Algebra conmutativa. Clase 11.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

9 de octubre de 2020

R anillo conmutativo (con unidad).

$X = \mathrm{Spec}(R)$

$\mathcal{O}_X$ haz estructural de X

$$\underbrace{D(f) = X \setminus V(f)}_{\text{abierto básico}} \longmapsto \mathcal{O}_X(D(f)) = R_f.$$

- En clase pasada: $\mathcal{O}_X$ en efecto es un haz de anillos en X.

- Stalks o tallos de $\mathcal{O}_X$:

Lema: si $y \in X \Rightarrow \mathcal{O}_{X,y} = R_{P_y}$ donde P_y ideal primo que corresponde a $y \in X = \mathrm{Spec}(R)$.

Prueba:

Notemos $D(f)$ contiene a P_y si y sólo si $f \notin P_y = \mathfrak{p}$.

Es suficiente mostrar que el homomorfismo canónico

$$\varphi: \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}} A_f \to A_{\mathfrak{p}}$$

es un isomorfismo.

Notar: un elem. $\alpha \in A_{\mathfrak{p}}$ se puede escribir $\alpha = \frac{a}{f}$ para algún $f \notin \mathfrak{p}$.

Por tanto, α está en la imagen de dicho A_f.

Es decir, φ es sobreyectiva.

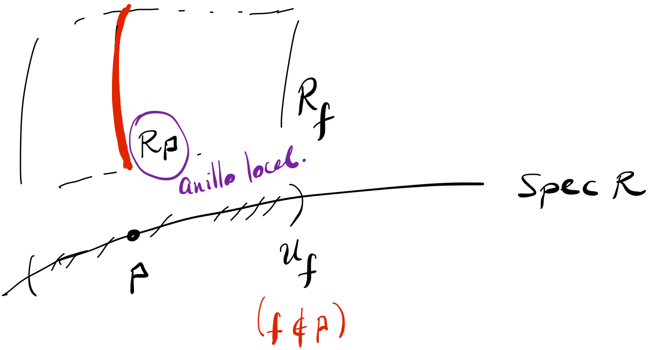
Por otro lado, si $\frac{a}{f^n} \in A_f$ $(f \notin p)$

satisface $\varphi\left(\frac{a}{f^n}\right) = 0 \in A_p$, entonces

existe $g \notin p$ tal que $g \cdot a = 0$

$\Rightarrow$ $af^{-n} = 0$ en A_{gf} $\Rightarrow$ φ es inyectiva.

$\not\!\!\!/\!\!/.$



Tenemos así $\qquad X = \operatorname{Spec}(R)$

$$(X, \mathcal{O}_X)$$

haz estructural de X.

(vamos a ver más adelante $(X, \mathcal{O}_X)$ localm. anillado).

Recordar:

Sean R, R' anillos.

Si $\varphi: R \to R'$ homomorfismo de anillos entonces φ induce

$$\mathrm{Spec}(\varphi): \underbrace{\mathrm{Spec}(R')}_{X'} \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Spec}(R)}_{X}$$

- contravariante

$\mathrm{Spec}(\varphi)$ continua.

Preg: φ induce también una función / morfismo entre $\mathcal{O}_{X'}$ y $\mathcal{O}_X$??

Definición: (morfismo de prehaces)

Sean $\mathcal{F}$ y $\mathcal{G}$ dos prehaces sobre X.

Un morfismo de prehaces

$$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & \mathcal{G} \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

consiste de la sgte. información:

para cada abierto $U \subseteq X$

se tiene un homomorfismo

$$\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U).$$

compatible con las restricciones ρ_{UV}.

Dicho de otra manera, un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es una familia $\{\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)\}_{U \in Top(X)}$ de homomorfismos (de anillos) tal que para cada par de abiertos $V \subseteq U$, el sgte. diagrama es conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\alpha(U)"] \arrow[d, "\rho_{UV}"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \mathcal{G}(U) \arrow[d, "\rho'_{UV}"] \\
\mathcal{F}(V) \arrow[r, "\alpha(V)"'] & \mathcal{G}(V)
\end{tikzcd} \qquad (*)$$

Un morfismo α es llamado isomorfismo si admite una inversa por izq. y derecha.

Observación: La conmutatividad del diagrama (*) implica que existe, para cada $x \in X$, un homomorfismo de tallos (o stalks)

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x .$$

$\boxed{\text{Proposición:}}$ Un morfismo de **haces** $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ es un isomorfismo si y sólo si

$$\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x \text{ es un isomorfismo } \forall x \in X.$$

Prueba:

- si α es un isomorfismo $\Rightarrow$ α_x iso para todo $x \in X$.

- supongamos ahora, $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$ es un isomorfismo $\forall x \in X$.

Para mostrar que α es un isomorfismo, basta mostrar $\alpha(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ son isomorfismos para todo $U \subseteq X$ abierto, pues en ese caso podemos definir el inverso β de α vía

$$\beta(\mathcal{U}) = \alpha(\mathcal{U})^{-1} \quad \text{para todo } \mathcal{U}.$$

Dado $\mathcal{U} \subseteq X$ abierto,

Afirmación 1: $\alpha(\mathcal{U})$ es inyectiva. $\left[\begin{array}{c}\alpha(\mathcal{U}) : \mathcal{F}(\mathcal{U}) \to \mathcal{G}(\mathcal{U}) \\ s \mapsto 0\end{array}\right]$

Sea $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ para lo cual

$$\alpha(\mathcal{U})(s) = 0.$$

Entonces, para cada $x \in \mathcal{U}$, se tiene

$$\alpha_x(s_x) = (\alpha(\mathcal{U}).s)_x = 0$$

así,

$$S_x = 0 \quad \text{para todo } x \in \mathcal{U}.$$

(pues α_x es inyectiva).
$\forall x \in X$.

En otras palabras, para cada $x \in \mathcal{U}$, existe una vecindad $\mathcal{U}^x \subseteq \mathcal{U}$ tal que

$$S|_{\mathcal{U}^x} = 0|_{\mathcal{U}^x} = 0.$$

$\Rightarrow$ por prop. (3) de Def de haces

$$S = 0. \quad (S \in \mathcal{F}(\mathcal{U})).$$

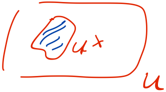
Afirmación 2: $\alpha(U)$ sobreyectiva.

Sea $t \in \mathcal{G}(U)$.

Para cada $x \in U$, existe $\bar{s}^x \in \mathcal{F}_x$ para el cual

$$\alpha_x(\bar{s}^x) = t_x \quad \text{(a nivel de gérmenes)}$$

— pues α_x es sobreyectiva —.



Elijamos representantes (U^x, s^x) de $\bar{s}^x$

(i.e $U^x \subseteq U$ abierto, y $(s^x)_x = \bar{s}^x$).

Como

$$\big(\underbrace{\alpha(U^x)\cdot s^x}\big)_x = \alpha_x(\bar{s}^x) = \underline{\underline{t_x}}.$$

entonces, reduciendo U^x de ser necesario,

podemos asumir $\underline{\alpha(U^x)\cdot s^x} = t\big|_{U^x}$.

Luego,

$$\cdot\ s^x\big|_{\underline{U^x\cap U^y}} = s^y\big|_{\underline{U^x\cap U^y}}$$

para $x, y \in U$ (por iny. de α pues ambas restricciones son enviadas a $t\big|_{U^x\cap U^y}$).

Por tanto, por prop. (4) de def de haz:

existe una sección $s \in \mathcal{F}(\mathcal{U})$ tal que

$$s|_{U^x} = s^x \quad \text{para } x \in \mathcal{U}.$$

Afirmación: $\alpha(u)(s) = t$.

En efecto, para todo $x \in \mathcal{U}$,

$$(\alpha(\mathcal{U})\cdot s)|_{U^x} = \alpha(U^x).\, s^x = t|_{U^x}$$

por tanto $\alpha(u)\cdot s$ coincide con t en $\mathcal{U}$, por prop (3) de haces.

$$\left(\left(\alpha(u)\cdot s - t\right)\Big|_{U^x} = 0 \quad \text{con } \{U^x\}_{x\in U} \text{ cub. de } U \right).$$

Observación:

No todo prehaz es un haz:

Sea X un espacio topológico. A anillo (top. discreta)

La familia $\{f: \mathcal{U} \to A \mid f \text{ constante}\}$

define un prehaz $\mathcal{A}$ que en general no es un

haz (si X no es conexo). $(\mathcal{A}(\phi) = 0)$.

- Sean $\mathcal{U}_1, \mathcal{U}_2$ abiertos disjuntos. Sea $\mathcal{U} = \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$.

$s_1 \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_1) = A$, $s_2 \in \mathcal{A}(\mathcal{U}_2) = A$, con $s_1 \neq s_2$.

No existe $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que

$$s|_{U_1} = s_1 \quad y \quad s|_{U_2} = s_2 .$$

Proposición: Dado un prehaz $\mathcal{F}$, existe un único haz $\mathcal{F}^+$ y un morfismo de prehaces $\theta : \mathcal{F} \to \mathcal{F}^+$ tal que:

prop. universal:

para todo haz $\mathcal{G}$ y morfismo $\gamma : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de prehaces, existe un único $\beta : \mathcal{F}^+ \to \mathcal{G}$ tal

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[d, "\theta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ \boxed{\mathcal{F}^+} \arrow[r, "\beta"'] & \mathcal{G} \end{tikzcd}$$

que

$$\gamma = \beta \circ \theta.$$

sheafification of $\mathcal{F}$ (sheaficación(?) de $\mathcal{F}$).

$\mathcal{F}^+ =$ haz asociado al prehaz $\mathcal{F}$

Prueba:

· unicidad (ejercicio: usar prop. universal)

· existencia:

- $\mathcal{U} \neq \phi$ abierto de X:

$$\mathcal{F}^+(\mathcal{U}) = \Big\{ s : \mathcal{U} \to \bigsqcup_{x \in \mathcal{U}} \mathcal{F}_x \;\Big|$$

$s(x) \in \mathcal{F}_x$ para todo $x \in \mathcal{U}$, y

(*) para todo $x \in \mathcal{U}$, existe una vecindad $V \subseteq \mathcal{U}$, $x \in V$, y $t \in \mathcal{F}(V)$ tal que $s(y) = t_y$ para todo $y \in V \Big\}$.

- $\mathcal{F}(\phi) = 0$.

Comprobar (3) y (4) para $\mathcal{F}^+$.

$\boxed{\text{Definición:}}$ Dado un morfismo $\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ de haces sobre X, definimos

$\operatorname{Ker} \alpha$, $\operatorname{coKer}(\alpha)$, $\operatorname{Im}(\alpha)$

como los haces asociados a los prehaces

$\{\operatorname{Ker} \alpha(U)\}_{U \in Top(X)}$, $\{\operatorname{coker} \alpha(U)\}_{U \in Top(X)}$

y $\{\operatorname{Im} \alpha(U)\}_{U \in Top(X)}$.

Observación: Ker α es un haz:

- El prehaz $\{\operatorname{Ker} \alpha(U)\}_{U \in Top(X)}$ es un haz.

Observación: $X = \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$

$\mathcal{F}$: haz de funciones C^∞ en X.

Consideremos $\mathcal{G}(U) = \{(g_1, g_2) \in \mathcal{F}(U) \times \mathcal{F}(U) \mid \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}\}$

El prehaz $\mathcal{G}$ es un haz (verificar).

Consideremos el morfismo

$$\varphi : \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \quad \text{definido por}$$

$$U \in \mathrm{Top}X : \quad \varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$$
$$f \longmapsto \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Se tiene: el prehaz $\mathrm{Im}(\varphi) \subseteq \mathcal{G}$.

Más aún, si U es un dominio simplem. conexo se tiene

$$(g_1, g_2) = \varphi_U(f) \iff \frac{\partial g_1}{\partial y} = \frac{\partial g_2}{\partial x}.$$

En consecuencia, para cada $p \in X$

- $\underline{\underline{(\operatorname{Im}\varphi)_x}} = \underline{\underline{\mathcal{G}_x}}$ .... $(**)$

Si $\mathrm{Im}(\varphi)$ fuese un haz, entonces por Prop de p. 9, tendríamos que $\mathrm{Im}\,\varphi$ y $\mathcal{G}$ tienen las mismas secciones.

Sin embargo, la sección global

$$\left(-\frac{y}{x^2+y^2}, \frac{x}{x^2+y^2}\right) \in \mathcal{G}(X)$$

no tiene potencial global (en X).

$\therefore$ $\mathrm{Im}(\varphi)$ No es un haz.

- **Obs:** $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$ haces.

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ inyectiva $\Longleftrightarrow$ $\alpha_x : \mathcal{F}_x \to \mathcal{G}_x$

es inyectiva para todo $x \in X$.

Cuidado: lo mismo no ocurre para sobreyectividad:

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$

- **Obs:** α es sobreyectiva si para todo $t_x \in \mathcal{G}_x$

existe un abierto U de x y una sección

$s \in \mathcal{F}(U)$ tal que:

$$\left(\alpha(U)(s)\right)_x = t_x .$$

Ejm:

$X = \mathbb{C} - \{0\}$.

$\mathcal{F}$: haz de funciones holo. en X

$\mathcal{G}$: haz de funciones holom. inv. en X.

$\alpha : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$

$\alpha(U)(f) = \exp(f)$. para todo abierto $U \subseteq X$.

Notar: α sobreyectiva

pero

$\alpha(X): \mathcal{F}(X) \to \mathcal{G}(X)$ no es sobreyectiva, por ejm.

$f(z) = z \in \mathcal{G}(X)$ no está en im de $\alpha(X)$.

(z no es la exponencial de una función holomorfa).