Algebra conmutativa. Clase 23.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

4 de diciembre de 2020

Lema:

Sea K un cuerpo. Sea n número natural.

Si $\mathfrak{m}$ ideal maximal de $K[x_1, \ldots, x_n]$,

entonces $\mathfrak{m}$ se puede generar por n elementos.

Corolario: La dimensión de Krull de $K[x_1, \ldots, x_n]$ es n.

Prueba:

Sea $R = K[x_1, \ldots, x_n]$

$\dim R \geq n$ pues

$$0 \subsetneq (x_1) \subsetneq (x_1, x_2) \subsetneq (x_1, x_2, x_3) \subsetneq \ldots \subsetneq (x_1, x_2, \ldots, x_n) \checkmark$$

Además, por el Lema, se tiene

$$\dim R_{\mathfrak{m}} \leq n \quad \text{para todo ideal maximal } \mathfrak{m} \text{ de } R.$$

Es decir $\dim R \leq n$

Luego, $\dim R = n$.

Prueba del lema:

Por la "versión débil" del Nullstellensatz,

$$K[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{m} \text{ es una extensión finita alg. de } K.$$

Para $0\le i\le n$, denotemos por F_i la imagen de la subalg. $K[x_1,\dots,x_i]$ en $\boxed{K[x_1,\dots,x_n]/\mathfrak{m}}$. $\supseteq F_i$

Notar: cada F_i es una K-alg. finita y un dominio de integridad, por tanto F_i es también una extensión finita de K.

Tenemos así una filtración

$$K = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \dots \subseteq F_n$$

donde para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ existe un ideal maximal $\mathfrak{m}_i \subseteq F_{i-1}[x_i]$ tal que

$$F_i \cong F_{i-1}[x_i]/\mathfrak{m}_i$$

Como $F_{i-1}[x_i]$ es un DIP, entonces $\mathfrak{m}_i = \langle f_i \rangle$ para algún polin. irreducible $f_i \in F_{i-1}[x_i]$.

Consideremos los levantamientos $\tilde{f}_i$ de f_i a $K[x_1, \dots, x_i]$. Obtenemos así $\{\tilde{f}_i\}_{i=1}^{n}$ es un cjto. de generadores de $\mathfrak{m}$.

Motivación:

Alg.

$k[x_1, \dots, x_n]$ $\longleftrightarrow$

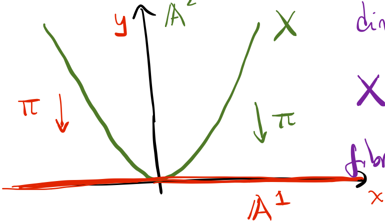
dim n.

Geom.

$\mathbb{A}^n_k$

dim. n.

$X \subseteq \mathbb{A}^m_k$



$X \overset{\subseteq \mathbb{A}^m_k}{}$ var. alg.

$\dim X = n$

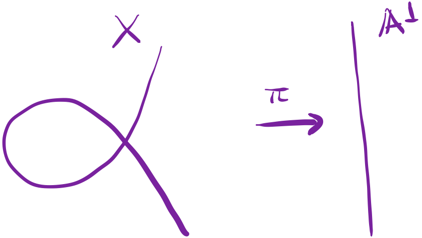
$X \xrightarrow{\pi} V$

proj. con fibras finitas.

$V = \mathbb{A}^n_k$

Prob geom.

Dada una variedad algebraica X, $\dim X = n$ hallar un espacio afín $\mathbb{A}^n_k$ con un morfismo sobreyectivo $\pi: X \to \mathbb{A}^n_k$ con fibras finitas.



Alg. esto equivale a pedir:

$$f : k[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow A(X)$$

injectiva + finita.

Teorema de Normalización de Noether:

Sea K un cuerpo.

Sea R una K-algebra tipo finito.

Entonces R es una extensión finita de un anillo de polinomios sobre K; i.e. existe un # natural n y un homomorfismo inyectivo

$$S = K[y_1, \ldots, y_n] \hookrightarrow R$$

de modo que R es una S-alg. finita.

Lema (lema de preparación):

Sea K un cuerpo. Sea $f \in K[x_1,\dots,x_n]$.

Si $f \neq 0$, entonces existe un isomorfismo

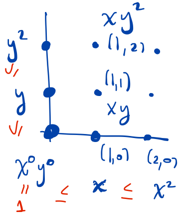
$K[x_1,\dots,x_n] \cong K[y_1,\dots,y_n]$ tal que f

es un múltiplo cte. de un polinomio mónico en y_n, i.e.

$$f = a\, y_n^d + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(y_1,\dots,y_{n-1}) \cdot y_n^i$$

para algún $a \in K^\times$ y $a_i(y_1,\dots,y_{n-1}) \in K[y_1,\dots,y_{n-1}]$.

Prueba:



Sea $I = (i_1, \ldots, i_n) \in \mathbb{N}^n$ (multi-índice)

• Escribimos X^I por $x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$.

$x = x^{(1,0)}$

• Ordenamos $\mathbb{N}^n$ de manera lexicográfica.

$xy = x^1 y^1$

$x \leq xy$

• Sea I el mayor multi-índice tal que X^I tiene un coef. distinto de cero en f.

Entonces para una sucesión

$$m_1 >> m_2 >> \cdots >> m_{n-1} >> 1.$$

$$f(y_1 + y_n^{m_1}, \dots, y_{n-1} + y_n^{m_{n-1}}, y_n)$$

$$= a_I \, y_n^{\overbrace{m_1 i_1 + \dots + m_{n-1} i_{n-1} + i_n}} + \text{térm. de menor orden.}$$

Así, el homomorfismo

$$K[x_1, \dots, x_n] \longrightarrow K[y_1, \dots, y_n] \quad \text{definido}$$

por

$$x_1 \mapsto y_1 + y_n^{m_1}, \dots, x_{n-1} \longmapsto y_{n-1} + y_n^{m_{n-1}}, x_n \mapsto y_n$$

es un isomorfismo (la inversa es

$$y_1 = x_1 - x_n^{m_1}, \ldots, y_{n-1} = x_{n-1} - x_n^{m_{n-1}}, y_n = x_n)$$

con las propiedades deseadas. $\boxtimes$

Prueba del T. de Normaliz. de Noether:

Por hipótesis, como R es una K-alg. finitam. generada, se tiene que existe

$$f : K[x_1, \ldots, x_N] \twoheadrightarrow R$$

hom. sobreyectivo.

- si $N = 0$, entonces el T. es cierto.
- Ahora procedemos por inducción.

Sea $I = \operatorname{Ker} f$.

- Si $I = 0 \Rightarrow f$ isomorf. ✓

- Si $I \neq 0 \Rightarrow$ sea $g \in I$, $g \neq 0$.

Por el lema de preparación, podemos asumir que g es mónico en X_N. Luego, tenemos una relación de la sgte. forma

$$\overline{X}_N^{\,d} + \sum_{i=0}^{d-1} a_i(\overline{X}_1, \dots, \overline{X}_{N-1})\overline{X}_N^{\,i} = 0 \in R$$

donde $\overline{x}_j = f(x_j)$.

Así $\overline{x}_N$ es integral sobre $S :=$ K-subalg. de R generada por $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_{N-1}$.

Tenemos por tanto R es una S-álgebra finita.

Por la hipótesis inductiva, S es un $K[y_1, \ldots, y_n]$-alg. finita. Por tanto, R también es finita sobre $K[y_1, \ldots, y_n]$.

Obs: ver/comparar ejercicio 16, página 69 de Atiyah-MacDonald.

Cuando K es infinito, podemos hacer un cambio de coord. lineal:

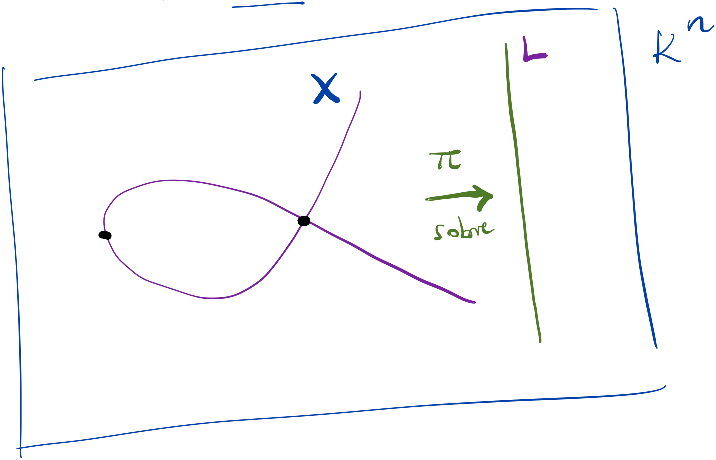
$$\cdot \quad y_i = x_i - \lambda_i x_n \qquad 1 \leq i \leq n-1.$$

En este caso, la interpretación geométrica es la sgte:

si $K = \overline{K}$, $X \subseteq K^n$ con anillo de coord $A(X) \neq 0$.

Entonces existe un subespacio lineal L de dimensión r en K^n y una función lineal de K^n sobre L

que envía X sobre L.



Def: Sea R un dominio de integridad.

Decimos que R es **normal** si

R es **integralm. cerrado** en $\underbrace{\mathrm{Quot}(R)}_{\text{cuerpo de fracciones}}$

$$R \subseteq \mathrm{Quot}(R)$$

Ejm:

- $\mathbb{Z}$ es normal.
- $K[x_1, \ldots, x_n]$ es normal.

Definición: Sean X, Y esquemas afines.

Un morfismo $f : X \to Y$ se denomina <u>integral</u> si $\mathcal{O}(X)$ es una extensión integral de la imagen de $\mathcal{O}(Y)$ vía $f^\#$.

En este caso, decimos que X es integral sobre Y.

Obs: un morfismo de esquemas afines es finito si y sólo si es de tipo finito e integral (ver Clase 20, p. 12).

Lema: Normalidad es una propiedad local: si R es un dominio de integridad, las sgtes. propiedades son equivalentes:

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, hook] & \mathrm{Quot}(R) \\ R_{\mathfrak{m}} \arrow[ur, hook] & \\ R_{\mathfrak{p}} \arrow[uur, hook] & \end{tikzcd}$$

(1) R es normal.

(2) $R_{\mathfrak{p}}$ es normal para todo ideal primo $\mathfrak{p}$ de R.

(3) $R_{\mathfrak{m}}$ es normal para todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R.

Prueba: Ejercicio.

$B \subseteq A$.

Lema: Sea B un subanillo de un anillo A.

Supongamos que A es una extensión integral de B.

Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$, $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} \cap B$. Entonces

$\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de A si y sólo si

$\mathfrak{q}$ es un ideal maximal de B.

Prueba: Sabemos que $A/\mathfrak{p}$ es integral sobre $B/\mathfrak{q}$. Por tanto, es suficiente mostrar que A es un cuerpo si y sólo si B lo es (cuando A es un dominio).

Supongamos B es un cuerpo. Sea $x \in A$. Si $x \neq 0$, entonces $b_0, \dots, b_{n-1} \in B$ tal que

$$b_0 + b_1 x + \dots + b_{n-1} x^{n-1} + x^n = 0.$$

Escojamos $b_0, \ldots, b_n$ de modo que n sea minimal con esta propiedad.

Dado que A es un dominio, $b_0 \neq 0$, así

$$x \cdot \frac{b_1 + b_2 x + \cdots + b_{n-1} x^{n-1}}{b_0} = -1$$

por tanto, x es invertible en A.

$\therefore$ A es un cuerpo.

Para la conversa, supong. A es un cuerpo.

Sea $u \in B$. Si $u \neq 0$, entonces $\frac{1}{u} \in A$

y $\frac{1}{u}$ es integral sobre B.

Tenemos así

$$b_0 + \frac{b_1}{u} + \cdots + \frac{b_{n-1}}{u^{n-1}} + \frac{1}{u^n} = 0$$

para ciertos $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1} \in B$.

Entonces

$$b_0 u^{n-1} + b_1 u^{n-2} + \dots + b_{n-1} = -\frac{1}{u}.$$

Es decir $\frac{1}{u} \in B$. Por tanto B cuerpo.

Corolario/Ejercicio: Sea A una extensión integral de B. Sean $\mathfrak{p}, \mathfrak{p}'$ ideales primos de A.

Si $\mathfrak{p} \subseteq \mathfrak{p}'$ y $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{p}' \cap B$, entonces $\mathfrak{p} = \mathfrak{p}'$.

Prox. clase:

<u>Teorema</u> (Going-up theorem) $B \subseteq A$.

Sea A una extensión integral de B.

Si $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, entonces existe al menos un $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tal que $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}$.