# Algebra conmutativa. Clase 17.

**Richard Gonzales**

*Pontificia Universidad Católica del Perú*

7 de noviembre de 2020

$S$ anillo graduado

$S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d$ ideal irrelevante.

Para cada $f \in S_+$, $f$ homogéneo, definimos

$$D_+(f) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p} \}$$
$$= \operatorname{Proj} S \setminus V_+(f)$$

donde $V_+(f) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supseteq (f) \}$.

$D_+(f)$ abiertos en $\operatorname{Proj} S$.

Notar: (*)

$$\operatorname{Proj} S = \bigcup_{\substack{f \in S_+ \\ f \text{ homogéneo}}} D_+(f)$$

pues recordar Proj S consiste de los ideales primos $\mathfrak{p} \in S$, $\mathfrak{p}$ homogéneo, que no contienen a $S_+$.

⊛ Notar por construcción

$$\operatorname{Proj} A \underset{\text{subconjunto}}{\subseteq} \operatorname{Spec} A.$$

Además

$$V(\mathfrak{a}) \cap \operatorname{Proj}(A) = V_+(\mathfrak{a}^h)$$

$\mathfrak{a}^h$ ideal homogéneo generado por $\mathfrak{a}$.

$$\mathfrak{a}^h = \bigoplus_{d \geq 0} \mathfrak{a} \cap A_d .$$

Para cada ideal homogéneo $I$ de $S$

denotamos
$$V_+(I) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supseteq I \}.$$

Ejercicio:

- $\bigcap_i V_+(I_i) = V_+\left( \sum I_i \right)$
- $V_+(I) \cup V_+(J) = V_+(IJ)$
- $V_+(S) = \phi$
- $V_+(0) = \operatorname{Proj} S.$

$V(I)$ cerrados de top. Zariski en $\operatorname{Proj} S$.

$\pi: \mathbb{A}^n_k - \{0\} \to \mathbb{P}^{n-1}_k$

$\mathrm{Cono}(Z) \qquad Z$

Lema / Obs:

$I, J$ ideales de un anillo graduado $S$.

Se tiene lo sgte:

(a) Si $I$ es primo $\Rightarrow$ $I^h = \bigoplus_{d \geq 0} (I \cap S_d)$ es primo.

$\uparrow$ ideal homog. asociado a $I$

(b) Supongamos $I, J$ homogéneos. Entonces

$$V_+(I) \subseteq V_+(J) \iff J \cap S_+ \subseteq \sqrt{I}.$$

(c) $\operatorname{Proj} S = \phi \iff S_+$ es nilpotente.

Obs:

Dado $f \in S$ homogéneo, notemos que $S_{(f)}$ consiste de los elem. de la forma $a f^{-N}$, $N \geq 0$, $\deg a = N \deg f$. Es decir $S_{(f)}$ consiste de los elem. de grado 0 en $S_f$.

Por ejm:

- si $S = k[x_0, x_1, \dots, x_n]$

  entonces

$$S_{(x_i)} = k\left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \widehat{\frac{x_i}{x_i}}, \dots, \frac{x_n}{x_i}\right].$$

$D_+(f\cdot g) = D_+(f) \cap D_+(g)$.

**Lema:** Sea $f \in S_+$ homogéneo de grado $r$.

(a) Existe un homeomorfismo canónico

$$\theta : D_+(f) \longrightarrow \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

(b) Sea $D_+(g) \subseteq D_+(f)$ y $\alpha = g^r f^{-\deg g} \in S_{(f)}$.

Entonces $\theta(D_+(g)) = D(\alpha)$.

(c) Se tiene un homomorfismo canónico $S_{(f)} \to S_{(g)}$ el cual induce un isomorfismo $(S_{(f)})_\alpha \cong S_{(g)}$.

# Idea de la prueba

— Para mayor detalle, ver Liu's Algebraic Geometry
Lema 2.3.36
p. 51 —

(a) Recordar $\operatorname{Proj} S$ es subconjunto de $\operatorname{Spec} S$.

Más aún, si $f \in S$

$$V(f) \cap \operatorname{Proj} S = \bigcap_i V_+(f_i)$$

si $f = f_0 + f_1 + \dots + f_d$ con $f_i \in S_i$.

Así

$$D(f) \cap \operatorname{Proj} S = \bigcup_i D_+(f_i)$$

$\therefore$ Topología en Proj S es inducida por la top. en Spec S.

Definimos

$$\theta : D_+(f) \longrightarrow \operatorname{Spec} S_{(f)}$$

Como la restricción de la aplicación canónica

$$D(f) = \operatorname{Spec} S_f \longrightarrow \operatorname{Spec} S_{(f)} \quad \left( \text{asociada a } \underset{\text{inclusión}}{S_{(f)} \subseteq S_f} \right)$$

al subconjunto $\underline{D_+(f)}$.

Por tanto, $\underline{\underline{\theta}}$ es <u>continua</u> ( comp. de aplicaciones continuas).

ver Liu para sobrey. y los otros items.

<u>Proposición</u>: Sea $A$ un anillo.

Sea $S$ un álgebra graduada sobre $A$ (i.e. tenemos un homomorfismo de anillos $\varphi: A \to S_0$).

Entonces

Proj $S$ admite una estructura única de $A$-esquema de modo que

- para todo $f$ homogéneo $f \in S_+$, el abierto $D_+(f)$ es afín e isomorfo a $\operatorname{Spec} S_{(f)}$.

Prueba:

Sea $X = \operatorname{Proj} S$.

$\mathcal{B}$: base de top. de $X$ definida por los abiertos principales $D_+(f)$, $f \in S_+$.

Para cada $D_+(f) \in \mathcal{B}$,

sea $\mathcal{O}_X(D_+(f)) := S_{(f)}$.

Por el lema anterior, se tiene:

- $S_{(f)} \simeq S_{(f')}$ si $D_+(f) = D_+(f')$

— del item (c) —

- si $D_+(g) \subseteq D_+(f)$ entonces tenemos restricciones canónicas

$$\mathcal{O}_X(D_+(f)) \longrightarrow \mathcal{O}_X(D_+(g)).$$

— del item (b) —

$\therefore$ $\mathcal{O}_X$ es un <u>$B$-prehaz</u>.

• Usando el homomorfismo $\theta$ del item (a) del lema anterior, podemos mostrar que

$\mathcal{O}_X$ es un B-haz.

(usar $D_+(fg) = D_+(f) \cap D_+(g)$).

$\square$

Ejm:

$\underline{\underline{R}}$ anillo

$$\mathbb{P}^n_R = \operatorname{Proj} \underline{\underline{R}}[x_0, \ldots, x_n] \longrightarrow \operatorname{Spec} R.$$

espacio proyectivo (de dim. relativa $n$) sobre $R$.

En particular, si $R = K$ es un cuerpo alg. cerrado, entonces $\mathbb{P}^n_K$ es un esquema cuyo subconj. de puntos cerrados es naturalm. homeomorfo a la variedad clásica $\mathbb{P}(K^{n+1}) = K^{n+1} - \{0\} / K^*$.

Ejm: (espacio proy. ponderado
- weighted projective space -)

Sea $S = K[x_0, .., x_n]$ con la graduación

$$\cdot \ \deg(x_i) = w_i$$
$$w_i \in \mathbb{Z}^+, \ i = 0, .., n$$

Entonces $\operatorname{Proj} S$ ← espacio proy. ponderado

En este caso $\operatorname{Proj} S = \mathbb{WP}^n(w_0, .., w_n)$

regular o suave

Si $w_0 = w_1 = \dots = w_n = 1 \Rightarrow \mathbb{WP}^n(1, .., 1) \simeq \mathbb{P}^n_K$.

Consideremos

$$W\mathbb{P}^2(1,1,2).$$

- $\deg(x_0) = 1$
- $\deg(x_1) = 1$
- $\deg(x_2) = 2$

Tenemos así

$$\operatorname{Spec} S_{(x_i)} = D_+(x_i) = \{ p \in \operatorname{Proj} S : x_i \notin p \}.$$

Notar

$$S_{(x_2)} = k\left[ \underset{u}{\boxed{\frac{x_0^2}{x_2}}}, \underset{v}{\boxed{\frac{x_0 x_1}{x_2}}}, \underset{w}{\boxed{\frac{x_1^2}{x_2}}} \right]$$

$$\cong k[u,v,w]/(uw - v^2)$$

Notar $\operatorname{Spec} \dfrac{K[u,v,w]}{(uw - v^2)}$

$\mathbb{A}^2_K / \{\pm 1\}$

$\cong$

corresponde al cono cuadrático $uw = v^2$

en $\mathbb{A}^3_K$ el cual tiene un punto singular

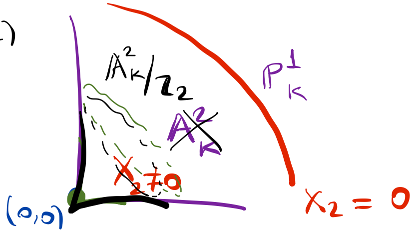
en $(0,0,0)$.

$(s^2, t^2, st)$

$W\mathbb{P}^2(1,1,2)$

Corresp. a

$[0:0:1]$




$\mathbb{A}^2_K \cup \mathbb{P}^1_K = \mathbb{P}^2_K$

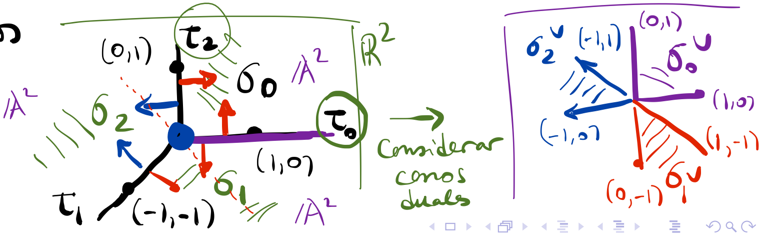
**Obs:** $\mathbb{WP}^n(w_0,\dots,w_n)$ es en general un espacio singular:

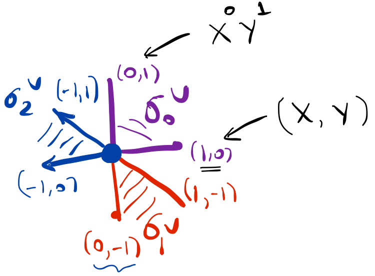
$$\mathbb{P}^n \xrightarrow{\pi} \mathbb{WP}^n(w_0,\dots,w_n)$$

isotropía por grupos finitos.

$\pi$ cubrimiento ramificado.

**Ejm:** Consideremos el abanico (- fan -) de conos





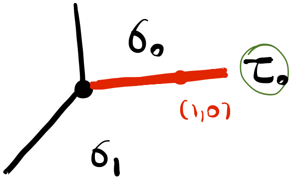

$x^1y^0$

A cada cono dual asignamos los sgtes. anillos de polinomios

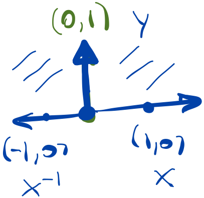
$\sigma_0^\vee \rightsquigarrow \mathbb{C}[x,y]$ ← copia de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$\sigma_1^\vee \rightsquigarrow \mathbb{C}[y^{-1}, xy^{-1}]$ ← copia de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

$\sigma_2^\vee \rightsquigarrow \mathbb{C}[x^{-1}y, x^{-1}]$ ← copia de $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$




corresp. a la intersección de las dos copias de $\mathbb{A}^2_K$.




$\tau_0^\vee$ corresp. a $\underline{\mathbb{C}[X, X^{-1}, Y]}$.

$\tau_1^\vee$

$\mathbb{C}[xy^{-1}, x^{-1}y, x^{-1}y^{-1}]$

$\tau_2^\vee$

$\mathbb{C}[x, y, y^{-1}]$.

$\mathbb{P}^2$

$[x_0 : x_1 : x_2]$

$$\begin{array}{ccc} & [x_0:x_1:x_2] & \\ \swarrow^{x_0 \neq 0} & \downarrow^{x_1 \neq 0} & \searrow^{x_2 \neq 0} \end{array}$$

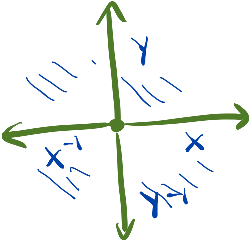
$$\mathbb{C}\Big[\underbrace{\tfrac{x_1}{x_0}}_{x}, \underbrace{\tfrac{x_2}{x_0}}_{y}\Big] \longleftrightarrow \mathbb{C}\Big[\underbrace{\tfrac{x_0}{x_1}}_{u}, \underbrace{\tfrac{x_2}{x_1}}_{v}\Big]$$

$u = x^{-1}$

$v = x^{-1}y$.

$$\sigma_0 \cap \sigma_1 \cap \sigma_2 = \{0\}$$

$$\{0\}^\vee$$




$\mathbb{C}[x, x^{-1}, y, y^{-1}] \leftarrow$ anillo de coord. de $T = (\mathbb{C}^*)^2$ toro.

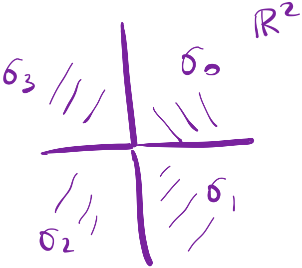
$$\underset{\text{proyect.}}{X} = X_{\sigma_0} \cup X_{\sigma_1} \cup X_{\sigma_2}$$

$X_{\sigma_0} \cap X_{\sigma_1}$ afines.

$$X_{\sigma_0} \cap X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_1} = (\mathbb{C}^*)^2$$

$$X \supseteq (\mathbb{C}^*)^2 \qquad \underset{\text{iso}}{\cong} \mathbb{P}^2.$$

variedad proy.




var. proy. asociada

$\rightsquigarrow X \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$

Obj: Fan completo $\mathcal{F}$ en $\mathbb{R}^n$ $\rightsquigarrow$ define dato de una variedad completa (compacta) tórica. $X_{\mathcal{F}}$

$$(\mathbb{C}^*)^n \subseteq X_{\mathcal{F}}.$$