Algebra conmutativa. Clase 25.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

11 de diciembre de 2020

Teorema: R anillo, $R \neq 0$.

R artiniano $\iff$ R Noetheriano y $\dim R = 0$.

Prueba:

($\Rightarrow$) Como R es Artiniano, todo ideal primo es maximal y por tanto $\dim R = 0$.

Debemos mostrar que R es Noetheriano.

Sabemos (clase pasada) R tiene un $\#$ finito de ideales maximales $m_1, \dots, m_n$.

Así, $\mathrm{Nil}(R) = \mathcal{N} = m_1 \cap \cdots \cap m_n$.

Además, $\mathrm{Nil}(R)$ es nilpotente en este caso.

Existe $k >> 1$

$$\mathcal{N}^k = (0).$$

Consideramos así la filtración:

$$R \supseteq m_1 \supseteq m_1 m_2 \supseteq \cdots \supseteq m_1 \cdots m_n \supseteq m_1^2 m_2 \cdots m_n \supseteq \cdots \supseteq 0$$

$*$

Obs:

- $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ $\quad$ M Noetheriano $\Leftrightarrow$ M', M'' lo son.
- $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ $\quad$ M Artiniano $\Leftrightarrow$ M', M'' lo son.

En la filtración dada arriba cada cociente es de la forma $I/\mathfrak{m}I$ para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$ y algún ideal I, y este cociente es de manera natural espacios vectoriales sobre $(R/\mathfrak{m})$ que son además Artinianos.

Pero todo espacio vectorial Artiniano tiene dim. finita, y por tanto también es Noetheriano.

Así, como la filtración es finita, se tiene R Noetheriano.

$(\Leftarrow)$ Recíprocamente, supongamos R es Noetheriano.

Si R tiene dim cero, entonces todo ideal primo es maximal, por tanto

$$\mathcal{N} = \mathrm{Nil}(R) = m_1 \cap \dots \cap m_n.$$

m_i: ideales maximales.

Tenemos además, existe K tq.

$$\mathcal{N}^K \subseteq (0) \subseteq \mathcal{N}.$$

Considerando la filtración arriba, se concluye R Artiniano.

Teorema (teorema estructural para anillos Artinianos)

Sea R un anillo Artiniano. Entonces R es isomorfo a un producto finito de anillos locales Artinianos.

Prueba: A-M.

T. ideal principal de Krull.

Teorema: (Krull's Hauptidealsatz)

Sea R un anillo Noetheriano. Si f no es unidad de R, entonces todo ideal primo $\mathfrak{p}$ minimal que contiene a f tiene codimensión a lo más 1.

(recordar, $\mathfrak{p}$ ideal primo
$\operatorname{codim} \mathfrak{p} = ht(\mathfrak{p}) = \dim R_{\mathfrak{p}}$).

Prueba:

Localizando con respecto de p, de ser necesario, podemos asumir que R es un anillo local con ideal maximal p.

Más aún, podemos reemp. R por uno de sus cocientes módulo uno de sus ideales primos minimales. Así, podemos asumir R es un dominio integral.

Sea $q \subsetneq p$ un ideal primo.

Debemos mostrar $q = 0$.

por hipótesis, p/fR es el único ideal primo de R/fR, por tanto: $\dim R/fR = 0$.

Luego R/fR es Artiniano.

Consideremos la cadena de ideales:

$$\mathfrak{q}_n := \mathfrak{q}^n R_f \cap R.$$

La imagen de esta sucesión en R/fR es estacionaria. Por tanto existe un n_0 tal que $\forall n \geq n_0$ se tiene

$$\mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_{n+1} + fR.$$

Sea $n \geq n_0$. Sea $x \in \mathfrak{q}_n$.

Existe $y \in R$ tal que $x - fy \in \mathfrak{q}_{n+1}$.

Luego $fy \in \mathfrak{q}_n$ y por tanto $y \in \mathfrak{q}_n$.

Es decir, se tiene

$$\mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_{n+1} + f\mathfrak{q}_n \subseteq \mathfrak{q}_{n+1} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}_n.$$

Por el lema de Nakayama $\Rightarrow$ $\mathfrak{q}_n = \mathfrak{q}_{n+1}$.

Tenemos así,

$$\mathfrak{q}_n R_f = \mathfrak{q}^n R_f \, .$$

$$\Rightarrow \quad \mathfrak{q}^{n_0} R_f = \bigcap_{n \geq n_0} \mathfrak{q}^n R_f \overset{(*)}{=} 0$$

(*) : T. de Krull : Sea A Noetheriano. $I \subseteq A$ ideal. M un A-mod. finitam. generado. Entonces →

$\bigcap_{n \geq 0} (I^n M)$ es el cjto. de elem.

$x \in M$ para los cuales existe $\alpha \in I$

tal que $(1+\alpha)x = 0$.

Así

$q^{n_0} R_f = (0)$

$\Rightarrow q = 0$.

Corolario: Sea R un anillo Noetheriano.

Si $x_1, \ldots, x_c$ son elem. de R, entonces todo ideal primo minimal de R que contiene a $(x_1, \ldots, x_c)$ tiene codimensión a lo más c.

Prueba: Procedemos por inducción en c.

Sea p un ideal primo minimal que contiene a $(x_1, \ldots, x_c)$.

Localizando, podemos asumir sin pérdida de generalidad que p es maximal, así en este caso debemos mostrar $\dim R \leq c$.

Como en el T. anterior, p es el único ideal primo de R que contiene a $(x_1, .., x_c)$ y $R/(x_1, .., x_c)$ es un anillo Artiniano.

Así $P/(x_1, .., x_c)$ es nilpotente en $R/(x_1, .., x_c)$.

Supongamos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r$$

es una cadena estrictam. ascendente de ideales primos de R. Debemos mostrar $r \leq c$.

Dado que $\mathfrak{p}$ es el único ideal maximal de R, podemos asumir $P_r = \mathfrak{p}$.

Como R es Noetheriano, podemos asumir también que P_{r-1} es maximal entre todos los ideales primos estrictam. contenidos en p.

Así, es suficiente mostrar que p_{r-1}

es minimal sobre un ideal generado por

$c-1$ elementos.

Dado que $p_{r-1} \neq p$ y $\{x_1, \dots, x_c\} \not\subseteq p_{r-1}$

digamos $x_1 \notin p_{r-1}$.

Luego p es minimal sobre $p_{r-1} + (x_1)$.

Es decir

$$R \big/ \left(P_{r-1} + (x_1)\right) \text{ es Artiniano.}$$

Luego, para $2 \leq i \leq c$ y $n >> 0$

$$x_i^n = a_i x_1 + y_i \quad \text{para ciertos}$$

$$a_i \in R, \quad y_i \in P_{r-1}.$$

Notar

$\langle x_1, \underbrace{y_2, \ldots, y_c} \rangle$ contiene una potencia de P.

pero además

$$y_2, \ldots, y_c \in P_{r-1}.$$

Sea

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\pi} & R/\langle y_2, \ldots, y_c \rangle \\ P & \longmapsto & \overline{P} \end{array}$$

$\overline{P}$ es un ideal primo minimal que contiene a x_1.

por tanto, $P/\langle y_2, \ldots, y_c \rangle$ tiene codim a lo más

1 en $R/\langle y_2,\dots,y_c\rangle$ (por el T. del ideal principal de Krull).

Como $P_{r-1} \subsetneq P_r$

se tiene así P_{r-1} es un ideal primo minimal que contiene a $(y_2,\dots,y_c)$. ∎

Corolario: Todo anillo local Noetheriano tiene dimensión finita.
(de Krull)

Prueba: Sea m ideal maximal del anillo local R.

Como R es Noetheriano, entonces m es finitam. generado, i.e. $m=(x_1,\dots,x_c)$

Como $\dim R = \operatorname{codim} m$ y $\operatorname{codim} m \leq c$.

Observación (prox. clase)

Si R anillo local Noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo residual k, entonces

$$\dim R \leq \dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2\right).$$

En particular, todo ideal primo en un anillo Noetheriano tiene codimensión finita.

Lema: Sea R un dominio integral de tipo finito sobre un cuerpo K.

Entonces

$$\dim R = \operatorname{tr.deg}(Q/K)$$

donde Q : cuerpo de fracciones de R.

Prueba: El lema es equiv. a la sgte. afirmación.

Sea X una variedad algebraica afín irreducible sobre k (i.e. $X = \mathrm{Spec}(R)$ R dominio integral de tipo finito sobre k)

Entonces para todo abierto no vacío U se tiene

$$\underset{(\text{top.})}{\dim U} = \dim X = \mathrm{tr}\deg \underbrace{k(X)}_{\text{cuerpo fracciones.}}$$

$\xi \in X$ pto. genérico.

Tenemos así $K(U) = \mathcal{O}_{U,\xi} = \mathcal{O}_{X,\xi} = K(X)$

con $X = \operatorname{Spec}(R)$.

Por el T. de Normalización de Noether, existe un hom. inyectivo

$$K[x_1, .., x_d] \longrightarrow R$$

de modo que R es finito como $K[x_1, .., x_d]$-mod.

$\therefore$ $\dim R = \dim k[x_1,\dots,x_d] = d$.

Además

- $\operatorname{tr}\deg k[x_1,\dots,x_d] = d$

- $Q = \operatorname{Quot}(R)$ es algebraico sobre $k(x_1,\dots,x_d)$

$\Rightarrow$ $\dim R = d = \operatorname{tr.deg} Q/k$.

Prox:

- **Proposición:** Sea R un dominio integral de tipo finito sobre K.

  Sea p un ideal primo de R.

  Entonces

  (a) $ht(p) + \dim R/p = \dim R$

  (b) p maximal $\Rightarrow \dim R = \dim R_p$.