# 2 – Cálculo Diferencial em IR

## 2.1- Definição. Noções básicas.

**<u>Definição</u>:** Sendo $f : D \subseteq R \to R$, $a$ um ponto de $D$, diz-se que *f* é derivável (ou *diferenciável*) em $a$ se existir o limite $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$. Quando existe, este limite chama-se derivada de *f* no ponto $a$ e representa-se por $f'(a)$.

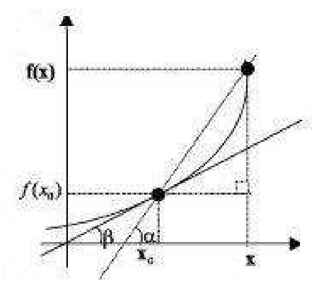
Se pusermos $x - a = h$, podemos escrever, equivalentemente, $f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Diz-se que *f* é derivável em $D$ se for derivável em todos os pontos de $D$.

**Observação**: A derivada representa a taxa de variação de uma função. Um exemplo típico é a função velocidade que representa a taxa de variação (derivada) da função espaço.

Uma função é derivável se, próximo de cada ponto *a* do seu domínio, a função *f*(*x*)−*f*(*a*) se comportar aproximadamente como uma função linear, ou seja, se o seu gráfico for aproximadamente uma recta. O declive de uma tal recta é a derivada da função no ponto *a*.

**Interpretação geométrica:**



$$tg\alpha = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \qquad \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = tg\beta = f'(a)$$

**Teorema:** Seja $f : D \subseteq R \to R$, $a \in D$. Se $f$ é derivável em $a$, então $f$ é contínua em $a$.

**Demonstração:**

$f$ é derivável em $a \in D \Rightarrow f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$.

Isto é, $f'(a) + \varepsilon(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ , com $\lim_{x \to a} \varepsilon(x) = 0$.

Ou seja, $[f'(a) + \varepsilon(x)](x - a) = f(x) - f(a)$.

Aplicando limite, quando $x \to a$, resulta $\lim_{x \to a}[f(x) - f(a)] = 0$,

isto é, $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$. □

**Obs**: O recíproco do teorema precedente é falso, ou seja, uma função contínua não é necessariamente derivável.

## 2.2- Regras de derivação.

Teorema: Sendo $f, g : D \subseteq R \to R$ deriváveis em $D$, então também são deriváveis em $D$ as funções que se seguem, sendo válidas as igualdades que se indicam:

(i) $(f + g)' = f' + g'$;

(ii) $(f\,.\,g)' = f'.g + f.g'$;

(iii) $\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'.g - f.g'}{g^2}, \quad g \neq 0$;

(iv) $\left(f^k\right)' = k.f^{k-1}.f', \quad k \in Q$;

(v) $\left(a^f\right)' = f'.a^f.\ln a, \quad a \in R^+ \setminus \{1\}$;

(vi) $\left(\log_a f\right)' = \dfrac{f'}{f.\ln a}$

Exercício: Pretende-se calcular as derivadas das seguintes funções:

1. $f_1(x) = \left(\dfrac{7x+1}{2x^2+3}\right)^3$

$$f_1'(x) = 3\left(\frac{7x+1}{2x^2+3}\right)^2 \cdot \left(\frac{7x+1}{2x^2+3}\right)' = 3\left(\frac{7x+1}{2x^2+3}\right)^2 \frac{7(2x^2+3) - 4x(7x+1)}{(2x^2+3)^2} =$$

$$= 3\left(\frac{7x+1}{2x^2+3}\right)^2 \frac{-14x^2 - 4x + 21}{(2x^2+3)^2} = \frac{3(7x+1)^2(-14x^2-4x+21)}{(2x^2+3)^4}.$$

2. $f_2(x) = \ln\sqrt{\dfrac{2x^2}{e^x-1}}$

$$f_2'(x) = \frac{\left[\left(\dfrac{2x^2}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\right]'}{\sqrt{\dfrac{2x^2}{e^x-1}}} = \frac{\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2x^2}{e^x-1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(\dfrac{2x^2}{e^x-1}\right)'}{\sqrt{\dfrac{2x^2}{e^x-1}}} = \frac{1}{2}.\frac{\dfrac{4x(e^x-1) - 2x^2e^x}{(e^x-1)^2}}{\left(\dfrac{2x^2}{e^x-1}\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{\dfrac{2x^2}{e^x-1}}} =$$

$$= \frac{1}{2}.\frac{2x\left[2(e^x-1) - xe^x\right]}{(e^x-1)^2\,\dfrac{2x^2}{e^x-1}} = \frac{2(e^x-1) - xe^x}{(e^x-1)2x}.$$

3. $f_3(x) = \sin x$

Começamos por fixar $a \in R$.

Então,

$$\sin' a = \lim_{x \to a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right).\cos\left(\frac{x+a}{2}\right)}{x-a} = \lim_{x \to a} \frac{2\sin\left(\frac{x-a}{2}\right)}{\frac{x-a}{2}}.\cos\left(\frac{x+a}{2}\right) =$$

$= \cos a.$

Como $a$ foi suposto arbitrariamente, podemos generalizar, concluindo que $\sin' x = \cos x$, $\forall x \in R$.

<u>Teorema</u> (derivada da composta): Sendo $f : D_1 \subseteq R \to R$ derivável em $a \in D_1$ e $g : D_2 \subseteq R \to R$ derivável em $b = f(a) \in D_2$, então $gof$ é derivável em $a$, sendo que $(gof)'(a) = g'[f(a)].f'(a)$.

Exemplo: Para $f(x) = 2x - 4$ e $g(x) = \sqrt[4]{x}$, pretende-se determinar $(gof)'(8)$.

$$(gof)'(8) = g'[f(8)] \cdot f'(8)$$

$$f'(x) = 2\,; \quad f'(8) = 2\,; \quad f(8) = 12$$

$$g'(x) = \left(x^{\frac{1}{4}}\right)' = \tfrac{1}{4}x^{-\frac{3}{4}}\,; \quad g'[f(8)] = g'(12) = \tfrac{1}{4}(12)^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{4\sqrt[4]{\left(2^2.3\right)^3}} = \frac{1}{8\sqrt[4]{2^2.3^3}}.$$

Portanto, $(gof)'(8) = \dfrac{1}{8\sqrt[4]{2^2.3^3}}.2 = \dfrac{1}{4\sqrt[4]{2^2.3^3}}$

Teorema (derivada da inversa): Sendo $f: D \subseteq R \to R$ invertível em $D$ e derivável em $a \in D$, com $f'(a) \neq 0$, então $f^{-1}$ é derivável em $b = f(a)$ e $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

Exemplo: Para $f(x) = \sqrt{x}$, pretende-se calcular $\left(f^{-1}\right)'(5)$.

$$5 = b = f(a) \Rightarrow 5 = \sqrt{a} \Rightarrow a = 25$$

$$f'(x) = \tfrac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}; \qquad \left(f^{-1}\right)'(5) = \frac{1}{f'(25)} = \frac{1}{\frac{1}{2\sqrt{25}}} = 10$$

## 2.3- Derivadas laterais.

Definição: Sendo $f: D \subseteq R \to R$, $a$ um ponto de $D$, diz-se que

(i) $f$ é derivável à direita de $a$ se existe $\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, o qual se chama derivada lateral à direita de $a$ e se representa por $f'(a^+)$;

(ii) $f$ é derivável à esquerda de $a$ se existe $\lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, o qual se chama derivada lateral à direita de $a$ e se representa por $f'(a^-)$.

Teorema: Sendo $f: D \subseteq R \to R$, $a \in D$, $f$ é derivável em $a$ sse $f'(a^+) = f'(a^-) = f'(a)$.

Exemplos:

1. Para $f(x)=\begin{cases} 2x^2-3 & se\ x<1 \\ 4x-5 & se\ x\geq 1\end{cases}$, pretende-se determinar $f'(x)$.

Se $\underline{x<1}$: $f'(x)=4x$,

Se $\underline{x>1}$: $f'(x)=4$.

Se $\underline{x=1}$:

$$f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x-5-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{4(x-1)}{x-1}=4,$$

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2-3-(-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x^2-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1^-}\frac{2(x-1)(x+1)}{x-1}=4.$$

Portanto, $f'(1)=4$.

Em conclusão, $f'(x)=\begin{cases} 4x & se\ x<1 \\ 4 & se\ x\geq 1.\end{cases}$

2. Para $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2-e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x\neq 0 \\ 0 & \text{se } x=0\end{cases}$, pretende-se determinar $g'(x)$.

Se $\underline{x\neq 0}$: $$g'(x)=\frac{2-e^{\frac{1}{x}}-x\cdot\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}}{\left(2-e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{2-e^{\frac{1}{x}}-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x}}{\left(2-e^{\frac{1}{x}}\right)^2}=\frac{2-e^{\frac{1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\left(2-e^{\frac{1}{x}}\right)^2}.$$

Se $\underline{x=0}$: $$g'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{x}{2-e^{\frac{1}{x}}}}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}=0,$$

$$g'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{1}{2-e^{\frac{1}{x}}}=\frac{1}{2},$$

pelo que $g'(0)$ não existe.

# Exercícios propostos:

1. Utilizando a definição, calcule a derivada das seguintes funções nos pontos indicados:

a) $f(x) = x^3 - 3x$, $x = 1$;

b) $G(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$, $x = 3$.

2. Calcule as derivadas laterais de cada uma das seguintes funções:

a) $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 + 1 & \text{se } x \in [-6,-1] \\ \dfrac{17-3x}{4} & \text{se } x \in ]-1,3] \end{cases}$ no ponto $x = -1$;

b) $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{2-e^{\frac{1}{x}}} & \text{se } x \neq 0 \\ 0 & \text{se } x = 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$;

c) $h(x) = \begin{cases} e^x & \text{se } x > 0 \\ 1+x & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$ no ponto $x = 0$.

3. Defina a função derivada da função $f(x) = \begin{cases} 3x & se \quad x > 1 \\ x^2 + 3 & se \quad x \leq 1 \end{cases}$.

4. Através das regras de derivação, calcule as derivadas das seguintes funções:

a) $f(x) = (5x-2)^6 (3x-1)^3$

b) $f(x) = \sqrt[7]{(3x^4-2)^2}$

c) $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1-x^2}$

d) $f(x) = \dfrac{\sqrt{e^x - 1}}{\sqrt{e^x} + 1}$

e) $f(x) = e^{x \ln(x-1)}$

f) $f(x) = e^{-\frac{x}{2}}$

g) $f(x) = \ln \dfrac{2x}{1-x^2}$

h) $f(x) = \log_2 (x^2 - \ln x)$

i) $f(x)=(\ln(1-x))^4$

j) $f(x)=e^x \operatorname{sen} x$

k) $f(x)=\operatorname{arctg}\dfrac{2x}{1-x^2}$

l) $f(x)=\dfrac{\sin x+\tan x}{1+\sin x}$

m) $f(x)=(5x)^{\sin(x)}$

n) $f(x)=\sqrt{1-\operatorname{arccotg}\sqrt{x}}$

o) $f(x)=\cos[\ln(\operatorname{arctg} x)]$

p) $f(x)=\tan(\operatorname{sen} x)+\operatorname{cotg}(\cos x)$

5. Prove que $\tan' x=\sec^2 x$, $\forall x\in R$.

6. Calcule as derivadas das seguintes funções, utilizando o teorema da derivada da função composta:

a) $h=fog$, para $f(x)=\frac{1}{3x}$ e $g(x)=2x-4$.

b) $h=fog$, para $f(x)=3x^2+1$ e $g(x)=x^2-\sqrt{x}$.

7. Relativamente às funções reais de variável real *f(x)* e *g(x)*, sabe-se que:

$f(x)=\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^2$, $g(0)=3$ e $g'(0)=-2$.

Calcule:

a) $(f.g)'_{(0)}$

b) $(fog)'_{(0)}$

c) $\left(\dfrac{f}{g}\right)'_{(0)}$

d) $\left(\sqrt{g}\right)'_{(0)}$