Algebra conmutativa. Clase 14.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

22 de octubre de 2020

$(X, \mathcal{O}_X)$ $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios anillados

$f : (X, \mathcal{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismo, i.e:

1. $f : X \to Y$ continua

2. $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ morfismo de haces de anillos ✓

equiv. (por adjunción).

$\boxed{\tilde{f}} : f^{-1}\mathcal{O}_Y \to \mathcal{O}_X$ ✓

Obs:

$\Rightarrow f^{\#}_p : \mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$. morfismo definido por $f^{\#}$ a nivel de stalks.

Sean $(X, \mathcal{O}_X)$, $(Y, \mathcal{O}_Y)$ espacios localm. anillados

Un morfismo $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ de espacios localm. anillados es un morfismo de espacios anillados + $f^\#_p : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \to \mathcal{O}_{X, p}$ homomorf. <u>local</u> $\forall p \in X$.

Ejm: Sea X un espacio top.

Consideremos $\mathcal{C}_X$: haz func. continuas en X.
(con valores en $\mathbb{R}$)

$p \in X$, $\mathcal{C}_{X,p} \leftarrow$ anillo de gérmenes $[s]$ de func. continuas en una vec. de p.

$$\mathfrak{m}_p \subseteq \mathcal{C}_{X,p}$$

$$\mathfrak{m}_p = \{ [s] \in \mathcal{C}_{X,p} \mid s(p) = 0 \}.$$

Notar: $\mathfrak{m}_p$ ideal maximal de $\mathcal{C}_{X,p}$.

$ev : \mathcal{C}_{X,p} \longrightarrow \mathbb{R}$ sobrey.

$\ker(ev) = \mathfrak{m}_p \Rightarrow \mathcal{C}_{X,p}/\mathfrak{m}_p \simeq \mathbb{R}$ cuerpo.

Otro argumento:

$[s] \in \mathcal{O}_{X,p} \setminus \mathfrak{m}_p$.

para todo represent. $s \in [s]$ se tiene

$s(p) \neq 0$.

Como s es continua, entonces existe una vecindad (abierta) $\mathcal{U}$ de p tal que

$s(u) \neq 0 \quad \forall\, u \in \mathcal{U}$.

Por tanto $\dfrac{1}{s|_u}$ existe. i.e. $s|_u$ unidad.

$\Rightarrow \mathcal{O}_{X,p} \setminus \mathfrak{m}_p$ es el grupo de unidades de $\mathcal{O}_{X,p}$.

$\Rightarrow \mathfrak{m}_p$ maximal.

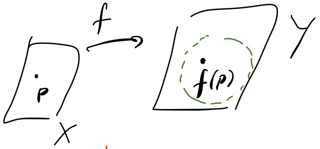
Si $f: X \to Y$ continua (Y otro esp. top.)

$t \to \mathbb{R}$

$f^{-1}(V) \to V \subseteq$

f induce:

$$f^{\#}: \mathcal{O}_Y(V) \longrightarrow \underbrace{\mathcal{O}_X(f^{-1}(V))}_{f_*\mathcal{O}_X(V)}$$



$$t \longmapsto t \circ f$$

$f^{\#}$ induce un morfismo de stalks:

$$\mathcal{O}_{Y,f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X,p}$$

$$[t] \longmapsto [t \circ f].$$

$$f^{\#}_p(\mathfrak{m}_{f(p)}) = \mathfrak{m}_p.$$

Ejm: Sea K un cuerpo. $\left(\begin{array}{l} R = K[T] \\ X = \operatorname{Spec} R \end{array} \right)$

$$X = \mathbb{A}^1_K = \operatorname{Spec}(K[T]) \quad \text{"recta afín"}$$

$\mathcal{U} \subseteq X$ abierto, $\mathcal{U} \neq \phi$

. $\mathcal{U}$ es de la forma $\mathcal{U} = D(P(T))$

donde $P(T) \in K[T] - \{0\}$.

si $P(T) = T$

$$\cdot\ \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) = K[T]_{P(T)} = \underline{K\left[T, \frac{1}{P(T)}\right]} \longleftrightarrow \underbrace{\mathbb{A}^1_K - \{0\}.}_{\text{recta afín} - \{0\} \text{ es afín.}}$$

conj. de funciones racionales cuyo denominador es divisible por factores irred. de $P(T)$.

Si $\underline{K = \overline{K}}$

podemos considerar funciones racionales como una función

$$K \to K \cup \{\infty\}.$$

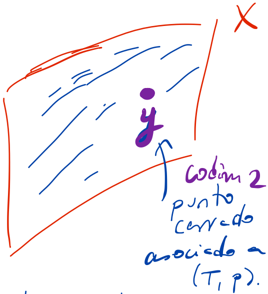
Así

$\mathcal{O}_X(U)$ consiste de aquellas funciones racionales sin polos en U.

Ejm:

dim 2 (superficie) aritmética.

Sea $X = \operatorname{Spec} \mathbb{Z}[T]$



Sea p un número primo.

$\Rightarrow$ (T, p) es un ideal maximal.

Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ el complemento de este punto cerrado.

Se tiene $\mathcal{U} = D(p) \cup D(T)$

$$\therefore \quad \mathcal{O}_X(\mathcal{U}) \subseteq \underbrace{\mathcal{O}_X(D(p))}_{\mathbb{Z}[T, \frac{1}{p}]} \cap \overbrace{\mathcal{O}_X(D(T))}^{\mathbb{Z}[T, \frac{1}{T}]}$$

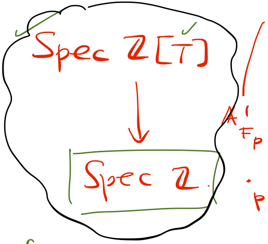
Notar:

$$\mathbb{Z}[T, \tfrac{1}{T}] \cap \mathbb{Z}[T, \tfrac{1}{p}] = \mathbb{Z}[T]$$

$$\therefore\ \mathcal{O}_X(U) = \mathbb{Z}[T] = \mathcal{O}_X(X).$$

Hartogs aritmético.

$\underline{\underline{\mathbb{Z}}} \to \mathbb{Z}[T]$



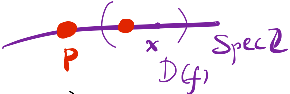
Ejm: $X = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}$

un abierto propio de X

es de la forma $D(f)$, $f \in \mathbb{Z}$, $f \neq 0$.

$\mathbb{Z}_p \;\mid\; \mathbb{Z}_{(f)}\cdot \mid \subseteq \mathbb{Q}$

$$\mathcal{O}_X(D(f)) = \mathbb{Z}_f \subseteq \mathbb{Q}.$$



Un número racional $\frac{a}{b}$ (con $(a,b)=1$) pertenece a $\mathcal{O}_X(D(f))$ si y sólo si todo primo que divide a b también divide a f.

Ejm: (esquemas)

k cuerpo

$\operatorname{Spec}(k) = \{0\}$.

$\mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(k)} = k$

$\operatorname{Spec} k := (\{0\}, k)$

espacio top.

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} k \end{array}$$

X definido sobre k. $(*)$

¿Qué significa tener un morfismo

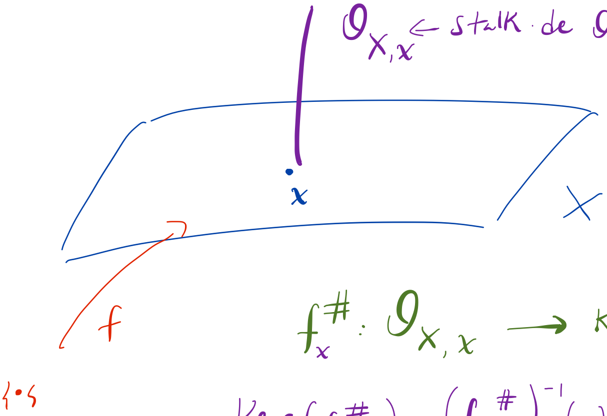
$f : \operatorname{Spec} k \to X$

para un esquema X?

1º) f elige un punto $f(0) = x \in X$.

2º) $f^\#_x : \mathcal{O}_{X,x} \to \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} k, 0} = k$

$\mathcal{O}_{X,x} \leftarrow$ stalk de $\mathcal{O}_X$ en x.



$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow k$$

$$\operatorname{Ker}(f_x^{\#}) = (f_x^{\#})^{-1}(0) = \mathfrak{m}_x \subseteq \mathcal{O}_{X,x}$$

donde $\mathfrak{m}_x$ es el ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,x}$.

Tenemos así una factorización

$$\mathcal{O}_{X,x} \to \boxed{\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x} \hookrightarrow K$$

$K(x)$ cuerpo residual de $\mathcal{O}_{X,x}$

Recíprocam.

si tenemos

$$K(x) \longrightarrow K$$ ✓

x: K-punto de X.

obtenemos un morfismo

$$f : \operatorname{Spec} K \longrightarrow X$$
$$0 \longmapsto x$$

y

$$f_U^{\#} : \mathcal{O}_X(U) \longrightarrow (f_* K)\, U$$
$$s \longmapsto \begin{cases} (U, s \bmod m_x)) & x \in U \\ 0 & x \notin U. \end{cases}$$

Por otro lado,

$\{0\}$.

¿qué significa un morfismo $f : X \to \operatorname{Spec} k$?

f es constante (como func. de espacios top.)

pero

necesitamos

$$f^{\#} : k \to f_* \mathcal{O}_X$$

i.e.

$$f^{\#}_{\operatorname{Spec} k} : k \to \mathcal{O}_X(X)$$

Es decir $\Gamma(X, \mathcal{O}_X) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{O}_X(X)$ tiene estructura de k-álgebra y vía composición con restricciones

$$K \to \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \to \underbrace{\Gamma(U, \mathcal{O}_X)}$$

Es decir

$\mathcal{O}_X$ se convierte en un haz de K-álgebras.

Decimos en este contexto:

X es un esquema sobre $\operatorname{Spec} K$.

(en corto: X es un esquema sobre K).

Además, un morfismo de esquemas sobre Spec k es un diagrama conmutativo

$$
\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\
& \operatorname{Spec} k &
\end{tikzcd}
$$

i.e. $f^{\#} : \mathcal{O}_Y \to f_* \mathcal{O}_X$ es un morfismo de haces de k-álgebras.

Obs: De manera más general, podemos reemplazar Spec k por un esquema Z y considerar <u>esquemas definidos sobre Z</u> y sus morfismos.

(i.e.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr] & & Y \arrow[dl] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

)

Ejm: (variedad afín)

k cuerpo

$A = k[x_1, \ldots, x_n]/I$ con $I = \sqrt{I}$.

i.e. A es una k-álgebra finit. generada sin nilpotente.

El morfismo $k \to A$ nos brinda un morfismo

$$\boxed{\operatorname{Spec} A \to \operatorname{Spec} k}$$

Decimos así $\operatorname{Spec} A$ es una variedad afín sobre k.

Si k' es una extensión de k, un diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & & & X \\
\boxed{\operatorname{Spec} k'} \arrow[rr] \arrow[dr] & & \operatorname{Spec} A \arrow[ur, phantom, "="] \arrow[dl] & \\
 & \operatorname{Spec} k & & (*)
\end{tikzcd}$$

es equivalente a un homom de k-álgebras

$$\underline{\underline{A}} \longrightarrow \underline{\underline{k'}}.$$

i.e. es equivalente a proporcionar un punto

$(a_1, a_2, \dots, a_n) \in (K')^n$

con $\quad f(a_1, \dots, a_n) = 0$

para todo $f \in I$.

Se suele escribir $\underbrace{X(K')}_{(\operatorname{Spec} A)(K')}$ para diagramas del tipo $(*)$.

Ejm: (ejm. de un esquema que no es variedad)

$$D = \operatorname{Spec} k[t]/(t^2) := \Big(\underbrace{\{(t)\}}_{\text{espacio top.}},\ \underbrace{k[t]/(t^2)}_{\text{haz estructural}} \Big)$$

t es una "función" en un único punto, cuyo cuadrado es 0.

¿Qué información contiene D?

Sea X un esquema sobre $\operatorname{Spec} k$.

Consideremos un morfismo

$$f : D \to X \quad (\text{sobre } \operatorname{Spec} k)$$

Esto especifica un punto $x = f((t)) \in X$, y

un homomorf de k-álgebras

$$f_x^{\#} : \mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow \mathcal{O}_{D,(t)} = k[t]/(t^2)$$

$$\mathfrak{m}_x \longrightarrow (t)$$

$$\mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow 0$$

es decir, obtenemos un morfismo

$$\mathfrak{m}_x / \mathfrak{m}_x^2 \longrightarrow (t) \cong K$$

como K espacio vectorial.

Tenemos además un hom. de K-álgebras

$$\mathcal{O}_{X,x} \longrightarrow K[t]/(t^2) \longrightarrow K[t]/(t) \simeq K$$

cuyo kernel es $\mathfrak{m}_x$.

Tenemos así una inclusión

$$k(x) = \mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x \hookrightarrow k$$

de k-álgebras.

$$\Rightarrow k(x) \simeq k$$

$\therefore \longrightarrow \dfrac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{m}_x^2}$ es un $k(x) = \dfrac{\mathcal{O}_{X,x}}{\mathfrak{m}_x}$ - espacio vectorial.

y así $\dfrac{\mathfrak{m}_x}{\mathfrak{m}_x^2} \longrightarrow k \simeq k(x)$ es un morfismo de k-esp. vect.

Es decir

$\tilde{f} : \dfrac{m_x}{m_x^2} \to k$ es un elem.

de $\boxed{\left(\dfrac{m_x}{m_x^2}\right)^*} = T_x X$

Espacio tg. (de Zariski) de X en x.

Dicho de otro modo, un morfismo

$D \xrightarrow{f} X \quad \underset{\text{equiv.}}{\rightsquigarrow}$ dar un punto $x \in X$

y

$\vec{f} \in \left(\dfrac{m_x}{m_x^2}\right)^*$

· vector en $T_x X$.