Algebra conmutativa. Clase 22.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

3 de diciembre de 2020

Sea R un anillo conmut. con 1.

Definición (dimensión)

(a) La dimensión de Krull de R, o simplemente la dimensión de R, denotada $\dim R$, es el número máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que existe una cadena de ideales primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \cdots \subsetneq P_n$$

de longitud n en R.

(b) La codimensión o altura (height) de un ideal primo P en R es el número máximo $n \in \mathbb{N}$ tal que hay una cadena como en (a) con $P_n = P$.

Denotamos por $\operatorname{codim}_R P$ ó $\operatorname{codim} P$ a la codim. de P en R. (en notación clásica $\operatorname{codim} P = ht(P)$).

(c) La **dimensión** $\dim X$ de una variedad $X = V(S) \subseteq K^n$, K cuerpo, es la dimensión de su anillo de coordenadas $A(X) = K[x_1, \ldots, x_n] / I(X)$ donde

$$I(X) = \{ f \in K[x_1, \ldots, x_n] \mid f(x) = 0 \ \forall x \in X \}.$$

Si $Y \subseteq X$ es una subvariedad irreducible de X entonces $I(Y)$ es un ideal primo y se tiene

$$\operatorname{Codim}_X Y := \operatorname{codim} I(Y) \ (\text{en } A(X)).$$

Obs: X variedad $X \subseteq K^n$, $K = \overline{K}$.

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ideales primos} \\ \text{de } A(X) \end{array} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{c} \text{subvariedades} \\ \text{irreducibles de } X \end{array} \right\}.$$

Así, $\dim X$ es igual a la longitud maximal n de un cadena

$$\boxed{X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_n \neq \phi}$$

de subvariedades irreducibles de X.

$\dim X_i = \dim X - i$.

si X irreducible $\Rightarrow$ "reducir" X implica "disminuir dimensión"

X irred.

$$X = X_n \supsetneq X_{n-1} \supsetneq \cdots \supsetneq X_0 = \{pt\}$$

(análogo a $\mathbb{P}^n_K$

$$\mathbb{P}^n_K \supseteq \mathbb{P}^{n-1}_K \supseteq \cdots \supseteq \mathbb{P}^0_K = pt$$

$$\rightarrow \dim \mathbb{P}^n_K = n$$

$$\left(\rightarrow \dim \mathbb{A}^n_K = n = \dim K[x_1, \ldots, x_n] \right)$$

Similarm, la codim de una subv. irreducible

$$Y \subseteq X$$

es la longitud máxima n de cadenas del tipo

$$X_0 \supsetneq X_1 \supsetneq \cdots \supsetneq X_n \supseteq Y$$

$\bullet$ $n = \dim X - \dim Y$.

Ejm:

(a) cuerpos tienen dimensión 0.

($\{0\}$ único ideal primo)

(b) R DIP, tal que R no es cuerpo.

En este caso, excepto por el ideal 0 (el cual es primo pero no maximal), las nociones de primo y maximal coinciden.

Así, las cadenas maximales de ideales primos en R

Son del tipo

$$\{0\} \subsetneq P \,, \qquad \text{con } P \text{ ideal maximal.}$$

Es decir, $\dim R = 1$

En particular, $\dim \mathbb{Z} = 1$

$\dim \mathbb{A}^1_K = 1$

geométricamente

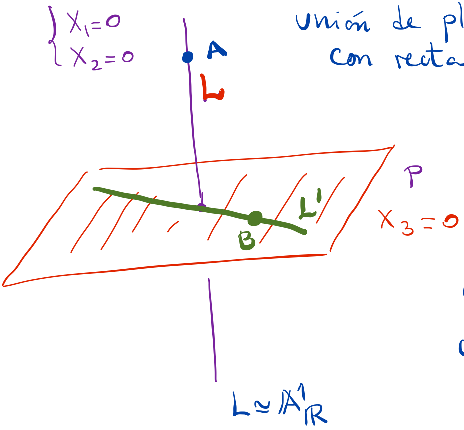
$\dim K[X] = 1$ (K cuerpo)

Vamos a ver más adelante: R anillo Noetheriano

$$\dim R[X] = \dim R + 1$$

Obs: Consideremos X no es irreducible $X = P \cup L$.

$$X = \underbrace{V(x_1 x_3,\ x_2 x_3)}_{\text{unión de plano } P \text{ con recta } L} \subseteq \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$$



En este caso tenemos dos cadenas maximales de distinta longitud.

- $X_0 = L \supsetneq X_1 = \{A\}$

En este caso, $X_0 \supsetneq X_1$ es una cadena maximal pues X_0 tiene dim 1.

- $Y_0 = P \supsetneq Y_1 = L \supsetneq Y_2 = \{B\}$

cadena maximal (pues $\dim Y_0 = 2$ - lo probaremos más adelante -)

* Dado que X no es irreducible y las comp. irred. tienen dist. dim, las cadenas maximales en X tienen distinta longitud.

Propiedades / Observaciones adicionales.

R anillo.

(a) Sea P un ideal primo de R.

$$\boxed{\operatorname{codim} P = \dim R_P}$$

(debido a la corresp. 1 : 1 entre ideales primos de R_P y los ideales primos de R que contienen a P).

(b) P ideal primo de R.

$$\text{Sea: } \begin{cases} n = \dim(R/P) \\ m = \operatorname{codim} P \underset{(a)}{=} \dim R_P . \end{cases}$$

Tenemos así, cadenas de ideales primos

$$\underline{P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m \subseteq P} \quad \text{y} \quad \underline{P \subseteq Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_n}$$

que pueden ser "pegadas" para generar una sola cadena de longitud $m+n$.

Luego

$$\dim R \geq m + n$$

ó

$$\dim R \geq \dim(R/p) + \operatorname{codim} P.$$

Geométricamente, esto significa: si $Y \subseteq X$ subvar. irreducible

entonces

$$\dim X \geq \dim Y + \operatorname{codim} Y.$$

(en general, no hay igualdad, ver ejm. anterior).

(c)

$$\dim R = \sup\{\dim R_P \ : \ P \text{ ideal maximal de } R\}$$

$$= \sup\{\operatorname{codim} P \ : \ P \text{ ideal maximal de } R\}$$

i.e. dimensión es un concepto local.

geom: dimensión de una variedad es el máximo de las dimensiones locales en cada punto.

Lema: Sea R un anillo de dimensión finita en el cual todas las cadenas maximales de ideales primos tienen la misma longitud. (e.g. $R = A(X)$, X irreducible).

Sea $P \subseteq R$ ideal primo. Entonces:

(a) $\dim(R/P) < \infty$ ✓ y R/P es un anillo en el cual las cadenas maximales de ideales primos tienen la misma longitud.

(b)

$$\dim R = \dim R/p + \operatorname{codim} P$$

$$\left(\dim R = \dim R/p + ht(p) \right)$$

(c)

$$\dim R_p = \dim R \quad \text{si } P \text{ es ideal maximal.}$$

Prueba:

Cadena de ideales primos en R/p corresp. a cadenas $Q_0 \subsetneq Q_1 \subsetneq \dots \subsetneq Q_r$ $(*)$ de ideales primos en R que contienen a P.

En particular la long. de dichas cadenas está acotada por $\dim R$, y $\dim R/_P < \infty$.

Más aún, si la cadena (*) es maximal, entonces debemos tener $Q_0 = P$. Así, obtenemos

$$P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_m = P = Q_0 \subsetneq \cdots \subsetneq Q_r$$

$\uparrow$ incluimos P en la cadena.

$\Rightarrow$ $\operatorname{codim} P \geq m$ y $\dim R/_P \geq r$.

Por hipótesis: $m + r = \dim R$.

Es decir

$$\dim R \geq \dim R/_P + \operatorname{codim} P \geq r + m \geq \dim R$$

$$\Rightarrow \dim R = \dim R/_P + \operatorname{codim} P.$$

Para (c) recordar:

$$\dim R/P = 0 \quad \text{pues } P \text{ maximal}$$

$$(R/P \text{ cuerpo})$$

Luego, por (b)

$$\dim R = \operatorname{codim} P = \dim R_P .$$

Proposición: K cuerpo. $n \in \mathbb{N}$

(a) $\dim K[x_1, \ldots, x_n] = n$

(b) Todas las cadenas maximales de ideales primos en $K[x_1, \ldots, x_n]$ tienen longitud n.

Prueba: (prox. clase).

Obs: (Definición alternativa de dimensión)

$X \subseteq k^n$, X irreducible.

$\Rightarrow I(X)$ ideal primo

$A(X) := k[x_1, \dots, x_n] / I(X)$ dominio.

Considerar: cuerpo de fracciones ó cuerpo de funciones racionales $\mathrm{Quot}(A(X)) := k(X)$.

Así podemos definir

$$\dim X := \operatorname{tr\,deg} K(X) \checkmark$$

Objetivo:

$$\dim X = \text{krull dim } A(X)$$

$$= \operatorname{tr\,deg} K(X).$$

$X = \mathbb{A}^n_K$

$\dim \mathbb{A}^n_K$

$= \operatorname{tr.\,deg} K(t_1, \dots, t_n)$

$= n.$

- Gathmann : Commutative Alg.

  Cap. 11

- Atiyah-MacDonald . Cap. 11