\overline{\alpha}\,\overline{w}+\gamma w\,\overline{w}=0\,, \tag{1.5.10}$$

que mais uma vez, traduz uma circunferência ou uma reta, consoante $\gamma \neq 0$ ou $\gamma = 0$, que passam na origem apenas se $\lambda = 0$. Portanto,

S	**Inversão Geométrica**	S'
Circunferência que não passa pela origem	$\leftrightsquigarrow \quad \lambda \neq 0, \quad \gamma \neq 0 \quad \leftrightsquigarrow$	Circunferência que não passa pela origem
Circunferência que passa pela origem	$\leftrightsquigarrow \quad \lambda \neq 0, \quad \gamma = 0 \quad \leftrightsquigarrow$	Reta que não passa pela origem
Reta que não passa pela origem	$\leftrightsquigarrow \quad \lambda = 0, \quad \gamma \neq 0 \quad \leftrightsquigarrow$	Circunferência que passa pela origem
Reta que passa pela origem	$\leftrightsquigarrow \quad \lambda = 0, \quad \gamma = 0 \quad \leftrightsquigarrow$	Reta que passa pela origem

No exemplo seguinte considera-se uma circunferência que passa na origem e mostra-se que o seu transformado por meio de uma inversão geométrica é a reta de equação $2x+2y=1$, que não passa na origem.

Exemplo 1.5.2 *Seja* $S = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-(1+i)| = \sqrt{2}\right\}$ *e* S' *e o seu transformado por meio de,*

$$w = \frac{1}{\overline{z}} = f(z).$$

O conjunto S *corresponde à circunferência de centro em* $(1,1)$ *e raio* $\sqrt{2}$*, Figura 1.18.*

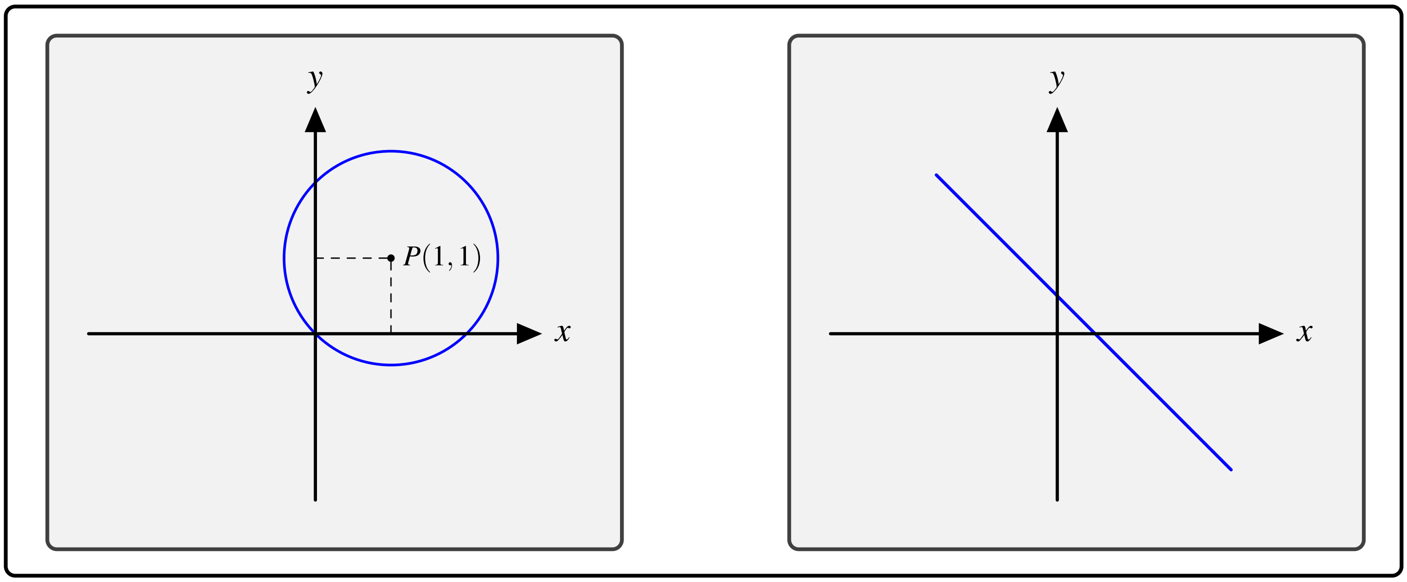

Figura 1.18: $S = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 + (y-1)^2 = 2\right\}$
$S' = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x + 2y = 1\right\}$

De acordo com o descrito atrás, ouma vez que a circunferência $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 2$ *passa pela origem, o seu transformado será uma reta que não passa pela origem.*
Com efeito, considerando $z = \frac{1}{\overline{w}}$*, tem-se,*

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\overline{w}} - 1 - i\right| &= \sqrt{2} \Longleftrightarrow \\
|1-(1+i)\overline{w}| &= \sqrt{2}|\overline{w}| \Longleftrightarrow \\
|1-(x+y)-(x-y)i| &= \sqrt{2}|x-yi| \Longleftrightarrow \\
\sqrt{(1-(x+y))^2 + (x-y)^2} &= \sqrt{2}\sqrt{x^2+y^2} \Longleftrightarrow \\
1-2(x+y)+(x+y)^2+x^2-2xy+y^2 &= 2(x^2+y^2) \Longleftrightarrow \\
1-2x-2y+x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2 &= 2x^2+2y^2 \Longleftrightarrow \\
1-2x-2y &= 0 \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

o que traduz a reta de equação $2x+2y=1$ *(ver Figura 1.18).*

1.5.8 Inversão Algébrica $w = \frac{1}{z}$

A inversão algébrica pode ser obtida através de,

$$w = \frac{1}{z} = \overline{\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}. \tag{1.5.11}$$

Isto é, a inversão algébrica é a composição de uma inversão geométrica $u = \frac{1}{\bar{z}}$ com uma simetria $w = \overline{u}$ em relação a OX.

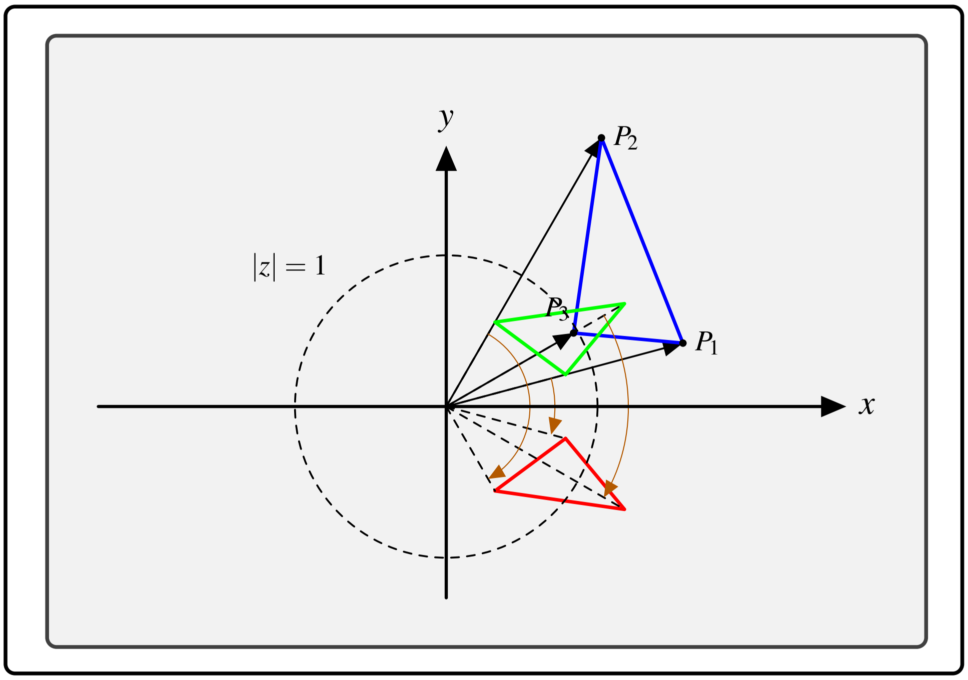

Figura 1.19: Inversão Algébrica.

1.5.9 Transformação Bilinear, Homográfica ou Möbius

Seja $z \in \mathbb{C}$ a variável complexa e constantes $a, b, c, d \in \mathbb{C}$. A transformação,

$$w = \frac{az+b}{cz+d}, \tag{1.5.12}$$

tem domínio $\mathbb{C} \setminus \{-\frac{d}{c}\}$.

Considera-se ainda que $bc - ad \neq 0$ pois, caso contrário $\frac{b}{d} = \frac{a}{c} = k$, viria $w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{k(cz+d)}{cz+d} = k$, pelo que w seria constante.

Distinguem-se duas situações, $c \neq 0$ ou $c = 0$.

Se $c \neq 0$, o quociente (1.5.12) pode escrever-se,

$$\begin{array}{c|l} az+b & cz+d \\ \cline{2-2} -az-\frac{a}{c}d & \frac{a}{c} \\ \cline{1-1} 0+b-\frac{a}{c}d & \end{array} \qquad , \qquad \boxed{az+b = \tfrac{a}{c}(cz+d) + \left(b-\tfrac{a}{c}d\right)}\ .$$

Assim,

$$\begin{aligned} w &= \frac{az+b}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \left(b - \tfrac{a}{c}d\right)\frac{1}{cz+d} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c}\,\frac{1}{c\left(z+\frac{a}{c}\right)} \\ &= \underbrace{{}^{a}\!/_{c}}_{A} + \underbrace{\frac{bc-ad}{c^2}}_{B}\ \frac{1}{z+\underbrace{{}^{a}\!/_{c}}_{E}} \end{aligned}$$

Considerando, $\frac{a}{c} = A$, $\frac{bc-ad}{c^2} = B$ e $\frac{a}{c} = E$, com A, B, $E \in \mathbb{C}$, a equação (1.5.12) escreve-se na forma,

$$w = A + B\,\frac{1}{z+E}\,, \tag{1.5.13}$$

que representa uma sequência de transformações: translação $u = z+E$, composta com uma inversão algébrica $v = \frac{1}{u}$ (inversão+simetria OX), transformação de semelhança $t = Bv$ (homotetia de razão $|B|$ + rotação $\arg(B)$) e nova translação $w = A+t$.

Se $c = 0$, o quociente (1.5.12) escreve-se na forma,

$$w = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = Az + B\,, \tag{1.5.14}$$

que, considerando, $\frac{a}{d} = A$ e $\frac{b}{d} = B$ representa uma sequência de duas transformações: transformação de semelhança $u = Az$ (homotetia $|A|$ + rotação $\arg(A)$) seguida de translação $w = u+B$.

De uma forma geral, dado um conjunto S definido pelo lugar geométrico das imagens dos complexos que verificam a equação $\varphi(z) = 0$ e $w = f(z)$ uma transformação geométrica de $\mathbb{C}$ em $\mathbb{C}$, então o transformado S' de S é dado por $\varphi\big(f^{-1}(w)\big) = 0$ onde, $z = f^{-1}(w)$ (processo algébrico simbólico).

Em termos de forma algébrica dos complexos $z = x + yi$ e $w = u + vi$, tem-se um resultado identico, considerando que $f(z) = f_1(x,y) + f_2(x,y)i$ (processo algébrico cartesiano), isto é,

$$\begin{cases} u = f_1(x,y) \\ v = f_2(x,y) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = g_1(u,v) \\ y = g_2(u,v) \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \psi(u,v) = 0\,.$$

Pode ainda a transformação dada $w = f(z)$ ser decomposta numa sequência de transformações elementares, tal como já descrito nos parágrafos anteriores, e desta forma identifica-se o transformado S' como sendo aquele conjunto obtido através da última transformação elementar (processo gráfico ou geométrico).

Exemplo 1.5.3 *Seja* $S = \left\{z \in \mathbb{C} : |z-1-i| < \sqrt{2}\right\}$. *Identifique graficamente S e o seu transformado por meio de,*

$$w = \frac{2i}{\overline{z}} = f(z).$$

O conjunto S corresponde ao inteior da circunferência de centro em $(1,1)$ *e raio* $\sqrt{2}$, *isto é,*

$$\varphi(z) = |z-1-i| - \sqrt{2} = 0\,.$$

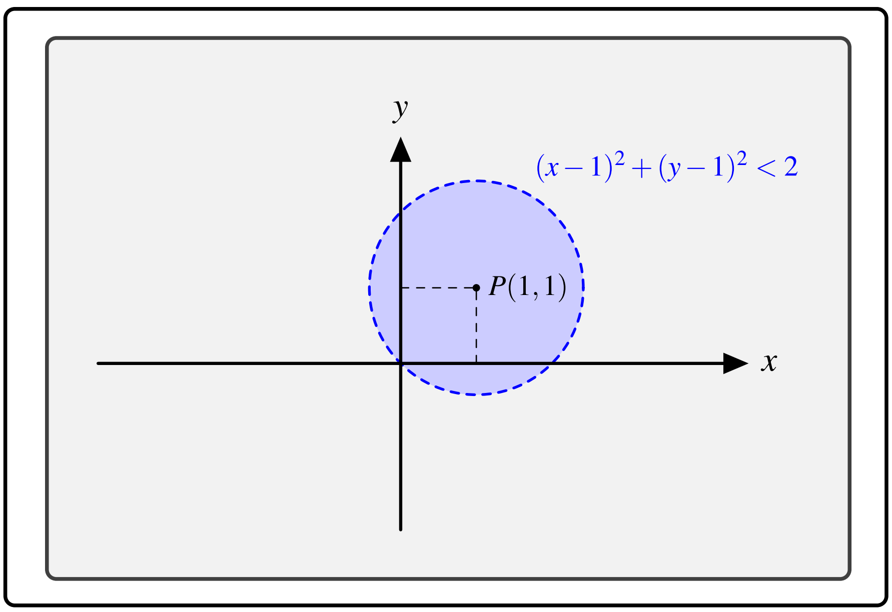

Figura 1.20: $|z-(1+i)| < \sqrt{2}$

Por outro lado,

$$z = \frac{-2i}{\overline{w}} = f^{-1}(w).$$

Assim, a imagem de S ficará definida por,

$$\varphi(\tfrac{-2i}{\overline{w}}) = \left|\frac{-2i}{\overline{w}} - 1 - i\right| - \sqrt{2}\,,$$

pelo que,

$$\begin{aligned}
\varphi(\tfrac{-2i}{\overline{w}}) &< 0 \Longleftrightarrow \\
\left|\frac{-2i}{\overline{w}} - 1 - i\right| &< \sqrt{2} \Longleftrightarrow \\
|-2i-(1+i)\overline{w}| &< \sqrt{2}|\overline{w}| \Longleftrightarrow \\
|-(u+v)-(2+u-v)i| &< \sqrt{2}|u-vi| \Longleftrightarrow \\
\sqrt{(u+v)^2+(2+u-v)^2} &< \sqrt{2}\sqrt{u^2+v^2} \Longleftrightarrow \\
(u+v)^2+(2+u-v)^2 &< 2(u^2+v^2) \Longleftrightarrow \\
u^2+2uv+v^2+4+4(u-v)+(u-v)^2 &< 2u^2+2v^2 \Longleftrightarrow \\
1+u-v &< 0 \Longleftrightarrow
\end{aligned}$$

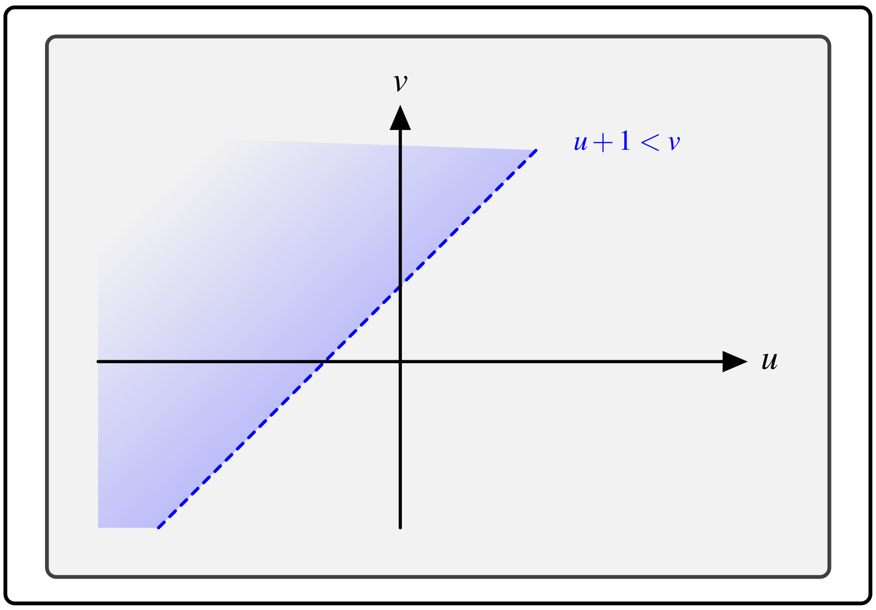

Figura 1.21: $\{u+1<v\}$.

A transformação,

$$w = \frac{2i}{\overline{z}} = f(z),$$

também pode ser decomposta numa sequência de duas transformações elementares, inversão geométrica $u = \frac{1}{\overline{z}}$ *seguida de uma transformação de semelhança* $w = 2iu$ *(homotetia de razão* $r = 2$ *+ rotação de amplitude* $\theta = \frac{\pi}{2}$*). Como calculado no Exemplo1.5.2, a imagem da circunferência* $(x-1)^2+(y-1)^2 = 2$ *(neste caso particular, o seu interior) por meio da inversão* $u = \frac{1}{\overline{z}}$*, é a reta de equação,* $2x+2y = 1$ *(neste caso, o semiplano superior à reta). Efetuando posteriormente a transformação de semelhança* $w = 2iu$*, ver Exemplo1.5.1, obtém-se a reta* $-x+y = 1$ *(o semiplano à esquerda da reta).*