Algebra conmutativa. Clase 2.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

4 de septiembre de 2020

Recordar:

1. Dado R anillo conmutativo

$\mathcal{N} = \{ r \in R \mid r$ nilpotente$\}$ ← Nilradical de R

- $\mathcal{N}$ es un ideal (verificar!)

- $R/\mathcal{N}$ es un anillo reducido (único elem. nilpotente es 0).

(2)

Teorema (Krull):

Todo anillo conmutativo no trivial tiene un ideal maximal.

⌜ Prueba: usar lema Zorn ⌟

Corolario: Sea R un anillo conmutativo. $I \subseteq R$ ideal.

Si I es un ideal propio $\Rightarrow$ existe un ideal maximal $\mathfrak{m}$ tal que $I \subseteq \mathfrak{m}$.

Dado R anillo conmut.

$$\mathrm{Spec}(R) = \{ \mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo} \}.$$

$\uparrow$

Espectro (primo) de R.

Definimos la topología de Zariski en $\mathrm{Spec}(R)$: los cjtos cerrados de $\mathrm{Spec}(R)$ son de la forma

$$V(I) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p} \}$$

donde $I \subseteq R$ ideal.

Ejercicio: Mostrar que en efecto la topología de Zariski en Spec(R) es una topología.

Idea:

- $\phi = V((1)) = V(R)$ ✓ ϕ cerrado

- $\operatorname{Spec}(R) = V(\underline{\underline{(0)}})$. ✓ Spec(R) cerrado.

- Sea $\{I_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ una colección de ideales de R.

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} V(I_\alpha) = \{ p\in \operatorname{Spec}(R) \mid \forall \alpha,\ I_\alpha \subseteq p\} \overset{\checkmark}{=} V\Big(\sum_\alpha I_\alpha\Big)$$

así, intersecciones arbitrarias de cerrados son cerrados.

- $V(I_1) \cup V(I_2) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I_1 \subseteq \mathfrak{p}$ ó $I_2 \subseteq \mathfrak{p} \}$

$$\subseteq V(I_1 \cap I_2)$$

Además si $\boxed{I_1 \cap I_2 \subseteq \mathfrak{p}}$ ✓ $\overset{?}{\Rightarrow} I_1 \subseteq \mathfrak{p}$ ó $I_2 \subseteq \mathfrak{p}$.

En efecto, si $g \in I_2$ y $g \notin \mathfrak{p}$, entonces para todo $f \in I_1 \Rightarrow \underbrace{f \cdot g}_{\in I_1 \cap I_2} \in \mathfrak{p} \Rightarrow f \in \mathfrak{p} \Rightarrow I_1 \subseteq \mathfrak{p}$.

Luego

$$V(I_1) \cup V(I_2) = V(I_1 \cap I_2)$$

Es decir, uniones finitas de cerrados son cerrados.

Ejm: k cuerpo.

$$\mathrm{Spec}(k) = \{*\} = \{(0)\}.$$

Ejm: $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{ \mathfrak{p} \subseteq \mathbb{Z} \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo} \}$

$$= \{(0)\} \cup \{(p) \mid p \text{ primo}\}.$$

$\operatorname{Spec}\mathbb{Z}\ \big(\ \bullet\ \underset{p}{\bullet}\ \bullet\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \quad \underset{(0)}{*}\ \big)$

Notar

$\{(p)\}$ es un cjto cerrado (p : primo).

(i.e. $\overline{\{(p)\}} = \{(p)\}$)

pero

$$\overline{\{(0)\}} = \operatorname{Spec}\mathbb{Z}.$$

Es decir (0) es un punto denso en $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$

i.e. (0) es punto genérico de $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$.

(En este caso, es claro que la top. de Zariski en $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ no es Haussdorff)

Ejm: Similarmente

$$\mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x]) = \{(x-a) \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{(0)\}$$

$$\underset{\text{biy.}}{\longleftrightarrow} \quad \mathbb{C} \cup \{\text{pto. genérico}\}.$$

Obs: Distintos ideales I pueden dar lugar al mismo $V(I)$.

Teorema:

Sea R un anillo.

$$\underbrace{Nil(R)}_{\text{Nilradical de } R} = \bigcap_{\mathfrak{p}:\ \text{ideal primo de } R} \mathfrak{p} \quad \left(= \bigcap_{\mathfrak{p} \in Spec(R)} \mathfrak{p} \right)$$

Para prueba $\longrightarrow$ ver Atiyah-MacDonald.

Corolario:

Sea I un ideal de R.

entonces

$$V(I) = \operatorname{Spec}(R) \iff I \subseteq \operatorname{Nil}(R).$$

Obs:

$$V((0)) = \operatorname{Spec} R = V(\operatorname{Nil}(R))$$

a pesar de que, en general,

(0) y $\operatorname{Nil}(R)$ son distintos.

Corolario: (Ejercicio)

$$R_{red} = R/_{Nil(R)}$$

- Spec(R) homeomorfo a Spec$(R/_{Nil(R)})$

(en otras palabras

$$\mathrm{Spec}(R) \underset{homeo}{\cong} \mathrm{Spec}(R_{red}))$$

Definición:

R anillo

I ideal de R

$$\sqrt{I} = \{ f \in R \mid \exists n > 0,\ f^n \in I \}.$$

$(\mathrm{rad}(I))$

– radical de I –

Obs: • $I \subseteq \sqrt{I}$. $\qquad (\pi : R \to R/I)$

• $\sqrt{I}$ es la imagen inversa en R del nilradical de R/I.

Lema:

$$\sqrt{I} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in V(I)} \mathfrak{p} \qquad \left(V(I) \subseteq \mathrm{Spec}(R) \right)$$

Corolario: Sean I, J dos ideales de R. Entonces

$$V(I) = V(J) \iff \sqrt{I} = \sqrt{J}.$$

$\longrightarrow$

Tenemos así una biyección

$$\left\{\begin{array}{l}\text{ideales}\\ \text{radicales de } R\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{subconj. cerrados}\\ \text{de } \operatorname{Spec}(R)\end{array}\right\}.$$

I radical
si $I = \sqrt{I}$

$$\bigcap_{\mathfrak{p} \in S} \mathfrak{p} \longleftarrow\!\!\shortmid \ S$$

$$I \longmapsto V(I).$$

Obs:

$$\left\{\begin{matrix}\text{Anillos}\\ \text{Conmutativos}\end{matrix}\right\} \xrightarrow{\mathrm{Spec}(-)} \left\{\begin{matrix}\text{Espacios}\\ \text{topológicos}\end{matrix}\right\}$$

Objetos: $R \longmapsto \mathrm{Spec}(R)$

Morfismos:

$f: R \to S$ homomorfismo de anillos $\rightsquigarrow f^{\#}: \mathrm{Spec}(S) \to \mathrm{Spec}(R)$ ← contravariante.

$$\mathfrak{p} \longmapsto f^{-1}(\mathfrak{p})$$

$f^{\#}$ es continua →

$\mathrm{Spec}(f) = f^{\#}$.

Teorema:

Sea $f: A \to B$ un homomorfismo de anillos.

La función inducida

$$\operatorname{Spec} f : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$$

definida por $(\operatorname{Spec} f)(p) = f^{-1}(p)$

es continua. Más aún, si f es sobreyectiva, entonces $\operatorname{Spec} f$ es inyectiva y es un homeomorfismo sobre su imagen.

R anillo , I ideal.

Obs: $\pi : R \to R/I$ (sobre)

proy. canónica

$\underset{\text{Teo}}{\Longrightarrow}$ $\operatorname{Spec} \pi : \operatorname{Spec}(R/I) \hookrightarrow \operatorname{Spec}(R)$.

inmersión

$\Rightarrow$ $\operatorname{Spec}(R/I)$ "subvariedad" $\operatorname{Spec}(R)$.

Esto es análogo a lo sgte:

$R = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$

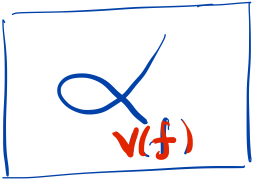
+ Base de Hilbert

$I \subseteq R$ ideal , con $I = (f_1, f_2, \dots, f_k)$

$V(I) = \{ x \in \mathbb{C}^n \mid f_i(x) = 0 \ \forall\, i = 1, \dots, k \}$.

$V(I)$ variedad algebraica $\subseteq \mathbb{C}^n$.

Recordar.



$\mathbb{C}^2$

Anillo de coordenadas de $V(I)$ es

$$A(V(I)) = \mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I.$$

funciones polinomiales en $V(I)$.

Notar: $f - g = k \cdot h$ $\quad f, g$ pol. $\quad h \in I$.

$$f - g\big|_{V(I)} = 0 \Rightarrow f, g \text{ definen mismo func. en } V(I).$$

¿Qué relación hay entre

$$\underbrace{\operatorname{Spec}\big(A(V(I))\big)}_{\operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I\right)} \quad \text{y} \quad V(I) \; ?$$

objeto geom. clásico

— var alg —

$$\operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I\right) \xrightarrow{\text{Teo.}} \left(\mathbb{A}^n_{\mathbb{C}} =\right) \operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]\right) \longleftrightarrow \mathbb{C}^n \longleftarrow V(I)$$

Vamos ver: puntos cerrados $\left(\operatorname{Spec}\left(\mathbb{C}[x_1,\dots,x_n]/I\right)\right) \xleftrightarrow{\text{biy}} V(I)$.

Prueba (del Teorema):

$$A \xrightarrow{f} B$$

$I \subseteq$

(i) Denotemos $g = \operatorname{Spec} f$.

$g : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$

Sea I ideal de A

Debemos mostrar

$g^{-1}(V(I))$ es cerrada

i.e.

$g^{-1}(V(I)) = V(J)$ para algún $J \subseteq B$ ideal.

Sea J la extensión de I en B (vía f).
(pues $f(I)$ no es ideal necesariam.)

Debemos mostrar:

$$\mathfrak{q} \subseteq B \text{ primo } \wedge \ \mathfrak{q} \supseteq J$$

$$\iff g(\mathfrak{q}) \text{ contiene a } I.$$

i.e.

$$J \subseteq \mathfrak{q} \iff I \subseteq f^{-1}\mathfrak{q}.$$

Notar: $J \subseteq \mathfrak{q} \iff \mathfrak{q}$ contiene $f(I)$. ✓

$\therefore$ g continua.

(ii) Si f sobre, entonces g inyectiva. ✓

$A \xrightarrow{f} B = A/\widetilde{I}$ (por T. de Iso.)

I, J

$g : \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec} A$.

pues distintos ideales de B tienen preimágenes distintas en A.

Ejercicio: Mostrar

g lleva cerrados de B en cerrados de A.

— g cerrada —

Definición (Esquema afín)

Un esquema afín es un espacio topológico X tal que X es homeomorfo a $\mathrm{Spec}(A)$ para cierto A.

El anillo de funciones regulares de X se denota por $\mathcal{O}(X)$ y corresponde a A (o cualquier anillo iso a A).