Algebra conmutativa. Clase 15.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

24 de octubre de 2020

Teorema: La categoría de esquemas afines (Aff) es equivalente a Ring^{op}
(opuesto de cat. de anillos).

- $$(\mathrm{Aff}) \underset{\mathrm{Spec}}{\overset{\Gamma}{\rightleftarrows}} (\mathrm{Rings})$$

$$(X, \mathcal{O}_X) \longmapsto \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$
$$\mathrm{Spec}(R) \longleftarrow\!\shortmid \ R$$
} a nivel de objetos.

A nivel de morfismos:

Notemos: dado $\varphi : R \to R'$

$\rightsquigarrow \mathrm{Spec}\,\varphi : \boxed{\mathrm{Spec}\,R'} \to \boxed{\mathrm{Spec}\,R}$ continua. ✓

(con $X = \mathrm{Spec}\,R'$, $Y = \mathrm{Spec}\,R$)

$\rightsquigarrow (\mathrm{Spec}\,\varphi)^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow (\mathrm{Spec}\,\varphi)_* \mathcal{O}_X$ homomorf de haces (struct)

$s \in R$: $\underbrace{(\operatorname{Spec}\varphi)^\#}_{\text{homomorfismo inducido por } \varphi} : \underbrace{\mathcal{O}_Y(\mathcal{U}_s)}_{R_s} \to \underbrace{\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_{\varphi(s)})}_{R'_{\varphi(s)}}$. ✓

$\mathcal{U}_s$ abierto principal

$$R_s \longrightarrow R'_{\varphi(s)}$$
$$\frac{a}{s^k} \longmapsto \frac{\varphi(a)}{\varphi(s)^k}$$

homomorfismo inducido por φ.

Estos homomorfismos son compatibles con las restricciones a abiertos principales

- $D(t) \subseteq D(s) \iff t^n = s \cdot b$ para cierto n.

Además: para $\underline{x \in X} = \operatorname{Spec}(R')$ ($x \leftrightarrow p_x$) tenemos el homomorf.

$$(\operatorname{Spec}\varphi)^\#_x : \underbrace{R_{\varphi^{-1}(p_x)}}_{\mathcal{O}_{Y,\varphi^{-1}(p_x)}} \longrightarrow R'_{p_x} = \mathcal{O}_{X,x} \quad ✓$$

homomorf. local

hom. inducido por φ.

si $s=1$ entonces

$$\varphi_{\cdot} = \underbrace{(\mathrm{Spec}\,\varphi)^{\#}_{U_s}}_{\Gamma((\mathrm{Spec}\,\varphi)^{\#}) = \varphi_{\cdot}\ \ldots\ (*)} : \underbrace{\mathcal{O}_Y(Y)}_{\substack{\Gamma(Y,\mathcal{O}_Y) \\ R}} \to \underbrace{(\mathrm{Spec}\,\varphi)_{*}\mathcal{O}_X(Y)}_{\substack{\Gamma(X,\mathcal{O}_X) \\ R'}}$$

Por otro lado:

si $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ morfismo de espacios (localm) anillados, entonces obtenemos

$$\Gamma(f) := f^{\#}_{Y} : \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y) = \mathcal{O}_Y(Y) \longrightarrow \underbrace{f_{*}\mathcal{O}_X(Y)}_{\substack{\mathcal{O}_X(X) \\ \Gamma(X, \mathcal{O}_X)}}.$$

Notemos:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Ring} \arrow[r, "\mathrm{Spec}", "\text{esencialm. sobrey.}"'] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}"'] & \mathrm{Aff} \arrow[r, "\Gamma"] & \mathrm{Rings}
\end{tikzcd}$$

(*) ---- id

Es suficiente mostrar que para cualesquiera anillos A, B las funciones

$$(*) \quad \boxed{\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ring}}(A, B) \underset{\Gamma}{\overset{\mathrm{Spec}(\cdot)}{\rightleftarrows}} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Aff}}(\mathrm{Spec}\, B, \mathrm{Spec}\, A)}$$

son biyecciones tal que $\underbrace{\mathrm{Spec} \circ \Gamma = \mathrm{id}}$, $\Gamma \circ \mathrm{Spec} = \mathrm{id}$. ✓

- Ya tenemos $\Gamma \circ \mathrm{Spec} = \mathrm{id}$. ✓

- Ahora sea $f : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A$ un morf de esquemas afines.

  Denotemos $\varphi = \Gamma(f)$. Debemos mostrar

$$\mathrm{Spec}\,\varphi = f$$

(como morfismo espacios anillados)

Si P_x ideal primo de B correspondiente al punto $x \in X = \mathrm{Spec}\, B$, entonces

$f_x^\#$ es el único homomorfismo de

anillos que hace conmut. el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi = \Gamma(f)"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{p_{f(x)}} \arrow[r, "f_x^\#"] & B_{p_x} \end{tikzcd}$$

$\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(p_x) \subseteq p_{f(x)}$

Como $f_x^\#$ es hom. local $\Rightarrow \quad \varphi^{-1}(p_x) = p_{f(x)}$. ✓

$\Rightarrow$ Spec $\varphi = f$ como funciones continuas.

La definición de $(\underline{\mathrm{Spec}\,\varphi})^{\#}$ muestra también que

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A_{\mathfrak{p}_{f(x)}} \arrow[r, "(\mathrm{Spec}\,\varphi)^{\#}_x"] & B_{\mathfrak{p}_x} \end{tikzcd}$$

Conmuta.

$$\Rightarrow (\mathrm{Spec}\,\varphi)^{\#}_x = f^{\#}_x \quad \forall\, x \in X.$$

$\Rightarrow (\mathrm{Spec}\,\varphi)^{\#} = f^{\#}$ como morfismo de haces! ∎

Ejm: (abiertos principales de Spec R son afines)

Sea $X = \operatorname{Spec} R$ un esquema afín.

- Dado $f \in R$, sea $j : \operatorname{Spec} R_f \to \operatorname{Spec} R$ el morfismo de esquemas afines asociado al morfismo canónico $R \to R_f$.

- j induce un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} R_f$ en $\mathcal{U}_f = \operatorname{Spec} R \setminus V(f)$, pues:

Recordar:

$S \subseteq R$ cjto. mult.

Sea $\varphi: R \to S^{-1}R$ el morf. canónico.

Entonces $\underbrace{\operatorname{Spec}\varphi}$: $\operatorname{Spec}(S^{-1}R) \longrightarrow \operatorname{Spec} R$

es un homeomorfismo de $\operatorname{Spec} S^{-1}R$ en el subespacio de $\operatorname{Spec} R$ que consiste de todos los ideales primos $p \subseteq R$ tq. $S \cap p = \phi$.

— Clase de localización —

Además, para todo $x \in U_f$

$j^{\#}_x$ es el isomorfismo canónico $R_{p_x} \xrightarrow{\sim} (R_f)_{p_x}$.

Es decir

$(j, j^{\#})$ induce un isomorfismo del esquema afín $\operatorname{Spec} R_f$ con el espacio localm. anillado $(U_f, \mathcal{O}_X|_{U(f)})$.

Ejm: (Subesquemas cerrados de esquemas afines)

Sea $X = \operatorname{Spec} R$ un esquema afín.

Para cada ideal $I \subseteq R$, denotemos por

$$i : \operatorname{Spec}(R/I) \to \operatorname{Spec} R$$

el morfismo inducido por la proy. natural

$$R \to R/I.$$

Recordar: i induce un homeomorfismo entre $\operatorname{Spec}(R/I)$ y $V(I)$. ← cerrado en $\operatorname{Spec} R$.

Más aún, para todo $x \in V(I)$ el morfismo

$$i_x^{\#} \text{ es el morfismo canónico}$$

$$R_{p_x} \longrightarrow (R/I)_{\bar{p}_x}$$

donde $\bar{p}_x$ es la imagen de p_x en R/I.

Usamos el homeomorfismo $i : \operatorname{Spec}(R/I) \to V(I)$ para dotar a $V(I)$ de una estructura de espacio localm. anillado. (identificamos $V(I)$ con $\operatorname{Spec}(R/I)$ vía i).

Obs: $V(I)$ (como subesquema cerrado) refiere a $\left(\underbrace{\operatorname{Spec}(R/I)}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(R/I)}\right)$.

Más adelante: con la noción general de subesquema cerrado veremos que todo subesquema cerrado de $\operatorname{Spec} R$ es de la forma $V(I)$ para cierto ideal $I \subseteq R$.

Ejm: Sea B un anillo.

$I \subseteq B$ ideal.

Notar: p ideal primo

$$p \supseteq I \iff p \supseteq I^n \quad \text{para cierto } n \geq 1.$$

$\Rightarrow$ $V(I) = V(I^n)$ — no depende de n —

pero:

$\left(\underbrace{\operatorname{Spec}(B/I^n)}, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec}(B/I^n)}\right)$ distinto para cada n

— depende de n —

(como esquema).

Tomemos como ejemplo:

- $B = K[t]$, $k = \bar{k}$.
- $I = (t)$.

Consideremos $A = K[t]/(t^n)$.

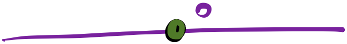
$$X = \operatorname{Spec} A = \operatorname{Spec}\left(K[t]/(t^n)\right)$$

X como espacio topológico consiste de un solo punto.

$$X = \{(t)\}.$$

$\mathcal{O}_X(X) = \mathcal{O}_{X,*} = A$;

$X \longleftrightarrow$ interpretar



$\mathbb{A}^1_k$

$n > 1 \Rightarrow A \neq k$

$A = k[t]/(t^n) \underset{\text{esp. vect.}}{\cong} k^n.$

A "guarda" exp. de Taylor de pol. hasta orden $n-1$.

$k = \overline{k}$.

Por otro lado, consideremos

$$\mathbb{A}^2_k = \operatorname{Spec} k[T, U] \longrightarrow \text{plano.}$$

$\{(u,t) \mid u, t \in k\}$

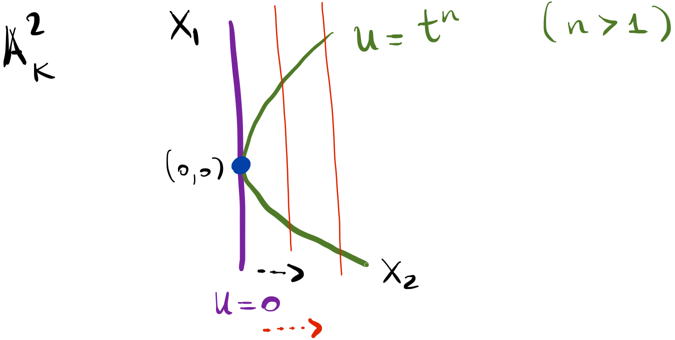
Consideremos

$$I = (U)$$

$$J = (U - T^n)$$

Definamos las subvariedades

$$X_1 = \{(u,t) \in \mathbb{A}^2 \mid u = 0\} \qquad X_2 = \{(u,t) \in \mathbb{A}^2 \mid u = t^n\}.$$



Como conjuntos, las intersecciones de ambas variedades es $\{(0,0)\}$

Pero X_1 y X_2 no se intersecan transversalmente $(\text{si } n > 1)$.

Como esquema afín vamos a definir la intersección como

$$\operatorname{Spec}\left(k[T,U] \big/ I+J \right)$$

Nota:

$$k[T,U] \big/ I+J \simeq k[T] \big/ (T^n)$$

codifica multiplicidad de intersección. $\longleftrightarrow$ "codifica intersección no transversal"

Proposición:

Sea X un esquema. Sea $\mathcal{U} \subseteq X$ un abierto. Entonces el espacio localm. anillado $\left(\mathcal{U}, \mathcal{O}_X\big|_{\mathcal{U}}\right)$ es un esquema.

(versión global de $\left(\operatorname{Spec} R_f, \mathcal{O}_X\big|_{R_f}\right) \simeq \mathcal{U}_f$).

Decimos que $\mathcal{U}$ es un esquema abierto de X.

Recordar: X está cubierto por esquemas afines y cada uno de estos tiene una base de su topología dada por abiertos princip.

Proposición:

$X \to \operatorname{Spec}(A)$
Y

Sea $(X, \mathcal{O}_X)$ esquema.

Sea $Y = \operatorname{Spec}(A)$ un esquema afín.

La función natural:

$\circledast$

$$\operatorname{Hom}(X, Y) \longrightarrow \operatorname{Hom}(A, \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$

$$(f, f^{\#}) \longmapsto f^{\#}_Y$$

es una biyección.

$U_i \simeq \operatorname{Spec} R_i$

Idea de la prueba:

X esquema $\Rightarrow$ $X = \bigcup_i U_i$ $\quad$ U_i afín.

por la equiv. de cat. mencionada al principio:

$$\operatorname{Hom}(U_i, Y) \xrightarrow[\text{biy}]{\sim} \operatorname{Hom}(A, \underbrace{\Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)}_{R_i})$$

Si V abierto afín tq $V \subseteq U_i \cap U_j$, entonces

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}(U_i, Y) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}(A, \Gamma(U_i, \mathcal{O}_X)) \arrow[d] \\
\mathrm{Hom}(V, Y) \arrow[r] & \mathrm{Hom}(A, \Gamma(V, \mathcal{O}_X))
\end{tikzcd}$$

diagrama conmut.

En efecto: la asignación

$$U \longmapsto \mathrm{Hom}(U, Y)$$

es un <u>haz</u>.

Notar que todo anillo R tiene un único homomorf. $\mathbb{Z} \to R$, luego:

Corolario: X esquema. Entonces existe un único morfismo

$$X \to \operatorname{Spec} \mathbb{Z}.$$

En otras palabras: $\operatorname{Spec} \mathbb{Z}$ es el objeto final de la cat. de esquemas.

Corolario 2:

$$\mathrm{Hom}(X, \mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}[T]) \cong \mathrm{Hom}_{\text{anillos}}(\mathbb{Z}[T], \Gamma(X, \mathcal{O}_X))$$
$$\cong \Gamma(X, \mathcal{O}_X).$$

Corolario 3: X es un R-esquema (i.e. $X \to \mathrm{Spec}\,R$)

$$\mathrm{Hom}_R(X, \underbrace{\mathbb{A}^1_R}_{\mathrm{Spec}\,R[T]\ \checkmark}) \simeq \Gamma(X, \mathcal{O}_X). \quad (R\text{-álgebras})$$

Obs: Aplicando la prop. al caso

$$A = \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

obtenemos un morfismo canónico

$$c_X : X \longrightarrow \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathcal{O}_X)$$

(c_X corresp. vía la biyección a $id_{\Gamma(X, \mathcal{O}_X)}$).

$$\begin{array}{c} X \\ \downarrow \\ \operatorname{Spec} \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \end{array}.$$