Algebra conmutativa. Clase 8.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

30 de septiembre de 2020

Principio local-global:

Una propiedad $\mathcal{P}$ de un anillo R (ó de un R-mod M) es local si se cumple lo sgte:

A (ó M) tiene prop. $\mathcal{P}$ $\iff$ $A_{\mathfrak{p}}$ (ó $M_{\mathfrak{p}}$) tiene prop. $\mathcal{P}$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R.

Proposición: Sea M un R-mod. Las sgtes prop. son equivalentes:

(i) $M = 0$

(ii) $M_{\mathfrak{p}} = 0$ para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R.

(iii) $M_{\mathfrak{m}} = 0$ para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

Prueba:

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii) ✓

Supongamos (iii) se cumple.

Sea $x \in M$, un elem. $\neq 0$. (supong. $M \neq 0$)

Sea $\mathfrak{a} = \mathrm{Ann}(x) = \{a \in R \mid ax = 0\}$.

$\mathfrak{a} \neq (1)$ y por tanto $\boxed{\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}}$ (*) para cierto ideal max. $\mathfrak{m}$ de R.

Consideremos: $\frac{x}{1} \in M_{\mathfrak{m}}$

Dado que $M_{\mathfrak{m}} = 0$ tenemos $\frac{x}{1} = 0$.

esto es, x es aniquilado/anulado por un elem. de $R \setminus \mathfrak{m}$. Pero esto es imposible pues $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}$. (*) $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore M = 0$.

Corolario:

Sea $f : M \to N$ un homomorfismo de R-mod. Las sgtes. afirmaciones son equivalentes:

(i) f es inyectiva (resp. sobreyectiva)

(ii) $f_{\mathfrak{p}} : M_{\mathfrak{p}} \longrightarrow N_{\mathfrak{p}}$ es inyectiva (resp. sobrey.) para todo ideal primo $\mathfrak{p} \subseteq R$.

(iii) $f_{\mathfrak{m}} : M_{\mathfrak{m}} \longrightarrow N_{\mathfrak{m}}$ es inyectiva (resp. sobrey.) para todo ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq R$.

Prueba: Recordar:

- f iny $\iff \operatorname{Ker}(f) = 0$.
- f sobreyectiva $\iff \operatorname{coKer}(f) = 0$ $\left(\operatorname{coker} f = N/\operatorname{Im} f\right)$

(*) localización preserva exactitud (es un functor exacto).

inyectividad:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Se tiene la sucesión exacta

$$0 \to M \xrightarrow{f} N \quad (\text{pues } \ker f = 0)$$

entonces por (*):

$$0 \to M_p \xrightarrow{f_p} N_p$$ es exacto. para todo ideal primo $p \subseteq R$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) todo ideal maximal es primo.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Sea $K = Ker(f)$, entonces la sucesión

$$0 \to K \to M \xrightarrow{f} N$$ es exacta.

Entonces:

$$0 \to K_m \to M_m \xrightarrow{f_m} N_m$$ es exacta para todo $m \subseteq R$ maximal.

Por hipótesis

$K_m = 0 \quad \forall\, m$: maximal

$\Rightarrow K = 0$ (por Prop. anterior).

- Más adelante, veremos que platitud (flatness) es una prop. local.

- Observación:

  Definición: (Soporte de M)

  Sea M un R-módulo.

  $$\mathrm{Supp}(M) = \{ \mathfrak{p} \text{ ideal primo de } R \mid M_{\mathfrak{p}} \neq 0 \}$$

  $\mathrm{Supp}(M)$ es un subconjunto de $\mathrm{Spec}(R)$.

Ejercicio:

Si M es un R-mod. finitam. generado

$$\operatorname{Supp}(M) = V(\operatorname{Ann}(M))$$

i.e. $\operatorname{Supp}(M)$ es un subconjunto cerrado de $\operatorname{Spec}(R)$.

ver. ejercicio 19, p. 46 de Atiyah-MacDonald.

Módulos proyectivos:

($f : M \twoheadrightarrow N$ indica hom. sobrey.)

Sea R un anillo (conmut.)

Decimos que un R-mod. P es <u>proyectivo</u>

si dados $f : P \to M'$ homomorfismo

y $g : M \to M'$ sobreyectivo

existe un homomorfismo $h : P \to M$ tal que el diagrama:

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d, "f"] \arrow[dl, "h"'] & \\ M \arrow[r, two heads, "g"] & M' \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

<u>Conmuta</u>: es decir $g \circ h = f$.

f se factoriza a través de g y h.

$$\begin{tikzcd} & M \arrow[d, "g"] \\ P \arrow[ur, dashed, "\exists h"] \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, phantom, shift right=3ex, "\circlearrowright"] & M' \end{tikzcd}$$

- h es "levantamiento" de f a M.
- $g \circ h = f$.

Observación: Todo módulo libre es proyectivo.

Lema:

Sea P un R-módulo.

Las sgtes. afirmaciones son equivalentes:

① P es proyectivo

② Toda sucesión exacta corta

$$0 \to M' \to M'' \underset{\pi}{\overset{h}{\rightleftarrows}} P \to 0$$

es split. (i.e. existe $h : P \to M''$ sección de π: $\pi \circ h = id_P$).

③ Existe un módulo M tal que

$P \oplus M$ es libre.

1 $\Rightarrow$ 2

$$\begin{tikzcd} & M'' \arrow[d, "\pi"] \\ P \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "id"'] & P \end{tikzcd}$$

P proy. $\Rightarrow \exists\, h : P \to M''$ hom. tal que

$\pi \circ h = id_P$.

2 $\Rightarrow$ 3

Representamos P como el cociente de un módulo libre

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \operatorname{Ker}\pi \arrow[r] & F \arrow[r, two heads, "\pi"'] & P \arrow[r] \arrow[l, bend right, "\exists h"'] & 0 \end{tikzcd}$$

por 2 aplicado a π, π splits.

$\Rightarrow \quad P \oplus \operatorname{Ker}\pi = F \leftarrow F$ libre.

③ $\Rightarrow$ ① Ejercicio.

Ejm: $R = \mathbb{Z}/_{6\mathbb{Z}}$ anillo (no todo módulo proy. es libre).

$\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$ y $\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}}$ son R-módulos $\begin{pmatrix} R \to \mathbb{Z}_2 \\ R \to \mathbb{Z}_3 \end{pmatrix}$

Notemos $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \simeq \mathbb{Z}_6$.

Por tanto $\mathbb{Z}_2$ y $\mathbb{Z}_3$ son R-mod. proyectivos pero ninguno de ellos es R-mod. libre.

Ejercicio:

R anillo.

P R-mod. proyectivo $\Leftrightarrow$ El functor F

$$\{R\text{-mod}\} \xrightarrow{F} \left\{\begin{array}{c}\text{grupos}\\ \text{abelianos}\end{array}\right\}$$

$$M \longmapsto \operatorname{Hom}_R(P,M)$$

es exacto:

dada cualquier suc. exacta corta

$$0 \to M \to N \to L \to 0$$

de R-mod., la sucesión:

$$0 \to \operatorname{Hom}_R(P,M) \to \operatorname{Hom}_R(P,N) \to \operatorname{Hom}_R(P,L) \overset{(*)}{\to} 0$$

es exacta.

(dominio)

① Si R es un anillo de ideales principales, entonces todo módulo proyectivo finitamente generado es libre.

② si $(R, \mathfrak{m})$ anillo local, entonces todo módulo proyectivo finitamente generado es libre.

③ Quillen-Suslin: Sea $R = K[X_1, \dots, X_n]$ K: cuerpo

si M R-mod. proyectivo finitamente generado, entonces M libre.

Para ②

M módulo proy. finitam. gen.

Sean $x_1, \dots, x_n$ lista mínima de gen. de M

$$0 \to \operatorname{Ker}\varphi \to R^n \xrightarrow{\varphi} M \to 0$$

ψ: sección:

pasamos al cuerpo residual:

$\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$ base de $M/\mathfrak{m}M$

$K = R/\mathfrak{m} \leftarrow$ cuerpo residual.

$\Rightarrow \quad R^n = (\operatorname{Ker} \varphi) \oplus M \qquad M$ proy.

$$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker}\varphi / \mathfrak{m} \operatorname{Ker}\varphi = 0$$

$\Rightarrow \quad \operatorname{Ker}\varphi = \mathfrak{m} \operatorname{Ker}\varphi \qquad \mathfrak{m}$: único ideal maximal de R.

$\underset{\text{Nakayama}}{\Rightarrow} \quad \underline{\operatorname{Ker}\varphi = 0}$

$\therefore$ M es <u>libre</u>.

Módulos proyectivos $\rightsquigarrow$ grupo de Grothendieck
K-teoría.

Sea R un anillo.

Clases de isomorfismo de R-módulos proyec. finit. generados forman un monoide:

· en efecto

$$[P] + [Q] = [P \oplus Q].$$

$$K(R) = \frac{\text{Grupo libre generado por las clases de iso } R\text{-mod. proy. finit. gen.}}{\text{relación } \Gamma}$$

(*) :

$$0 \to M' \to M \to M'' \to 0$$

$$[M] - [M'] - [M'']$$

(i.e. en $K(R)$: $[M] = [M'] \oplus [M'']$.)

Γ subg. generado por

$\langle [M] - [M'] - [M''] \mid$ por cada sucesión exacta corta $0 \to M' \to M \to M'' \to 0 \rangle$

$K(R)$ = Grupo de Grothendieck.

(grupo abeliano).

$\chi : K(R) \to \mathbb{Z}$.

Ejm: (De p. 15)

- $K(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$
- $K(R) \cong \mathbb{Z}$ si (R, m) es local.

Obs: $K(R) = K_0(R)$

K-teoría alg. de R.