Algebra conmutativa. Clase 28.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

22 de diciembre de 2020

Examen final (se les enviaré el texto mañana miércoles 23 diciembre)

- Plazo hasta domingo 3 enero (medianoche).

- Preguntas de los sgtes textos:

  (i) Atiyah - MacDonald, "Commutative algebra"

  (ii) Liu, "Algebraic geometry and arithmetic curves".

  (iii) Görtz, "Algebraic Geometry I."

  (iv) Eisenbud, "Commutative algebra with a view towards algebraic geometry".

Anillos locales regulares:

Recordemos si (R, m) anillo Noetheriano local, se tiene

$$\dim R \leq \dim_K m/m^2$$

donde K = cuerpo residual R/m.

Definición: (R, m) anillo local se denomina regular si $\boxed{\dim R = \dim_K m/m^2}$.

Obs/Def: El K-espacio vectorial m/m^2 se denomina espacio cotangente de Zariski (de R).

Ejm: Sea $\boxed{R = k[x_1,\dots,x_n]_{(x_1,\dots,x_n)}}$

Un elem. de $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ se puede pensar como el germen de una 1-forma diferencial en $0 \in \mathbb{A}^n_k$.

En particular, $\dim R = \dim_k \dfrac{\mathfrak{m}}{\mathfrak{m}^2} = n$;

i.e. R es un anillo local regular.

Sea $X \overset{\text{Spec } R}{=}$ un esquema afín de tipo finito sobre un cuerpo K.

Podemos considerar X como un subesquema cerrado de $\mathbb{A}^n_K$, para cierto $n > 0$.

En efecto, tenemos un homomorfismo sobreyectivo

$$K[x_1, \ldots, x_n] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X) = R$$

Así, hay un ideal $I(X) \subseteq K[x_1, \ldots, x_n]$ tal que

$$\mathcal{O}(X) \simeq K[x_1, \ldots, x_n] / I(X)$$

este morfismo induce un encaje $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_K$

Definición:

Sea X un esquema de tipo finito sobre un cuerpo k.

un k-punto racional de X es un morfismo de k-esquemas $\underline{\mathrm{Spec}}\, \underline{k \to X}$.

Equivalentemente, $x \in X$ es un k-punto racional si $\underbrace{k(x)}_{\text{cuerpo residual}} = k$.

(en general, $k \hookrightarrow k(x)$ es una extensión alg. de k)

Obs: Un k-punto racional de X es un punto cerrado.

Prop./Ejercicio: Sea k un cuerpo. X un k-esquema de tipo finito. Sea $z \in X$.

Las sgtes. propiedades son equivalentes:

(i) El punto $z \in X$ es cerrado.

(ii) La extensión $k \hookrightarrow k(z)$ es finita

(iii) La extensión $k \hookrightarrow k(z)$ es algebraica.

---

si x es un k-punto racional de X,

Preg: ¿Cuándo $\mathcal{O}_{X,x}$ es un anillo local regular?

Definición: Sea X un esquema afín de tipo finito sobre k.

Decimos que X es suave de dimensión r (≥ 0) si

X tiene las sgtes. propiedades:

(i) Todas las componentes irreducibles de X tienen dimensión r (X es equidimensional).

(ii) Fijando un k-encaje cerrado $X \hookrightarrow \mathbb{A}^n_k$, si el ideal $I(X)$ está generado por $(f_1, \dots, f_{n-r})$ entonces la matriz Jacobiana

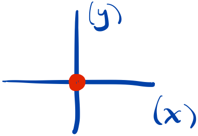
$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\cdot) \Big| \quad 1 \leq i \leq n-r, \quad 1 \leq j \leq n \right)$$

tiene rango $n-r$ (rango maximal) en todo punto de X

(no necesariamente k-punto racional).

Obs: En la def. estamos pidiendo que el conjunto de ceros de los $(n-r)\times(n-r)$ menores de la matriz Jacobiana no intersecte X (como subvariedades de $\mathbb{A}^n_k$).

Ejm: Sea $X = V(xy) \subset \mathbb{A}^2_k$.



Las componentes irreducibles de X tienen dimensión 1 (por el T. de ideal principal de Krull).

Por tanto X sería suave de dimensión 1 si y sólo si la matriz Jacobiana

$$\begin{pmatrix} y & x \end{pmatrix}$$

tiene rango 1 en todo X. Pero, notemos

$V(x,y) \cap X = \{(0,0)\}$ (no vacío).

Por tanto X no es suave.

Lema: Sea X un esquema afín de tipo finito sobre k. Sea P un k-punto racional de X. Entonces

$\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo local regular $\iff$ X es suave en P. (i.e. P es un punto suave de X).

Prueba: Sea $n = \dim X$

Fijemos un encaje (sobre k) $\varphi : X \hookrightarrow \mathbb{A}_k^{n+m}$.

Sea $\mathfrak{m}$ el ideal maximal de $\mathcal{O}(X)$ que corresponde a P.

Notar existe un isomorfismo natural de k-esp. vectoriales

$$\mathfrak{m}_p / \mathfrak{m}_p^2 \cong \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2 ,$$

donde $\mathfrak{m}_p$ es el único ideal maximal de $\mathcal{O}_{X,P}$.

Además

$\mathfrak{m}$ es la imagen vía $\varphi^{\#}: k[x_1,\dots,x_{n+m}] \twoheadrightarrow \mathcal{O}(X)$

del ideal $\mathfrak{n} = \langle x_1 - a_1, \dots x_{n+m} - a_{n+m} \rangle$

para ciertos $a_1, \dots, a_{n+m} \in k$,

y

$\mathfrak{m}^2$ es la imagen de $\mathfrak{n}^2$.

Sea además $I(X) = \operatorname{Ker} \varphi^{\#}$. La imagen inversa de $\mathfrak{m}^2$ vía $\varphi^{\#}$ es $\mathfrak{n}^2 + I(X)$,

luego

$$\mathfrak{n} / (\mathfrak{n}^2 + I(X)) \simeq \mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2 .$$

Pero

$$\mathfrak{n} / \mathfrak{n}^2 \cong \underbrace{k \oplus \cdots \oplus k}_{n+m\text{-veces}} .$$

Es decir $\mathfrak{m} / \mathfrak{m}^2$ es isomorfo a $\mathfrak{n} / \mathfrak{n}^2$ módulo $\to$

el subespacio generado por los vectores

$$\left\{ \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \;\middle|\; 1 \leq j \leq n+m \right) \;\middle|\; 1 \leq i \leq r \right\},$$

donde

$$I(X) = (f_1, \dots, f_r).$$

Por tanto,

$\mathcal{O}_{X,p}$ es un anillo local regular si y sólo

si $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(p) \right)$ tiene rango m $\Leftrightarrow$ X es suave de dim. n en p.

Ejemplos:

- Sea $p \in \mathbb{Z}$ un # primo.

  El anillo local $\mathbb{Z}_{\langle p \rangle}$ es un anillo local regular (más aún, es un DVR).

  discrete valuation ring.

  El anillo de enteros p-ádicos $\mathbb{Z}_p$ es también un anillo local regular.

- Los anillos

$$K[x_1, \dots, x_n]_{(x_1, \dots, x_n)} \quad y$$

$$K[[x_1, \dots, x_n]]$$

son anillos locales regulares.

Teorema:

Sea $X \overset{\text{Spec}R}{=}$ un esquema afín de tipo finito sobre un cuerpo K.

Si X es suave de dimensión n sobre K, entonces $\mathcal{O}_{X,P}$ es un anillo Noetheriano local regular para todo $P \in X$.

Anillo local de una subv. de X (asociado a P).

$P \in \text{Spec}R$
primo

Obs: Recordar

$$X = \operatorname{Spec} R, \quad p \in \operatorname{Spec} R,$$

$$\dim R_p = \operatorname{codim}(p) = \operatorname{ht}(p)$$

en general $\dim R \neq \dim R_p$.

En el T. anterior, nos referimos a que R_p es local regular de dim $\operatorname{codim} p = \operatorname{ht}(p)$.

Esbozo prueba:

$P \in \operatorname{Spec} R$, R tipo finito sobre k.

$P \subseteq m$, para cierto ideal maximal m de R.

Como $X = \operatorname{Spec} R$ es suave de dim n

$\Rightarrow R_m$ regular (pues por el lema X es regular en m)

anillo local regular. $\Rightarrow$ Como R_P es localiz. de R_m

$\Rightarrow R_P$ local regular tamb.

__Teorema__ (Auslander - Buchsbaum)

Todo anillo noetheriano local regular R es un DFU. En particular R es un dominio normal.

__Prueba:__ ver Eisenbud Cap. 19.

Corolario: X esquema afín integral de dim. n sobre k.

Si Y es una subv. cerrada de codim. 1

entonces el anillo local

$\mathcal{O}_{X,Y}$ es un DVR.

Lema:

Sea R un DFU.

Entonces todo ideal primo de codim. 1 es principal.

Prueba: Sea P un ideal primo de codim. 1.

Como (0) es un ideal primo, entonces

$(0) \subsetneq P$ y no hay ideales primos intermedios.

Sea $f \in P$. Supongamos $f \neq 0$, y sea f_1 un factor irreducible de f.

Luego como $\langle f_1 \rangle$ es un ideal primo y

$$(0) \subsetneq (f_1) \subseteq P$$

$$\Rightarrow \quad (f_1) = P.$$

Obs:

Sea X un esquema afín integral y suave sobre K.

Si Y es una subvariedad de codim 1, entonces el ideal de Y en $\mathcal{O}(X)$ es localm. principal.

Esto lleva a la noción del haz lineal $\mathcal{O}_X(-Y)$.