MODELO DINÁMICO DE ROBOT Móvil DE TRACCIÓN TRASERA MEDIANTE RESTRICCIONES NO-HOLÓNOMAS

Eduardo Vieira
Universidad Central de Venezuela
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Mecánica
eduardo.vieira@ucv.ve
Profesor: Arturo Gil

I. Introducción

Los robots que poseen su base fija tienen un espacio de trabajo limitado por la longitud de sus eslabones, en muchas aplicaciones esto es suficiente, como por ejemplo, un robot soldador en una ensambladora automotriz o un robot clasificador en una linea de producción. Pero si se quisiera, por ejemplo, organizar los paquetes de un gran almacén de una empresa de correspondencia tendríamos que construir un robot con eslabones de un tamaño suficientemente grandes para abarcar todo el almacén. En estos casos de recurren a robots no-holónomos, los cuales generalmente poseen ruedas y se controlan mediante la velocidad y el ángulo de giro. El el presente trabajo se modelará y se estudiará un vículo de tracción trasera.

II. El Problema

I. Se tiene

Se tiene: El siguiente vehículo que se mueve en el plano xy, el mismo puede suministrar una velocidad $v(t)$ y girar sus ruedas delanteras un ángulo ψ

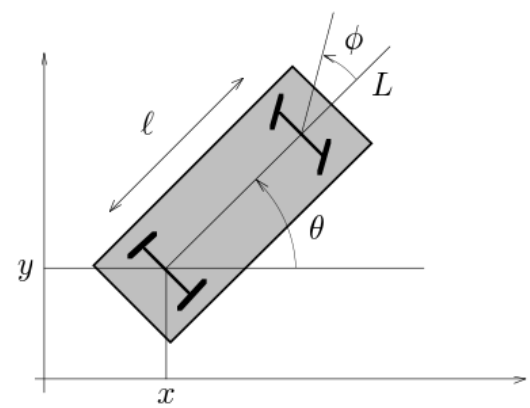

Figura 1: Diagrama del sistema a estudiar

II. Se pide

1. Determinar el modelo dinámico del sistema (ecuaciones que permitan describir la cinemática del vehículo).
2. Diseñar un algoritmo que permita describir el sistema en el tiempo partir de las variables de control $v(t)$ y $\psi(t)$.
3. Realizar la representación para varias funciones $v(t)$ y $\psi(t)$.

III. Solución

Para determinar el modelo dinámico del sistema se considerará que las ruedas de la izquierda y las de la derecha son una sola en el punto medio entre las mismas. Obteniendo de esta manera un vehículo con dos ruedas, una delantera y una trasera (modelo Half-Car). La rueda frontal puede rotar un ángulo ψ al rededor del eje z y la trasera esta fija al armazón del vehículo. La rueda delantera gira libremente y la trasera es la responsable de suministrar la velocidad v. El vector que determina las corrdenadas del sistema es $q = (x, y, \theta, \psi)$ donde x y y son las coordenadas en el plano xy del punto medio entre las ruedas traseras, θ es el angulo instantáneo de la velocidad con repecto al eje x (recordando que la velocidad es tangente a la trayectoria) y ψ es el ángulo que giran las ruedas con respecto al vehículo. El sistema posee dos restricciones no-holónomas, una por cada rueda.

$$\begin{aligned} \dot{x}_f \sin(\psi+\theta) - \dot{y}_f \cos(\psi+\theta) = 0 \\ \dot{x} \sin(\theta) - \dot{y}\cos(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Donde x_f y y_f representan las coordenadas del punto medio delantero. Suponiendo que el vehículo es un cuerpo rígido

$$x_f = l\cos(\theta) + x \tag{2}$$

$$y_f = l\sin(\theta) + y \tag{3}$$

Sustituyendo las ecuaciones (2) y (3) en (1) obtenemos las ecuaciones del sistema

$$\begin{aligned} \dot{\theta} l \cos(\psi) + \dot{x}\sin(\psi+\theta) - \dot{y}\cos(\psi+\theta) = 0 \\ \dot{x}\sin(\theta) - \dot{y}\cos(\theta) = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

La matriz de restricción del sistema será

$$\begin{bmatrix} \sin(\psi+\theta) & \sin(\theta) \\ -\cos(\psi+\theta) & -\cos(\theta) \\ -l\cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Las velocidades generalizadas del sistema son

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\psi)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\psi) \\ \frac{1}{l}\sin(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} \alpha_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \alpha_2 \tag{6}$$

El parámetro α_2 corresponde a la razón de cambio del ángulo ψ respecto al tiempo que denominaremos u_2 y α_1, al tratarse de un vehículo de tracción trasera tenemos que sustituirlo por $\frac{u_1}{\cos(\psi)}$ quedando entonces $u_1 = v$. De esta forma las velocidades del sistema serán

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) \\ \sin(\theta) \\ \frac{1}{l}\tan(\psi) \\ 0 \end{bmatrix} u_1 + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \tag{7}$$

El sistema presenta una singularidad cuando la variable de cotrol ψ es igual a $\frac{\pi}{2}$.

IV. Código en python

El siguiente código escrio en python permite realizar los graficos de posición xy, $v(t)$, $\theta(t)$, $\psi(t)$, $x(t)$ y $y(t)$ introduciendo los valores de a_0, a_1, a_2 y a_3 correspondientes al polinomio de grado 3 de la velocidad $v(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$, los valores de b_0, b_1, b_2, b_3 correspondientes al polinomio de grado 3 del ángulo $\psi(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3$ y los valores x_0,y_0 y θ_0 correspondientes a los valores de posición inicial del vehículo.

```
In [1]: import numpy as np # Importamos la libreria numerica de python
        import matplotlib.pyplot as plt # Importamos la libreria para realizar grficos
        from __future__ import division
        %matplotlib nbagg
        plt.style.use('ggplot') # Se usa el estilo ggplot
        t_i = 0 # Tiempo inicial [s]
        t_f = 5 # Tiempo final [s]
        n = 10000 # Numero de iteraciones
        t = np.linspace(t_i, t_f, n) # Se crea el vector t
        dt = (t_f - t_i) / n # El diferencial de tiempo
        l = 2 # La longitud l
        fact = np.pi / 180 # Factor de conversion
        def posicion(v,psi, theta_i, x_i,y_i): # Funcion que grafica el comportamiento del vehiculo
            theta = np.zeros(n)
            theta[0] = theta_i
            x = np.zeros(n)
            y = np.zeros(n)
```

```
        x[0] = x_i
        y[0] = y_i
        for i in range(n-1):
            if(psi[i]>np.pi/2-0.001):
                psi[i] = np.pi / 2 - 0.001
            if psi[i]<-np.pi/2+0.001:
                psi[i] = -np.pi / 2 + 0.001
            theta[i+1] = theta[i] + (v[i] / l)*np.tan(psi[i+1]) * dt
            x[i+1] = x[i] + v[i] * np.cos(theta[i]) * dt
            y[i+1] = y[i] + v[i] * np.sin(theta[i]) * dt
        grafico = plt.figure()
        pos_plt = grafico.add_subplot(321)
        pos_plt.plot(x,y)
        pos_plt.set_title('Posicion del vehiculo')
        vel_plt = grafico.add_subplot(322)
        vel_plt.plot(t,v)
        vel_plt.set_title('Velocidad del vehiculo')
        theta_plt = grafico.add_subplot(323)
        theta_plt.plot(t,theta)
        theta_plt.set_title('Angulo theta')
        psi_plt = grafico.add_subplot(324)
        psi_plt.plot(t,psi)
        psi_plt.set_title('Angulo psi')
        x_plt = grafico.add_subplot(325)
        x_plt.plot(t,x)
        x_plt.set_title('x(t)')
        y_plt = grafico.add_subplot(326)
        y_plt.plot(t,y)
        y_plt.set_title('y(t)')
        grafico.show()

In [2]: from IPython.html.widgets import interact, FloatSlider, interactive
        from IPython.display import display
        def graficar(a_0,a_1,a_2,a_3,b_0,b_1,b_2,b_3,x_0,y_0,theta_0):
            v = np.zeros(n)
            psi = np.zeros(n)
            v = a_0 + a_1 * t + a_2 * t**2 + a_3 * t**3
            psi = (b_0 + b_1 * t + b_2 * t**2 + b_3 * t**3)
            posicion(v,psi,theta_0,x_0,y_0)
        a_0_slider = FloatSlider(min=-10, max=10, step=0.1, value=5, description='$a_0$')
        a_1_slider = FloatSlider(min=-4, max=4, step=0.1, value=1, description='$a_1$')
        a_2_slider = FloatSlider(min=-1, max=1, step=0.1, value=0, description='$a_2$')
        a_3_slider = FloatSlider(min=-1, max=1, step=0.1, value=0, description='$a_3$')
        b_0_slider = FloatSlider(min=-np.pi/2, max=np.pi/2, step=0.05, value=np.pi/4, description='$b_0
        b_1_slider = FloatSlider(min=-np.pi/2, max=np.pi/2, step=0.05, value=0, description='$b_1$')
        b_2_slider = FloatSlider(min=-1, max=1, step=0.1, value=0, description='$b_2$')
        b_3_slider = FloatSlider(min=-1, max=1, step=0.1, value=0, description='$b_3$')
        x_0_slider = FloatSlider(min=-10, max=10, step=0.1, value=0, description='$x_0$')
        y_0_slider = FloatSlider(min=-10, max=10, step=0.1, value=0, description='$y_0$')
        theta_0_slider = FloatSlider(min=-2*np.pi, max=2*np.pi, step=0.1, value=0,
                                     description='$\\theta_0$')
        w=interactive(graficar,a_0=a_0_slider,a_1=a_1_slider,a_2=a_2_slider,a_3=a_3_slider,
```

```
                b_0=b_0_slider, b_1=b_1_slider, b_2=b_2_slider, b_3=b_3_slider,
                x_0=x_0_slider, y_0=y_0_slider, theta_0=theta_0_slider)
display(w)
```

V. Resultados

V.1 Velocidad $V(t)$ y Ángulo $\psi(t)$ constantes

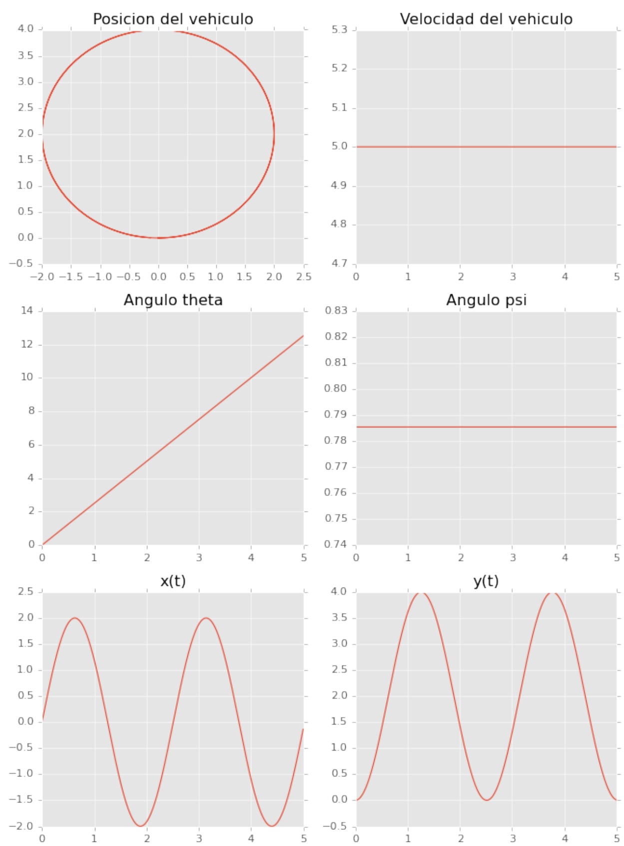

Figura 2: Velocidad $V(t)$ y Ángulo $\psi(t)$ constantes

V.2 Velocidad $V(t)$ lineal y Ángulo $\psi(t)$ constante

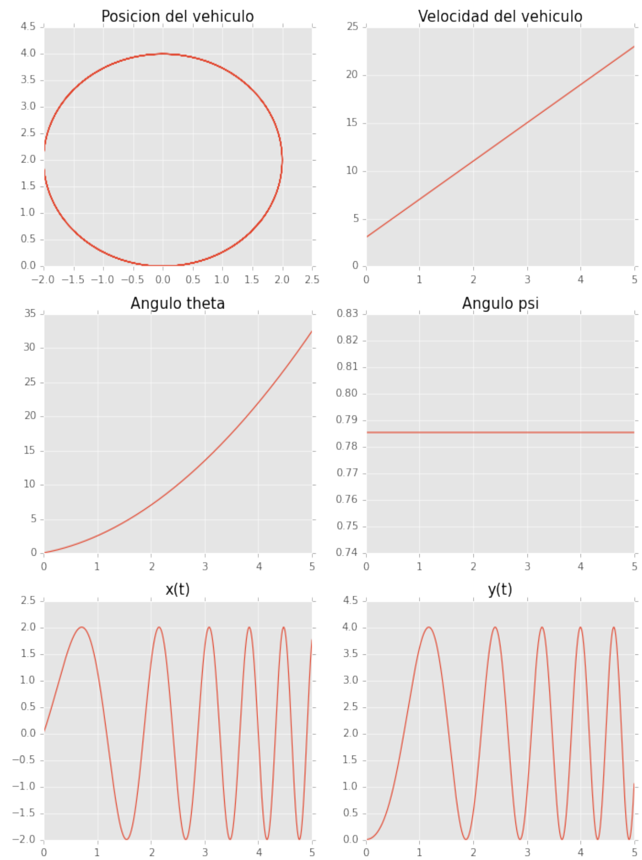

Figura 3: Velocidad $V(t)$ lineal y Ángulo $\psi(t)$ constante

V.3 Velocidad $V(t)$ lineal y Ángulo $\psi(t)$ lineal

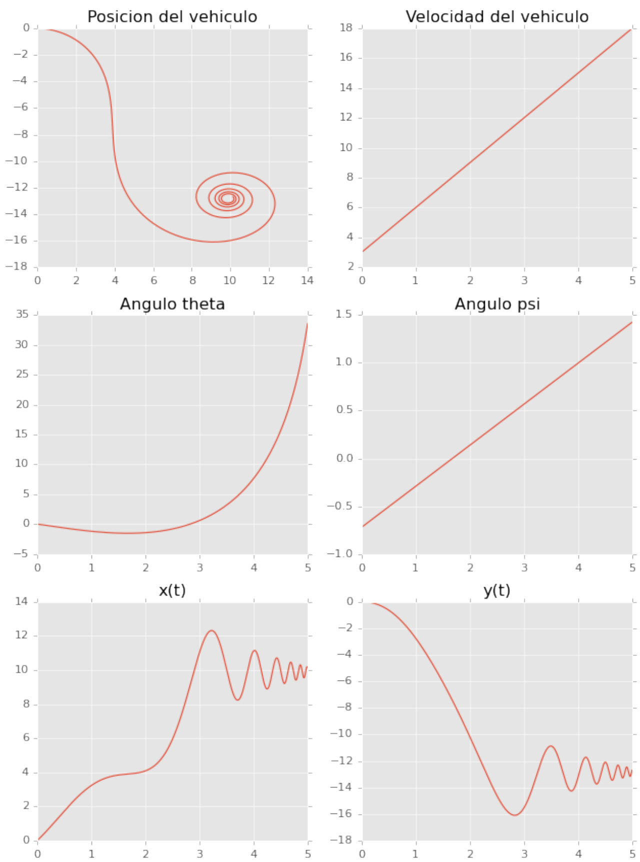

Figura 3: Velocidad $V(t)$ lineal y Ángulo $\psi(t)$ lineal

V.4 Velocidad $V(t)$ cuadrática y Ángulo $\psi(t)$ lineal

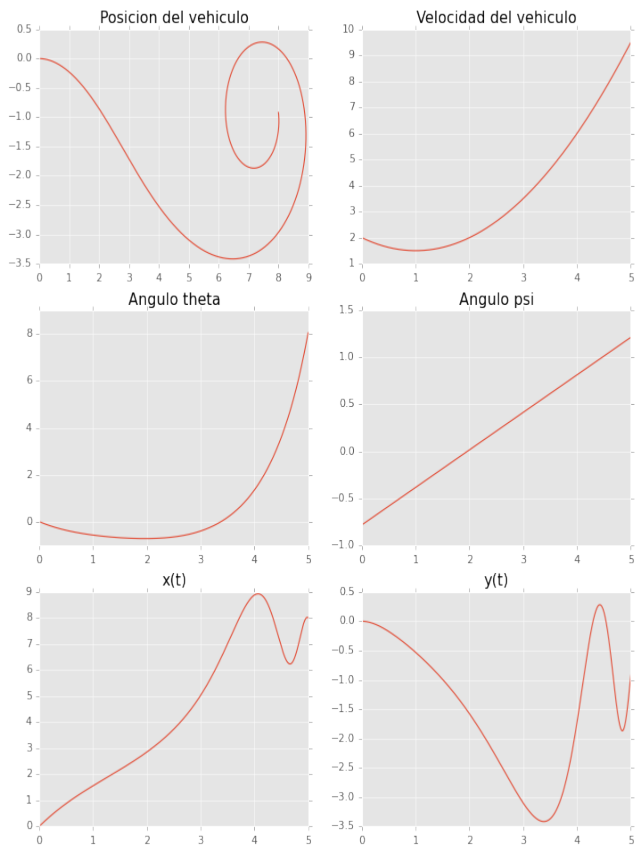

Figura 3: Velocidad $V(t)$ cuadrática y Ángulo $\psi(t)$ lineal

V.5 Velocidad $V(t)$ lineal y Ángulo $\psi(t)$ cuadrática

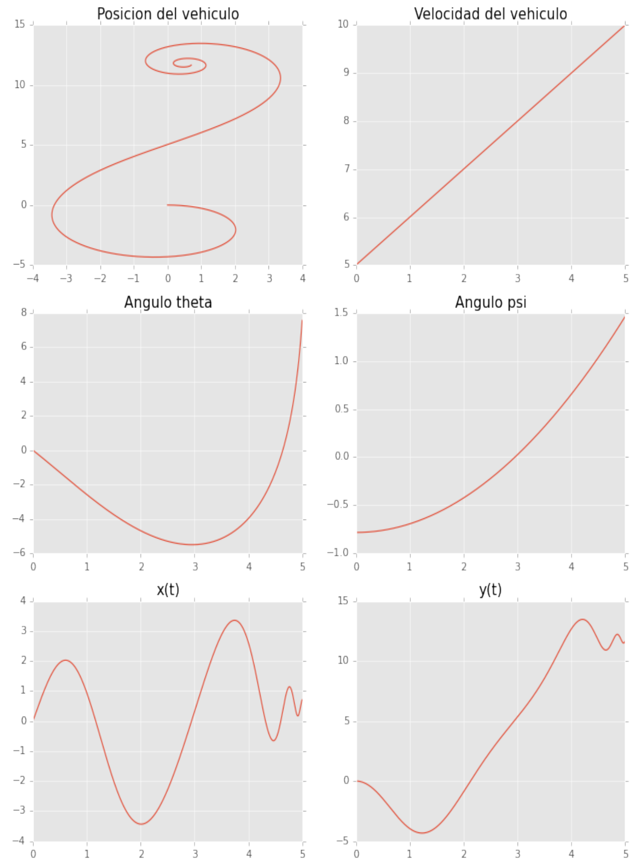

Figura 3: Velocidad $V(t)$ lineal y Ángulo $\psi(t)$ cuadrática

V.6 Velocidad $V(t)$ cuadrática y Ángulo $\psi(t)$ cuadrática

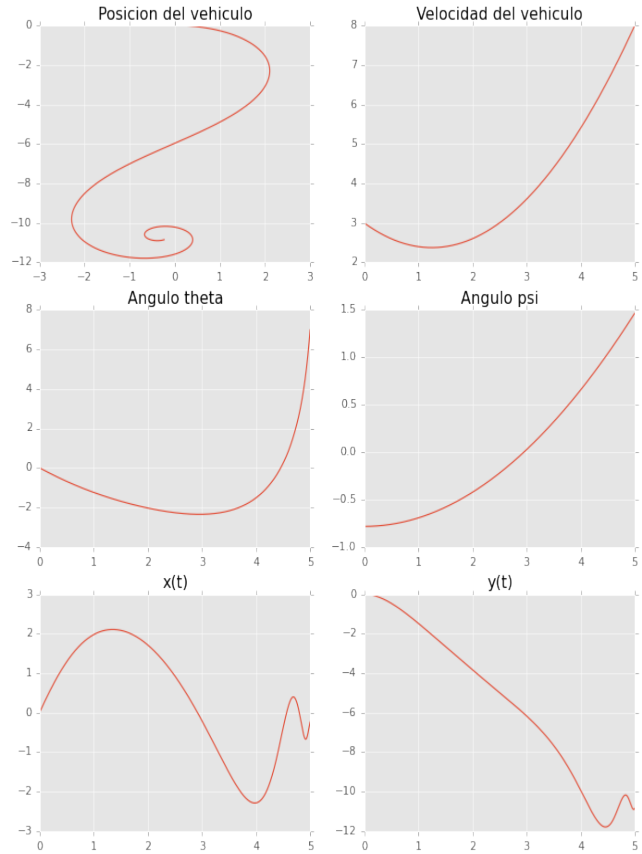

Figura 3: Velocidad $V(t)$ cuadrática y Ángulo $\psi(t)$ cuadrática