Algebra conmutativa. Clase 24.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

10 de diciembre de 2020

Teorema (Going-up theorem) $B \subseteq A$.

Sea A una extensión integral de B.

Si $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$, entonces existe al menos un $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} A$ tal que $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}$.

Prueba:

Consideremos $S = B \setminus \mathfrak{q}$.

Sabemos que $A[S^{-1}]$ es una extensión integral de $B[S^{-1}]$. Además

$$B_{\mathfrak{q}} = B[S^{-1}] \neq 0$$

Por tanto $A[S^{-1}] \neq 0$.

Por el T. de Krull, $A[S^{-1}]$ tiene al menos un ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq A[S^{-1}]$.

En virtud del último lema (Clase 23) tenemos

$\mathfrak{m} \cap B_{\mathfrak{q}}$ es ideal maximal también. (En $B_{\mathfrak{q}}$: anillo local

$$\mathfrak{m} \cap B_{\mathfrak{q}} = \underbrace{\mathfrak{q} B_{\mathfrak{q}}}_{\text{único ideal max. de } B_{\mathfrak{q}}} \,)$$

Consideremos el pullback $\mathfrak{p}$ de $\mathfrak{m}$ en A.

Se tiene así: $\mathfrak{p} \cap B = \mathfrak{q}$.

Proposición:

Sea $\varphi: A \to B$ un homomorfismo integral.

Sea $\mathfrak{q} \in \operatorname{Spec} B$ y $\mathfrak{p} = \varphi^{-1}(\mathfrak{q}) \in \operatorname{Spec} A$.

Se tiene:

(a) $\operatorname{ht}(\mathfrak{q}) \leq \operatorname{ht}(\mathfrak{p})$. En particular $\dim B \leq \dim A$.

(b) Supongamos, además, φ es inyectiva (como en el T. de Going-up). Entonces $\operatorname{Spec}(\varphi): \operatorname{Spec} B \to \operatorname{Spec}(A)$ es sobreyectiva. Más aún,

$\dim V(\mathfrak{p}) = \dim V(\mathfrak{q})$ y $\dim A = \dim B$.

Prueba: $\varphi : A \to B$ integral.

(a) Sean $\mathfrak{q}_0 \subsetneq \mathfrak{q}_1$ ideales primos de B.

Afirmación: $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0) \subsetneq \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1)$.

De la afirmación se sigue $ht(\mathfrak{q}) \leq ht(\mathfrak{p})$.

Reemplazando B por $B/\mathfrak{q}_0$ y A por $A/\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_0)$ podemos asumir (i) A y B dominios de integridad, (ii) $\mathfrak{q}_0 = 0$, (iii) φ inyectiva.

Debemos mostrar así $\varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1) \neq 0$.

Sea $b \in \mathfrak{q}_1$, $b \neq 0$.

Entonces b tiene una ec. integral:

$$b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + \underline{\underline{a_0}} = 0$$

$a_i \in A$.

<u>con n minimal.</u>

Así, $a_0 \in \varphi^{-1}(\mathfrak{q}_1) \setminus \{0\}$.

(b) Sobreyect. de $\boxed{\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}\, B \to \mathrm{Spec}\, A}$

es una consecuencia de Going-up thm.

De (a) tenemos $\dim B \leq \dim A$.

Luego para mostrar que $\dim B = \dim A$

es suficiente mostrar $\dim V(p) = \dim V(q)$.

Sean $\boxed{P_0 \subsetneq P_1}$ ideales primos de A.

Sea $q_0 \in \mathrm{Spec}\, B$ tq. $\varphi^{-1}(q_0) = P_0$.

$A \xrightarrow{\varphi} B$.

Consideremos el homomorf. integral inyect.

$$A/p_0 \subseteq B/q_0 .$$

obtenemos así un ideal primo q_1 de B

tal que $\varphi^{-1}(q_1) = P_1$ y $q_0 \subsetneq q_1$.

Aplicando este proced. a una cadena de ideales primos de A que contiene a p, obtenemos

$$\dim V(p) \leq \dim V(q) .$$

Además, como $A/\mathfrak{p} \to B/\mathfrak{q}$ es integral,

entonces

$$\dim V(\mathfrak{p}) = \dim V(\mathfrak{q}).$$

Corolario: k: cuerpo.

Sea $A \neq 0$ una k-algebra finitam. generada, y $d \geq 0$ un entero.

Entonces

$\dim A = d$ si y sólo si existe un homomorfismo de k-algebras

$$\underbrace{k[T_1, \ldots, T_d] \longrightarrow A}_{\text{inyectivo y finito.}}$$

Recordar:

Teorema de Normalización de Noether:

Sea K un cuerpo.

Sea R una K-algebra tipo finito.

Entonces R es una extensión finita de un anillo de polinomios sobre K; i.e. existe un # natural n y un homomorfismo inyectivo

$$S = K[y_1, \dots, y_n] \overset{i}{\hookrightarrow} R$$

de modo que R es una S-alg. finita.

En virtud de la prop. en el T. de Normaliz. de Noether, se tiene

$$\dim R = n = \underbrace{\dim k[y_1, \dots, y_n]}.$$

Recordar: anillo A es Artiniano si toda sucesión decreciente de ideales de A es estacionaria.

Lema: Sea $(A, \mathfrak{m})$ un anillo local Noetheriano. Las sgtes. prop. son equivalentes:

(i) $\dim A = 0$,

(ii) $\mathfrak{m} = \sqrt{0}$, el Nilradical de A,

(iii) existe $q \geq 1$, $\mathfrak{m}^q = 0$

(iv) A es Artiniano.

Prueba:

- Como A es local, $\dim A = 0$ si y sólo si $\mathfrak{m}$ es el único ideal primo de A, lo cual es equivalente a decir $\sqrt{0} = \mathfrak{m}$. Por tanto (i) $\Leftrightarrow$ (ii).

- Supongamos (ii) se cumple. Sean $a_1, \ldots, a_s$ generadores de $\mathfrak{m}$. Así, existe $t \geq 1$, tal que $a_i^t = 0 \; \forall i$.
Luego $\mathfrak{m}^{ts} = 0$, es decir, (ii) $\Rightarrow$ (iii).

(iii) $\Rightarrow$ (iv).

Sea $(I_n)_n$ una sucesión decreciente de ideales de A.

Para $r \geq 0$, $\dfrac{\mathfrak{m}^r}{\mathfrak{m}^{r+1}}$ es un espacio vectorial sobre $K = A/\mathfrak{m}$, de dimensión finita pues A es Noetheriano.

$\Rightarrow$ La sucesión $(I_n \cap \mathfrak{m}^r)/(I_n \cap \mathfrak{m}^{r+1})$ es una

Sucesión decrec. de subespacios vectoriales de

$\mathfrak{m}^r / \mathfrak{m}^{r+1}$ (dim. finita) y por tanto

$\left\{ I_n \cap \mathfrak{m}^r / I_n \cap \mathfrak{m}^{r+1} \right\}$ es estacionaria.

Existe n_0 tq. $\forall\, r \leq q$ y todo $n \geq n_0$ se tiene

$$I_n \cap \mathfrak{m}^r \subseteq I_{n+1} + I_n \cap \mathfrak{m}^{r+1}.$$

Así, $\forall\, n \geq n_0$ tenemos $I_n \subseteq \underbrace{I_{n+1} + I_n \cap \mathfrak{m}}_{\subseteq I_{n+1}}$

$\subseteq \cdots \subseteq I_{n+1} + I_n \cap \mathfrak{m}^q$

es decir,

$$I_n = I_{n+1} \quad \forall\, n \geq n_0.$$

$\therefore$ A es Artiniano.

(iv) $\Rightarrow$ (ii) Si A es Artiniano, entonces la sucesión de ideales $(\mathfrak{m}^n)_n$ es estacionaria.

Esto es, existe q tal que $\mathfrak{m}^q = \mathfrak{m}^{q+1}$

Por Nakayama $\Rightarrow \mathfrak{m}^q = 0.$

$\boxtimes$.

Lema: Sea A un anillo Artiniano.

Si p es ideal primo de A $\Rightarrow$ p es maximal.

Prueba:

Sea $p \subseteq A$ primo.

Entonces A/p Artiniano + dominio.

Sea $x \in A/p$. Entonces, tenemos la cadena descendente de ideales

$$(x) \supseteq (x^2) \supseteq (x^3) \supseteq \ldots$$

Entonces, para cierto n, existe $a \in A/\mathfrak{p}$ tal que

$$x^n = a\, x^{n+1}.$$

Si $x \neq 0 \Rightarrow ax = 1$. Luego $A/\mathfrak{p}$ es un cuerpo $\Rightarrow \mathfrak{p}$ maximal.

Lema: un anillo artiniano solo tiene un # finito de ideales primos distintos.

Prueba: Sea R un anillo artiniano.

- Si $\mathfrak{m}_1, \mathfrak{m}_2, \mathfrak{m}_3, \ldots$ son ideales maximales distintos, entonces obtenemos una cadena descend. de ideales

$$\mathfrak{m}_1 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \supsetneq \mathfrak{m}_1 \cap \mathfrak{m}_2 \cap \mathfrak{m}_3 \supsetneq \ldots$$

– que no se estabiliza –

(Si $\mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_k$ con $n \leq k$, entonces $\mathfrak{m}_k$ contiene a algún $\mathfrak{m}_i$, con $i \leq n$.

$\Rightarrow n = k$)

Lema: El nilradical de un anillo artiniano R es nilpotente, i.e. existe un entero positivo n tal que $x^n = 0$ para todo nilpotente $x \in R$.

Prueba: ver A-M.

Teorema: Sea R anillo conmut.

$$R \text{ artiniano} \iff \begin{cases} \text{Noetheriano de } \underline{\dim 0} \\ \text{ó} \\ R = (0). \end{cases}$$

Prueba:

Sea R artiniano, $R \neq (0)$.

$\Rightarrow \dim R = 0$ pues todo ideal primo es maximal.

Debemos mostrar R Noetheriano.

Como R solo tiene un # finito de ideales maximales: $\mathfrak{m}_1, \ldots, \mathfrak{m}_n$.

Luego,

$$\mathrm{Nil}(R) = \mathfrak{m}_1 \cap \ldots \cap \mathfrak{m}_n .$$

Además, por el lema anterior, existe $N \gg 1$ tal que

$$\mathrm{Nil}(R)^N = 0.$$

... próx. clase.

Lema / Ejercicio:

Sea X un espacio topológico.

(1) Y subesp. de X, entonces $\dim Y \leq \dim X$.

Si X es irreducible, $\dim X < \infty$, y

si $Y \subsetneq X$ con Y cerrado, entonces $\dim Y < \dim X$.

(2) Sea $X = \bigcup_\alpha U_\alpha$ un cubrim. abierto, Entonces

$$\dim X = \sup_\alpha \dim U_\alpha .$$

(3) Sea I el cjto. de comp. irreduc. de X.

Se tiene

$$\dim X = \sup_{Y \in I} \dim Y.$$

(4) Si X es un esquema, entonces

$$\dim X = \sup_{x \in X} \dim \mathcal{O}_{X,x}.$$

En particular $\dim \mathbb{A}^n_k = \dim \mathbb{P}^n_k = n$.