Algebra conmutativa. Clase 16.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

5 de noviembre de 2020

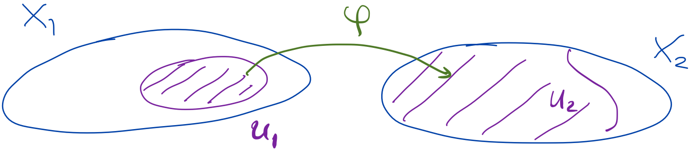
Ejemplo / Obs: (pegado de esquemas)

Sean X_1, X_2 esquemas.

Sean $U_1 \subseteq X_1$, $U_2 \subseteq X_2$ abiertos y sea

$$\varphi : (U_1, \mathcal{O}_{X_1}|_{U_1}) \xrightarrow{\sim} (U_2, \mathcal{O}_{X_2}|_{U_2})$$

isomorfismo de espacios localm. anillados.



Entonces podemos definir (o asociar a esta data) un esquema $(X, \mathcal{O}_X)$ ← pegado de X_1 y X_2 a través de U_1, U_2 usando φ.

Como espacio top. X es el espacio cociente de la unión disjunta de X_1 y X_2 por la rel. de equivalencia $x_1 \sim \varphi(x_1)$ para cada $x_1 \in U_1$.

(X con top. cociente).

Tenemos así: $i_1 : X_1 \to X$

$i_2 : X_2 \to X$

de modo que $V \subseteq X$ abierto si y sólo si

$i_1^{-1}(V) \subseteq X_1$ abierto y $i_2^{-1}(V) \subseteq X_2$ abierto.

$\mathcal{O}_X$ se define de la sgte. manera

Dado $V \subseteq X$ abierto

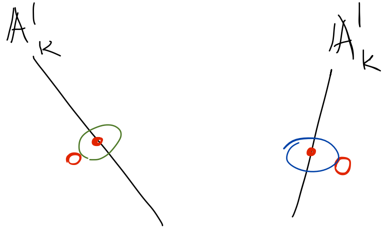
$$\mathcal{O}_X(V) = \left\{ \langle s_1, s_2 \rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} s_1 \in \mathcal{O}_{X_1}(i_1^{-1}(V)) \\ s_2 \in \mathcal{O}_{X_2}(i_2^{-1}(V)) \\ \varphi^{\#}\left(s_1|_{i_1^{-1}(V)\cap U_1} \right) = s_2|_{i_2^{-1}(V)\cap U_2} \end{array} \right\}.$$

<u>Así</u>:

$(X, \mathcal{O}_X)$ es un espacio localm. anillado.

Más aún, cada punto de X tiene una vecindad afín, por tanto X es un esquema.

Aplicación del ejmpl obs:



ⓐ K cuerpo.

$$X_1 = \mathbb{A}^1_K \cong \operatorname{Spec} K[T]$$

$$X_2 = \mathbb{A}^1_K \cong \operatorname{Spec} K[T].$$

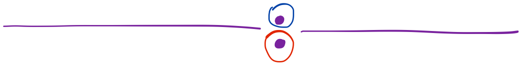
Sea P punto correspondiente al ideal max. (T).

Consideremos los abiertos $U_1 = \mathbb{A}^1_K - \{P\}$

$$U_2 = \mathbb{A}^1_K - \{P\}.$$

Sea X el esquema obtenido de pegar X_1 con X_2 a lo largo de U_1, U_2 usando $\underline{\underline{id}}: U_1 \xrightarrow{\sim} U_2$

Obtenemos así la "recta afín con un punto doble p".



(b) Consideremos

$f \in R$ $\quad V(f) = V((f))$ cerrado.

$D(f) = \underbrace{\operatorname{Spec} R \setminus V(f)}$ abierto principal.

$$X_1 = \mathbb{A}^1_K \ (= \operatorname{Spec} K[x])$$

$$X_2 = \mathbb{A}^1_K$$

Sea $0 \leftarrow$ punto cerrado asociado al ideal maximal (x).

- $U_1 = \mathbb{A}^1_K - \{0\} = D(x) \cong \operatorname{Spec} K[x]_{(x)} \cong \operatorname{Spec} K[x, x^{-1}]$
- $U_2 = \mathbb{A}^1_K - \{0\} = D(x) \cong \operatorname{Spec} K[x]_{(x)} \cong \operatorname{Spec} K[x, x^{-1}]$.

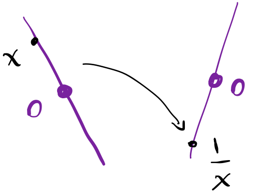
Tomamos $\varphi : U_1 \to U_2$ el isomorfismo dado por

$$x \longmapsto x^{-1}.$$

Así obtenemos el esquema

$\mathbb{P}^1_k$: recta projectiva obtenida al pegar $\mathbb{A}^1_k$ y $\mathbb{A}^1_k$ a través de

$$\varphi(x) = x^{-1}.$$



generaliza

$\leftarrow$ construcción familiar de esfera de Riemann.

Espacio proyectivo $\mathbb{P}^n_R$

Sea R un anillo. Definimos $\mathbb{P}^n_R$ (esquema sobre R) pegando $n+1$ copias del espacio afín $\mathbb{A}^n_R$.

Denotamos por $U_i = \mathbb{A}^n_R$ las distintas copias de espacio afín.

$i = 0, \ldots, n.$

Para cada i

$$U_i = \operatorname{Spec} R\left[\frac{X_0}{X_i}, \frac{X_1}{X_i}, \ldots, \widehat{\frac{X_i}{X_i}}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]$$

(anillo de pol. en n indeterminadas)

Obs: podemos pensar en los anillos Spec $R\left[\frac{X_0}{X_i},\dots,\widehat{\frac{X_i}{X_i}},\dots\frac{X_n}{X_i}\right]$ como subanillos de

$$R[X_0, X_1, \dots, X_n, X_0^{-1}, \dots, X_n^{-1}]$$

(idea: $\mathbb{A}^1$ - $\{0\}$ $\longleftrightarrow$ variedad $xy=1$ en $\mathbb{A}^2$).

Data del pegado:

Para $0 \leq i, j \leq n$ sea $U_{ij} = D_{U_i}\left(\frac{X_j}{X_i}\right) \subseteq U_i$ si $j \neq i$.

$U_{ii} = U_i$ (si $j=i$)

Si $i \neq j$, definimos $\mathcal{U}_i \qquad \mathcal{U}_j$

$$\varphi_{ji} : \mathcal{U}_{ij} \longrightarrow \mathcal{U}_{ji}$$

$\mathcal{U}_{ij} \subseteq_{\text{abierto}} \mathcal{U}_i$, $\quad \mathcal{U}_{ji} \subseteq_{\text{abierto}} \mathcal{U}_j$

como el isomorfismo definido por la igualdad

$$R\left[\frac{X_0}{X_i}, \ldots, \frac{\hat{X_i}}{X_i}, \ldots, \frac{X_n}{X_i}\right]_{\frac{X_i}{X_j}} \longrightarrow R\left[\frac{X_0}{X_j}, \ldots, \frac{\hat{X_j}}{X_j}, \ldots, \frac{X_n}{X_j}\right]_{\frac{X_j}{X_i}}$$

(como subanillos de $\underbrace{R[X_0, \ldots, X_n, X_0^{-1}, \ldots, X_n^{-1}]}$).

Usando los φ_{ij} podemos pegar las $n+1$ copias de $\mathbb{A}^n_R$

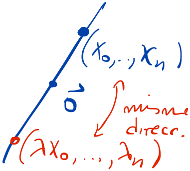
y obtener el esquema

$$\boxed{\mathbb{P}^n_R}.$$

Clásico: $\mathbb{P}^n_K = \underbrace{K^{n+1}-\{0\}}_{0 \longleftrightarrow \text{ ideal } (x_0,x_1,\dots,x_n)} \big/ K^* \longleftrightarrow$ rectas que pasan por $\vec{0}$ en K^{n+1}.

$[x_0:\dots:x_n]$ coord. homog. de $\mathbb{P}^n_K$.

$\uparrow$ determina dirección de la recta.



$$\mathbb{P}^n_K \qquad [X_0 : X_1 : \dots : X_n]$$

$X_0 \neq 0$ $\qquad$ $X_i \neq 0$ $\qquad$ . . . $\qquad$ $(n+1)$ opciones. $\qquad$ $X_n \neq 0$

$U_0 = \{x \in \mathbb{P}^n_K \mid X_0 \neq 0\}$ $\qquad$ $U_i = \{x \in \mathbb{P}^n_K \mid X_i \neq 0\}$ $\qquad$ $U_n = \{x \in \mathbb{P}^n_K \mid X_n \neq 0\}$

$\updownarrow$ isomorfo

$$\left[1 : \frac{X_1}{X_0} : \frac{X_2}{X_0} : \dots : \frac{X_n}{X_0}\right] \xleftrightarrow{\frac{X_0}{X_i}} \left[\frac{X_0}{X_n} : \dots : \widehat{\frac{X_i}{X_i}} : \dots : \frac{X_n}{X_0}\right]$$

$$(Y_1^{(0)}, Y_2^{(0)}, \dots, Y_n^{(0)}) \qquad\qquad (Y_1^{(i)}, \dots, Y_n^{(i)})$$

$$\mathbb{A}^n_K. \qquad\qquad U_i \approx \mathbb{A}^n_K$$

Obs / Ejercicio:

Mostrar que el homomorfismo (canónico) de anillos

$$R \to \underbrace{\Gamma\left(\mathbb{P}^n_R, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n_R}\right)}$$

es un isomorfismo.

- Para $n>0$ esto implica que $\mathbb{P}^n_R$ no es afín (de lo contrario, tendríamos

$$\mathbb{P}^n_R \simeq \operatorname{Spec} R\ ).$$

lo cual no es cierto.

Esquemas proyectivos (definición de Proj R)

- generalización de la noción de espacio proyectivo -

Sea $S = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$ un anillo graduado.

(por ejm: $S = k[x_1, \dots, x_n] = \bigoplus_{d \geq 0} S_d$

donde S_d: pol. hom. de grado d).

Si $f \in S_d$, decimos que f es homogéneo de grado d.

$$- \deg f = d -$$

- Definimos

$$S_+ = \bigoplus_{d>0} S_d \text{ , el ideal irrelevante.}$$

- Un ideal $I \subseteq S$ es homogéneo si está generado por elem. homogéneos.

- Definimos

$$\operatorname{Proj} S = \left\{ \mathfrak{p} \subseteq S \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathfrak{p} \text{ ideal primo homogéneo} \\ \text{que no contiene a } S_+ \end{array} \right\}.$$

Definimos una topología en Proj S de la sgte. manera:

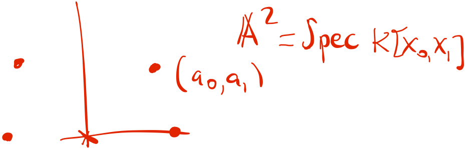
(*) Si $I \subseteq S$ ideal homogéneo, definimos

$$V(I) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid \mathfrak{p} \supseteq I \}.$$

- Los $V(I)$ forman los cerrados de la top. de Zariski de Proj S.

Ejm:

$k = \overline{k}$



$$\mathbb{P}^1_k := \mathrm{Proj}\, k[x_0, x_1].$$

Los ideales maximales de $k[x_0, x_1]$ son de la forma $(x_0 - a_0, x_1 - a_1)$.

$$(x_0 - a_0, x_1 - a_1) \text{ homogéneo} \iff \begin{array}{l} a_0 = 0 \\ a_1 = 0. \end{array}$$

Es decir, los ideales maximales de $k[x_0, x_1]$ no están en $\mathrm{Proj}\, k[x_0, x_1]$.

Notar:

$K[x_0, x_1]$ tiene dim. 2.

y todos los ideales primos no maximales de $K[x_0, x_1]$ son o bien 0 ó principales

(— veremos esto con más detalle —)

Consideremos $\mathfrak{p} = (f)$ con f homogéneo.

Como $K = \bar{K} \Rightarrow f$ se descompone en factores lineales.

Así, si $\underline{\mathfrak{p} \text{ es primo}}$, $\mathfrak{p} \neq (0)$.

$$\Rightarrow \mathfrak{p} = (a_1 x_0 - a_0 x_1)$$

con $a_i \in K$, (a_1, a_0 no son simult. cero).

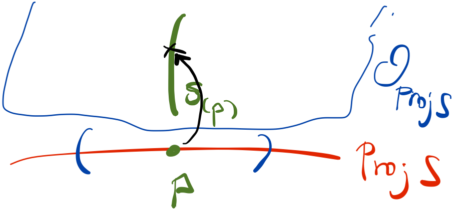
Notemos que el par (a_0, a_1) está bien def. salvo mult. por un elem. de $K^\times$.

<u>Así</u>

$$\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} K[x_0, x_1] \longleftrightarrow [a_0 : a_1] \text{ en } \left(K^2 - \{0\}\right)/K^*.$$

$\mathfrak{p} \neq 0$

Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S$.



Denotemos por

$$T = \{ f \in S \setminus \mathfrak{p} : f \text{ homogéneo} \} \subseteq S.$$

Notar T es un cjto. multiplicativo.

Sea $S_{(\mathfrak{p})} \subseteq T^{-1}S$ el subanillo que consiste de los elem. de grado 0, donde

$$\deg\left(\frac{a}{b}\right) = \deg a - \deg b.$$

⌈ El requerimiento grado 0 es para poder definir funciones en Proj S ⌋.

Similarmente $f \in S$, f homogéneo, escribimos $S_{(f)} \subseteq S_f$ para denotar el cjto de elem. de grado 0 de S_f.

Haz estructural $\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}$:

Para $\mathcal{U} \subseteq \operatorname{Proj} S$ abierto. definimos

$$\mathcal{O}_{\operatorname{Proj} S}(\mathcal{U}) = \Big\{ s : \mathcal{U} \longrightarrow \bigsqcup_{p \in \mathcal{U}} S_{(p)} \text{ sujetas a las sgtes. condiciones}$$

- $s(p) \in S_{(p)}$
- para cada $p \in \mathcal{U}$, existe una vecindad V de p en $\mathcal{U}$ y elem. homogéneos del mismo grado $a, f \in S$ tales que para todo $q \in V$, $f \notin q$, y $s(q) = \frac{a}{f}$ en $S_{(q)}$. $\Big\}$.

Proposición:

- $f \in S_+$ homogéneo.

Sea $D_+(f) = \{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Proj} S \mid f \notin \mathfrak{p} \}$.

$$\left(D_+(f), \mathcal{O}|_{D_+(f)} \right) \underset{\text{iso}}{\simeq} \operatorname{Spec} S_{(f)}.$$