PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO

ÁLGEBRA CONMUTATIVA

Semestre académico 2020-2

Tarea 1

Resuelva 10 de los siguientes ejercicios.

1. Sea A un anillo conmutativo distinto de zero. Pruebe que el conjunto de ideales primos de A tiene elementos minimales con respecto de la inclusión.
2. Sea $I \neq (1)$ un ideal de un anillo conmutativo A. Demuestre que $I = \sqrt{I}$ si y sólo si I es la intersección de los ideales primos que contienen a I.
3. Demuestre que los ideales primos de $\mathbb{Z}[x]$ son:
   (I) (0),
   (II) (p), para $p \in \mathbb{Z}$ primo,
   (III) ideales principales de la forma (f), donde $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio irreducible sobre $\mathbb{Q}$ cuyos coefficientes tienen máximo común divisor 1, e
   (IV) ideales maximales de la forma (p, f), donde $p \in \mathbb{Z}$ es primo y $f \in \mathbb{Z}[x]$ es un polinomio mónico cuya reducción $\bmod p$ es irreducible.
4. Sea R un anillo conmutativo. Para cada $f \in R$, denotemos por X_f el complemento de $V(f)$ en $X = \operatorname{Spec}(R)$. Muestre que los conjuntos X_f son abiertos en la topología de Zariski de X. Demuestre también que los X_f's forman una base para la topología de Zariski en X. Además, demuestre que:
   a) $X_f \cap X_g = X_{fg}$,
   b) $X_f = \emptyset \Leftrightarrow f$ es nilpotente,
   c) $X_f = X \Leftrightarrow f$ es invertible,
   d) $X_f = X_g \Leftrightarrow \sqrt{(f)} = \sqrt{(g)}$,
   e) X es casi-compacto (i.e. todo recubrimiento abierto de X tiene una subcubrimiento finito),
   f) X_f es casi-compacto,
   g) Un subconjunto abierto de X es casi-compacto si y sólo si es una unión finita de subconjuntos de la forma X_f.
   Nota: Los conjuntos X_f son llamados *abiertos básicos* de $X = \operatorname{Spec}(R)$.
5. Sea x un punto de $\operatorname{Spec}(R)$. Cuando se necesita enfatizar que x representa un ideal de R, se suele usar la notación $\mathfrak{p}_x$ (obviamente, son lo mismo). Demuestre lo siguiente:
   a) el subconjunto $\{x\}$ es cerrado en $X = \operatorname{Spec}(R)$ (y decimos que x es un "punto cerrado") si y sólo si $\mathfrak{p}_x$ es maximal.
   b) $\overline{\{x\}} = V(\mathfrak{p}_x)$,
   c) $y \in \overline{\{x\}} \Leftrightarrow \mathfrak{p}_x \subseteq \mathfrak{p}_y$,
   d) X es un espacio T_0 (esto es, si x e y son puntos distintos de X, entonces o bien existe una vecindad de x que no contiene a y, o bien una vecindad de y que no contiene a x).

6. Un espacio topológico X se llama *irreducible* si $X \neq \emptyset$ y todo par de subconjuntos abiertos de X se intersecan; equivalentemente, todo subconjunto abierto no vacío de X es denso en X. Demuestre que $\operatorname{Spec}(R)$ es irreducible si y sólo si el *nilradical de* R es un ideal primo.
7. Pruebe que las componentes irreducibles de $X = \operatorname{Spec}(R)$ son los subconjuntos cerrados $V(\mathfrak{p})$, donde $\mathfrak{p}$ es un ideal primo minimal de R.
8. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Sean $X = \operatorname{Spec}(A)$ e $Y = \operatorname{Spec}(B)$. Denotemos por $\phi^* : Y \to X$ la función inducida por ϕ. Demuestre lo siguiente:
   a) Si $f \in A$, entonces $\phi^{-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$, y por tanto ϕ^* es continua.
   b) Si $\mathfrak{a}$ es un ideal de A, entonces ${\phi^*}^{-1}(V(\mathfrak{a})) = V(\mathfrak{a}^e)$, donde $\mathfrak{a}^e$ es el ideal $Bf(\mathfrak{a})$ generado por $f(\mathfrak{a})$ en B.
   c) Si $\mathfrak{b}$ es un ideal de B, entonces $\overline{\phi^*(V(\mathfrak{b}))} = V(\phi^{-1}(\mathfrak{b}))$
   d) Si ϕ es sobreyectiva, entonces ϕ^* es un homeomorfismo de Y en el subconjunto cerrado $V(\operatorname{Ker}(\phi))$ de X. En particular, $\operatorname{Spec}(A)$ y $\operatorname{Spec}(A/\mathfrak{N})$, donde $\mathfrak{N}$ es el nilradical de A, son naturalmente isomorfos.
   e) Si ϕ es inyectiva, entonces $\phi^*(Y)$ es denso en X. Para ser más precisos, muestre que $\phi^*(Y)$ es denso en X si y sólo si $\operatorname{Ker}(\phi) \subset \mathfrak{N}$.
9. Sea R un anillo conmutativo. Supongamos $1 \neq 0$ en R. Sea S un conjunto multiplicativo de R que no contiene a 0. Sea I un elemento maximal en el conjunto de ideales de R cuya intersección con S es vacía. Muestre que I es un ideal primo.
10. Sea R un dominio de ideales principales y sea S un conjunto multiplicativo de R tal que $0 \notin S$. Muestre que $S^{-1}R$ es un dominio de ideales principales.
11. Muestre que $\mathbb{Z}[i]$, donde $i = \sqrt{-1}$, es un dominio de ideales principales. ¿ Es dominio de factorización única? Halle las unidades de este anillo.
12. Sea A un anillo conmutativo con unidad. Sea N el ideal nilradical de A. Muestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
    a) A tiene sólo un ideal primo.
    b) todo elemento de A es una unidad o nilpotente.
    c) A/N es un cuerpo.
13. Sea R un anillo conmutativo. Sea $I \subset R$ un ideal. Considere el conjunto multiplicativo $S = 1 + I$. Muestre que $S^{-1}I$ está contenido en el radical de Jacobson de $S^{-1}R$.

Fecha de entrega: Lunes 28 de setiembre de 2020, a las 23:59.

Profesor: Richard Gonzales Vilcarromero