Algebra conmutativa. Clase 26.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

17 de diciembre de 2020

Lema / Corolario:

Si R anillo local Noetheriano con ideal maximal $\mathfrak{m}$ y cuerpo residual k, entonces

$$\dim R \leq \dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \right).$$

Prueba:

Sea $e = \dim_k \left(\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 \right)$.

Por Nakayama, tenemos que $\mathfrak{m}$ está generado por e

elementos.

Luego, por el Corolario al Teorema de ideal principal de Krull,

$$\dim R = ht(m) \leq e .$$

de gen. de m.

Lema:

Sea A un anillo Noetheriano, $f \in A$.

Entonces para toda cadena de ideales primos

$$P_0 \subsetneq P_1 \subsetneq \dots \subsetneq P_n \quad \text{de } A$$

tal que $f \in P_n$ y $n \geq 1$,

existe una cadena de ideales primos

$$q_1 \subsetneq \dots \subsetneq q_n \quad \text{con } q_n = P_n$$

y $f \in q_1$.

Prueba:

Procedemos por inducción en n.

Si $n=1$, el resultado es claro.

Supongamos $n \geq 2$. Podemos asumir $f \notin \mathfrak{p}_{n-1}$

(de lo contrario, aplicamos hip. inductiva a la sucesión $\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_{n-1}$).

Sea $\mathfrak{q}_{n-1}$ ideal primo minimal con la propiedad

$$\mathfrak{q}_{n-1} \supseteq \mathfrak{p}_{n-2} + fA \quad \text{y} \quad \mathfrak{q}_{n-1} \subseteq \mathfrak{p}_n .$$

Así, se tiene

$$\mathfrak{p}_{n-2} \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1}.$$

Aplicando la hip. inductiva a la sucesión

$$\underbrace{\mathfrak{p}_0, \dots, \mathfrak{p}_{n-2}, \mathfrak{q}_{n-1}}$$

obtenemos una cadena de ideales

$$\mathfrak{q}_1 \subsetneq \mathfrak{q}_2 \subsetneq \dots \subsetneq \mathfrak{q}_{n-1} \quad \text{con } f \in \mathfrak{q}_1.$$

Por otro lado, por el T. de Krull (de ideal principal) la imagen de $\mathfrak{q}_{n-1}$ en $A/\mathfrak{p}_{n-2}$ tiene altura 1 mientras que P_n tiene altura al menos 2 (por hipótesis). Por tanto,

$$q_{n-1} \subsetneq \underline{P_n}.$$

Así, obtenemos la cadena pedida.

Teorema:

Sea (R, m) Noetheriano anillo local. Sea $f \in m$.

Entonces $\dim (R/fR) \geq \dim R - 1$.

Más aún, la igualdad se cumple si f no está contenido en ningún ideal primo minimal de R.

Prueba: Para cualquier cadena de ideales primos

$$P_0 \subsetneq \dots \subsetneq P_n$$ de R, con $P_n = m$,

tenemos $f \in P_n$. Por tanto, existe (en virtud del lema anterior) una cadena de ideales primos $q_1 \subsetneq q_2 \subsetneq \dots \subsetneq q_n$ con $q_n = P_n$

y $f \in q_1$.

Las imágenes de los q_i en R/fR forman una cadena de ideales primos de longitud $n-1$, por tanto, se tiene $\dim(R/fR) \geq n-1$.

Dicho de otro modo,

$$\dim(R/fR) \geq \dim R - 1.$$

- Supongamos además f no está contenido en ningún ideal primo minimal de R. Para cualquier ideal primo $\mathfrak{p}$, minimal con respecto de la prop. de contener a f, se tiene $ht(\mathfrak{p}) = 1$ (por el

T. de Krull). En efecto $ht(p) \neq 0$ pues de lo contrario p sería primo minimal de R.

En consecuencia,

$$\dim\left(R/fR\right) \leq \dim R - 1$$

Luego $\dim\left(R/fR\right) = \dim R - 1$ en este caso (por la primera parte).

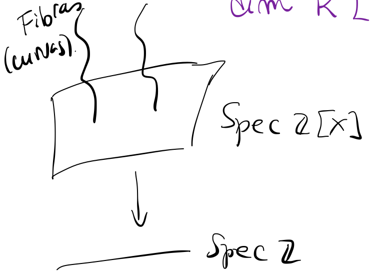
Objetivo: Mostrar lo sgte.

Si R anillo Noetheriano, entonces

$$\dim R[x_1, \ldots, x_n] = \dim R + n.$$

(esto generaliza la propiedad

$$\dim K[x_1, \ldots x_n] = n, \text{ con } K \text{ cuerpo})$$



Lema: Sea R un anillo Noetheriano.
Sea M un ideal maximal de R.
Sea N un ideal maximal de $R[x_1, \ldots, x_n]$
tal que $N \cap R = M$.
Entonces $ht(N) = ht(M) + n$.

Prueba:
Notar $R[x_1, \ldots, x_n]/N$ es una extensión finita de R/M.

Si $N_1 = N \cap R[x_1, \ldots, x_{n-1}]$

entonces

$R[x_1, \ldots, x_{n-1}]/N_1$ es una sub-(R/M)-alg.

de $R[x_1, \ldots, x_n]/N$ y por tanto es

un cuerpo. Luego N_1 maximal.

Así, es suficiente probar el lema cuando $n = 1$.

Sea $P_0 \subsetneq \cdots \subsetneq P_r \subseteq M$ una cadena de ideales

primos de R.

Entonces

los $P_i R[x]$ forman una cadena de ideales primos de $R[x]$.

Más aún, $P_r R[x] \subsetneq N$ pues

$$R[x] / P_r R[x]$$ no es un cuerpo.

Por tanto, $ht(N) \geq ht(M) + 1 \quad \ldots (1)$

Para mostrar la igualdad procedemos por inducción en $ht(M)$.

- Si $ht(M) = 0$, entonces M es primo minimal de R, y por tanto cualquier ideal primo de $R[X]$ contenido en N debe contener a M.

  Luego $ht(N) = ht(\bar{N}) = 1$ donde $\bar{N}$ es la imagen de N en $R/_M[T]$.

- Supongamos $ht(M) \geq 1$.

  Como R tiene un número finito de ideales primos minimales (ellos corresp. a las comp. irreducibles de $\operatorname{Spec} R$ y R Noeth.), y M no está contenido en ninguno de ellos, existe $f \in M$ y que no pertenece a ninguno de los ideales primos minimales de R.

Sea $S = R/fR$ y denotemos por N' la imagen de N en $S[x]$. Tenemos así

$$\mathrm{ht}(N) = \dim R[x]_N \leq \dim R[x]_N/(f) + 1$$

$$= \dim S[x]_{N'} + 1 = \mathrm{ht}(N') + 1$$

Sea M' la imagen de M en S.

Entonces $ht(M') = \dim S_{M'} = \dim \frac{R_M}{(f)}$

$$= ht(M) - 1.$$

La hipótesis inductiva implica

$$ht(N') \leq ht(M') + 1.$$

En consecuencia, obtenemos $ht(N) \leq ht(M) + 1 \ldots (2)$

$\therefore$ De (1) y (2), concluimos $ht(M) + 1 = ht(N)$.

Corolario: Sea R un anillo Noetheriano. Entonces

$$\dim R[x_1, \ldots, x_n] = \dim R + n.$$

∎

Obs: Si R no es Noetheriano, se tiene en general

$$\dim R[x] \geq \dim R + 1$$ (usando el arg. dado arriba).

- ver [Liu] p. 73 y las referencias dadas ahí.

k ; cuerpo.

Lema: (*) Sea R una k-alg. finita generada. Supongamos R es un dominio (i.e. R = anillo de coord. de una variedad algebraica irreducible). Sea $\mathfrak{p} \subseteq R$ ideal primo con $ht(\mathfrak{p}) = 1$.

Entonces

$$\dim\left(R/\mathfrak{p}\right) = \dim R - 1.$$

Proposición:

Sea R una K-alg. finitam. generada. Supongamos R dominio integral. Sea p un ideal primo de R.

Entonces:

(a) $\boxed{ht(p) + \dim R/p = \dim R}$

(b) si p maximal entonces $\dim R = \dim R_p$.

Prueba:

(a) Argumentamos por inducción en $ht(p)$.

Si $ht(p) = 0$, el resultado es cierto.
(pues $ht(p)=0 \Rightarrow p$ minimal de R y como R es dominio $p=(0)$).

Si $ht(p) \geq 1$, entonces consideremos

$$0 = p_0 \subsetneq p_1 \subsetneq \cdots \subsetneq p_d = p$$

con $d = ht(p)$.

Se sigue p/p_1 es un ideal de $\boxed{R/p_1}$ de altura $ht(p) - 1$.

Aplicamos la hip. inductiva a $\mathfrak{p}/\mathfrak{p}_1$ y obtenemos

$$\left(ht(\mathfrak{p})-1\right)+\dim R/\mathfrak{p} = \dim\left(R/\mathfrak{p}_1\right).$$

Además, por el lema anterior (con $\mathfrak{p}_1 \subseteq R$)

obtenemos

$$\left(ht(\mathfrak{p})-1\right)+\dim\left(R/\mathfrak{p}\right) = \dim R - 1$$

$$\Rightarrow \dim R = \dim\left(R/\mathfrak{p}\right) + ht(\mathfrak{p}).$$

(b) Como p es maximal

$$\dim \underbrace{\left(R/p\right)}_{\text{cuerpo}} = 0$$

Por (a) se tiene

$$\dim R_p = ht(p) = \dim R \qquad \blacksquare$$

Obs:

Sea X una variedad alg. irreducible, el resultado anterior nos dice lo sgte:

(a) $Y \subseteq X$ subv. irreducible entonces

$$\dim Y + \operatorname{codim} Y = \dim X$$

$$\dim(R/P) + \operatorname{ht}(P) = \dim R$$

donde $R = A(X)$ anillo de coord de X

$P = I(Y) \leftarrow$ ideal de Y en $A(X)$.

sea x un punto cerrado de X $\longleftrightarrow$ P_x ideal maximal de $A(X)$.

(b) $\dim X = \dim_x X$

dimensión local en puntos cerrados.

(c) Sea X var. alg. irreducible. $f \in A(X)$, $f \neq 0$.

Entonces toda componente irreducible de $V(f)$ es de dimensión $\dim X - 1$.

Lema:

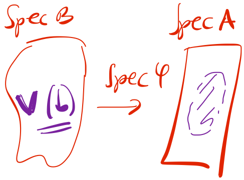
Sea $\varphi: A \to B$ un hom. de anillos, y consideremos $\operatorname{Spec}(\varphi): \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$ el morfismo inducido. Entonces

$\operatorname{Spec}(\varphi)$ es dominante (i.e. imagen es densa en $\operatorname{Spec}(A)$).

si y sólo si

todo elem. de $\operatorname{Ker}(\varphi)$ es nilpotente.

Para ello, recordar lo sgte:



si b ideal de B entonces

$$V(\varphi^{-1}(b)) = \overline{\operatorname{Spec}\varphi\,(V(b))}$$

i.e.

Imagen de $V(b)$ es densa en

$V(\varphi^{-1}(b))$.

Para probar el lema basta tomar $b = 0$.

$$V(\operatorname{Ker}\varphi) = \overline{\operatorname{Spec}\varphi\,(V(0))}$$

Lema: $\varphi: A \to B$ homomorfismo integral.

(B integral sobre A vía φ).

Denotemos por $f: \underbrace{\operatorname{Spec} B}_{X} \to \underbrace{\operatorname{Spec} A}_{Y}$ el morfismo $\operatorname{Spec}\varphi$. (a nivel de esquemas afines).

Si $Z = V(\mathfrak{b}) \subseteq X$ subespacio cerrado (i.e. $\mathfrak{b} \subseteq B$ ideal.)

entonces

$$f(Z) = V(\varphi^{-1}(\mathfrak{b}))$$

En particular, f es cerrada.

Más aún,

(1) $\dim f(Z) = \dim Z$

(2) Si φ inyectiva entonces f es sobrey.

Prueba:

La imagen $f(V(b))$ es densa en $V(\varphi^{-1}(b))$.

Así, reemplazando A por $A/\varphi^{-1}(b)$ y B por B/b

es suficiente mostrar que

f es sobreyectiva y $\dim X = \dim Y$

si φ es integral e inyectiva.

pero esto ya lo hemos probado en

la clase de Going-up. (ver clase 24, página 5).

$$\begin{tikzcd} Y_p \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d, "\pi"] \\ \underline{\operatorname{Spec} k(p)} \arrow[r] & X \end{tikzcd}$$

$p \in \operatorname{Spec} R = X$

$$Y_p = \underbrace{\operatorname{Spec} k(p) \otimes_R Y}_{\text{fibra sobre } p}.$$

top

fibra

$$\begin{tikzcd} Z_y \arrow[r] \arrow[d] & Z \arrow[d, "\pi"] \\ \underline{\{y\}} \arrow[r, hook] & Y \end{tikzcd}$$

Veremos prox. clase: Y_p es topológicam. $\pi^{-1}(p)$

p como punto de X.