Algebra conmutativa. Clase 19.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

14 de noviembre de 2020

Teorema: Sea R un anillo (conmutativo)

Las sgte propiedades son equivalentes:

(i) R Noetheriano

(ii) Todo ideal de R es finitam. generado.

Prueba:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Supongamos I es un ideal de R que no es finitam. generado.

Sea $I_0 = \{0\}$.

Para cada n, como I no es finitam. generado $\rightarrow$

$I \setminus I_n$ es no vacío y contiene un elem.

x_{n+1}, y $I_{n+1} = \underbrace{\langle x_1, \dots, x_{n+1} \rangle}_{\text{finitam. generado.}}$

Por inducción tenemos así:

$$\{0\} \subsetneq I_1 \subsetneq I_2 \subsetneq \dots \subsetneq \dots$$

cadena ascendente infinita

$\therefore$ R no es noetheriano.

(ii) $\Rightarrow$ (i)

Sea

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \dots \qquad (*)$$

una cadena ascendente de ideales de R.

Sea $J = \bigcup_n I_n$.

$\Rightarrow$ J es un ideal (por $(*)$)

y J está generado por $\{x_1, \dots, x_m\}$

Entonces existe N tal que $\{x_1, \dots, x_m\} \subseteq I_N$

$\Rightarrow I_N = I_{N+1} = \dots = J$. $\square$

Ejm: • si R es un dominio de ideales principales, entonces R es Noetheriano.

• $K[x_1, x_2, \ldots]$ no es Noetheriano.
K: cuerpo.

Lema:
Sea R un anillo conmutativo. Las sgtes. propiedades son equivalentes:

(a) R anillo Noetheriano.

(b) Toda familia no vacía $(I_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de ideales de R tiene un elem. maximal.

Prueba: Ejercicio!

Lema: Sea R un anillo Noetheriano. Entonces todo anillo cociente R/I de R es también Noetheriano.

Prueba: Existe una corresp. 1-1 (que preserva inclusiones) entre los ideales de R/I y los ideales de R que contienen a I.

- **Teorema:** (Teorema de la base de Hilbert)

Si R anillo Noetheriano (R conmut.)

$\Rightarrow R[x]$ es anillo Noetheriano.

Prueba: I un ideal de $R[x]$.

Debemos mostrar I es finitam. generado.

Consideremos la familia de ideales de R:

$$I_j = \{ a_j \mid a_j x^j + a_{j-1} x^{j-1} + \dots + a_0 \in \underline{I} \}.$$

$a_i \in R$

Tenemos así

an.

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_N \subseteq I_{N+1} \quad (*)$$

cadena ascendente de ideales de R.

Como R es Noetheriano, la cadena (*) se estabiliza, esto es, existe N tal que

$$I_N = I_{N+1} = \cdots$$

Además, para $0 \leq j \leq N$, existen elementos

$b_{1,j}, \ldots, b_{k_j,j}$ de R tales que

$I_j = \langle b_{1,j}, \ldots, b_{k_j,j} \rangle$.

Para cada $b_{i,j}$, sea $P_{i,j}$ un elem. de $R[x]$ tal que

- $\deg P_{i,j} \leq j$
- j-coef. de P_{ij} es $b_{i,j}$
- $P_{i,j} \in I$.

Sea $p \in I$, $\deg p = n$. Sea a_n el n-ésimo coef. de p.

si $n > N$, entonces hay elementos

$c_1, \ldots, c_{k_N} \in R$

tal que

$$a_n = c_1 \underbrace{b_{1,N}} + \ldots + c_{k_N} b_{k_N,N}.$$

Así

$$p - (c_1 p_{1,N} + \ldots c_{k_N} p_{k_N,N}) X^{n-N}$$

es de grado estrictam. menor que el grado de p.

Si $n \leq N$, entonces hay elem. $c_1, \ldots, c_{k_n}$ en R de modo que

$$a_n = c_1 b_{1,n} + \cdots + c_n b_{k_n,n}$$

y así

$$p - (c_1 p_{1,n} + \cdots + c_n p_{k_n,n})$$

es de grado estrictamente menor que el grado de p.

$\Rightarrow$ Por inducción, se tiene p es una R-combinación lineal de $\{p_{i,j} \mid 1 \leq i \leq k_j, 0 \leq j \leq N\}$.

$\therefore$ I es finitam. generado $\blacktriangle$.

- **Corolario 1**: Si R es Noetheriano, entonces $R[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ es anillo Noetheriano.
- **Corolario 2**: Si R anillo Noetheriano, entonces toda R-alg. de tipo finito es también un anillo Noetheriano.

Lema: Sea R un anillo Noetheriano. $S \subseteq R$ cjto. multiplicativo. Entonces $S^{-1}R$ también es un anillo Noetheriano.

Prueba: Sea $h: R \to S^{-1}R$ el homomorf. canónico.

Todo ideal I de $S^{-1}R$ satisface

$$I = S^{-1}R \cdot \underbrace{h^{-1} I}_{\text{finitam. generado}}$$

Como $h^{-1}I$ es finitam. generado entonces I también lo es.

- Corolario:

Si R es un anillo Noetheriano y $\mathfrak{p}$ es un ideal primo de R, entonces $R_{\mathfrak{p}}$ es Noetheriano.

Proposición: Sea M R-modulo.

M R-módulo Noetheriano $\Longleftrightarrow$ todo submódulo de M es finitam. generado.

Prueba:

($\Rightarrow$) Sea N un submódulo de M.

Sea Σ el cjto. de todos los submódulos finitam. generados de N.

Así, Σ es no vacío ($(0) \in \Sigma$).

Por tanto, Σ tiene un elem. maximal N_0.

si $N_0 \neq N$ consideremos el submódulo

$\underbrace{N_0 + Ax}$, donde $x \in N$, $x \notin N_0$.

$\Rightarrow N_0 + Ax$ es finitam. generado y contiene estrictam. a N_0 ($\Rightarrow\!\Leftarrow$) con la maximalidad de N_0.

Así, $N = N_0 \Rightarrow N$ es finitam. generado.

($\Leftarrow$) Sea $M_1 \subseteq M_2 \subseteq \ldots$ una cadena ascendente de subm. de M. Entonces $N = \bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$ es un subm. de M y por tanto es finitam. generado, digamos por $x_1, \ldots, x_r$. Supong. $x_i \in M_{n_i}$; sea $n = \max_{i=1}^{r} n_i$. Se tiene $x_i \in M_n$. Así $M_K = M_n$, $\forall K \geq n$.

- Ejercicio 1: Sea R un anillo. Consideremos la sucesión exacta corta de R-módulos

$$0 \to A \to B \to C \to 0$$

entonces:

B Noetheriano $\Longleftrightarrow$ A, C son Noetherianos

• Ejercicio 2: Si M_i $(1 \leq i \leq n)$ son R-mod Noetherianos, entonces $\bigoplus_{i=1}^{n} M_i$ también es un R-mod. Noetheriano.

⌈ Considerar

$$0 \to M_n \to \bigoplus_{i=1}^{n} M_i \to \bigoplus_{i=1}^{n-1} M_i \to 0$$

⌋

Prop: Sea R un anillo Noetheriano.

M un R-mod. finitam. generado.

Entonces

M es R-mod Noetheriano.

Prueba: M es de la forma $M \simeq R^n/N$.

Como R Noetheriano $\Rightarrow$ R^n también

ejercicio 2.

Así

$M \simeq R^n/N$ Noetheriano (por Ejercicio 1)

Prop: R anillo Noetheriano.

I ideal de R.

Entonces R/I es un anillo Noetheriano.

Prueba: Por Ejercicio 1, R/I es un R-mod Noetheriano.

Por tanto, también es Noetheriano como R/I-módulo.