Números Complexos

Exercício 1 *Calcule os complexos:*

a) $(1+i)(3-i)$ *b)* $\dfrac{2-3i^5}{4-i}$ *c)* $\dfrac{1+2i}{(1+i)(1-2i)}$

d) $\dfrac{\left(\overline{2+i}\right)^2}{3-4i}$ *e)* $\overline{\left(\overline{1+2i}\right)+4i}$ *f)* $\dfrac{5+4i}{5+6i}-\dfrac{1}{61}i(3-2i)$

Exercício 2 *Escreva na forma algébrica, a+bi,*

a) $z=\dfrac{(1+5i)(2-i)^3}{(4i-1)}$ *b)* $w=\dfrac{i}{1+i}-\dfrac{2}{i(i-1)}$

Exercício 3 *Sendo* $z_1=1+i$, $z_2=-2+4i$ *e* $z_3=\sqrt{3}-2i$, *Calcule:*

a) $Re\left(2z_1^2+z_2^3+z_3\right)$ *b)* $Im\left(\frac{z_1z_2}{z_3}\right)$.

Exercício 4 *Represente, geométricamente, os afixos dos números complexos seguintes:*

a) $2+i$ *b)* $\sqrt{3}-3i$ *c)* $-2-i$ *d)* $-3+3i$

Exercício 5

a) $\dfrac{i^{44}-i^{99}}{i^{117}}$ *b)* $3i^7+i^{21}\left(3-i^5\right)$

Exercício 6 *Calcule o módulo de:*

a) $z = \dfrac{(2-3i)^4\,(1-i)^3}{(5+i)}$

b) $\dfrac{i-s}{1+2is} - \dfrac{3}{4}i$

Exercício 7 *Sendo z um número complexo, prove que,*

a) $Re\, z = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

b) $Im\, z = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})$

c) $|z|^2 = z\bar{z}$

d) $|z| = 0 \Longleftrightarrow z = 0$

e) $|-z| = |z|$

f) $|z| = |\bar{z}|$

g) $\bar{\bar{z}} = z$

h) $\overline{(-z)} = -\bar{z}$

Exercício 8 *Escreva na forma trigonométrica, os seguintes números complexos:*

a) 2

b) $2i$

c) -3

d) $-4i$

e) $-2+2i$

f) $-1-i$

g) $1-i$

h) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$

i) $-1+i$

j) $-\sqrt{2}+\sqrt{2}i$

Exercício 9 *Escreva na forma algébrica, os seguintes números complexos:*

a) $\operatorname{cis}\pi$

b) $5\operatorname{cis}\frac{3\pi}{2}$

c) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

d) $3\operatorname{cis}\frac{4\pi}{3}$

e) $3\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$

f) $\sqrt{2}\operatorname{cis}\pi$

g) $4\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$

h) $\operatorname{cis}\frac{5\pi}{6}$

Exercício 10 *Escreva na forma trigonométrica os números complexos* zw *e* $\frac{z}{w}$ *sendo,*

a) $z = -2\sqrt{3} - 2i$ *e* $w = -1+\sqrt{3}i$

b) $z = 1-i$ *e* $w = \sqrt{3}+3i$

Exercício 11 *Sendo* $z_1 = \frac{1}{2}\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ *e* $z_2 = 6\operatorname{cis}\frac{5\pi}{4}$, *calcule na forma trigonométrica* $z_1 z_2$

Exercício 12 *Calcular:*

a) $\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{1-\sqrt{3}i}\right)^{10}$

b) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)^{10}$

c) $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)^{20}$

d) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^{30}$

Exercício 13 *Dados* $z=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}$, $w=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{4}$ *e* $u=2\operatorname{cis}\frac{\pi}{3}$, *calcule* $v=zwu$. *Calcule o argumento principal de* v.

Exercício 14 *Calcular:*

a) $\left(3\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}\right)\left(2\operatorname{cis}\frac{\pi}{2}\right)^2$

b) $\dfrac{3\operatorname{cis}\frac{5\pi}{2}}{6\operatorname{cis}\frac{\pi}{6}}$

Exercício 15 *Determine os complexos* z *que verificam as igualdades:*

a) $\bar{z}=z^3$

b) $z^2=|z|^2$

Exercício 16 *Calcule e represente geometricamente*

a) *as raízes sextas de* 1

b) *as raízes quartas de* i

c) *as raízes quadradas de* $2i$

d) *as raízes quartas de* $\sqrt{3}-i$

e) *as raízes quadradas de* $-\sqrt{2}+\sqrt{6}i$

Exercício 17 *Represente geometricamente*

a) $\sqrt[3]{2i}$

b) $\left(\sqrt[6]{2i}\right)^3$

Exercício 18 *Resolva, em $\mathbb{C}$, as seguintes equações:*

a) $\bar{z}^5 = z$

b) $z^3 \times \bar{z} + (-1+i) = 0$

c) $z^3 = (2-2i)^3$

d) $z^2 \times |z| = \left(\sqrt{3} - i\right)^3$

e) $(1-i)z^2 - 3z(1+i) = 0$

Exercício 19 *Represente geometricamente os conjuntos de números complexos z que satisfazem as seguintes condições:*

a) $z + \bar{z} = 1$

b) $z - \bar{z} = i$

c) $Re\, z \geq a, \quad a \in \mathbb{R}$

d) $Im\, z \leq b, \quad b \in \mathbb{R}$

e) $Re\, z + Im\, z < 1$

f) $|Re\, z| < 1$

g) $0 \leq Re(iz) < 1$

h) $|z - i| < |z + i|$

i) $|z| > 2\,|z-1|$

j) $|2z + 4 - 3i| > 5$

k) $3 \leq |z| < 5$

l) $|z-1| = Re\, z$

m) $Re(z^2) < 0$

n) $|z| \leq |z - 2 - 2i|$

o) $|z-1| \geq |z+1|$

p) $Im(z^2) > 0$

Exercício 20 *Represente o lugar geométrico definido em $\mathbb{C}$ pelas seguintes condições:*

$$\begin{cases} |-1-i+z| < 2|i\sqrt{3}+1| \\ z + \bar{z} = |z^2| \end{cases}$$

Exercício 21 *Determine o módulo do número complexo* $\dfrac{(3-i)(-1+2i)}{2-3i}$

Exercício 22 *Identifique os valores que em $\mathbb{C}$ satisfazem a condição* $\dfrac{z}{1+i} + \dfrac{\bar{z}}{1-i} = Im\, z$

Exercício 23 *Determinar o transformado de cada um dos seguintes conjuntos, por meio da transformação*

$$w = \frac{i+iz}{1-z}$$

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-1| > |z+1|\}$

Exercício 24 *Determinar o transformado de cada um dos seguintes conjuntos, por meio das transformações indicadas:*

a) $A = \{z \in \mathbb{C} : |z| > |z-i|\}; \quad w = \frac{1}{z}$

b) $B = \{z \in \mathbb{C} : |z-i| \leq 1\}; \quad w = \frac{i+iz}{z+i}$

c) $C = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z}+z = i(\overline{z}-z)\}; \quad w = \frac{i+z}{iz+1}$

d) $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 \wedge x > 0\}; \quad w = \frac{1+z}{z-1}$

Exercício 25 *Considere os conjuntos* $A = \{z \in \mathbb{C} : Re(z-iz) \geq 2\}$ *e* $B = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z}{z+1}\right| \leq 2\}$

a) Identifique no plano de Argand a região definida por $A \cap B$*.*

b) Determine e identifique, no plano de Argand, o transformado de A por meio de uma inversão geométrica.

Exercício 26 *Considere os conjuntos* $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2i+1| < 3\}$ *e* $B = \{z \in \mathbb{C} : Im(z-3i) = -1\}$

a) Determine analítica e geométricamente $D = A \cap B$*.*

b) Determine e identifique, no plano de Argand, o transformado de A por meio da transformação

$$w = \frac{1}{\overline{z}+1}.$$

Exercício 27 *Seja* $A = \{z \in \mathbb{C} : (z-\overline{z})\frac{i}{2} = z\overline{z}\}$

a) Encontre o lugar geométrico definido pelo comjunto A*, de números complexos, e represente-o no plano de Argand.*

b) Utilize a inversão geométrica para transformar o lugar geométrico definido na alínea anterior.

Exercício 28 *Seja* $A = \{z \in \mathbb{C} : |z + Re(4-3i)| \leq 2 \wedge \left|\frac{1}{z}\right| \leq |\sqrt{3}i|\}$

a) *Represente geometricamente o conjunto A.*

b) *Identifique o transformadodo do lugar geométrico definido na alínea anterior, utilizando a relação bilinear* $w = \dfrac{i-z}{z}$.

Exercício 29 *Seja* $A = \{z \in \mathbb{C} : Im(z\bar{z}) + |z-1| \leq 1 \wedge |z-2| \leq 1\}$

a) *Represente geometricamente o conjunto A.*

b) *Determine e identifique no plano de Argand o transformado de A por meio de uma inversão geométrica.*

Exercício 30 *Seja* $C = \{z \in \mathbb{C} : \left|\frac{z-3}{z+3}\right| < 2\}$

a) *Represente geometricamente o conjunto C.*

b) *Determine o transformado de C, utilizando a transformação* $w = \dfrac{3}{z-3}$.

Exercício 31 *Calcule e represente geometricamente o transformado de* $C = \{z \in \mathbb{C} : |z + Im(4-3i)i| \leq 2\}$ *por meio da transformação* $w = \dfrac{1}{\bar{z}}$.

Exercício 32 *Calcule e represente geometricamente o transformado de* $A = \{z \in \mathbb{C} : |z-2+i| \leq |-2i|\}$ *por meio da transformação* $w = \dfrac{iz+i}{z+i}$.