Algebra conmutativa. Clase 13.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

16 de octubre de 2020

Recordar:

X, Y espacios topológicos.

$\mathcal{F}$ haz en X, $\mathcal{G}$ haz en Y.

$f: X \to Y$ una función continua.

① Push-forward o imagen directa de $\mathcal{F}$:

$$(f_* \mathcal{F})(U) = \mathcal{F}(f^{-1}(U)) \qquad U \subseteq Y \text{ abierto}$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{F} \arrow[d, dashed, no head] & f_*\mathcal{F} \arrow[d, dashed, no head] \\ X \arrow[r] & Y \\ f^{-1}(U) \arrow[u, phantom, "\subseteq" sloped] & U \arrow[u, phantom, "\subseteq" sloped] \end{tikzcd}$$

② Imagen inversa de $\mathcal{G}$

$$\begin{tikzcd} f^{-1}\mathcal{G} \arrow[d, dash] & \mathcal{G} \arrow[d, dash] \\ X \arrow[r, "f"] & Y \end{tikzcd}$$

$U \subseteq X$ $\qquad$ $f(U)$

$f^{-1}\mathcal{G}$ haz asociado al prehaz:

$$U \longmapsto \boxed{\varinjlim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{G}(V)} = \left\{ (V, s) : \begin{array}{l} V \supseteq f(U) \text{ abierto}, \\ s \in \mathcal{G}(V) \end{array} \right\} \Big/ \sim$$

U abierto de X

donde

$(V, s) \sim (V', s')$ si existe $W \subseteq V \cap V'$ con

$f(U) \subseteq W$ y $s|_W = s'|_W$.

Ejemplo:

Si $i : \{p\} \to X$ y $\mathcal{G}$ es un haz en X entonces

$$i^{-1}\mathcal{G} = \mathcal{G}_p .$$

De manera más general, si $i : Z \to X$ inclusión, y $\mathcal{F}$ es un haz en X, escribimos

$$\mathcal{F}\big|_Z := i^{-1}\mathcal{F} .$$

En particular, Z abierto, entonces $\mathcal{F}\big|_Z$ se puede describir de la sgte. manera $\mathcal{F}\big|_Z(U) = \mathcal{F}(U)$

Obs: (Ejercicio 1.14 cap II Hartshorne)

Sea $\mathcal{F}$ un haz en X.

$s \in \mathcal{F}(U)$, $U \subseteq X$ abierto.

El soporte de s, denotado $\mathrm{Supp}(s)$ se define por

stalk de s en p.

$$\{ p \in U \mid s_p \neq 0 \}$$

- $\mathrm{supp}(s)$ es un subconjunto cerrado de U.

Definimos, además, $\mathrm{Supp}\, \mathcal{F}$ (soporte de $\mathcal{F}$) como

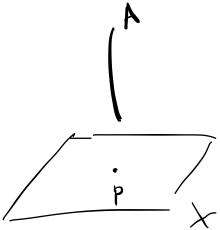
$$\{ p \in X \mid \mathcal{F}_p \neq 0 \} \leftarrow$$ No necesariamente cerrado, en general.

Ejm: ("haz rascacielo" Skyscraper sheaf)

X esp. top. $\underline{p \in X}$. A : gp. abeliano.

Definimos el haz $i_p(A)$ de la sgte. manera

$$i_p(A)(\mathcal{U}) = \begin{cases} A & \text{si } p \in \mathcal{U} \\ 0 & \text{si } p \notin \mathcal{U}. \end{cases}$$



Verificar:

- $(i_p(A))_x = A$ si $x \in \overline{\{p\}}$
- $(i_p(A))_x = 0$ si $x \notin \overline{\{p\}}$.
- Si $Z = \overline{\{p\}} \xhookrightarrow{i} X$ inclusión $\Rightarrow$ $\underbrace{i_*(A)}_{\text{haz cte}} \cong i_p(A)$.

Obs: Sea $\overset{\mathcal{F}}{\underset{|}{}}\!\!f : \underset{}{X} \to Y$ función continua entre esp. top.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F} & & \mathcal{G} \\ | & & | \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

$\mathcal{F}$ haz en X.

- $f_*\mathcal{F}$ haz en Y
- $f^{-1}f_*\mathcal{F}$ haz en X. ¿Qué relación guarda con $\mathcal{F}$?

$$\left\{ U \longmapsto f^{-1}(f_*\mathcal{F})(U) = \lim_{V \supseteq f(U)} f_*\mathcal{F}(V) = \lim_{V \supseteq f(U)} \mathcal{F}(\underline{f^{-1}(V)}). \right\}$$

- De ese modo tenemos un morfismo natural

$$f^{-1} f_* \mathcal{F} \xrightarrow{\alpha} \mathcal{F}.$$

- Similarmente, dado un haz $\mathcal{G}$ en Y existe un morfismo natural $\mathcal{G} \xrightarrow{\beta} f_* f^{-1}\mathcal{G}$

Existe así, una biyección natural de cjtos, para cualesquiera haces $\mathcal{F}$ en X, $\mathcal{G}$ en Y:

$$\begin{array}{ccc} \alpha\circ(f^{-1}h) & \longleftarrow\!\shortmid & h \\ \mathrm{Hom}_X(f^{-1}\mathcal{G},\mathcal{F}) & = & \mathrm{Hom}_Y(\mathcal{G}, f_*\mathcal{F}) \\ g & \longmapsto & (f_* g)\circ\beta \end{array}$$

$$f^{-1}\mathcal{G} \xrightarrow{g} \mathcal{F} \quad \text{en } X \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{tikzcd} f_* f^{-1}\mathcal{G} \arrow[r, "f_*(g)"] & f_*\mathcal{F} \\ \mathcal{G} \arrow[u, "\beta", "\text{morf natural.}"'] & \end{tikzcd} \quad \text{en } Y$$

- En este contexto, decimos que f^{-1} es una adjunta por izq. de f_* y f_* es una adjunta por derecha de f^{-1}.

Ejm: Sea X una variedad algebraica $/\mathbb{C}$.

- $\mathcal{O}_X$ haz funciones regulares en X:

$$\mathcal{O}_X(U) = \{ f : U \to \mathbb{C} \ \text{regulares} \}$$

f localm. en cada punto $p \in U$ se puede escribir de la forma

$f = \dfrac{\alpha}{\beta}$ α, β polinomios, $\beta \neq 0$ en una vec de p.

(si X proy. α, β homog. del mismo grado)

Sea

- $Y \subseteq X$ subc. cerrado de X.

Para cada abierto $\mathcal{U} \subseteq X$,

sea $\mathcal{J}_Y(\mathcal{U})$ = ideal en $\mathcal{O}_X(\mathcal{U})$ de las funciones regulares que se anulan en todos los puntos de $Y \cap \mathcal{U}$.

anillo.

$\mathcal{J}_Y$ es un prehaz.

Afirm. $\mathcal{J}_Y$ es un haz. ← haz de ideales de Y.

$\mathcal{J}_Y \subseteq \mathcal{O}_X$ ← subhaz.

• si Y es una subvariedad (def. por pol.)

Entonces

$$\mathcal{O}_X/_{\mathcal{I}_Y} \underset{\text{iso}}{\simeq} i_*(\mathcal{O}_Y).$$

— a nivel afín: —

$$A(Y) \simeq \mathbb{C}[x_1, \ldots, x_n]/_{I(Y)}$$

Sea $X = \mathbb{P}^1$, sea $Y = \{P, Q\}$ $P \neq Q$, $P, Q \in X$.

$\mathbb{P}^1 \ni [x_0 : x_1]$, $P = 0 = [1:0]$, $Q = \infty = [0:1]$.

Así, tenemos la sucesión exacta de haces:

$$0 \to \mathcal{I}_Y \to \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{F} \to 0$$

donde $\mathcal{F} = i_*\mathcal{O}_P \oplus i_*\mathcal{O}_Q$.

Sin embargo:

secciones globales

no es exacta por derecha (no es sobrey).

$$0 \to \Gamma(\mathcal{I}_Y) \to \underbrace{\Gamma(\mathcal{O}_X)}_{\mathbb{C}} \longrightarrow \underbrace{\Gamma(\mathcal{F})}_{\mathbb{C} \oplus \mathbb{C}.}$$

Γ no es exacto por derecha.

haz de anillos

Definición: Sean $(X, \mathcal{O}_X)$ y $(Y, \mathcal{O}_Y)$ dos espacios anillados.

Un morfismo de espacios anillados $\boxed{f:(X,\mathcal{O}_X) \to (Y,\mathcal{O}_Y)}$ está dado por la sgte. data:

"$\mathcal{O}_X$" $\quad \mathcal{O}_Y \quad f_*\mathcal{O}_X$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_X & & \mathcal{O}_Y \\ \top & & \top \\ X & \longrightarrow & Y \end{array}$$

$$\mathrm{Spec}(R') \xrightarrow{\mathrm{Spec}(\varphi)} \mathrm{Spec}(R)$$

$$\varphi: R \to R'$$

① $f: X \to Y$ continua. ✓

② $f^\#: \mathcal{O}_Y \to f_*\mathcal{O}_X$ un morfismo de haces de anillos: esto es, para todo $U \subseteq X$ abierto, se tiene

$$f^{\#}_U : \mathcal{O}_Y(U) \to \mathcal{O}_X(f^{-1}(U)).$$

Ejm: X esp. topológico. $\mathcal{O}_X$ haz de funciones continuas con valores en $\mathbb{R}$.

$\varphi \to \mathbb{R}$

$f : X \to \boxed{Y}$ continua induce, U

$f^{-1}(U)$

$$f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$$

$$f^{\#}(\varphi)(U) = \varphi \circ f$$

donde $f^{\#}$ está dado por:

$$\varphi \circ f : f^{-1}(U) \to \mathbb{R}$$

Obs: Si $\varphi : R \to R'$ homomorfismo de anillos.

entonces φ induce

$$\mathrm{Spec}(\varphi) : \mathrm{Spec}(R') \longrightarrow \mathrm{Spec}(R).$$

En este nuevo contexto tenemos

$X = \mathrm{Spec}(R')$ $\quad$ $\mathcal{O}_X$ = haz estruct. asociado a R'

$\qquad U_f \longmapsto R'_f$.

$Y = \mathrm{Spec}(R)$ $\quad$ $\mathcal{O}_Y$: haz estruct. asociado a R.

- $\mathrm{Spec}(\varphi) : X \to Y$ función continua.

$$\mathrm{Spec}(\varphi)^{\#} : \mathcal{O}_Y \longrightarrow (\mathrm{Spec}(\varphi))_* \mathcal{O}_X$$

Sea U_g un abierto de Y (i.e. $g \in R$)

$$\underbrace{\mathrm{Spec}(\varphi)^{\#}(U_g)} : \underbrace{\mathcal{O}_Y(U_g)}_{R_g} \longrightarrow \underbrace{(\mathrm{Spec}\,\varphi)_* \mathcal{O}_X(U_g)}_{\mathcal{O}_X(\underbrace{\mathrm{Spec}(\varphi)^{-1}(U_g)}_{\underbrace{\mathcal{O}_X(U_{\varphi(g)})}_{R'_{\varphi(g)}}})}$$

$\mathrm{Spec}(\varphi)^{\#}$ versión "sheafificada" de φ.

$$\left(\mathrm{Spec}(R),\ \mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R)}\right)$$

no solo es un espacio anillado, sino que cada stalk $\mathcal{O}_{\mathrm{Spec}(R),\,\mathfrak{p}} \cong R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local.

Se requiere incorporar esta caract. en las construcciones anteriores $\longrightarrow$

Def: (espacio anillado local):
- locally ringed space -

- A un espacio localm. anillado. $(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio anillado tal que $\underbrace{\mathcal{O}_{X,p}}_{\text{Stalk}}$ es un anillo local para todo $p \in X$.

- Un morfismo entre espacios anillados locales $f : (X, \mathcal{O}_X) \to (Y, \mathcal{O}_Y)$ es un morfismo de espacios anillados tal que

$$f_p^\# : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X, p} \quad \text{es}$$

un homomorfismo local para todo $p \in X$.

$$f_p^\# : \mathcal{O}_{Y, f(p)} \longrightarrow \mathcal{O}_{X, p}$$
$$(u, s) \longmapsto (f^{-1}(u), f_u^\#(s)).$$

un homomorfismo

$$\varphi : (A, \mathfrak{m}_A) \longrightarrow (B, \mathfrak{m}_B)$$

entre anillos locales se denomina local si $\varphi^{-1}(\mathfrak{m}_B) = \mathfrak{m}_A$.

$$\subseteq \checkmark$$

Obs: la condición local nos dice, por ejm, que si una función se anula en $f(p)$ entonces su pullback se anula en p.

Ejm: $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ es un espacio anillado local.

Def: (esquema afín) La categoría de esquemas afines es la categoría cuyos objetos son $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ para todo anillo R, y morfismos son los morfismos como espacios anillados locales.

Teorema: La categoría de esquemas afines es equivalente a Ring^{op} (opuesto de cat. de anillos).

se debe probar:

① si $\varphi: A \to B$ es un homom. de anillos entonces

$$(\varphi, \varphi^{\#}) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

es un morfismo de espacios anillados locales.

② cualquier morfismo

$$(f, f^{\#}) : (\operatorname{Spec} B, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} B}) \to (\operatorname{Spec} A, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} A})$$

se construye a partir de un homomorfismo

$\varphi: A \to B$.

Prueba: Jueves.

Definición: (modificación) Un esquema afín es un espacio anillado local que es isomorfo a $(\operatorname{Spec} R, \mathcal{O}_{\operatorname{Spec} R})$ para cierto anillo R.

Definición: (esquema) Un esquema es un espacio localm. anillado $(X, \mathcal{O}_X)$ con un cubrimiento abierto $\{(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})\}$ tal que $(U_i, \mathcal{O}_X|_{U_i})$ es un esquema afín.