Algebra conmutativa. Clase 21.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

2 de diciembre de 2020

Lema / Corolario:

Sea K un cuerpo algebraicam. cerrado.

- Entonces todo ideal maximal $\mathfrak{m}$ de $A = K[X_1, \ldots, X_n]$ es de la forma

$$\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \quad \text{para algunos } a_i \in K.$$

- El homomorfismo

$$K[X_1, \ldots, X_n] \longrightarrow K[X_1, \ldots, X_n]/\mathfrak{m}$$

es la evaluación natural

$$f(X_1, \ldots, X_n) \longmapsto f(a_1, \ldots, a_n).$$

- Así, existe una correspondencia 1-1

$$K^n \longleftrightarrow \mathfrak{m}\text{-Spec}\, A : \quad (a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

Prueba:

Sea $L = K[X_1,..,X_n]/\mathfrak{m}$ cuerpo cociente.

Entonces $K \subseteq L$ extensión algebraica finita (clase pasada).

Como $K = \overline{K}$; entonces $K = L$.

$$K \hookrightarrow \boxed{K[X_1,..,X_n]}_{A} \xrightarrow{\pi} \underbrace{K[X_1,..,X_n]/\mathfrak{m}}_{\cong K}$$

$$X_i \longmapsto a_i$$

$$a_i \longmapsto a_i$$

Si $X_i \in A$ es enviado por π al elemento $a_i \in K$, entonces $a_i \in K \subseteq A$ es enviado también a $a_i \in K$.

Luego $X_i - a_i \in \mathfrak{m}$.

Por tanto,

$$(X_1 - a_1, X_2 - a_2, \ldots, X_n - a_n) \subseteq \mathfrak{m}.$$

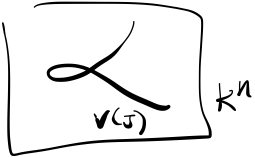
Como $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ es maximal

$$\Rightarrow \mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n).$$

$\#$.

Recordar:

$J \subseteq \underbrace{K[X_1,\dots,X_n]}_{A}$ ideal



$$\Rightarrow V(J) = \{ P = (a_1,\dots,a_n) \in K^n \mid f(P) = 0 \ \forall f \in J \}.$$

J finitam. generado

$$V(J) = V(f_1,\dots,f_m) \quad ; \quad J = (f_1,\dots,f_m).$$

Dado $Z \subseteq K^n$, cualquier cjto.

$$I(Z) = \{ f \in A \mid f(z) = 0 \ \forall z \in Z \}.$$

$\uparrow$ ideal.

Pregunta:

$$I(V(J)) \supseteq J$$

Afirmación: $I(V(J)) = \sqrt{J}$.

(T. Nullstellensatz)

- Recordar:

$$\left\{\begin{array}{l}\text{cjtos. cerrados} \\ \text{de } K^n\end{array}\right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{\begin{array}{l}\text{ideales} \\ \text{radicales de } A\end{array}\right\}$$

Proposición:

Sea $K = \bar{K}$ (alg. cerrado)

A K-álg. finitam. generada:

$$A = K[x_1, \dots, x_n] = K[X_1, \dots, X_n]/J$$

anillo de coord de una variedad $V \subseteq K^n$.

$$A(V) = K[X_1, \dots, X_n]/I(V)$$

cociente del anillo de polinomios en var. $X_1, \dots, X_n$.

(i.e. $x_i = X_i \bmod J$)

Entonces todo ideal maximal de A es de la forma $(x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n)$ para algún punto $(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$.

Por tanto, hay una corresp. 1:1

$$V(J) \longleftrightarrow \max \operatorname{Spec} A$$

$$(a_1, \ldots, a_n) \longleftrightarrow (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n).$$

Prueba: Los ideales de A están dados por los ideales de $K[X_1, \ldots, X_n]$ que contienen a J.

Así, un ideal max. de A es de la forma

$(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ para algunos $a_i \in \underline{\underline{K}}$

de modo que

$$J \subseteq (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$$

Dado que $(X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$ es el kernel de la evaluación $f \longmapsto f(a_1, \ldots, a_n)$, tenemos así

$$J \subseteq (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n) \iff f(a_1, \ldots, a_n) = 0 \quad \forall f \in J,$$

$\therefore$ $(a_1, \ldots, a_n) \in V(J)$.

Teorema (Nullstellensatz)

Sea $K = \overline{K}$.

(a) Si $J \subsetneq K[X_1, \ldots, X_n]$, entonces $V(J) \neq \phi$.

(b) $I(V(J)) = \sqrt{J}$; en otras palabras

dado $f \in K[X_1, \ldots, X_n]$,

$f(P) = 0 \ \forall \ P \in V(J) \iff f^n \in J$ para algún n.

Obs:

(i) De (a): dado un cjto de polinomios que generan un ideal no trivial, entonces estos pol. tienen un cero común.

Notar que (a) es falso si K no es alg. cerrado, e.g. $K=\mathbb{R}$, $x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$

$$V(x^2+1) = \phi.$$

(ii)

Recordar $\sqrt{J} = \bigcap_{\substack{p \in \operatorname{Spec} A \\ p \supseteq J}} p$ ✓

por otro lado $\sqrt{J} = I(V(J))$

$$\sqrt{J} = \bigcap_{\substack{m \in m\operatorname{Spec} A \\ m \supseteq J}} m$$

Prueba:

(a) Si J ideal no trivial (i.e. $J \subsetneq K[X_1, .., X_n]$)

entonces existe un ideal maximal $\mathfrak{m} \supseteq J$,

con $\mathfrak{m} = (X_1 - a_1, \ldots, X_n - a_n)$.

Luego $P = (a_1, .., a_n) \in V(J)$.

$\underbrace{V(\mathfrak{m})}_{\{P\}} \subseteq V(J)$

(b) Argumento de Rabinowitch (1929):

Supongamos $f \in K[X_1, \dots, X_n]$ satisface

$$\underline{f(P) = 0 \quad \forall\, P \in V(J).}$$

Consideramos la variable auxiliar Y y el ideal

$$J' = (J, \underbrace{fY - 1}) \subseteq K[X_1, \dots, X_n, Y].$$

Notar: un punto de $V(J')$ es una $(n+1)$-tupla $(\underbrace{a_1, \dots, a_n}, b) \in K^{n+1}$ tal que

$$\underbrace{(a_1,\dots,a_n)}_{P} \in V(J) \quad y \quad \underline{b\, f(a_1,\dots,a_n) = 1}$$

Así

$$P \in V(J) \quad y \quad f(P) \neq 0.$$

$$\therefore \quad V(J') = \phi$$

Esto implica, por la parte (a) que

$$J' = K[X_1,\dots,X_n,Y].$$

Se sigue que

$$1 = \sum g_i h_i + g_0(fY-1) \text{ con } \begin{array}{l} g_i \in K[X_1,\dots,X_n,Y] \\ h_i \in J. \end{array}$$

En $$1 = \sum g_i h_i + g_0 (fY - 1)$$

Multiplicamos ambos lados por f^m (cierta pot. de f^m)

$$f^m = \sum f^m g_i h_i + g_0 (fY-1) f^m$$

Equiv. reemp. Y por f^{-1} y limpiamos denomin.

$$\Rightarrow f^m = \sum G_i(X_1, .., X_n, \underline{fY})\, \underline{h_i}$$
$$+ G_0(X_1, .., X_n, \underline{fY})(\underline{fY-1}).$$

Como es identidad de polinomios $\Rightarrow$ sustituimos $fY = 1$

$$\therefore \quad f^m = \sum_i \tilde{G}_i \cdot h_i \qquad h_i \in J$$

$$f^m \in \sqrt{J}.$$

- Argumento alternativo (Atiyah-MacDonald ej. 14 p. 85)

- $\sqrt{J} \subseteq I(V(J))$

- - $I(V(J)) \subseteq \sqrt{J}$:

Si $f \notin \sqrt{J}$, entonces existe un ideal primo $\mathfrak{p} \supseteq J$ tal que $f \notin \mathfrak{p}$.

Sea $\bar{f}$ la imagen de f en $B = \underline{K[X_1,\dots,X_n]/\mathfrak{p}}$

Sea $\underline{\underline{C}} = B_f = B\left[\frac{1}{f}\right]$

Denotemos por $\mathfrak{m}$ un ideal máx. de C.

Como C es una K-alg. finitam. generada,

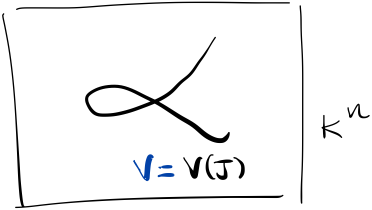
tenemos $C/\mathfrak{m} \simeq K$ (pues $K = \overline{K}$)

Denotemos por x_i las imágenes de X_i en $C/\mathfrak{m} \simeq K$.

Tenemos así un punto $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$.

$\therefore \quad x \in \overline{V} \quad y \quad f(x) \neq 0.$

$J \rightsquigarrow$



- $I(V(J)) = \sqrt{J}.$

Anillo de coord de V: $\boxed{A(V) = k[x_1, \dots, x_n] / \sqrt{J}}.$