Algebra conmutativa. Clase 20.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

28 de noviembre de 2020

Definición:

Sea B un anillo, $A \subseteq B$ subanillo.
($1 \in A$)

Decimos $x \in B$ es integral sobre A si x es raíz de un polinomio mónico con coef. en A, es decir x satisface

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0 \quad , \quad a_i \in A.$$

Obs: $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Q}$

Si $x = \frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$, $(r, s) = 1$, es integral sobre $\mathbb{Z}$.

Entonces $r^n + a_1 r^{n-1} s + \dots + s^n = 0$

$\Rightarrow s$ divide a r^n $\Rightarrow s = \pm 1 \Rightarrow x \in \mathbb{Z}$.

Proposición: Las sgtes. propiedades son equiv.

(i) $x \in B$ integral sobre A.

(ii) $A[x]$ A-mod. finit. generado.

(iii) $A[x]$ está contenido en un subanillo $C \leq B$ tal que C es un A-mod. finitam. generado.

(iv) Existe un $A[x]$-módulo fiel M el cual es finitam. generado como A-módulo.

Prueba:

(i) $\Rightarrow$ (ii) Dado que x es integral sobre A se tiene

$$x^n = -(a_1 x^{n-1} + \dots + a_n)$$

$$\Rightarrow \quad x^{n+r} = -(a_1 x^{n+r-1} + \dots + a_n x^r)$$

$\forall r \geq 0$

Por inducción, todas las potencias positivas de x están en el A-mod. generado por $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$.

$\therefore$ $A[x]$ es un A-mod. gen por $1, x, \dots, x^{n-1}$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Basta tomar $C = A[x]$.

(iii) $\Rightarrow$ (iv) Basta tomar $M = C$, pues

C es un $A[x]$-mod. fiel.

(pues $y \cdot C = 0 \Rightarrow y \cdot 1 = 0$)

pues $1 \in C$

(iv) $\Rightarrow$ (i) Consideremos $\phi : M \to M$, $\phi(m) = x \cdot m$.

– mult. por x. –

Sea $I = A$

Notar $xM \subseteq M$ pues M es $A[x]$-mod.

Recordar: Sea M A mod. finitam. generado.

$I \subseteq A$ ideal

(*) si $\phi : M \to M$ A-mod hom.

$\phi(M) \subseteq I \cdot M$

entonces

ϕ satisface una ecuación de la forma

$$\phi^n + a_1 \phi^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

donde $a_i \in I$.

Prueba: ver item 2.4 Atiyah-McDonald

Usando (*) y el hecho de que M es fiel como $A[x]$-módulo obtenemos

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_n = 0,$$

para ciertos $a_i \in A$.

Corolario 1

Sean $x_1, \dots, x_n \in B$, x_i integrales sobre A.
$1 \leq i \leq n$

Entonces el anillo

$A[x_1, \dots, x_n]$ es un A-mod.

finitamente generado.

Prueba: Procedemos por inducción sobre n.

- $n = 1$ es cierto por Prop. anterior.
- Asumamos $n > 1$.

Sea $A_r = A[x_1, \dots, x_r]$

Por inducción

A_{n-1} es A-mod. finitam. gen. (*)

$A_n = A_{n-1}[x_n]$

(**) Sabemos A_n es finit. gen. como A_{n-1}-mod. (caso $n=1$ dado que x_n es integral sobre A_{n-1})

$$\begin{array}{c} A_n \\ \big| \text{ f.g.} \\ A_{n-1} \\ \big| \text{ f.g.} \\ A \end{array}$$

De (*) y (**) se tiene que A_n es un A-mod finitam. generado.

Corolario 2:

Sea $C = \{x \in B \mid x$ es integral sobre $A\}$.

Entonces

C es un subanillo de B que contiene a A.

Obs: C se denomina la clausura integral de A en B.

- si $C = A$ entonces A es integralmente cerrado en B.
- si $C = B$ entonces B es integral sobre A.

Prueba:

Sean $x, y \in C$.

Entonces

$A[x,y]$ es un A-mod. finitam.-generado (por Corolario 1).

Como

$A[x+y] \subseteq A[x,y]$

$A[x-y] \subseteq A[x,y]$

$A[x \cdot y] \subseteq A[x,y]$

en virtud del item (iii) de la Proposición inicial

se tiene $x+y$, $x-y$, $x \cdot y$ son integrales sobre A ∎

Observación:

Sea $f: A \to B$ un hom. de anillos, de modo que B es A-alg.

Decimos que f es integral, y que B es una A-alg. integral, si B es integral sobre el subanillo $f(A)$.

En este contexto,

$$\begin{matrix} \text{algebra tipo finito} \\ + \\ \text{integral} \end{matrix} \Rightarrow \text{finita.}$$

Proposición:

Sean $\boxed{A \subseteq B \subseteq C}$ anillos.

Supongamos
$$\left\{\begin{array}{l}\text{(i) } A \text{ es Noetheriano,} \\ \text{(ii) } C \text{ es una } A\text{-alg. finitam. generada} \\ \text{(iii) } C \text{ es un } \left\{\begin{array}{l}B\text{-mód. finitam. generado} \\ \text{ó} \\ C \text{ integral sobre } B.\end{array}\right.\end{array}\right.$$

Entonces

B es una A-alg. finitam. generada.

Prueba:

En este contexto, las propiedades en el ítem (iii) son equivalentes.

Usaremos en (iii) C B-mod. finit. generado.

Sean $x_1, \ldots, x_m$ generadores de C como A-alg.

y sean $y_1, \ldots, y_n$ generadores de C como B-mód.

Tenemos así:

$$\begin{cases} x_i = \sum_j b_{ij} y_j \quad (b_{ij} \in B) & \ldots (1) \\ y_i y_j = \sum_k b_{ijk} y_k \quad (b_{ijk} \in B) & \ldots (2) \end{cases}$$

Sea B_0 A-alg. generado por b_{ij} y los b_{ijk}.

Como A es Noetheriano (por cond (i)), entonces B_0 también.

Tenemos así $\boxed{A \subseteq B_0 \subseteq B}$.

Recordar: todo elem. de C es un pol. en los x_i con coef. en A. (por (ii))

Usando (1) y (2) obtenemos:

todo elem. de C es una combinación lineal de los y_j con coef. en B_0.

$\Rightarrow$ C es un B_0-mod. finitam. generado.

Luego, como B_0 es Noetheriano, y B es un submódulo de C, entonces

$\longrightarrow$ B es un B_0-módulo finit. generado.

Dado que además B_0 es una A-alg. finitam. generada, entonces

B es una A-álg. finitam. generada. ∎

Proposición: Sea K un cuerpo.

E K-alg. finitam. generada.

Si E es un cuerpo entonces E es una extensión algebraica finita de K.

Tomar $E = A/\mathfrak{m}$ y aplicar prop.

Corolario: Sea K cuerpo. Sea A una K-alg. finitam. generada. Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de A. Entonces el cuerpo $A/\mathfrak{m}$ es una extensión algebraica finita de K. En particular, si K es algebraicamente cerrado, entonces $A/\mathfrak{m} \cong K$.

Prueba de la prop:

Sea $E = K[x_1, \ldots, x_n]$. Si E no es algebraico sobre K, entonces podemos reenumerar los x_i de modo que $x_1, \ldots, x_r$ son algebraicam. indep. sobre K, con $r \geq 1$, y cada $x_{r+1}, \ldots, x_n$ es algebraico sobre el cuerpo $\boxed{F = K(x_1, \ldots, x_r).}$ $(*)$

Así, E es una extensión algebraica finita de F y por tanto E finitam. generado como F-módulo.

Aplicamos la prop. anterior a

$$K \subseteq F \subseteq E.$$

$\Rightarrow F$ es una K-álg. finitam. generada.

$$F = K[y_1, \dots, y_s].$$

Cada $y_j = \dfrac{f_j}{g_j}$ donde f_j, g_j son polinomios en las x_i's. $i = 1, \dots, r$

Notar que hay un número infinito de polinomios irreducibles en $K[x_1, \ldots, x_r]$.

Luego, existe un polinomio irreducible h el cual es coprimo con cada uno de los g_j's. (bastaría tomar $h = g_1 \cdots g_s + 1$), de modo que $h^{-1} \in F$ no es un polinomio en los y_j's. Esto es una contradicción.

Luego, E es algebraico sobre K, y por tanto, finito algebraico.

Obs: Corolario anterior se suele denominar versión débil del Nullstellensatz de Hilbert.