Álgebra Conmutativa (tarea 1)

Eduardo León (梁遠光)

Setiembre 2020

Ejercicio 1. Demuestre que todo anillo no trivial tiene ideales primos minimales.

Solución. En un anillo no trivial, el ideal cero es propio, así que está contenido en un ideal maximal. Por tanto, ideales primos no nos faltan. Para demostrar la existencia de ideales primos minimales, apelaremos al lema de Zorn. Esto es, dado un conjunto totalmente ordenado X de ideales primos, demostraremos que existe un ideal primo $\mathfrak{p}$ contenido en cada $\mathfrak{q} \in X$.

Sin pérdida de generalidad, X es no vacío. Entonces $\mathfrak{p} = \bigcap X$ es un ideal propio. Para demostrar que $\mathfrak{p}$ es primo, tomemos elementos $x_0, \dots, x_n \notin \mathfrak{p}$. Para cada x_i, tomemos un ideal $\mathfrak{q}_i \in X$ que no lo contiene. Puesto que X es totalmente ordenado, alguno de los $\mathfrak{q}_i$ está contenido en los otros n. Entonces todos los elementos $x_0, \dots, x_n$ están fuera de este $\mathfrak{q}_i$. Puesto que $\mathfrak{q}_i$ es primo, el producto $x_0 \cdots x_n$ también está fuera de $\mathfrak{q}_i$ y con mayor razón está fuera de $\mathfrak{p}$. Por lo tanto, $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Ejercicio 2. Sea R un anillo y sea $\mathfrak{a} \subset R$ un ideal arbitrario. Demuestre que $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap V(\mathfrak{a})$.

Solución. Tomemos un elemento de la forma $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por definición, existe una potencia $x^n \in \mathfrak{a}$. Entonces $x^n \in \bigcap V(\mathfrak{a})$. Puesto que los ideales primos $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ son radicales, la intersección $\bigcap V(\mathfrak{a})$ también es un ideal radical. Entonces $x \in \bigcap V(\mathfrak{a})$. Puesto que x es arbitrario, $\sqrt{\mathfrak{a}} \subset \bigcap V(\mathfrak{a})$.

Consideremos ahora un elemento de la forma $x \in \bigcap V(\mathfrak{a})$. Supongamos por el absurdo que la extensión de $\mathfrak{a}$ en la localización $R_x = R[x^{-1}]$ es un ideal propio $\mathfrak{a}_x \subset R_x$. Entonces existe un ideal primo $\mathfrak{q} \in V(\mathfrak{a}_x)$ cuya contracción en R es de la forma $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$. Esto implica que $x \in \mathfrak{p}$, lo cual es imposible, porque $x/1$ es una unidad de R_x, así que $x/1 \notin \mathfrak{q}$.

Puesto que $\mathfrak{a}_x = R_x$, la identidad multiplicativa $1 \in R_x$ se puede escribir como una fracción a/x^n para algún $a \in \mathfrak{a}$. Entonces $(x^n - a) \cdot x^m = 0$ para algún $m \in \mathbb{N}$. Entonces $x \in \sqrt{\mathfrak{a}}$. Por ende, $\bigcap V(\mathfrak{a}) \subset \sqrt{\mathfrak{a}}$.

Ejercicio 3. Demuestre que los ideales primos de $\mathbb{Z}[x]$ son

- (0)
- (p), donde $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo.
- (f), donde $f \in \mathbb{Z}[x]$ es irreducible sobre $\mathbb{Q}$ y tiene contenido 1.
- (p, f), donde $p \in \mathbb{Z}$ es un número primo y f es irreducible sobre $\mathbb{Z}_p$.

Solución. Por el teorema fundamental de la aritmética, $\mathbb{Z}$ es un dominio de factorización única. Entonces, por el lema de Gauss, $\mathbb{Z}[x]$ también es un dominio de factorización única y sus elementos irreducibles son los irreducibles de $\mathbb{Z}$ (i.e., los números primos) y los irreducibles de $\mathbb{Q}[x]$ de contenido 1. En un dominio de factorización única, los ideales primos principales son aquellos cuyo generador es irreducible o cero. Por lo tanto, los ideales primos principales de $\mathbb{Z}[x]$ corresponden a los tres primeros ítems del enunciado.

Sea $\mathfrak{p} \subset \mathbb{Z}[x]$ un ideal primo no principal. Entonces $\mathfrak{p}$ contiene por lo menos dos elementos irreducibles no asociados. Puesto que $\mathbb{Q}[x]$ es un dominio de ideales principales, 1 es combinación $\mathbb{Q}[x]$-lineal de estos irreducibles, así que algún entero positivo es combinación $\mathbb{Z}[x]$-lineal de los mismos. Por ende, $\mathfrak{p}$ contiene algún número primo $p \in \mathbb{Z}$.

La imagen de $\mathfrak{p}$ en el anillo cociente $\mathbb{Z}_p[x]$ es un ideal primo no trivial $\mathfrak{q}$. Puesto que $\mathbb{Z}_p[x]$ es un dominio de ideales principales, $\mathfrak{q}$ es maximal y su generador es un polinomio irreducible $g \in \mathbb{Z}_p[x]$. Entonces $\mathfrak{p}$ es también maximal y es de la forma $\mathfrak{p} = (p, f)$, para cualquier $f \in \mathfrak{p}$ en la preimagen de g.

Ejercicio 4. Sea R un anillo conmutativo. Para cada $f \in R$, denotemos por X_f el complemento de $V(f)$ en $X = \operatorname{Spec}(R)$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Los conjuntos X_f son abiertos en la topología de Zariski de X.

b) Los conjuntos X_f forman una base para la topología de Zariski de X.

c) $X_{f_1} \cap \cdots \cap X_{f_n} = X_f$, donde $f = f_1 \cdots f_n$. En particular, $X_1 = X$.

d) $X_f = \varnothing$ si y sólo si f es nilpotente.

e) $X_f = X$ si y sólo si f es invertible.

f) $X_f = X_g$ si y sólo si f, g generan ideales principales con el mismo radical.

g) X_f es casi compacto, i.e., toda cobertura abierta de X_f tiene una subcobertura finita.

h) Un subconjunto abierto de X es casi compacto si y sólo si es de la forma $X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n}$.

Solución.

a) Esto es automático, ya que los subconjuntos $V(f)$ son cerrados de Zariski por definición.

b) Para todo subconjunto abierto $U \subset X$, existe un ideal $\mathfrak{a} \subset R$ tal que

$$U = X - V(\mathfrak{a}) = X - \bigcap_{f \in \mathfrak{a}} V(f) = \bigcup_{f \in \mathfrak{a}} X_f$$

Así que, en efecto, los abiertos principales X_f forman una base de X.

c) Sea $\mathfrak{p} \in X$ un ideal primo de R. Entonces,

$$\mathfrak{p} \in X_f \iff f \notin \mathfrak{p} \iff f_1, \dots, f_n \notin \mathfrak{p} \iff \mathfrak{p} \in X_{f_1} \cap \cdots \cap X_{f_n}$$

Esto funciona también para $n = 0$, en cuyo caso $f = 1$.

d) Por el ejercicio 2, el nilradical de R es igual a $\bigcap X$. Entonces,

$$f \in \sqrt{0} \iff f \in \mathfrak{p} \text{ para todo } \mathfrak{p} \in X \iff \mathfrak{p} \notin X_f \text{ para todo } \mathfrak{p} \in X$$

e) Todo ideal propio está contenido en un ideal primo. Entonces,

$$f \in R^\star \iff f \notin \mathfrak{p} \text{ para todo } \mathfrak{p} \in X \iff \mathfrak{p} \in X_f \text{ para todo } \mathfrak{p} \in X$$

f) Sean $\mathfrak{a} = (f)$ y $\mathfrak{b} = (g)$. Entonces,

- Si $X_f = X_g$, entonces $V(f) = V(g)$, por ende $\sqrt{\mathfrak{a}} = \bigcap V(f) = \bigcap V(g) = \sqrt{\mathfrak{b}}$.
- Si $\sqrt{\mathfrak{a}} = \sqrt{\mathfrak{b}}$, entonces $V(f) = V(\sqrt{\mathfrak{a}}) = V(\sqrt{\mathfrak{b}}) = V(g)$, por ende $X_f = X_g$.

g) Sea $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ una cobertura abierta de X_f. Podemos asumir sin pérdida de generalidad que cada U_λ es un abierto básico de la forma X_{f_λ}. Entonces,

$$X_f \subset \bigcup_\lambda X_{f_\lambda} \qquad \text{o, equivalentemente,} \qquad \bigcap_\lambda V(f_\lambda) \subset V(f)$$

Entonces existe alguna combinación R-lineal de la forma

$$f^n = r_1 f_{\lambda_1} + \cdots + r_n f_{\lambda_n}$$

Esto es, $f^n \in (f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n})$. Por lo tanto,

$$V(f_{\lambda_1}) \cap \cdots \cap V(f_{\lambda_n}) = V(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n}) \subset V(f^n) \subset V(f)$$

Tomando complementos, tenemos una subcobertura finita: $X_f \subset X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n}$.

h) Sea $U \subset X$ un subconjunto abierto. Entonces,

- Si U es casi compacto, entonces la cobertura abierta de U por vecindades básicas $X_f \subset U$ tiene una subcobertura finita $U = X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n}$.
- Si $U = X_{f_1} \cup \cdots \cup X_{f_n}$ es una unión finita de vecindades básicas, entonces toda cobertura de U posee subcoberturas finitas de cada X_{f_i}. Uniéndolas, tenemos una subcobertura finita de U, así que U es casi compacto.

Ejercicio 5. Sean R u anillo conmutativo y $X = \operatorname{Spec}(R)$. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) $\mathfrak{p} \in X$ es un punto cerrado si y sólo si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de R.

b) $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$.

c) $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ si y sólo si $\mathfrak{p} \subset \mathfrak{q}$.

d) X es un espacio topológico T_0.

Solución.

1. Por definición, $\mathfrak{p}$ es el único punto de $V(\mathfrak{p})$ si y sólo si $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal de R.
2. Por definición, $\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})$ si y sólo si $V(\mathfrak{p}) \subset V(\mathfrak{a})$.
3. Por definición, $\mathfrak{q} \in \overline{\{\mathfrak{p}\}}$ si y sólo si $V(\mathfrak{q}) = \overline{\{\mathfrak{q}\}} \subset \overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$, si y sólo si $\mathfrak{p} = \sqrt{\mathfrak{p}} \subset \sqrt{\mathfrak{q}} = \mathfrak{q}$.
4. Dados dos puntos distintos $\mathfrak{p}, \mathfrak{q} \in X$, alguno no contiene al otro. Digamos, $\mathfrak{p} \not\subset \mathfrak{q}$. Entonces $\mathfrak{q} \notin V(\mathfrak{p})$. Entonces el complemento de $V(\mathfrak{p})$ es una vecindad de $\mathfrak{q}$ que no contiene a $\mathfrak{p}$.

Ejercicio 6. Decimos que un espacio topológico X es irreducible si, dado un número finito de abiertos no vacíos $U_1, \dots, U_n \subset X$, la intersección $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ es no vacía. Demuestre que $\operatorname{Spec}(R)$ es irreducible si y sólo si el nilradical de R es un ideal primo.

Solución. Todo ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$ contiene a un ideal primo minimal. Para verificarlo, localicemos en $\mathfrak{p}$ y tomemos un primo minimal $\mathfrak{q} \subset R_{\mathfrak{p}}$. La contracción de $\mathfrak{q}$ es un primo minimal de R contenido en $\mathfrak{p}$. Por lo tanto, el nilradical de R es la intersección de los primos minimales de R.

Repartamos los primos minimales de R en un número finito de clases de equivalencia $S_1, \dots, S_n$. Para cada clase S_i, tomemos el ideal radical $\mathfrak{a}_i = \bigcap S_i$. Observemos que $S_i \cap V(\mathfrak{a}_j)$ es vacío para todo $i \neq j$, así que ningún $V_i = V(\mathfrak{a}_i)$ está contenido en la unión de los demás. Entonces, los subconjuntos

$$U_i = \operatorname{Spec}(R) - [V_1 \cup \cdots \cup \widehat{V_i} \cup \cdots \cup V_n]$$

son abiertos no vacíos de $\operatorname{Spec}(R)$, disjuntos dos a dos. Esto implica que la intersección $U = U_1 \cap \cdots \cap U_n$ es vacía cuando $n > 1$. Por otro lado, el caso degenerado $n = 0$ sólo ocurre cuando $U = \operatorname{Spec}(R)$ es vacío. Entonces U es no vacío si y sólo si $n = 1$.

En conclusión, $\operatorname{Spec}(R)$ es irreducible si y sólo si la asignación $n = 1$ es obligatoria, si y sólo si $\operatorname{Spec}(R)$ tiene exactamente un único punto minimal, si y sólo si este punto minimal es el nilradical de R.

Ejercicio 7. Demuestre que las componentes irreducibles de $\operatorname{Spec}(R)$ son los subconjuntos cerrados $V(\mathfrak{p})$ correspondientes a los primos minimales $\mathfrak{p} \subset R$.

Solución. Por construcción de la topología de Zariski, un subconjunto cerrado $V \subset \operatorname{Spec}(R)$ es irreducible si y sólo si $V = V(\mathfrak{p})$ para un ideal primo $\mathfrak{p} \subset R$. Entonces V es maximal entre los subconjuntos *cerrados* irreducibles si y sólo si $\mathfrak{p}$ es un primo minimal. Por lo tanto, lo único que requiere demostración es que la clausura de un subconjunto irreducible es irreducible.

Sea X un espacio topológico arbitrario y sea $Y \subset X$ un subconjunto irreducible. Demostraremos que la clausura $\overline{Y}$ también es irreducible. Tomemos abiertos relativos no vacíos $U_1, \dots, U_n \subset \overline{Y}$. Puesto que Y es denso en $\overline{Y}$, cada restricción $V_i = U_i \cap Y$ es un abierto relativo no vacío de Y. Entonces,

$$V_1 \cap \cdots \cap V_n = U_1 \cap \cdots \cap U_n \cap Y$$

es no vacío, lo cual implica que $U_1 \cap \cdots \cap U_n$ es no vacío.

Ejercicio 8. Sea $\phi : A \to B$ un homomorfismo de anillos. Sean $X = \operatorname{Spec}(A)$ e $Y = \operatorname{Spec}(B)$. Denotemos por $\varphi : Y \to X$ la aplicación inducida por ϕ. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) $\varphi^{-1}(X_f) = Y_{\phi(f)}$, para todo $f \in A$. Por ende, φ es continua.

b) $\varphi^{-1} \circ V(\mathfrak{a}) = V \circ \phi(\mathfrak{a})$, para todo ideal $\mathfrak{a} \subset A$.

c) $\overline{\varphi \circ V(\mathfrak{b})} = V \circ \phi^{-1}(\mathfrak{b})$, para todo ideal $\mathfrak{b} \subset B$.

d) Si ϕ es sobreyectivo, entonces φ es un encaje cerrado y su imagen es $V \circ \ker(\phi)$.

e) Si $\ker \phi$ está contenido en el nilradical de A, entonces $\varphi(Y)$ es denso en X.

f) Si se cumplen las condiciones de los dos ítems anteriores, entonces φ es un homeomorfismo.

Solución.

a) Es un caso particular del siguiente ítem, para el ideal principal $\mathfrak{a} = (f)$.

b) Sea $\mathfrak{p} \in Y$ un punto arbitrario. Entonces,

   - Si $\varphi(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a})$, entonces $\phi(\mathfrak{a}) \subset \phi \circ \phi^{-1}(\mathfrak{p}) \subset \mathfrak{p}$, por ende $\mathfrak{p} \in V \circ \phi(\mathfrak{a})$.
   - Si $\mathfrak{p} \in V \circ \phi(\mathfrak{a})$, entonces $\mathfrak{a} \subset \phi^{-1} \circ \phi(\mathfrak{a}) \subset \phi^{-1}(\mathfrak{p})$, por ende $\varphi(\mathfrak{p}) \in V(\mathfrak{a})$.

   Por ende, la preimagen del subconjunto cerrado $V(\mathfrak{a})$ es el subconjunto cerrado $V \circ \phi(\mathfrak{a})$.

c) Tomar el radical de un ideal conmuta con tomar su preimagen bajo ϕ, porque

$$\phi(f) \in \sqrt{\mathfrak{b}} \iff \phi(f^n) \in \mathfrak{b} \text{ para algún } n \in \mathbb{N}$$

   Entonces podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\mathfrak{b}$ es radical. Tenemos

$$\phi^{-1}(\mathfrak{b}) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})} \phi^{-1}(\mathfrak{p})$$

   Esto implica que $\phi(f) \in \mathfrak{b}$ si y sólo si f se anula en $\varphi \circ V(\mathfrak{b})$. Por lo tanto,

$$\overline{\varphi \circ V(\mathfrak{b})} = V \circ \phi^{-1}(\mathfrak{b})$$

d) Por el teorema de los isomorfismos, ϕ induce un isomorfismo de retículos entre los ideales de B y los ideales de A que contienen a $\mathfrak{a} = \ker \phi$. Este isomorfismo respeta la propiedad de ser un ideal primo, así que $\tilde{\varphi} : Y \to V(\mathfrak{a})$ es isomorfismo de órdenes parciales. Como la topología de Zariski es generada por este orden parcial, $\tilde{\varphi}$ es un homeomorfismo, i.e., φ es un encaje.

e) Puesto que $\ker \phi \subset \mathfrak{n}(A)$, tenemos $\overline{\varphi(Y)} = \overline{\varphi \circ V(0)} = V \circ \ker(\phi) = X$.

f) Todo encaje cerrado y denso es un homeomorfismo.

Ejercicio 9. Sea R un anillo conmutativo en el cual $1 \neq 0$. Sea $S \subset R$ un subconjunto multiplicativo que no contiene a 0. Sea $\mathfrak{p} \subset R$ un ideal maximal entre aquellos que son disjuntos de S. Demuestre que $\mathfrak{p}$ es un ideal primo.

Solución. La extensión de $\mathfrak{p}$ es un ideal maximal $\mathfrak{m} \subset S^{-1}R$. Por ende, $\mathfrak{p}$, que es la contracción de $\mathfrak{m}$, es al menos un ideal primo.

Ejercicio 10. Sea R un dominio de ideales principales y sea $S \subset R$ un subconjunto multiplicativo que no contiene a 0. Demuestre que $S^{-1}R$ es un dominio de ideales principales.

Solución. La localización $S^{-1}R$ es un subanillo del cuerpo de fracciones de R, por lo tanto es un dominio. Tomemos un ideal $\mathfrak{a} \subset S^{-1}R$. Contrayendo $\mathfrak{a}$, obtenemos un ideal principal $(a) \subset R$. Re-extendiendo (a), vemos que $\mathfrak{a}$ es generado por la fracción $a/1$.

Ejercicio 11. Demuestre que $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio de ideales principales. ¿Será un dominio de factorización única? Halle las unidades de este anillo.

Solución. Afirmamos que

a) $\mathbb{Z}[i]$ es un dominio euclidiano con la norma $\varphi(x+iy) = x^2+y^2$.

b) Todo dominio euclidiano es un dominio de ideales principales.

c) Todo dominio de ideales principales es un dominio de factorización única.

Verifiquemos estas afirmaciones.

a) Sean $n, d \in \mathbb{Z}[i]$ dos elementos distintos de cero. Redondeemos el cociente $n/d \in \mathbb{Q}[i]$ a alguno de los enteros gaussianos $q \in \mathbb{Z}[i]$ que minimiza la distancia $|n/d - q|$. Por construcción, tanto la parte real como la parte imaginaria de $n/d - q$ tienen longitud $\leq 1/2$, así que

$$\varphi(n-dq) = d^2 \cdot |n/d - q|^2 \leq d^2 \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right] < d^2 = \varphi(d)$$

b) Tomemos un ideal no trivial $\mathfrak{a}$. Por el principio del buen ordenamiento, existe un elemento $d \in \mathfrak{a}$ con norma euclidiana minimal. Entonces todo elemento $n \in \mathfrak{a}$ es múltiplo de d. De lo contrario, nuestro contraejemplo nos otorgaría un elemento $n - dq \in \mathfrak{a}$ con norma euclidiana menor que la de d.

c) Por lo pronto, todo dominio de ideales principales es noetheriano, ya que el generador único de cada ideal es ciertamente una cantidad finita de generadores.

   Tomemos un elemento no invertible $a \neq 0$. El ideal (a) está contenido en un ideal maximal (p), cuyo generador es, por definición, primo. Partiendo de $a_0 = a$, construyamos una cadena ascendente (a_n) en la cual, para cada a_n no invertible, el cociente $p_{n+1} = a_n/a_{n+1}$ es un factor primo de a_n. Puesto que la cadena tiene que estabilizarse, eventualmente $u = a_n$ es una unidad. Por lo tanto, tenemos la factorización prima $a = up_1 \cdots p_n$.

Ejercicio 12. Sea R un anillo conmutativo y sea $\mathfrak{n} \subset A$ su nilradical. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- A tiene un único ideal primo.
- Todo elemento de A es invertible o nilpotente.
- $A/\mathfrak{n}$ es un cuerpo.

Solución. Extendamos la lista de la siguiente manera:

- A tiene un único ideal primo.
- A es un anillo local cuyo nilradical e ideal maximal coinciden.
- Todo elemento de A es invertible o nilpotente.
- Todo elemento de $A/\mathfrak{n}$ es invertible o cero.
- $A/\mathfrak{n}$ es un cuerpo.

Ahora es obvio que cada par de ítems adyacentes es equivalente.