Algebra conmutativa. Clase 6.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

19 de septiembre de 2020

Definición: (contracción / extensión)

Sea $\varphi: R \to R'$ un homomorfismo de anillos.

(a) Dado $I \subseteq R'$ ideal, la imagen inversa $\varphi^{-1}(I)$ es un ideal de R. Denominamos $\varphi^{-1}(I)$: la imagen inversa o contracción de I por φ.

Notación: $I^c = \varphi^{-1}(I)$

(b) Dado $I \subseteq R$, el ideal de R' generado por la imagen $\varphi(I)$ se denomina la extensión de I por φ. Notación: $I^e := \varphi(I).R'$

<u>Propiedades</u> : Sea $\varphi : R \to R'$ homomorfismo.

se tiene (verificar!)

(a) $I \subset (I^e)^c$ para todo $I \subseteq R$ ideal.

(b) $I \supset (I^c)^e$ para todo $I \subseteq R'$ ideal.

(c) $(IJ)^e = I^e J^e$, para cualesquiera ideales $I, J \subseteq R$.

(d) $(I \cap J)^c = I^c \cap J^c$ $\forall\ I, J \subseteq R'$ ideales.

Recordar:

Sea I un ideal de R.

La contracción y extensión de ideales vía el homomorfismo cociente $\boxed{\varphi: R \to R/I}$ determina una correspondencia 1-1:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ideales de} \\ R/I \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \text{ideales } J \text{ de } R \\ \text{con } J \supset I \end{array} \right\}$$

$$J \longmapsto J^c$$

$$J^e \longleftarrow J$$

Sea R un anillo conmut.

$S \subseteq R$ cjto. multiplicativo.

Proposición: (ideales en localización)

Consideremos $\varphi : R \to S^{-1}R$, $a \longmapsto \frac{a}{1}$ el homomorfismo natural y extensión/contracción con respecto de φ. Se tiene:

(a) Si $I \subseteq R$ ideal se tiene

$$\to \quad I^e = \left\{ \frac{a}{s} : a \in I, s \in S \right\}.$$

(b) Si $I \subseteq S^{-1}R$ ideal, entonces

$$(I^c)^e = I.$$

$(\subseteq)$ ✓

(c) Contracción y extensión via φ definen una correspondencia 1-1:

$$\left\{ \begin{matrix} \text{ideales primos} \\ \text{en } S^{-1}R \end{matrix} \right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{matrix} \text{Ideales primos } I \subseteq R \\ \text{tales que } I \cap S = \phi \end{matrix} \right\}$$

$$I \longmapsto I^c$$

$$I^e \longleftarrow I$$

Prueba:

(a) Como $\frac{1}{s} \in S^{-1}R$, para $s \in S$, entonces el ideal I^e generado por $\varphi(I)$ contiene a los elem. $\frac{1}{s}\varphi(a) = \frac{a}{s}$, $a \in I$.

Notemos además

$\left\{ \frac{a}{s} : a \in I, s \in S \right\}$ ← ideal de $S^{-1}R$

$\Rightarrow I^e = S^{-1}R$.

(b) Sea $I \subseteq S^{-1}R$

se sabe $(I^c)^e \subseteq I$ ✓

Basta mostrar $(I^c)^e \supseteq I$.

Sea $\frac{a}{s} \in I$. Entonces $a \in \varphi^{-1}(I) = I^c$

pues $\varphi(a) = \frac{a}{1} = s \cdot \frac{a}{s} \in I$.

Ahora aplicamos (a) al ideal I^c

$$\Rightarrow \quad \frac{a}{s} \in (I^c)^e .$$

$$R \xrightarrow{\varphi} S^{-1}R$$

$$I$$

(c) verifiquemos primero lo sgte:

La asignación $\underset{\text{primo}}{I \subseteq} S^{-1}R \longmapsto I^c \subseteq R$

$$\boxed{I \cap S = \phi}$$

está bien definida:

Si I ideal primo $S^{-1}R \Rightarrow I^c$ es ideal primo de R. Es más $I^c \cap S = \phi$ pues los elem. de S son enviados a unidades en $S^{-1}R$ vía φ, e I no puede contener unidades.

La corresp. $\underset{\substack{\text{ideal primo}\\ I\cap S=\phi}}{I\subseteq R} \longmapsto \underset{\text{ideal primo}}{I^e}$.

está bien definida:

$I\subseteq R$ ideal primo, $I\cap S=\phi$.

sean $\frac{a}{s}, \frac{b}{t} \in S^{-1}R$ tal que $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t}\in I^e$.

por (a) $\frac{a}{s}\cdot\frac{b}{t} = \frac{c}{u}$ donde $c\in I$, $u\in S$.

$\underset{\text{def. localiz.}}{\Longrightarrow}$ $\exists\, v\in S$, $v(abu-cst)=0$.

$\Rightarrow vabu \in I$.

Como I es primo, al menos uno de v, a, b, u es elem. de I.

$u, v \in S$ y $I \cap S = \phi$

$\Rightarrow$ $a \in I$ ó $b \in I$.

$\Rightarrow$ $\frac{a}{s} \in I^e$ ó $\frac{b}{t} \in I^e$. (por (a))

Ahora:

- $(I^c)^e = I$ para todo ideal primo de I de $S^{-1}R$ (por (b))

• $(I^e)^c = I$ para todo ideal primo I de R con la prop. $I \cap S = \phi$.

Solo basta mostrar $(I^e)^c \subset I$.

Así, sea $a \in (I^e)^c \Rightarrow \varphi(a) = \frac{a}{1} \in I^e$.

$\underset{\text{por (a)}}{\Rightarrow} \quad \frac{a}{1} = \frac{b}{s}$, para algún $b \in I$, $s \in S$

$\Rightarrow \exists\, u \in S : \quad u(as - b) = 0 \Rightarrow uas \in I$.

$\Rightarrow$ al menos uno entre u, a, s está en I (I ideal primo)

$$I \cap S = \emptyset\ , \quad u \notin I, \quad s \notin I$$

$\Rightarrow a \in I$. //

Obs: $\varphi : R \to S^{-1}R$ hom. canónico

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(S^{-1}R) \longrightarrow \mathrm{Spec}(R)$$

$\mathrm{Spec}(\varphi)$ establece un homeom. $\mathrm{Spec}(S^{-1}R)$ con el subej. de $\mathrm{Spec}\, R$

$$\operatorname{Spec}(S^{-1}R) \xrightarrow{\sim} \underbrace{\left\{ \begin{array}{l} \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \\ \mathfrak{p} \cap S = \phi \end{array} \right\}}_{\text{subconj. de } \operatorname{Spec}(R).}$$

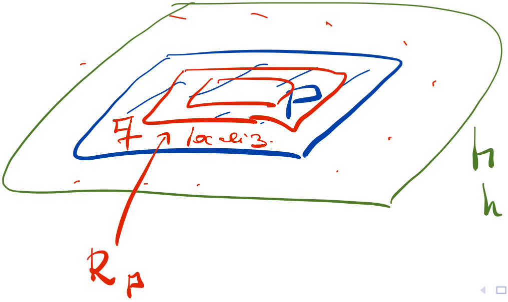
En particular, $f \in R$, $S = \{ f^n \mid n \geq 0 \}$

$$\operatorname{Spec}(\underset{\substack{\uparrow \\ R \text{ localiz.} \\ \text{en } S}}{R_f}) \underset{\text{homeo}}{\xrightarrow{\sim}} \underbrace{\left\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid f \notin \mathfrak{p} \right\}}_{D(f) = \operatorname{Spec} R \setminus V(f)}.$$

(abierto principal)

$\therefore$ Spec(R) unión de abiertos afines.

$$\mathrm{Spec}(R) = \bigcup_{f \in R} \underbrace{D(f)}_{\text{afines también.}}$$



$\mathfrak{h}$ ideal

$\mathfrak{h}$ primo

$\mathfrak{h} \geq \mathfrak{p} \longleftrightarrow R/\mathfrak{p}$.

Ejemplo / Obs:

Si aplicamos la prop. anterior a la localiz. de R en un ideal primo $\mathfrak{p}$ obtenemos:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ideales primos} \\ \text{de } R_{\mathfrak{p}} \end{array} \right\} \overset{1:1}{\underset{(*)}{\longleftrightarrow}} \left\{ \begin{array}{l} \text{ideales primos } I \subseteq R \\ \text{con } I \subseteq \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

Contrastar este hecho con el sgte:

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{ideales primos} \\ \text{de } R/\mathfrak{p} \end{array} \right\} \underset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{ \begin{array}{l} \text{ideales primos } I \subseteq R \\ \text{tales que } I \supseteq \mathfrak{p} \end{array} \right\}$$

De $(*)$ se concluye también que

$R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local

con único ideal maximal

$$\mathfrak{m} = \underbrace{\mathfrak{p} R_{\mathfrak{p}}}_{\mathfrak{p}^e} = \left\{ \frac{a}{s}, \quad a \in \mathfrak{p},\ s \in S \right\}$$

Obs: (anillos de funciones locales en una variedad son anillos locales)

Si $R = A(X)$ anillo de coord de una variedad $X \subseteq (K)^n$ $K = \overline{K}$.

y sea $P = I(a)$ el ideal maximal que corresponde al punto $a \in X$.

$\Rightarrow R_P$ = anillo de funciones locales de X alrededor de a.

$$= \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; \begin{array}{c} f, g \in A(X) \\ g(a) \neq 0 \\ g(a) \notin I(a) \end{array} \right\}.$$

f/g def. en un abierto que contiene a a.

R anillo.

Definición (localización de módulos)

Sea S un cjto. mult. de un anillo R.

Sea M un R-mod. Definimos:

$(m, s) \sim (m', s') \iff$ existe $u \in S$ tal que $u(s'm - sm') = 0$

Entonces:

$\sim$: rel. de equivalencia en $M \times S$.

Denotamos la clase de equiv. de $(m, s) \in M \times S$ por $\frac{m}{s}$.

El conjunto de clases de equivalencia

$$S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{s} : m \in M,\ s \in S \right\}$$

se denomina la localización de M en S.

$S^{-1}M$ es un $S^{-1}R$-modulo:

- $$\frac{m}{s} + \frac{m'}{s'} := \frac{s'm + sm'}{ss'}$$
- $$\frac{a}{s} \cdot \frac{m'}{s'} = \frac{am'}{s \cdot s'}$$

$\forall\ a \in R,\ m, m' \in M,\ s, s' \in S.$

Obs:

Cuando $S = R \setminus \mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}$: $\overset{\text{ideal}}{\text{primo}}$ de R

$S^{-1}M$ se denota $M_{\mathfrak{p}}$.

- Recordar:

$f: M \to N$ homomorfismo de R-mod.

$$\Rightarrow \quad M/\mathrm{Ker}(f) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Im}(f)$$

submódulo.

$\mathrm{Ker}(f) = \{x \in M \mid f(x) = 0\}$ $\qquad$ $\mathrm{Im}(f) \subseteq N$

Definición: (sucesiones exactas)

R anillo

una sucesión de R-módulos

$$M_1 \xrightarrow{\varphi_1} M_2 \xrightarrow{\varphi_2} \cdots \xrightarrow{\varphi_{n-1}} M_n$$

se denomina: ① exacta en la posición i

si $\operatorname{Im} \varphi_{i-1} = \operatorname{Ker} \varphi_i$

② exacta si es exacta en toda posición i.

Ejemplo:

(a) una sucesión $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N$ es exacta si y sólo si $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$

i.e. φ inyectivo.

(b) una sucesión $M \xrightarrow{\varphi} N \longrightarrow 0$ exacta si y sólo si $\operatorname{Im}\varphi = N$

i.e. φ sobreyectiva.

(c) $\underbrace{0 \to M \to 0}$ exacta si y sólo si $\underline{M = 0}$

(d) $0 \to M \xrightarrow{\varphi} N \to 0$ exacta

si y sólo si φ inyectiva y sobreyectiva (en virtud de (a) y (b))

i.e φ isomorfismo.

Ejm (sucesiones exactas cortas)

Una sucesión exacta de la forma

$$0 \to M_1 \xrightarrow{\varphi} M_2 \xrightarrow{\psi} M_3 \to 0$$

se denomina sucesión exacta corta.

en este caso → (φ iny. y ψ sobrey. $\wedge$ $\operatorname{Im}\varphi = \operatorname{Ker}\psi$).

Hay 2 casos especiales:

(i) Para cualquier homomorfismo

$\psi : M \to N$ de R-mod.

la sucesión

$$0 \to \ker \psi \xrightarrow{\text{inclusión}} \underline{\underline{M}} \xrightarrow{\psi} \underline{\underline{\operatorname{im}\psi}} \to 0$$

es exacta (corta).

(ii) Para cualquier submódulo N de un R-mod M se tiene:

$$0 \to N \xrightarrow{inc} M \xrightarrow[\text{proy. al cociente}]{\pi} M/N \to 0$$

exacta <u>corta</u>.

Lema (Snake lemma)

Sea

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' &
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmut. de R-módulos con filas exactas. Entonces existe una sucesión exacta larga:

$$(*) \quad \operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \to M'/\operatorname{Im}\alpha \to N'/\operatorname{Im}\beta \to P'/\operatorname{Im}\gamma .$$

Más aún:

- si φ inyectiva, entonces en (*)

$$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \quad \text{inyectiva.}$$

- si ψ' es sobreyectiva, entonces en (*) el homomorf.

$$N'/\operatorname{Im}\beta \to P'/\operatorname{Im}\gamma$$

también es sobrey.

Prueba: Ejercicio.