IPG Politécnico da Guarda — Escola Superior de Tecnologia e Gestão	**ENUNCIADO DE AVALIAÇÃO**	MODELO PED.018.01

Curso	**Eng. Informática**			*Ano letivo*	2019/2020
Unidade curricular	**Álgebra e Geometria Analítica**				
Ano curricular	1º	*Semestre*	1º	*Data* 29/01/2020	*Duração* 1h 15m

3º Teste

(Cotação)

1. Considere $A,B,C \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ matrizes quadradas tais que,

$$\det(A) = -1\,,\ \det\left(B^T A\right) = 3\,,\ \det\left(C^{-1}\right) = \frac{3}{2}\,.$$

(2.0) **a)** Calcule os determinantes, $\det(3C)$, $\det\left(B^T C\right)$ e $\det\left(A^{-1}B^T\right)$.

(2.0) **b)** Mostre que $\det\left(\operatorname{adj}(B)\right) = (-3)^{n-1}$.

2. Seja $L : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ a aplicação linear definida por,

$$L(x,y,z) = (x, y+3z, -x-y-3z)\,.$$

(2.0) **a)** Determine a matriz da aplicação linear L relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(3.0) **b)** Calcule a dimensão e uma base do $\ker(L)$.

(3.0) **c)** Determine os valores e vetores próprios da matriz,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

3. Seja o ponto $A = (2,2,1) \in \mathbb{R}^3$ e r a reta definida por $(x,y,z) = (2+2t, 1-t, 3t)$, com $t \in \mathbb{R}$.

(2.0) **a)** Determine a equação do plano α que passa por A e é perpendicular à reta r.

(2.0) **b)** Determine a interseção do plano $\beta : 2x - y + 3z = -8$ com a reta r.

(2.0) **c)** Determine a distância do ponto A à reta r.

(2.0) **d)** Determine a distância entre os planos α e β.

Formulário

• Fórmula de Laplace $*$ $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(-1)^{i+j}\,\lvert A_{ij}\rvert$;	• Regra de Cramer $Ax = b$ $*$ $x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}, \quad \forall\, i = 1, 2, \ldots, n$.
• Matriz inversa $*$ $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)$	• Valores e vetores próprios $*$ $\det(\lambda I_n - A) = 0, \qquad Av = \lambda v$
• Aplicação Linear $L : V \longrightarrow W$ $*$ $L(u+v) = L(u) + L(v), \quad \forall u, v \in V$; $*$ $L(\alpha v) = \alpha L(v), \quad \forall v \in V, \ \forall \alpha \in \mathbb{K}$;	• Matriz da Transformação Linear $w = L(v)$ $*$ $L(v) = Av$, onde as colunas da matriz $A = M(L, B, B')$ são as coordenadas da imagem de cada vetor da base B na base B'
$*$ $\ker(L) = \{v \in V : L(v) = 0\}$;	$*$ $\mathrm{Im}(L) = \{w \in W : \exists v \in V, w = L(v)\}$.
• $A = M(L, B_1, B_2)$ e $A' = M(L', B_1, B_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ $*$ $M(L + L', B_1, B_2) = A + A'$ $*$ $M(\lambda L, B_1, B_2) = \lambda A$	• $L : U \longrightarrow V$, $T : V \longrightarrow W$, B_1, B_2 e B_3 bases de U, V e W $*$ $M(T \circ L, B_1, B_3) = M(T, B_2, B_3)\, M(L, B_1, B_2)$.
• Produto interno, externo e norma $*$ $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$; $*$ $d(x, y) = \lVert y - x\rVert$; $*$ $x \perp y \Longleftrightarrow \langle x, y\rangle = 0$; $*$ $u \wedge v = (v_3u_2 - u_3v_2, v_1u_3 - u_1v_3, u_1v_2 - v_1u_2)$;	$*$ $\lVert x\rVert = \sqrt{\langle x, x\rangle}$; $*$ $\langle x, y\rangle = \lVert x\rVert\,\lVert y\rVert\cos(\theta)$. $*$ $\theta = \measuredangle(x, y) = \arccos\left(\frac{\langle x,y\rangle}{\lVert x\rVert \lVert y\rVert}\right)$; $*$ $\mathrm{proj}_x(y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\langle x,x\rangle}\, x$. $*$ $u \wedge v = \lVert u\rVert\,\lVert v\rVert\sin(\theta)$;
• Equação vectorial da reta $*$ $P = A + t\,\vec{v}$;	• Equação vectorial do plano $*$ $P = A + s\,\vec{u} + t\,\vec{v}$;
• Distância de um ponto B a uma reta em $\mathbb{R}^2$ $*$ $d(B, r) = \frac{\lvert\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}\rangle\rvert}{\lVert\vec{n}\rVert}$;	• Distância de um ponto B a uma reta em $\mathbb{R}^3$ $*$ $d(B, r) = \frac{\lVert \overrightarrow{AB} \wedge \vec{v}\rVert}{\lVert\vec{v}\rVert}$;
• Distância entre duas retas $*$ $d(r, s) = \frac{\lvert\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}\rangle\rvert}{\lVert\vec{n}\rVert}$, com $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v} \neq \vec{0}$;	• Distância de um ponto B a um plano $*$ $d(B, \alpha) = \frac{\lvert\langle \overrightarrow{AB}, \vec{n}\rangle\rvert}{\lVert\vec{n}\rVert}$;
• Ângulo entre duas retas $*$ $\theta = \arccos\left(\frac{\lvert\langle\vec{u}, \vec{v}\rangle\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{v}\rVert}\right)$;	• Ângulo entre uma reta e um plano $*$ $\theta = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{\lvert\langle\vec{u}, \vec{n}\rangle\rvert}{\lVert\vec{u}\rVert\,\lVert\vec{n}\rVert}\right)$;

Resolução

1. $\det(A) = -1$, $\det\left(B^T A\right) = 3$, $\det\left(C^{-1}\right) = \frac{3}{2}$.

(2.0) **a)** $\det(3C) = 3^n \det(C) = 3^n \times \frac{2}{3} = 2 \times 3^{n-1}$

$\det\left(B^T C\right) = \det(B)\det(C) = -3 \times \frac{2}{3} = -2$

$\det\left(A^{-1}B^T\right) = \det(A)^{-1}\det(B) = \frac{1}{-1} \times (-3) = 3$.

(2.0) **b)** $\operatorname{adj}(B) = \det(B)\, B^{-1} \Longrightarrow$

$\det\left(\operatorname{adj}(B)\right) = \det\left(\det(B)\, B^{-1}\right) = (-3)^n \times \det\left(B^{-1}\right) = (-3)^n \frac{1}{-3} = (-3)^{n-1}$.

2. $L(x,y,z) = (x, y+3z, -x-y-3z)$.

(2.0) **a)**

$$\begin{cases} L(1,0,0) = (1,0,-1) \\ L(0,1,0) = (0,1,-1) \\ L(0,0,1) = (0,3,-3) \end{cases} \Longrightarrow A = M(L,B,B) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(3.0) **b)** A dimensão e uma base do subespaço $\ker(L)$.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_1+L_3]{a_{11}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_2+L_3]{a_{22}=1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\ker(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y + 3z = 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -3z \end{cases}$$

$$\ker(A) = \langle (0,-3,1) \rangle, \qquad \Longrightarrow \qquad \dim(\ker(A)) = 1.$$

(3.0) **c)** Valores próprios da matriz,

$$|\lambda I - A| = 0 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 1 & -3 \\ 1 & 1 & \lambda + 3 \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \lambda^3 + \lambda^2 - 2\lambda = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{-2, 1, 0\}.$$

$$(-2I - A)v = 0 \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 3v_1 \\ 3v_2 + 3v_3 \\ -v_1 - v_2 - v_3 \end{bmatrix} = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} v_1 = 0 \\ v_2 = -v_3 \\ 0 = 0 \end{cases} \Longrightarrow v = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(1I-A)v=0 \iff \begin{bmatrix} 0 \\ 3v_3 \\ -v_1-v_2-4v_3 \end{bmatrix}=0 \iff \begin{cases} v_1=-v_2 \\ v_3=0 \\ 0=0 \end{cases} \implies v=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(0I-A)v=0 \iff \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2+3v_3 \\ -v_1-v_2-3v_3 \end{bmatrix}=0 \iff \begin{cases} v_1=0 \\ v_2=-3v_3 \\ 0=0 \end{cases} \implies v=\begin{bmatrix} 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

3. $A=(2,2,1)$ e $r:\ (x,y,z)=(2+2t,1-t,3t)$, com $t\in\mathbb{R}$.

(2.0) **a)** O plano que passa por A e é perpendicular a $r:\ (2,1,0)+t(2,-1,3)=B+t\vec{v}$, é o conjunto dos pontos $P=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ que verificam,

$$(P-A)\perp\vec{v}.$$

Isto é,

$$\alpha:(x-2,y-2,z-1)|(2,-1,3)=0 \iff 2(x-2)-(y-2)+3(z-1)=0 \iff 2x-y+3z-5=0.$$

(2.0) **b)** A interseção do plano $\beta: 2x-y+3z=-8$ com a reta $r:\ (x,y,z)=(2+2t,1-t,3t)$, é a solução da equação,

$$2(2+2t)-(1-t)+3(3t)=-8 \iff 4+4t-1+t+9t=-8 \iff 14t=-11 \implies t=-\frac{11}{14}.$$

Portanto, a interseção do plano β com a reta r, é o ponto $P=(2+2t,1-t,3t)\big|_{t=-\frac{11}{14}}=\left(\frac{3}{7},\frac{25}{14},-\frac{33}{14}\right)$.

(2.0) **c)** A distância do ponto A à reta $r:\ (x,y,z)=B+t\vec{v}=(2,1,0)+t(2,-1,3)$ é definida por,

$$d(A,r)=\frac{\|\overrightarrow{AB}\wedge\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}=\frac{\|(0,-1,-1)\wedge(2,-1,3)\|}{\|(2,-1,3)\|}=\frac{\|(-4,-2,2)\|}{\sqrt{14}}=\frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{14}}=2\sqrt{\frac{3}{7}}$$

(2.0) **d)** A distância entre os planos paralelos α e β, com $B=(-4,0,0)\in\beta$, é dada por,

$$d(\alpha,\beta)=d(A,\beta)=\frac{|\langle\overrightarrow{AB},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|}=\frac{|\langle(-6,-2,-1),(2,-1,3)\rangle|}{\|(2,-1,3)\|}=\frac{|-12+2-3|}{\sqrt{14}}=\frac{13}{\sqrt{14}}.$$