3 – Primitivação.

3.1- Noção de Primitiva.

De uma forma simplista, a primitiva de uma função é o recíproco da sua derivada.

Definição: Sendo $f : I \to R$, I intervalo de R, uma função $F : I \to R$ tal que $F'(x) = f(x), \ \forall x \in I$ diz-se uma primitiva de f em I e denota-se $\int f(x)dx + c = F(x)$.

Observações:

1. No que se refere à existência da primitiva de uma função, não há garantia da existência à priori.
2. Relativamente à unicidade, a primitiva de uma função não é única, ou seja, duas primitivas de uma mesma função diferem por uma constante.
3. Para o cálculo de primitivas, existem métodos conhecidos que se aplicam a certos tipos de funções e que iremos estudar. Quando as funções a primitivar são relativamente simples, temos aquilo a que se chama primitivação imediata e que consiste essencialmente em concluir qual será a sua primitiva, tendo em conta a regra da derivada (invertida).

3.2- Primitivas imediatas.

Chamam-se primitivas imediatas as que se deduzem diretamente de uma regra de derivação.

São exemplos de primitivas imediatas as que se indicam de seguida.

$$\int 1dx = x + c$$

$$\int e^x dx = e^x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x} dx = \ln(1+x) + c$$

$$\int \cos x dx = \sin x + c$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \tan x + c$$

$$\int x dx = \frac{x^2}{2} + c$$

$$\boxed{\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)}$$

No caso em que $\alpha = -1$, temos $\boxed{\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c}$.

$$\boxed{\int [f(x)]^{\alpha} . f'(x) dx = \frac{[f(x)]^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1)}$$

No caso de $\alpha = -1$, temos $\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln|f(x)| + c}$.

Exemplos:

1. $\int \frac{x^5}{\sqrt{8-x^6}} dx = \int \frac{x^5}{(8-x^6)^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^5 (8-x^6)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{6} \int (-6x^5)(8-x^6)^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{6} \frac{(8-x^6)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + c =$

$= -\frac{1}{6} \frac{(8-x^6)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = -\frac{1}{3} \sqrt{8-x^6} + c$.

2. $\int \frac{x^5}{8-x^6} dx = -\frac{1}{6} \int \frac{-6x^5}{8-x^6} dx = -\frac{1}{6} \ln|8-x^6| + c$

3. $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{2-2e^{2x}}} dx = \int e^{2x} (2-2e^{2x})^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{4} \int (-4e^{2x})(2-2e^{2x})^{-\frac{1}{2}} dx = -\frac{1}{4} \frac{(2-2e^{2x})^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c =$

$= -\frac{1}{2} (2-2e^{2x})^{\frac{1}{2}} + c$.

4. $\int \frac{x^2}{\sqrt{x}} dx = \int x^2 x^{-\frac{1}{2}} dx = \int x^{\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} + c = \frac{x^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + c = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}} + c$.

5. $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}} dx = \int x^{-\frac{1}{4}} dx = \frac{x^{-\frac{1}{4}+1}}{-\frac{1}{4}+1} + c = \frac{x^{\frac{3}{4}}}{\frac{3}{4}} + c = \frac{4}{3} x^{\frac{3}{4}} + c$.

6. $\int x \sqrt{1+a x^2} dx = \int x (1+a x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2a} \int 2ax (1+a x^2)^{\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{2a} \frac{(1+a x^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + c =$

$= \frac{1}{3a} (1+a x^2)^{\frac{3}{2}} + c$.

7. $\int \sin^3 x \cdot \cos x dx = \frac{\sin^4 x}{4} + c$.

8. $\int \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{\ln^2 x}{2} + c$.

9. $\int \sec^2 x \cdot \tan^2 x dx = \frac{\tan^3 x}{3} + c$.

10. $\int \frac{e^{4x}}{2+e^{4x}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{4e^{4x}}{2+e^{4x}} dx = \frac{1}{4} \ln\left|2+e^{4x}\right| + c$.

11. $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -\ln|\cos x| + c$.

12. $\int \frac{\ln x}{x(1-\ln^2 x)} dx = -\frac{1}{2} \int \frac{-2\frac{\ln x}{x}}{(1-\ln^2 x)} dx = -\frac{1}{2} \ln\left|1-\ln^2 x\right| + c$.

13. $\int \frac{1}{(4+x^2)\arctan\frac{x}{2}} dx = \int \frac{\frac{1}{4+x^2}}{\arctan\frac{x}{2}} dx = \int \frac{\frac{1}{4\left(1+\frac{x^2}{4}\right)}}{\arctan\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{4} \int \frac{\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\arctan\frac{x}{2}} dx =$

$= \frac{1}{2} \int \frac{\frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{\arctan\frac{x}{2}} dx = \frac{1}{2} \ln\left|\arctan\frac{x}{2}\right| + c$.

14. $\int \frac{1}{\operatorname{cosec}(2x) - \operatorname{cotan}(2x)} dx = \int \frac{1}{\frac{1}{\sin(2x)} - \frac{\cos(2x)}{\sin(2x)}} dx = \int \frac{1}{\frac{1-\cos(2x)}{\sin(2x)}} dx = \int \frac{\sin(2x)}{1-\cos(2x)} dx =$

$= \frac{1}{2} \int \frac{2\cdot\sin(2x)}{1-\cos(2x)} dx = \frac{1}{2} \ln\left|1-\cos(2x)\right| + c$.

15. $\int \frac{x^2}{\sqrt{8-x^6}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{8(1-\frac{x^6}{8})}}dx = \int \frac{x^2}{\sqrt{8}\sqrt{(1-\left(\frac{x^3}{2}\right)^2}}dx = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{3}{\sqrt{8}}x^2}{\sqrt{(1-\left(\frac{x^3}{2}\right)^2}}dx = \arcsin\frac{x^3}{\sqrt{8}} + c$.

16. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}dx = \int \frac{1}{x^2+2x+1+4}dx = \int \frac{1}{(x+1)^2+4}dx = \int \frac{1}{4\left[\frac{(x+1)^2}{4}+1\right]}dx =$

$= \frac{1}{4}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{4}\cdot 2\int \frac{\frac{1}{2}}{1+\left(\frac{x+1}{2}\right)^2}dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2} + c$.

17. $\int \frac{x\cdot e^{\arcsin x^2}}{\sqrt{1-x^4}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}}e^{\arcsin x^2}dx = \frac{1}{2}e^{\arcsin x^2} + c$

<u>Teorema (Linearidade da primitivação)</u>: Sendo f e g funções primitiváveis, então

(i) $\int [f(x)+g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$;

(ii) $\int [k.f(x)]dx = k.\int f(x)dx$.

Exemplos:

1. $\int\left(\frac{6}{\sqrt{x}} + \frac{2}{x^2} + 3\sqrt[3]{x^2}\right)dx = \int \frac{6}{\sqrt{x}}dx + \int \frac{2}{x^2}dx + \int 3\sqrt[3]{x^2}dx = 6\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 2\int x^{-2}dx + 3\int x^{\frac{2}{3}}dx =$

$= 6\frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + 2\frac{x^{-1}}{-1} + 3\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + c = 12\sqrt{x} - \frac{2}{x} + \frac{9}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$.

2. $\int\left(\frac{3}{x-1}-\frac{4}{x-2}\right)dx=\int\frac{3}{x-1}dx-\int\frac{4}{x-2}dx=3\ln|x-1|-4\ln|x-2|+c$.

3. $\int\left(e^{\frac{x}{2}}-e^{\frac{-x}{2}}\right)^2dx=\int\left(e^x-2e^0+e^{-x}\right)dx=e^x-2x-e^{-x}+c$.

4. $\int\frac{e^x+e^{2x}}{\sqrt{2-2e^{2x}}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{2-2e^{2x}}}dx+\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{2-2e^{2x}}}dx=\int\frac{e^x}{\sqrt{2}\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx+\int\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}\sqrt{1-e^{2x}}}dx=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int\frac{e^x}{\sqrt{1-\left(e^x\right)^2}}dx-\frac{1}{2\sqrt{2}}\int e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin e^x-\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{2x}\frac{\left(1-e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}+c=$

$=\frac{1}{\sqrt{2}}\arcsin e^x-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{2x}\sqrt{1-e^{2x}}+c$.

5. $\int\frac{\arctan x+e^{\arctan x}}{1+x^2}dx=\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx+\int\frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}dx=\int\frac{1}{1+x^2}\cdot\arctan x dx+\int\frac{1}{1+x^2}\cdot e^{\arctan x}dx=$

$=\frac{\arctan^2 x}{2}+e^{\arctan x}+c$.

6. $\int\frac{e^{4x}+e^{2x}}{2+e^{4x}}dx=\int\frac{e^{4x}}{2+e^{4x}}dx+\int\frac{e^{2x}}{2+e^{4x}}dx=\frac{1}{4}\int\frac{4e^{4x}}{2+e^{4x}}dx+\int\frac{e^{2x}}{2\left(1+\frac{e^{4x}}{2}\right)}dx=$

$\frac{1}{4}\ln\left|2+e^{4x}\right|+\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}}\right)^2}dx+c=\frac{1}{4}\ln\left|2+e^{4x}\right|+\frac{1}{2}\int\frac{e^{2x}}{1+\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}}\right)^2}dx+c=$

$=\frac{1}{4}\ln\left|2+e^{4x}\right|+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{2}}{2}\int\frac{\frac{2}{\sqrt{2}}e^{2x}}{1+\left(\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}}\right)^2}dx+c=\frac{1}{4}\ln\left|2+e^{4x}\right|+\frac{\sqrt{2}}{4}\arctan\frac{e^{2x}}{\sqrt{2}}+c$.

Exercícios propostos:

➢ Calcule as primitivas das seguintes funções:

a) $2x^5 + \dfrac{x^4}{3} + x^7 + \dfrac{1}{\sqrt{2}\,x}$

b) $\dfrac{2}{\sqrt{x}} + \dfrac{5}{3}x - \dfrac{6}{x^7}$

c) $\sqrt{x-2}$

d) $x\sqrt{1+3x^2}$

e) $4\cos x\,.\,\mathrm{sen}^7\,x$

f) $\dfrac{\mathrm{sen}\,x}{\cos^2 x}$

g) $e^x\sqrt{1+e^x}$

h) $2\,e^{-x}$

i) $\dfrac{2}{3x+6}$

j) $\dfrac{5}{2+x^2}$

k) $e^{\arccos\sqrt{x}}\,\dfrac{1}{\sqrt{x-x^2}}$

l) $\dfrac{1}{\cos^4 x}$

m) $(x^2+5).\cos(x^3+15x)$

n) $\dfrac{1}{x^2+2x+3}$

o) $\dfrac{x-1}{\sqrt{25-x^2}}$

p) $\dfrac{3e^x}{e^x-1} - \dfrac{2e^x}{e^{2x}+1}$

q) $\dfrac{3}{x-1} - \dfrac{4}{x-2}$

r) $\displaystyle\int \frac{e^x \cdot \arcsin e^x}{\sqrt{1-e^{2x}}}dx$

s) $\dfrac{3}{(x^2+1)\,\mathrm{arc\,tg}\,x} + \dfrac{\ln(4x^2)}{x}$

t) $\dfrac{1}{x\ln^2 x}$

u) $\dfrac{e^{3x}}{(e^{3x}+6)^2}$