Algebra conmutativa. Clase 4.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

11 de septiembre de 2020

Sea R anillo conmutativo.

Recordar:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{ideales}\\ \text{radicales}\\ \text{de } R\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{c}\text{conjuntos cerrados}\\ \text{de } \operatorname{Spec}(R)\end{array}\right\}$$

$$I = \sqrt{I} \longmapsto V(I)$$

$$\bigcap_{p \in S} p \longleftarrow S$$

Obs: Ideales primos de R $\longleftrightarrow$ cjtos. cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec}(R)$.

Definición: Sea X un espacio topológico.

X es **irreducible** si X no se puede escribir como unión de dos subconjuntos cerrados propios no vacíos:

(i.e. si $X = X_1 \cup X_2$ $\quad X_1, X_2 \neq \emptyset$ cerrados

$\Rightarrow X = X_1$ ó $X = X_2$)

Obs 3 (Ejercicio) Z irred $(Z \subseteq X)$ $\hookrightarrow$ $\overline{Z}$ tamb. irred.

Obs 1:

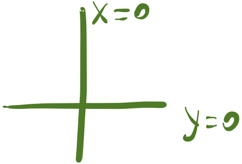
X conexo $\Leftrightarrow$ X no se puede escribir como unión de dos subconjuntos cerrados disjuntos no vacíos.

Obs 2:

X irred. $\Rightarrow X$ conexo.

En general, un espacio puede ser conexo sin ser irreducible:

$$Z = \{xy = 0\} \subseteq \mathbb{C}^2$$



conexo ✓

pero Z no es irreducible.

$$Z = \{x=0\} \cup \{y=0\}.$$

Lema: Sea R un anillo conmutativo.
Existen biyecciones entre los sgtes. conjuntos:

(i) El conjunto de ideales primos de R.

$\updownarrow$ biyección (por def.)

(ii) El conjunto de puntos de $\operatorname{Spec} R$.

(iii) El conjunto de subconjuntos cerrados irreducibles de $\operatorname{Spec}(R)$.

Para la prueba recordar lo sgte:

si $\mathfrak{p} \subseteq R$ ideal primo $\Rightarrow$ $\overline{\{\mathfrak{p}\}} = V(\mathfrak{p})$ (en $\operatorname{Spec} R$)

Prueba:

(i) $\Rightarrow$ (ii) def.

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

$\mathfrak{p}$ ideal primo:

$\overline{\{p\}}$ es irred. $\overline{\{p\}} = V(\mathfrak{p})$.

si $\boxed{V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{a}) \cup V(\mathfrak{b})}$

$p \in$

$\Rightarrow \underbrace{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{a})}$ ó $\underbrace{\mathfrak{p} \in V(\mathfrak{b})}$

Así. $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{p}$ ✓ ó $\mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{p}$

$V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{a})$

ó

$V(\mathfrak{p}) \subseteq V(\mathfrak{b})$

$\Rightarrow V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{a})$

ó

$V(\mathfrak{p}) = V(\mathfrak{b})$.

$V(\mathfrak{p})$ irreducible.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Supongamos $V(I)$ es irreducible; con

$$I = \sqrt{I}$$

(I ideal radical)

Afirmación: I es primo

si $a \notin I$, $b \notin I$ $\Rightarrow$ · $V(I+(a)) \subsetneq V(I)$

· $V(I+(b)) \subsetneq V(I)$

pues I radical.

pero

$$V\left(I + (\underline{ab})\right) = V\left(I + (a)\right) \cup V\left(I + (b)\right) \quad \text{---}(*)$$

$\Rightarrow ab \notin I$ (caso contrario $I = I + (ab)$ y $(*)$ sería una descomp. no trivial de $V(I)$ el cual es irred. !!)

$\Rightarrow I$ is ideal primo.

$$\left\{ \begin{matrix} \mathfrak{p} \text{ ideal} \\ \text{primo de} \\ R \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{subconj.} \\ \text{cerrados} \\ \text{Spec}(R) \end{matrix} \right\}$$

$$\updownarrow$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{puntos de} \\ \text{Spec } R \end{matrix} \right\}$$

Ejercicio:

Estas biyecciones restringen a una biyección

$$\left\{ \begin{matrix} \text{puntos cerrados} \\ \text{de Spec } R \end{matrix} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{ideales} \\ \text{maximales de } R \end{matrix} \right\}$$

$$\overline{\{\mathfrak{p}\}} = \{\mathfrak{p}\}.$$

$(\mathrm{Spec}(R), R)$

funcions regulares globales en $\mathrm{Spec}(R)$

Obs: Sea K un cuerpo.

Recordar $\mathrm{Spec}(K) = \{pt\}$.

como esquema afín

$(\mathrm{Spec}(K), K)$

$\mathrm{Spec}(K)$ recuerda al cuerpo K

$$(\mathrm{Spec}(\mathbb{Q}), \mathbb{Q}) \neq (\mathrm{Spec}(\mathbb{C}), \mathbb{C})$$

Definición: Sea R un anillo.
n entero positivo

Espacio afín — Affine n-space —

$$\mathbb{A}^n_R := \mathrm{Spec}\left(R[x_1, \ldots, x_n]\right)$$

Así: $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]\right) \neq \mathbb{C}^n$.

($n = 1$: $\mathbb{A}^1_{\mathbb{C}} \neq \mathbb{C}$

tiene un pto. adicional: el punto genérico $\{0\}$; ($\overline{\{0\}} = \mathbb{A}^1_{\mathbb{C}}$))

- puntos cerrados de $\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}}$ corresponden a $\mathbb{C}^n$ (pues ideales maximales de $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ son de la forma

$$(X_1 - a_1, \dots, X_n - a_n)$$

$$a_i \in \mathbb{C}$$

usando Hilbert's Nullstellensatz) (*)

$\varphi : R \to S$

R, S anillos

Así como en el caso topológico

$f : X \to Y$ continua

induce un hom. de anillos

$\tilde{f} : C(Y) \to C(X)$,

$\underline{\underline{\operatorname{Spec}\varphi}} : \operatorname{Spec}(S) \to \operatorname{Spec}(R)$

$C(X)$ funciones cont. en $X \to \mathbb{R}$.

se tiene, por analogía, lo sgte.

<u>Definición</u>: Un morfismo de esquemas afines $f : X \to Y$ es un homomorfismo de anillos

$$f^{\#} : \mathcal{O}(Y) \to \mathcal{O}(X).$$

Variedades algebraicas afines (enfoque clásico).

Sea $K = \overline{K}$ (K cuerpo alg. cerrado)

Sea $S \subseteq K[x_1, \dots, x_n]$ un subc. de pol. en n-variables

definimos

$x = (x_1, \dots, x_n)$

$$V(S) = \{ x \in K^n \mid f(x) = 0 \ \forall f \in S \}.$$

Variedad afín de K^n.

Ejercicio: $V(S) = V(I_S)$

I_S: ideal gen. por S.

$V(S) \subseteq K^n$.

$X = V(S)$ $\quad$ X variedad afín.

Denotemos por

$$I(X) = \{ g \in K[x_1, \dots, x_n] \mid g(x) = 0 \text{ para todo } x \in \}.$$

ideal de la variedad X.

El anillo cociente

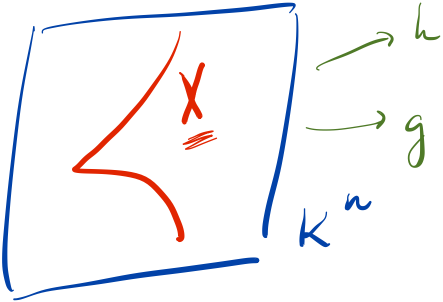
$$A(X) = K[x_1, \dots, x_n] / I(X)$$

anillo de funciones polinomiales en X

ó anillo de coord. en X.

Notar que $g, h \in K[x_1, \dots, x_n]$ definen la misma función pol. en X si y sólo si

$$g - h \in \underline{I(X)}.$$



$$h|_X = g|_X$$

$$\iff (h-g)|_X = 0$$

$$\iff h - g \in I(X).$$

Obs:

$$A(X) = K[x_1, \dots, x_n] / I(X)$$

denotemos ξ_i imagen de x_i en $A(X)$.

ξ_i , $i = 1, \dots, n$ son funciones coord. en X.

si $x \in X$ $\Rightarrow$ $\xi_i(x) = i$-ésima coord. de x.

- $A(X)$ es generado, como K-algebra, por las funciones coord. ξ_i ; $i = 1, \dots, n$.

Notar: tenemos una asignación

$$\mu : X \longrightarrow \operatorname{Specmax}(A(X))$$

$$x \longmapsto \mathfrak{m}_x$$

$$\mathfrak{m}_x = \{ f \in A(X) \mid f(x) = 0 \} \leftarrow \text{ideal maximal}$$

$\operatorname{Ker}(ev_x)$.

Ejercicio: • μ es inyectiva.

Nota: • μ sobrey $\leftarrow$ consec. de Hilbert's Nullst.

veremos más adelante:

μ establece un homeomorfismo

$$\mu : X \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec} \operatorname{Max}(A(X)).$$

$GL_n \leftarrow$ variedad alg. $\det \neq 0$.

$GL_n \subseteq M_{n\times n} \times \mathbb{C}_t$

$\det M \neq 0 \iff \det \cdot t = 1$

Objetivo: $f \in R$

Establecer: $D(f) = \operatorname{Spec}(R) \setminus V(f) \longleftrightarrow \operatorname{Spec}(R_f)$

abierto principal

localiz. de R en $\{f^n\}$.

Localización R anillo conmut.

Definición: Sea $S \subseteq R$

S subconj. multiplicativo de R si

(i) $1 \in S$

(ii) Dados $s, t \in S \Rightarrow s \cdot t \in S$.

Ejm 1: Sea p ideal primo de R.

$\Rightarrow S = R \setminus p$ es cjto. multiplicativo.

Ejm 2: Sea R anillo.

Tomemos $f \in R$, $f \neq 0$.

Consideremos $S = \{ f^n \mid n \geq 0 \}$; $(f^0 = 1)$

Entonces S es multiplicativo.

Ejm 3: $S = R - \{0\}$ cjto. multiplicativo.

Ejm 4: $I \subseteq R$ ideal.

Tomemos $S = 1 + I = \{ 1 + a \mid a \in I \}$.

(verificar) S es cjto. multiplicativo.

Sea R un anillo, $S \subseteq R$ cjto. multiplicativo.

- En $R \times S$ definimos la rel. de equivalencia

$$(a,s) \equiv (b,t) \iff (at - bs).u = 0$$

para algún $u \in S$.

- La clase de equiv. de (a,s) se denota por $\frac{a}{s}$.

- Denotemos por $S^{-1}R$ el cjto de clases de equiv.

Este cjto. admite una estructura de anillo:

- $$\frac{a}{s} + \frac{b}{t} = \frac{at + bs}{st} \in S^{-1}R.$$

- $\left(\frac{a}{s}\right) \cdot \left(\frac{b}{t}\right) = \frac{ab}{st} \in S^{-1}R$.

Ejercicio:
- Demostrar que estas operaciones no dependen de representantes elegidos.
- $(S^{-1}R, +, \cdot)$ ← anillo conmut. con unidad.

El anillo $S^{-1}R$ se denomina el anillo de fracciones de R con respecto de S.

(o también la localización de R con respecto de S).

La construcción de

Obs: $S^{-1}R$ $\leftarrow$ modelada en la construcción de $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$. ✓

Obs: El homomorfismo (de anillos) natural

$$f : R \longrightarrow S^{-1}R$$
$$x \longmapsto \frac{x}{1}$$

no es inyectivo en general.

(por ejm. si $S = R - \{0\}$ entonces

$\operatorname{Ker}(f) = \{0\} \iff R$ no tiene divisores de cero).

Obs: R dominio, $S = R - \{0\}$

$\Rightarrow f: R \to S^{-1}R$ es inyectiva.

Obs:

Si $s \in S$, y consideramos $f: R \to S^{-1}R$
$x \to \frac{x}{1}$

entonces $f(s)$ es unidad de $S^{-1}R$. (pues $\frac{1}{s} \in S^{-1}R$)

Obs: Todos los elem. de $S^{-1}R$ son de la forma

$f(a)\,f(s)^{-1}$ para algún $a \in R$, $s \in S$.

"$S^{-1}R$ es el menor anillo donde las imágenes de elementos $s \in S$ son unidades", para ser preciso, se tiene: $f : R \to S^{-1}R$ hom. natural.

Prop (propiedad universal de localización)

R : anillo. $S \subseteq R$ cjto. multiplicativo.

Sea $g : R \to B$ un homomorf. de anillos tal que $g(s)$ es unidad en B para todo $s \in S$.

Entonces existe un único homomorfismo de anillos $h : S^{-1}R \to B$ de modo que

$$g = h \circ f$$ $\leftarrow$ (g factoriza a través de la localiz.)

$$\begin{tikzcd} R \arrow[d, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ S^{-1}R \arrow[r, "\exists! h"'] & B \end{tikzcd}$$

$s \in S$

$g(s)$ unidad en B.

Idea de prueba: Definamos

$$h\left(\frac{a}{s}\right) = g(a) . g(s)^{-1}$$

h Está bien definida:

si $\dfrac{a}{s} = \dfrac{a'}{s'} \Rightarrow$ existe $t \in S$: $\boxed{(as' - a's)t = 0}$

entonces

$$\big(g(a)\,g(s') - g(a')\,g(s)\big)\,g(t) = 0$$

como $g(s), g(s'), g(t)$ son unidades en B.

$$\Rightarrow \quad g(a)\,g(s') - g(a')\,g(s) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{g(a)\cdot g(s)^{-1}}_{h\left(\frac{a}{s}\right)} = \underbrace{g(a')\,g(s')^{-1}}_{h\left(\frac{a'}{s'}\right)}.$$

Unicidad (ejercicio / ver Atiyah - MacDonald).

Corolario: (otra caracterización de $S^{-1}R$):

Si $g : R \to B$ es un homomorf. de anillos que satisface

$$\begin{cases} \text{(i)} & s \in S \Rightarrow g(s) \text{ unidad en } B. \\ \text{(ii)} & g(a) = 0 \Rightarrow as = 0 \text{ para algún } s \in S. \\ \text{(iii)} & \text{Todo elem. de } B \text{ es de la forma } \end{cases}$$

$$g(b) \cdot g(s)^{-1}$$

$R_{\mathfrak{p}}$:

entonces

existe un único isomorfismo

$$h : S^{-1}R \xrightarrow{\sim} B \quad \text{tal que}$$

$$g = h \circ f .$$

Obs: Sea $\mathfrak{p}$ un ideal primo de R

sabemos $S = R \setminus \mathfrak{p}$ cjto. multiplicativo.

En este anillo todo elem. que no está en $\mathfrak{p}$ es unidad

Denotamos $R_{\mathfrak{p}}$ el anillo de fracciones $S^{-1}R$

localizar $\longleftrightarrow$ enfocarnos en ideales de R contenidos en $\mathfrak{p}$.