Algebra conmutativa. Clase 10.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

6 de octubre de 2020

Algunas prop. de Spec(R) que conviene recordar:

R anillo.

- En Spec(R) tenemos los abiertos básicos

$$\mathcal{U}_f := \operatorname{Spec}(R) \setminus V(f) = \{ p \in \operatorname{Spec}(A) \mid f \notin p \}.$$

- $\mathcal{U}_0 = \phi$, $\mathcal{U}_1 = \operatorname{Spec}(R)$, etc.

- Además, $\mathcal{U}_f \cap \mathcal{U}_g = \mathcal{U}_{f \cdot g}$

$\mathcal{U}_f$: abiertos principales $\longrightarrow$ forman una base de top. de R.

Lema: Sea (f_i) una familia de elem. de R.

Sea $g \in R$.

Entonces $\mathcal{U}_g \subseteq \bigcup_i \mathcal{U}_{f_i} \iff$ existe un entero $n > 0$ tal que g^n está contenido en el ideal gen. por los f_i's.

Prueba:

$$\mathcal{U}_g \subseteq \bigcup_i \mathcal{U}_{f_i} \iff V(g) \supseteq V(\mathfrak{a})$$

$\mathfrak{a} = ((f_i))$.

$$\iff g \in \operatorname{rad}(\mathfrak{a})$$

Sea $X = \mathrm{Spec}(R)$.

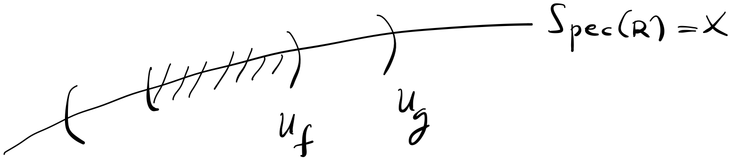
$\begin{cases} \text{a cada abierto básico } \mathcal{U}_f, \ f \in R \\ \text{asociamos el anillo } R_f. \end{cases}$

Esta asignación define un "prehaz": $\mathcal{O}_X$

$$\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) = R_f.$$

Notar: $\mathcal{O}_X(\mathrm{Spec}\, R) = R$

Notemos:



- $\mathcal{O}_X(U_g) = R_g$
- $\mathcal{O}_X(U_f) = R_f$

$\underset{\text{restricción}}{\rho} : R_g \longrightarrow R_f$.

Como $U_f \underset{\text{inc.}}{\subseteq} U_g \Rightarrow \exists\, n>0 \quad f^n \in (g) \subseteq R \Rightarrow f^n = a\cdot g$. cierto $a \in R$.

Definimos

$$\rho_{f,g} : R_g \to R_f$$

$$\frac{r}{g^k} \longmapsto \frac{r a^k}{f^{n\cdot k}}$$

$$\mathcal{U}_f \hookrightarrow \mathcal{U}_g$$

$$\rho_{f,g} : \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_g) \to \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f)$$

Notar:

$$\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}_g \subseteq \mathcal{U}_h$$

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_h) \arrow[r, "\rho_{g,h}"] \arrow[dr, "\rho_{f,h}"'] & \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_g) \arrow[d, "\rho_{f,g}"] \\ & \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) \end{tikzcd}$$

$$\rho_{f,g} \circ \rho_{g,h} = \rho_{f,h}.$$

$\boxed{\text{Nota: } \mathcal{U}_f = D(f)}$

Definición (prehaz): X espacio topológico.

Un prehaz de anillos $\mathcal{F}$ en X es una familia $\{\mathcal{F}(U)\}_{U \in \mathrm{Top}(X)}$ de anillos con las sgtes. propiedades:

U abierto de X.

(1) $\mathcal{F}(\phi) = 0$

(2) Para cada par de abiertos $V \subseteq U$, existe un homomorfismo de anillos

$$\rho_{UV} : \mathcal{F}(U) \longrightarrow \mathcal{F}(V).$$

tal que

(a) $\rho_{UU} = id_{\mathcal{F}(U)}$ y

(b) si $W \subseteq V \subseteq U$ entonces

$$\rho_{UW} = \rho_{VW} \circ \rho_{UV}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[rr, "\rho_{UV}"] \arrow[dr, "\rho_{UW}"'] & & \mathcal{F}(V) \arrow[dl, "\rho_{VW}"] \\
& \mathcal{F}(W) &
\end{tikzcd}$$

- Los elementos de $\mathcal{F}(U)$ son llamados secciones de $\mathcal{F}$ en U.

- Los homomorfismos ρ_{UV} son llamados <u>restricciones</u>.

- En algunas ocasiones $s|_V := \rho_{UV}(s)$

Ejm: El prehaz $\mathcal{O}_X$ en $X = \operatorname{Spec}(R)$.

$f \in R$

$$U_f \longmapsto \mathcal{O}_X(U_f) = R_f.$$

Definición: Un **haz** en un espacio topológico
(haz)

X es un prehaz $\mathcal{F}$ que satisface las sgtes. condiciones adicionales:

(3) para todo cubrimiento abierto $\{U_i\}_{i\in I}$ de un abierto $U \subseteq X$ y una sección $s \in \mathcal{F}(U)$, se cumple:

si $s|_{U_i} = 0 \;\; \forall i \in I \Rightarrow s = 0.$

(4) Para todo recubrimiento abierto $\{U_i\}_{i \in I}$ de un abierto U y secciones $s_i \in \mathcal{F}(U_i)$ se cumple

condición de compatibilidad.

si $\boxed{s_i|_{U_i \cap U_j} = s_j|_{U_i \cap U_j} \text{ para todo } i, j \in I}$

entonces existe una sección $s \in \mathcal{F}(U)$ tal que

$$s|_{U_i} = s_i \quad \forall i \in I.$$

Definición: Sea $\mathcal{F}$ un prehaz en X.

Sea $x \in X$.

La fibra (o stalk) de $\mathcal{F}$ en x es

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x \in \mathcal{U}} \mathcal{F}(\mathcal{U})$$

donde el límite (directo) se toma sobre todos los abiertos que contienen a x.

Los elementos $f_x \in \mathcal{F}_x$ se denominan gérmenes de $\mathcal{F}$ en x.

Equivalentem. $\mathcal{F}_x$ se puede pensar como el cjto de clases de equiv. de

$$\left\{ (U,f) : \begin{array}{l} U \text{ abierto que contiene a } x, \\ f \in \mathcal{F}(U) \end{array} \right\}$$

modulo la relación de equiv.

$(U,f) \sim (V,g) \iff$ existe un abierto $W \subset U \cap V$, $x \in W$, tal que

$$f|_W = g|_W .$$

Ejm:

1. La familia $\{\mathcal{O}(\mathcal{U}) : \mathcal{U}$ abierto de $\mathbb{C}^n\}$, de anillos de funciones holomorfas en $\mathcal{U}$, forma un haz $\mathcal{O}$. Los "stalks" $\mathcal{O}_a$ de $\mathcal{O}$ son isomorfos a $\mathbb{C}\{x-a\}$ (via la expansión de Taylor).

2. Similarmente, dado un espacio topológico X, la familia $\{f : \mathcal{U} \to \mathbb{C} \mid \mathcal{U}$ abierto de X, f continua$\}$ forma un haz de anillos en X.

Teorema: Sea $X = \mathrm{Spec}(R)$.

El prehaz $\mathcal{O}_X$ es un haz en X. $\longrightarrow$

Obs:

Dado $x \in X$, denotamos por $\mathfrak{p}_x$: ideal primo correspond. a x en R.

$$\underset{(\text{Stalk})}{\mathcal{O}_{X,x}} = \varinjlim_{x \in D(f)} \mathcal{O}_X(D(f)) = \varinjlim_{f \notin \mathfrak{p}_x} A_f$$

$= A_{\mathfrak{p}_x}$ localiz. de A en $\mathfrak{p}_x$.

Prueba:

Sea $D(f)$ un abierto principal de X.

Sea $D(f) = \bigcup_{i \in I} D(f_i)$ un cubrimiento de $D(f)$ por abiertos principales. Debemos mostrar:

(i) Sea $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$ tal que $s|_{D(f_i)} = 0$ para todo $i \in I$, entonces $s = 0$.

(ii) Para $i \in I$, sea $s_i \in \mathcal{O}_X(D(f_i))$ tal que $s_i|_{D(f_i) \cap D(f_j)} = s_j|_{D(f_i) \cap D(f_j)}$ para todo $i, j \in I$.

Entonces existe $s \in \mathcal{O}_X(D(f))$ tal que

$$s\Big|_{D(f_i)} = s_i \quad \forall i \in I.$$

- Obs: • Como $D(f)$ son casi-compacto, podemos asumir I finito.

  - si restringimos el prehaz $\mathcal{O}_X$ a $D(f)$ y reemp. R por R_f podemos asumir $f=1$ y por tanto $D(f) = X$.

Así $X = \bigcup_i D(f_i) \iff (f_i : i \in I) = R$

Como $D(f_i) = D(f_i^n)$ para todo entero $n \geq 1$, entonces existen elementos $b_i \in R$ (depend. de n) tal que

$$\sum_{i \in I} b_i f_i^n = 1 \quad \ldots\ldots \quad (*)$$

Prueba de (i): Sea $S = a \in R$ tal que la imagen de a en R_{f_i} es cero para todo $i \in I$.

Como I es finito, existe un entero $n \geq 1$, indep. de i, tal que $f_i^n \cdot a = 0$

Por $(*)$ se tiene $a = \left(\sum_{i \in I} b_i f_i^n\right) a = 0$. ✓

Prueba de (ii)

Como I es finito, podemos escribir

$$s_i = \frac{a_i}{f_i^n}$$ para cierto n indep. de i.

Por hipótesis, las imágenes de s_i y s_j $\left(= \frac{a_j}{f_j^n}\right)$ en $A_{f_i \cdot f_j}$ son iguales para todo $i, j \in I$.

Existe, por tanto, un entero $m \geq 1$, tal que

$$(f_i f_j)^m (f_j^n a_i - f_i^m a_j) = 0$$

Reemplazando a_i por $f_i^m a_i$ y n por $n+m$ (no cambia s_i)

tenemos

$$\boxed{f_j^n a_i = f_i^n a_j} \quad \ldots (**)$$

para todo $i, j \in I$.

Escogemos

$$s := \sum_{j \in I} b_j a_j \in R.$$

(donde b_j son los elem. de $(*)$)

Entonces:

$$f_i^n s = f_i^n \left(\sum_{j \in I} b_j a_j \right) = \sum_{j \in I} b_j (f_i^n a_j)$$

$$\underset{(**)}{=} \sum_{j \in I} b_j (f_j^n a_i) = \sum_{j \in I} (b_j f_j^n) a_i = a_i$$

$\Rightarrow \quad \boxed{f_i^n s = a_i}$

Luego, la imagen de s en R_{f_i} coincide con s_i.

En consecuencia: · $\mathcal{O}_X$ es un haz de anillos en $X = \mathrm{Spec}(R)$.

· $\mathcal{O}_X$ haz estructural de X.

$X \rightsquigarrow \mathcal{O}_X$ haz de anillos.

$X = \operatorname{Spec}(R)$ $\quad M$ R-módulo. •

top: $\underline{D(f)} \overset{\widetilde{M}}{\longmapsto} M_f$

abiertos principales

$\widetilde{M}$ haz de "módulos" en X.

• $\widetilde{M}(D(f)) = M_f$ es un $R_f = \mathcal{O}_X(D(f))$-$\underline{\text{mód}}$