Algebra conmutativa. Clase 9.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

3 de octubre de 2020

Producto tensorial de R-mod:

R anillo

Sean M, N R-mod.

Recordemos

$$\varphi : M \times N \longrightarrow L \qquad , \quad L \ \ R\text{-mod}.$$

φ es R-bilineal si es lineal en cada componente:

- dado $m \in N$, $\varphi_m : N \to L$, $n \mapsto \varphi(m,n)$ R-lineal
- dado $n \in N$, $\varphi_n : M \to L$ R-lineal.

Pregunta: ¿existirá un R-mod S tal que

$$\operatorname{Hom\,bilineales}_R (M \times N, L) \longleftrightarrow \operatorname{Hom}_R(S, L)_{\text{lineal}} \ ?$$

$$M \otimes_R N = S$$

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, dashed] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ S \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & L \end{tikzcd}$$

R-mod.

bilineal

lineal

$$\begin{tikzcd} (x,y) \arrow[d] \arrow[dr, bend left, "\varphi"] & \\ x \otimes y \arrow[r, dashed] & \varphi(x,y) \end{tikzcd}$$

¿cómo definir S?

Sea F el R-mod. libre generado por $M \times N$

elem. de F son de la forma $\sum_{i \in I} r_i (x_i, y_i)$

$x_i \in M$

$y_i \in N$

$r_i \in R$

Sea D el subg. de F generado por los elem.

- $(x+x', y) - (x,y) - (x',y)$
- $(x, y+y') - (x,y) - (x,y')$ ✓
- $(ax, y) - a(x,y)$
- $(x, ay) - a(x,y)$

$x, x' \in M$

$y, y' \in N$

$a \in R$

Definimos $M \otimes_R N$ como el R-mod cociente $\boxed{F/D}$.

En $M \otimes_R N$ se cumple $(x+x') \otimes y = x \otimes y + x' \otimes y$

$a(x \otimes y) = ax \otimes y = x \otimes ay$.

Debemos verificar

$S = M \otimes_R N$ permite establecer una

correspondencia 1:1 entre

$$\mathrm{Hom\ bilineales}_R(M \times N, L) \xleftrightarrow{1:1} \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R N, L)$$

para todo R-mod L.

Notemos:
$$\pi : M \times N \to M \otimes_R N$$
$$(x, y) \longmapsto x \otimes y$$
es un homomorfismo de R-mod.

Dado $\varphi : M \times N \to L$ R-bilineal

definimos $\tilde{\varphi} : M \underset{S}{\otimes} N \to L$

$$\tilde{\varphi}(\underset{\sim}{x \otimes y}) = \varphi(x,y).$$

Notar: $\underline{\tilde{\varphi} \text{ bien definida}}$:

por ejm. como φ es bilineal

$$\varphi[(x+x',y)-(x,y)-(x',y)] = \varphi(x+x',y) - \varphi(x,y) - \varphi(x',y)$$

$$= \underbrace{\varphi(x,y)+\varphi(x',y)}_{\varphi \text{ bilineal.}} - \varphi(x,y) - \varphi(x',y) = 0$$

Así:

$$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "\varphi"] & \\ M \otimes_R N \arrow[r, "\tilde{\varphi}"'] & L \end{tikzcd}$$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{Hom bilineales} \\ M \times N \to L \end{matrix} \right\} \xrightarrow{1:1} \left\{ \begin{matrix} \text{Hom lineales} \\ M \otimes_R N \to L \end{matrix} \right\}$$

$$\varphi \longmapsto \tilde{\varphi}.$$

Proposición:

M, N, P R-mod. Entonces:

1. $M \otimes_R N \simeq N \otimes_R M$

2. $(M \otimes N) \otimes_R P \cong M \otimes_R (N \otimes_R P) \cong M \otimes_R N \otimes_R P$

3. $(M \oplus N) \otimes_R P \cong (M \otimes_R P) \oplus (N \otimes_R P)$

4. $R \otimes_R M \simeq M.$

Obs: 1

R-mod M

Decimos que $x \in M$ es un elemento con torsión, si existe $r \in R$, $r \neq 0$, tal que $r \cdot x = 0$

Obs2: $R = \mathbb{Z}$, $M = \mathbb{Z}$, $N = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$

$$\rightarrow M \otimes_{\mathbb{Z}} N = \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Z}_2$$

$$\underline{\underline{2 \otimes x}} \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N \Rightarrow 2 \otimes x = 2(1 \otimes x) = 1 \otimes 2x$$
$$= 1 \otimes 0 = 0 \in M \otimes_{\mathbb{Z}} N.$$

Ejercicio:

- Sea $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M'' \to 0$ una sucesión exacta de R-mod.

- Sea N un R-mod.

Entonces

$$M' \otimes_R N \xrightarrow{f \otimes 1} M \otimes_R N \xrightarrow{g \otimes 1} M'' \otimes_R N \to 0$$

es exacta

(i.e. $- \otimes_R N$ es exacto por derecha).

Ejm: / cuidado: ($\mathbb{Z}$-mod $\leftrightarrow$ grupo abeliano)

$R = \mathbb{Z}$

Consideremos $\quad 0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{f} \mathbb{Z}$ $\quad$ <u>f inyectiva</u>

$\qquad\qquad\qquad\quad x \longrightarrow 2x$

Sea $N = \mathbb{Z}_2$ y consideremos

$$\mathbb{Z} \otimes N \xrightarrow{\tilde{f} = f \otimes 1} \mathbb{Z} \otimes N$$

$\tilde{f}$ <u>no es inyectiva</u> pues

$$\tilde{f}(x \otimes y) = (f \otimes 1)(x \otimes y) = 2x \otimes y = 0$$

Definición:

Decimos que un R-mod N es plano (ó flat) si

$$- \otimes_R N : M \longrightarrow M \otimes_R N$$

es un functor exacto.

i.e dada $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ exacta se tiene:

$$\boxed{0 \to M' \otimes_R N \to M \otimes_R N} \to M'' \otimes_R N \to 0$$

es exacta

Obs:

R-mod N es plano $\Longleftrightarrow$ para todo monomorfismo $M' \to M$ de R-mod, el homomorfismo inducido

$$N \otimes_R M' \to N \otimes_R M$$

es monomorfismo (hom. inyectivo).

Obs:

- R anillo S cjto. multiplicativo.
- M R-modulo.

$$\Rightarrow \quad S^{-1}M \simeq (S^{-1}R) \otimes_R M \quad (*)$$

En particular,

$S^{-1}R$ es un R-mod. plano.

(pues localiz. es un functor exacto + $(*)$).

Prop: M, N R-mod.

- $\exists$ único isomorfismo de $S^{-1}R$-mod.

$$f: S^{-1}M \otimes_{S^{-1}R} S^{-1}N \longrightarrow S^{-1}(M \otimes_R N)$$

$$f\left(\left(\frac{m}{s}\right) \otimes \left(\frac{n}{t}\right)\right) = \frac{m \otimes n}{st}$$

- En particular si $\mathfrak{p}$ ideal primo, entonces

$$M_{\mathfrak{p}} \otimes_{R_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \cong (M \otimes_R N)_{\mathfrak{p}}.$$

Recordar:

M es R-mod de presentación finita

si existe una sucesión exacta

$$H \to G \to M \to 0$$

con H, G módulos libres finitam. generados.

Teorema (Hom conmuta con cambio de base plano)

Sea S una R-alg. plana y M, N R-módulos tales que M es de presentación finita.

Entonces, el homomorfismo canónico

$$\theta_M : S \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M,N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_S(S \otimes_R M, S \otimes_R N)$$

$$s \otimes f \longmapsto s(1_S \otimes f)$$

es un isomorfismo.

(Hom y localiz. conmutan).

Corolario (2) Si W es un cjto. multiplicativo de R y M es un R-mod. de presentación finita, entonces

$$W^{-1}\operatorname{Hom}_R(M,N) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{W^{-1}R}(W^{-1}M, W^{-1}N)$$

⌈usar el hecho de que $W^{-1}R$ es R-alg plana en el Teorema anterior⌋.

Corolario: R anillo noetheriano.

Sea M R-mod. finitamente generado.

M proyectivo $\iff$ M localmente libre

(i.e. M_p es R_p-mod libre para todo ideal primo $p \subseteq R$).

($\Rightarrow$) ✓

($\Leftarrow$) P proyectivo $\iff$ $\mathrm{Hom}_R(P, -)$ es exacto.

Basta mostrar

- $\mathrm{Hom}(M, -)$ es exacto.

$$0 \to N \to N' \to N'' \to 0$$

$\mathfrak{p} \subseteq R$ ideal primo

$$0 \to N_{\mathfrak{p}} \to N'_{\mathfrak{p}} \to N''_{\mathfrak{p}} \to 0$$

como $M_{\mathfrak{p}}$ es proy (y por tanto libre sobre $R_{\mathfrak{p}}$)

$$\Rightarrow 0 \to \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N'_{\mathfrak{p}}) \to \mathrm{Hom}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}, N''_{\mathfrak{p}}) \to 0.$$

exacta

esta sucesión corresponde a la localiz. de

$$0 \to \mathrm{Hom}_R(M,N) \to \mathrm{Hom}_R(M,N') \xrightarrow{f} \mathrm{Hom}_R(M,N'') \to 0$$

Así

$$(\mathrm{coker}\, f)_p = 0 \qquad \forall\, p \leq R$$

ideal primo.

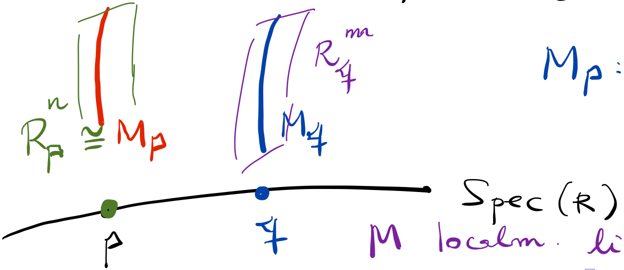
$$\Rightarrow \mathrm{coker}\, f = 0.$$

$\Rightarrow f$ sobre.

- Prueba del Teorema (próx. clase: ver Proposición 2.10 de Eisenbud)

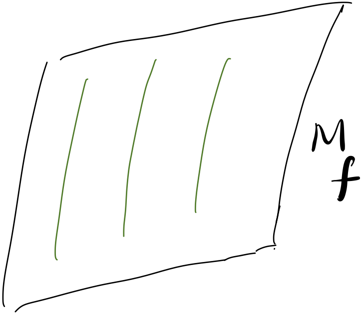
- En este contexto, se tiene: R (noetheriano)

M R-módulo finitam. generado proyectivo



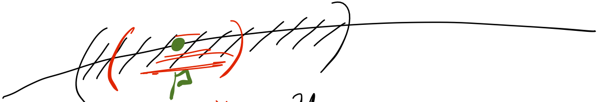
$M_{\mathfrak{p}}$: módulos libres sobre $R_{\mathfrak{p}}$.

M localm. libre



M_f : $\leftarrow$ localiz. de M en $S=\{f^n\}_{n\geq 0}$

$\underset{\text{abierto}}{\mathcal{U}_f} \rightsquigarrow \underset{R_f\text{-mod.}}{M_f}$



$\mathrm{Spec}(R)$

$\mathcal{U}_g$. $\mathcal{U}_f$ (abierto)

$f \in R$

¿Relación entre

$\mathcal{U}_g$, $\mathcal{U}_f$, M_g, M_f?

$\mathcal{U}_f$ abierto, $\mathcal{U}_f = \mathrm{Spec}(R)\setminus V(f)$

$$\begin{array}{ccc}
M & & \mathcal{M} \leftarrow \text{haz sobre } \operatorname{Spec}(R). \\
\Big| \; \text{R-mod} \quad (*) & & \Big\downarrow \\
R & & \operatorname{Spec}(R)
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\mathcal{M} \\
\vdots \quad (*) \\
\mathcal{O}_X
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\mathcal{O}_X \\
\Big| \\
X = \operatorname{Spec}(R)
\end{array}$$

$\mathcal{O}_X \leftarrow$ haz ~~canónico~~ estructural

$\mathcal{M}$ haz de $\mathcal{O}_X$-módulos

Sea U_f abierto básico de $X = \operatorname{Spec}(R)$

i.e. $U_f = X \setminus V(f)$.

- $\mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) = R_f$ (se pueden pensar como funciones meromorfas con polos a lo largo de $V(f)$)

"ceros de f"

- Sean $f, g \in R$

Notar (verificar!)

$$\mathcal{U}_f \subseteq \mathcal{U}_g \iff \boxed{\text{existe } n \geq 1 \quad f^n \in R \cdot g}$$

$g/1 \in (R_f)^\times$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U}_f & \subseteq & \mathcal{U}_g \\ \updownarrow & & \updownarrow \\ \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) & \xleftarrow[\rho_{f,g}]{} & \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_g) \end{array}$$

tenemos un homomorfismo de anillos

$$\rho_{f,g} : R_g \longrightarrow R_f \cong {}_{gf}(R_f)^{\times}.$$

tal que

$$\rho_{f,g} \circ i_g = i_f .$$

Denotamos

$$i_f : R \to R_f$$
$$a \to \frac{a}{1}$$

$$i_g : R \to R_g$$
$$a \to \frac{a}{1}$$

homomorfismo de restricción de $\mathcal{U}_g$ a $\mathcal{U}_f$.

Objetivo: La asignación

$$\mathcal{U}_f \longrightarrow \mathcal{O}_X(\mathcal{U}_f) = R_f$$

define un haz: (el haz estructural $\mathcal{O}_X$ sobre X).