Algebra conmutativa. Clase 11.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

15 de octubre de 2020

Sean $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ prehaces en X

Un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de prehaces es una familia de homomorfismos $\alpha_U \overset{=\alpha(U)}{:} \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ para cada objeto $U \subseteq X$ que es compatible con los homomorfismos de restricción.

$V \subseteq U$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U) & \xrightarrow{\alpha(U)} & \mathcal{G}(U) \\ \downarrow \rho_{UV} & \circlearrowright & \downarrow \rho'_{UV} \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{G}(V) \end{array}$$

diagrama conmuta.

Def: ① Un morfismo $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de <u>prehaces</u> (en X) es inyectivo si para todo abierto $\mathcal{U}$ de X se tiene $\alpha(\mathcal{U}): \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ es inyectiva.

② Un morfismo $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de prehaces es sobreyectivo (como morfismo de prehaces) si para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ los homomorfismos $\alpha(\mathcal{U}): \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ son sobreyectivos.

Obs:

1) Se puede asociar a cada homomorfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de prehaces, los siguientes prehaces:

- $\mathrm{Ker}_{pre}\,\alpha$ es el prehaz dado por

$$\mathcal{U} \in \mathrm{Top}X : \left(\mathrm{Ker}_{pre}\,\alpha\right)(\mathcal{U}) := \ker \alpha(\mathcal{U}).$$

Notar $\mathrm{Ker}_{pre}\,\alpha$ es un prehaz sobre X.

(sugerencia: $\mathcal{U} \subseteq V$ par de abiertos

hom. de restricción.

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}_{pre}\,\alpha(V) \arrow[r] \arrow[d, dashed, "\exists!"] & \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"] \arrow[d, "\rho_{VU}"] & \mathcal{G}(V) \arrow[d, "\rho_{VU}"] \\ 0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}_{pre}\,\alpha(\mathcal{U}) \arrow[r] & \mathcal{F}(\mathcal{U}) \arrow[r] & \mathcal{G}(\mathcal{U}) \end{tikzcd}$$

).

2) Similarmente, se puede asociar a α el prehaz cokernel definido por:

$U \in \mathrm{Top}X$

$$(\mathrm{coker}_{pre}\, \alpha)(U) := \mathrm{coker}\, \alpha(U).$$

$\ker_{pre}\alpha$ y $\mathrm{coker}_{pre}\alpha$ son prehaces.

Objetivo: Determinar si estas construcciones se pueden llevar a cabo con haces.

Recordemos: si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces sobre X.

un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo de prehaces (considerando $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ prehaces).

$$\underbrace{\left\{ \begin{array}{c} \text{categoría de} \\ \text{haces en} \\ X \end{array} \right\}}_{\text{subcategoría } \cancel{\text{fiel}}\text{ full}} \qquad \left\{ \begin{array}{c} \text{categoría de prehaces} \\ \text{en } X \end{array} \right\}$$

← cuidado!

full subcategory of presh.

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) := \mathrm{Hom}_{pre}(\mathcal{F}, \mathcal{G})$$

• **Lema:** Si $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ son haces y $\alpha: \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo, entonces

$$\mathrm{Ker}_{pre}\,\alpha$$

es un **haz** sobre X (satisface (3) y (4) de def. de haz).

• **Obs:** En general

$$\mathrm{coker}_{pre}\,\alpha$$

no es un haz.

Si consideramos el haz asociado a $\mathrm{coker}_{pre}\,\alpha$ obtenemos la noción buscada.

Ejm: Sea $X = S^1$ el círculo unitario.

Sea $\mathcal{O}$ el haz de funciones cont. en X con valores reales.

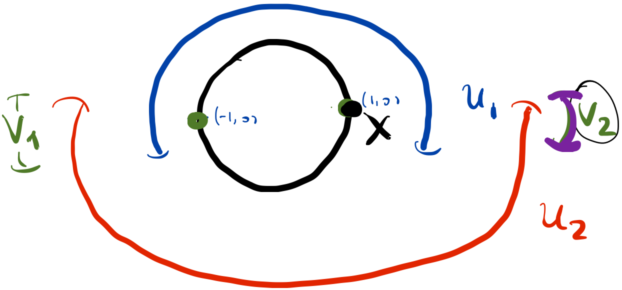
Consideremos $\tilde{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \mathcal{O}$ el prehaz constante

$$\left(\begin{array}{c} U \subseteq X \\ U \neq \phi \end{array} \longmapsto \mathbb{Z} \right)$$

Afirmación: El prehaz $\mathcal{P}$

$$\mathcal{P}(U) = \mathcal{O}(U) / \tilde{\mathbb{Z}}(U)$$ no es un haz.

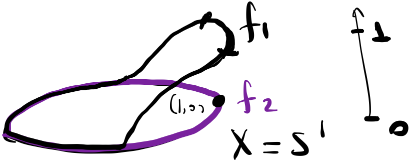
Consideremos $X = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$



$\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{U}_2 = V_1 \cup V_2$

Sean $f_1 \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_1)$, $f_2 \in \mathcal{O}(\mathcal{U}_2)$ tales que

$$\boxed{f_1|_{V_1} - f_2|_{V_1} = 0} \wedge f_1|_{V_2} - f_2|_{V_2} = 1$$



$$\Rightarrow f_1 \bmod \mathbb{Z} \in \mathcal{O}(U_1)/\mathbb{Z}(U_1)$$

$$f_2 \bmod \mathbb{Z} \in \mathcal{O}(U_2)/\mathbb{Z}(U_2)$$

Coinciden en $U_1 \cap U_2$.

Sin embargo $\mathcal{O}$ no tiene una sección en X

cuyas restricciones a U_1 y U_2 sean

$f_1 \bmod \mathbb{Z}$ y $f_2 \bmod \mathbb{Z}$ respectivamente,

pues es imposible remover la incompatibilidad en $\underline{V_2}$

$\therefore$ $\mathcal{P}$ no es un prehaz. (no satisface (4)).

Para garantizar la existencia de construcciones familiares a nivel de módulos y sucesiones exactas a este contexto, debemos refinar la definición de cokernel ¿En qué sentido?

Def: Si $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ homomorfismo de haces, entonces definimos

$$\operatorname{Im} \alpha := (\operatorname{Im}_{pre} \alpha)^{+}$$

← haz asociado "sheafification".

Similarmente

$$\operatorname{coker}\alpha := \left(\operatorname{coker}_{pre}\alpha\right)^+ .$$

Obs:

- Si $\mathcal{F}$ es un prehaz, entonces $\mathcal{F}_x = \mathcal{F}^+_x$ $\forall x \in X$.

- Supongamos $\mathcal{F}$ es un sub-prehaz de $\mathcal{G}$.
  Supongamos $\mathcal{G}$ es un haz.

Definamos

$\mathcal{F}' \subset \mathcal{G}$ un haz de la sgte. manera

$\mathcal{F}'(U) = \{ s \in \mathcal{G}(U) \mid$ existe un cubrimiento por abiertos $\{V_i\}$ de U tal que $s|_{V_i} \in \mathcal{F}(U)$ para todo i $\}$

- Ejercicio: Mostrar $\mathcal{F}'$ es un haz y $\mathcal{F}' \simeq \mathcal{F}^+$.
- si $\mathcal{F}$ haz $\Rightarrow \mathcal{F}^+ \simeq \mathcal{F}$.

Definición:

un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces es

- inyectivo si $\underline{\operatorname{Ker} \alpha} = 0$

- sobreyectivo si $\operatorname{Im} \alpha = \mathcal{G}$

  $\left(\text{ó} \quad \mathcal{G}/_{\operatorname{Im}\alpha} = \operatorname{coker} \alpha = 0 \right).$

$\boxed{\text{Lema:}}$ Sea $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces (sobre X).

Las sgtes. propiedades son equivalentes:

(1) α es inyectiva

(2) $\alpha_x : \mathcal{F}_{\underline{\underline{x}}} \to \mathcal{G}_{\underline{\underline{x}}}$ es inyectiva, $\forall x \in X$.

(3) $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ es inyectiva para todo abierto U de X.

Lema:

Sea $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ un morfismo de haces sobre X.

Las sgtes. prop. son equivalentes:

(1) α sobreyectiva

(2) $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es sobreyectiva para todo $x \in X$.

(3) Para todo abierto $\mathcal{U} \subseteq X$ y para toda sección $s \in \mathcal{G}(\mathcal{U})$ existe un recubrimiento $\{\mathcal{U}_i\}$ de $\mathcal{U}$, y elementos $t_i \in \mathcal{F}(\mathcal{U}_i)$ tal que

$$\alpha(t_i) = s|_{\mathcal{U}_i} \quad \forall i.$$

Obs/cuidado:

En general, si $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un morfismo sobreyectivo, no es cierto que $\alpha(\mathcal{U}) : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U})$ sea sobrey. para todo abierto $\mathcal{U}$.

— recordar ejm. de clase pasada —.

Def: Decimos que una sucesión de morfismos de haces:

$$\cdots \longrightarrow \mathcal{F}^{i-1} \xrightarrow{\alpha^{i-1}} \mathcal{F}^{i} \xrightarrow{\alpha^{i}} \mathcal{F}^{i+1} \longrightarrow \cdots$$

- es exacta en $\mathcal{F}^i$ si $\mathrm{Im}(\alpha^{i-1}) = \mathrm{Ker}(\alpha^i)$
- Exacta si es exacta en todo $\mathcal{F}^i$.

Lema/Corolario:

Una sucesión de haces $\mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{G} \xrightarrow{\beta} \mathcal{H}$

es exacta si y sólo si $\mathcal{F}_x \xrightarrow{\alpha_x} \mathcal{G}_x \xrightarrow{\beta_x} \mathcal{H}_x$

es exacta para todo $x \in X$.

Podemos transferir haces de un espacio a otro usando funciones continuas, en el sgte. sentido:

Sea $f : X \to Y$ una función continua entre espacios topológicos.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & \dashrightarrow & \boxed{?} \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{f} & Y \\ \cup & & \cup \\ f^{-1}(V) & & V \end{array}$$

Sea $\mathcal{F}$ un haz en X.

$$\underset{\text{abierto}}{V \subseteq Y} \longmapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

Esta asignación define un haz, denotado $\boxed{f_* \mathcal{F}}$, en Y.

$\boxed{f_* \mathcal{F}}$ se denomina la <u>imagen directa</u> (push forward) de $\mathcal{F}$.

(mostrar que, en efecto, $f_* \mathcal{F}$ es un haz).

Por otro lado, si $\mathcal{G}$ es un haz en Y, podemos definir un haz en X de la sgte. manera:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{?} & & \mathcal{G} \\ & & \downarrow \\ U \subseteq X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$\bullet\, x \qquad f(x)$

$\mathcal{G}_{f(x)} \simeq f^{-1}\mathcal{G}_x$

$$U \subseteq X \longmapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)$$

abierto

Esta asignación define un prehaz.

La imagen inversa de $\mathcal{G}$, denotada por

$f^{-1}\mathcal{G}$, es el haz:

$$\left(U \longmapsto \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V) \right)^{+}$$

Propiedad: $\left(f^{-1}\mathcal{G}\right)_x = \mathcal{G}_{f(x)} \quad \forall x \in X$.

__Definición:__ Sea Z un subconjunto de X (con top. inducida).

Sea $i : Z \to X$ la inclusión, $\mathcal{F}$ un haz en X

$$\begin{tikzcd} i^{-1}\mathcal{F} \arrow[d, dashed] & \mathcal{F} \arrow[d] \\ Z \arrow[r, hook, "i"] & X \end{tikzcd}$$

Entonces, denominamos $i^{-1}\mathcal{F}$ la restricción de $\mathcal{F}$ a Z.

Usualmente denotamos $i^{-1}\mathcal{F}$ como $\mathcal{F}|_Z$.

Nota: $p \in Z$, entonces $(\mathcal{F}|_Z)_p = \mathcal{F}_p$.

Ejemplo: Supongamos $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos en un espacio top. X (i.e. $X = \mathrm{Spec}(R)$, $\mathcal{O}_X(U_f) = R_f$ $\forall f \in R$)

En este contexto, $(X, \mathcal{O}_X)$ se denomina espacio anillado (ringed space) y $\mathcal{O}_X$ se denomina haz estructural.

(las secciones $\mathcal{O}_X$ sobre U se suelen llamar "funciones en U").

$\mathcal{O}_X$ - módulo ?

Un haz $\mathcal{F}$ de grupos abelianos en X con la sgte. propiedad:

para cada $U \subseteq X$ abierto, se tiene $\mathcal{F}(U)$ es un $\mathcal{O}_X(U)$ - módulo.

Además esta información es compatible con las restricciones:

$U \subseteq V \subseteq X$

abiertos

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}_X(V) \times \mathcal{F}(V) \arrow[r, "\text{acción}"] \arrow[d, "res_{V,U} \times res_{V,U}"'] & \mathcal{F}(V) \arrow[d, "res_{VU}"] \\
\mathcal{O}_X(U) \times \mathcal{F}(U) \arrow[r, "\text{acción}"] & \mathcal{F}(U)
\end{tikzcd}$$

Conmutativo.

La noción de $\mathcal{O}_X$-módulo generaliza la noción de R-módulo ó $\mathbb{Z}$-módulo.

• Ejm$^{\text{s}}$ de $\mathcal{O}_X$-mod. a tener en cuenta:

$(X, \mathcal{O}_X)$: X variedad diferenciable

$\mathcal{O}_X$: haz func. diferenciables

$$\begin{tikzcd} E \arrow[d, "\pi"] \\ X \arrow[u, bend left, "s"] \end{tikzcd}$$

π fibrado vectorial.

(s sección : $\pi \circ s = id_X$)

$\Rightarrow$ El haz de secciones diferenciables es un $\mathcal{O}_X$-módulo.

- Además:

$$0 \to \mathcal{F} \to \mathcal{G} \to \mathcal{H} \to 0$$

X

suc. exacta de haces: (en X):

Sea Γ el functor de secciones globales

$$\Gamma(X, \mathcal{F}) = \mathcal{F}(X)$$

en general no es sobrey.

$$0 \to \Gamma(\mathcal{F}) \to \Gamma(\mathcal{G}) \xrightarrow{\circledast} \Gamma(\mathcal{H}) \dashrightarrow H^1(X, \mathcal{F})$$

cuantificar

la falta de sobrey. en $\circledast$

$\vdots$