Algebra conmutativa. Clase 27.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

18 de diciembre de 2020

Observación:

En el T. de ideal principal de Krull se tiene también lo sgte:

R anillo Noetheriano, f no es divisor de cero, entonces si p primo minimal con respecto a la prop. de contener a f, se tiene $ht(p) = 1$.

- En efecto, si $ht(p) = 0 \Rightarrow p$ primo minimal y por tanto p consiste solamente de divisores de cero, por tanto $f \notin p$. $(\Rightarrow\Leftarrow)$

(*)

Recordar / Ejercicio:

Sea $R \neq \{0\}$. R Noetheriano.

Entonces $\sqrt{0} = \bigcap_{i=1}^{s} P_i$ $\quad P_i$ primos minimales de R

Más aún $\bigcup_{i=1}^{s} P_i \subseteq \{$divisores de cero de $R\}$.

Si R es reducido $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^{s} P_i = \{$divisores de cero de $R\}$.

De manera más general, se tiene lo sgte:

Def: $q \subseteq R$ ideal es primario si q ideal propio de R y se cumple

si $xy \in q \Rightarrow x \in q$ ó $y^n \in q$ para cierto $n > 0$.

Notar:

① q primario $\Longleftrightarrow$ $A/q \neq 0$ $\wedge$ todo divisor de cero en A/q es nilpotente.

② q primario $\Rightarrow \sqrt{q}$ es primo (i.e. $\sqrt{q}$ es el menor ideal primo que contiene a q).

③ R Noetheriano

Todo ideal $I \subseteq R$ admite una descomposición primaria; esto es existen ideales primarios $q_1, \ldots, q_n$ tales que

$$I = \underbrace{q_1 \cap q_2 \cap \ldots \cap q_n}_{\text{descomposición primaria de } I.} \quad \ldots (*)$$

La descomposición $(*)$ se llama <u>minimal</u> si además satisface lo sgte.

(1) $P_i = \sqrt{q_i}$ son todos distintos, $i = 1, \ldots, n$.

(2) $q_i \not\supseteq \bigcap_{j \neq i} q_j \quad (1 \leq i \leq n)$.

Los P_i que aparecen en la descomposición primaria minimal de I se denominan primos que pertenecen a I.

— ver cap. 4 de A-M —

si tomamos $I = 0$, entonces los ideales primos P_i que aparecen en la descomp. primaria minimal de cero satisfacen lo sgte:

$$D = \left\{ \begin{array}{l} \text{divisores de} \\ \text{cero de } R \end{array} \right\} = \bigcup_{i=1}^{r} P_i$$

(p. 53 de AM Prop. 4.7)

Ejm:

- $X = V(\overset{f}{(x^2+y^2-1)}) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ circunf. unitaria.

Sea R = anillo de coord de X $= \mathbb{R}[x,y] / (\underbrace{x^2+y^2-1}_{\text{ideal primo}})$

$$\dim X = \dim R = \dim \mathbb{R}[x,y] - ht(x^2+y^2-1)$$

$$= 2 - 1$$

$$\dim X = 1$$

• Similarm.

$$R = \mathbb{R}[x,y] \big/ (x^2+y^2+1) \quad \text{tiene dimensión } 1$$

$\uparrow$

$\mathrm{Spec}\,\mathbb{R}[x,y]$

$\sim$

$$\mathrm{Spec}(R) \subseteq \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

No es vacío (hay órbitas de Galois)

Notar $V = \underbrace{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2+1 = 0\}}_{\emptyset} \subseteq \mathbb{R}^2$

(geo. clásico)

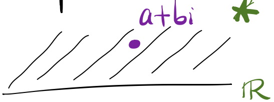
Ejm/ Obs:

$$\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = \mathrm{Spec}(\mathbb{R}[x]) = \{(0)\} \cup \underset{\substack{(x-a)\\ a\in\mathbb{R}}}{\mathbb{R}} \cup \overbrace{\{a+bi \mid a,b\in\mathbb{R},\ b>0\}}^{\substack{(x^2+1)\\ \downarrow \text{ info adic.}}}$$

* los puntos cerrados de $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ están en biyección con las órbitas de Galois de $\mathbb{C} = \overline{\mathbb{R}}$.

- $\dim \mathbb{A}^1_{\mathbb{R}} = 1$

- $\mathbb{A}^1_{\mathbb{R}}$ se puede representar como semiplano superior *



Obs 2: $X = \operatorname{Spec} R$ $\quad$ R k-alg. de tipo finito.

$P \in X$, $\quad P \subseteq R$ ideal primo.

$$k(P) = \frac{R_P}{P_P} = \operatorname{Frac}(R/P)$$

$k(P)$ extensión de k. $\left(k \hookrightarrow k(P) \right)$

P punto cerrado $\iff$ $k(P)$ extensión alg. de k.

Contexto:

Consideremos anillos A, B, R con homomorfismos

$$A \longleftarrow R \longrightarrow B$$

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A \arrow[r] & A \otimes_R B \end{tikzcd}$$

Así, tenemos

$$\underbrace{\operatorname{Spec} A}_{X} \longrightarrow \boxed{\underbrace{\operatorname{Spec} R}_{S}} \longleftarrow \underbrace{\operatorname{Spec} B}_{Y}$$

fiber product.

$$\begin{tikzcd} Z \arrow[r, "q"] \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, phantom, "\square"] & Y \arrow[d] \\ X \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

$$\boxed{Z = \operatorname{Spec}(A \otimes_R B)}$$

Sean

$$p : Z \longrightarrow X$$

$$q : Z \longrightarrow Y$$

los morfismos asociados a los homomorfismos de anillos

$$\alpha : A \longrightarrow A \otimes_R B \ , \quad a \longmapsto a \otimes 1$$

$$\beta : B \longrightarrow A \otimes_R B \ , \quad b \longmapsto 1 \otimes b.$$

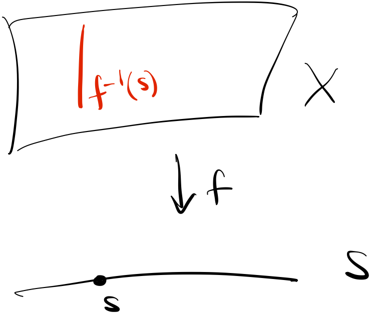
$\Rightarrow$ (Z, p, q) es el producto fibrado de X e Y sobre S en la categoría de esquemas.
(fiber product)

Definición:

Sea $f: X \to S$ un morfismo de esquemas.

Sea $s \in S$ un punto.

Dotamos a la fibra topológica $\boxed{f^{-1}(s)}$ con una estructura de esquema de la sgte. manera:



Sea $\operatorname{Spec} k(s) \longrightarrow S$ el hom. canónico.

(si $S = \operatorname{Spec} R \Rightarrow \operatorname{Spec} k(P) \longrightarrow \operatorname{Spec} R$ es el hom. inducido por

$$R \to R/P \to \underbrace{\operatorname{Frac}(R/P)}_{k(P)}\,)$$

En este contexto, definimos

$$X_s := X \underset{S}{\otimes} k(s)$$

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr, phantom, "\square"] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k(s) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$

- X_s es un $k(s)$-esquema (vía $2^{\underline{a}}$ proyección) topológicamente, X_s es homeomorfo a $f^{-1}(s)$.

X_s además tiene estructura de esquema sobre $K(s)$.

Caso particular:

$\varphi: A \to B$ un homomorfismo integral.

Tenemos así:

$$\begin{array}{ccc} X_p & \longrightarrow & \boxed{\operatorname{Spec} B} \quad X \\ \downarrow & \square & \downarrow f = \operatorname{Spec}(\varphi) \\ \operatorname{Spec} k(p) & \longrightarrow & \boxed{\operatorname{Spec} A} \quad S \end{array}$$

$p \in \operatorname{Spec} A$;

X_p fibra de f sobre $p \in \operatorname{Spec} A = S$

Por definición

$$X_p = \operatorname{Spec}\left(k(p) \otimes_A B \right)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ k(p) \arrow[r] & k(p)\otimes_A B \end{tikzcd}$$

Notar que $k(p) \otimes_A B$ tiene solo un # finito de ideales primos (i.e. la fibra es finita).

En efecto, $k(p) \otimes_A B$ es un $k(p)$ - espacio vect. de dim. finita

Es decir,

$B \otimes_A k(p)$ es un anillo Artiniano.

$\Rightarrow \dim \operatorname{Spec}(B \otimes_A k(p)) = 0$

$\therefore \operatorname{Spec}(B \otimes_A k(p))$ consiste de un # finito de puntos.

$\therefore$

f tiene fibras finitas.

En resumen:

$\varphi : A \to B$ hom. finito

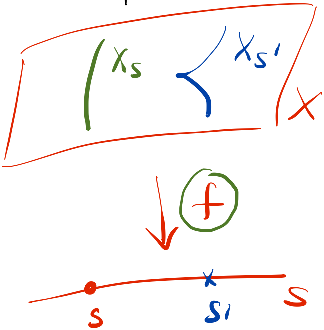
$\Rightarrow f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

tiene fibras finitas.

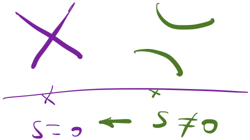
Obs: Sea $f: X \to S$ morfismo de esquemas.

Para cada $s \in S$.

$$\begin{tikzcd} X_s \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] \\ \operatorname{Spec} k(s) \arrow[r] & S \end{tikzcd}$$



En otras palabras, obtenemos una familia X_s de esquemas (sobre cuerpos) param. por los puntos de S.



Ejm: Sea $k = \overline{k}$.

$$X(k) = \{ (u,t,s) \in \mathbb{A}^3(k) \mid ut = s \}.$$

Como $UT - S \in k[U,T,S]$ es irreducible, podemos considerar $X(k)$ como una variedad afín irreducible.

(esquema afín irreducible)

En efecto, tenemos

$$X = \operatorname{Spec}\left(k[u,T,s] / (uT-s) \right)$$

k-esquema integral (de tipo finito).

Consideremos $\boxed{X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k}$ proyección dada en k-puntos por $(u,t,s) \longrightarrow s$.

Por cada punto $s \in \mathbb{A}^1(k)$, la fibra X_s es $\operatorname{Spec} A_s$

donde

$$A_s = K[U,T,S]/(UT-S) \otimes_{K[S]} K[S]/(S-s)$$

$$= K[U,T]/(UT-s)$$

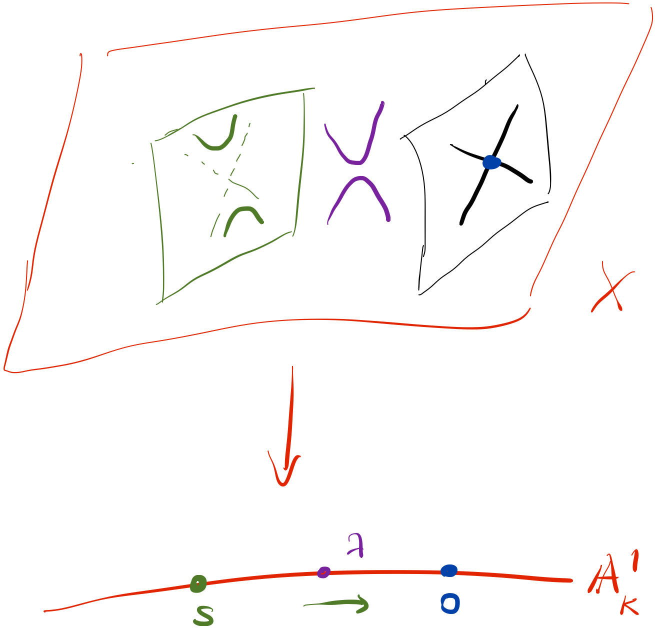
Notemos que $UT-s \in K[U,T]$ es irreducible para $s \neq 0$ y reducible si $s=0$.

Es decir

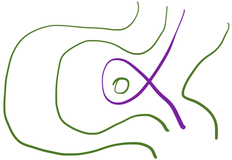
$X \to \mathbb{A}^1$ define una familia de

k-esquemas X_s parametrizados por $s \in \mathbb{A}^1(k)$,

tal que X_0 es reducible y X_s, $s \neq 0$, es irreducible.


X
λ
s
0
$\mathbb{A}^1_k$

Ejm: k cuerpo, $a \in k^\times$,



$$X := V(Y^2 - X^2(X+1) - aZ) \subset \mathbb{A}^3_k .$$

Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{A}^1_k = \operatorname{Spec} k[Z]$

el morfismo correspondiente al hom. canónico

$$k[Z] \longrightarrow k[X,Y,Z] \Big/ (Y^2 - X^2(X+1) - aZ).$$

Sea $\lambda \in \mathbb{A}^1(k) = k$ (pto. cerrado de $\mathbb{A}^1_k$).

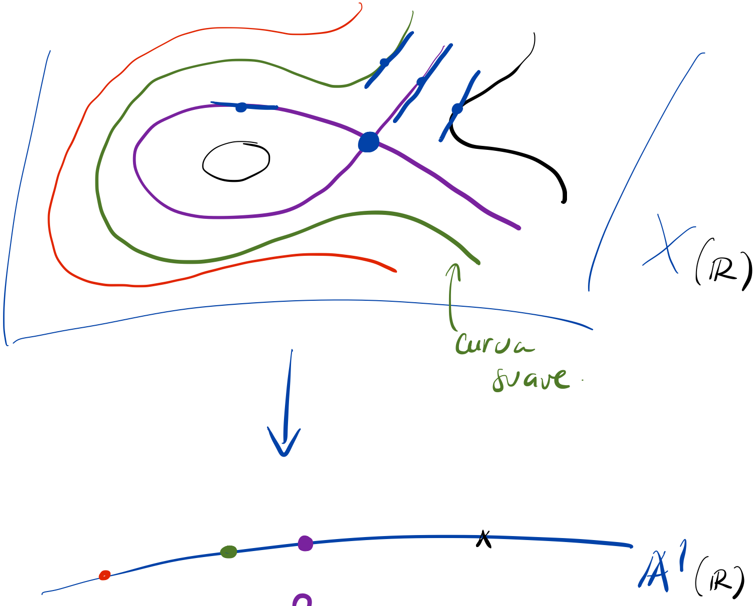
Tenemos así

$$X_\lambda = \operatorname{Spec} A_\lambda \quad \text{donde}$$

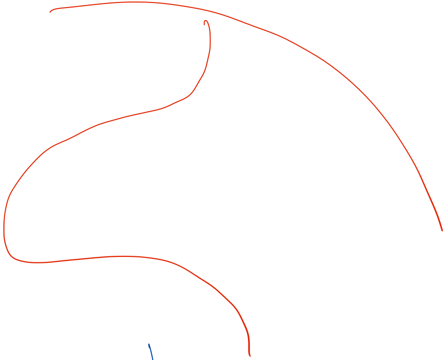
$$A_\lambda = k[x,y] \Big/ \left(y^2 - x^2(x+1) - a\lambda\right)$$

para $\lambda = 0$ obtenemos $X_0 = \operatorname{Spec} k[x,y] \Big/ \left(y^2 - x^2(x+1)\right)$

corresp. a la curva 

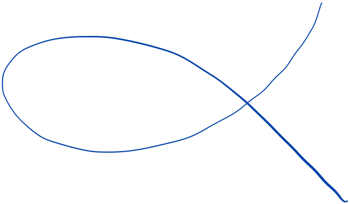


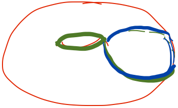
en 0 tenemos fibra singular.



$\mathbb{P}^3$

$\downarrow$ deformar





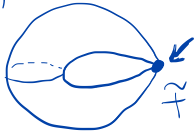
C

Toro.

$H^1(\text{Toro}) = \mathbb{Z}^2$

$\downarrow$

$H^1(\tilde{T}) = \mathbb{Z}$



$\tilde{T}$

esfera de Riemann con $\infty = 0$.

pinched torus