Algebra conmutativa. Clase 3.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

8 de septiembre de 2020

Anillo: R

$\rightsquigarrow$ $\boxed{\mathrm{Spec}(R)}$ con Top. de Zariski:

asignar

- cerrados: $V(I) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R) \mid I \subseteq \mathfrak{p} \}$

  I ideal de R.

- abiertos: $\mathrm{Spec}(R) \setminus V(I)$

  abiertos básicos:

  Dado $f \in R$, definimos

  $$\underbrace{D(f)}_{\text{abierto principal}} = \mathrm{Spec}(R) \setminus V((f)).$$

Notar: $\mathrm{Spec}(R) \setminus V(I) = \bigcup_{f \in I} D(f)$.

Sea $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ (i.e. $\mathfrak{p}$ ideal primo de R):

$\{\mathfrak{p}\}$ subconjunto cerrado de R $\iff$ $\mathfrak{p}$ ideal maximal de R.

(i.e. $\overline{\{\mathfrak{p}\}}^{\text{Zar}} = \{\mathfrak{p}\}$)

Nota / verificar: $V(\mathfrak{p}) = \overline{\{\mathfrak{p}\}}$.

ideal primo

Por otro lado (clase pasada)

$\pi : R \xrightarrow[\text{sobre}]{} R/\mathfrak{p}$ $\Longrightarrow$ $\operatorname{Spec}\pi : \operatorname{Spec}(R/\mathfrak{p}) \longrightarrow \operatorname{Spec}(R)$

— homeomorf. sobre imagen
inyectiva

cuya imagen es $\underline{V(\mathfrak{p})}$.

Observaciones:

- $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ ($\mathfrak{p}$ ideal primo de R)

puntos de $\operatorname{Spec}(R)$

$\Rightarrow$ $R/\mathfrak{p}$: dominio integral

$\Rightarrow$ cuerpo de fracciones de $R/\mathfrak{p}$: $K(\mathfrak{p})$

$$\boxed{R \longrightarrow R/\mathfrak{p} \hookrightarrow K(\mathfrak{p})}$$

Sea $f \in R$.

f se puede considerar como una función en $\mathrm{Spec}(R)$.

¿cómo así?

$x \in \mathrm{Spec}(R) \longleftrightarrow x$ representa ideal primo $\mathfrak{P}_x$.

Definimos $f(x) := f \pmod{\mathfrak{P}_x}$

Es más $f(x) \in K(\mathfrak{p})$.

Así: R es considerado ANILLO DE COORD de $\mathrm{Spec}(R)$.

Obs: distintos elementos de R pueden definir la misma función en $\mathrm{Spec}(R)$:

$$f, g \in R \Rightarrow f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in \mathrm{Spec}(R)$$

$$\Rightarrow f - g(x) = 0 \quad \forall\, x \in \mathrm{Spec}(R)$$

$$\Rightarrow f - g \in P_x \quad \forall\, P_x \text{ ideal primo de } R$$

$$\Rightarrow f - g \in \mathrm{Nil}(R)$$

Lema:

Una función (elem. de R) que se anula en todos los puntos de Spec(R) está representada por un elem. nilpotente de R.

$$\left(\Longleftrightarrow \ Nil(R) = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)} \mathfrak{p} \right).$$

(esto es
es coherente
con $\rightarrow$ $\mathrm{Spec}(R_{red}) \xleftrightarrow{\text{homeo}} \mathrm{Spec}(R)$)

Anillo de coord $\quad R_{red} \quad\quad \underline{\underline{R}}$

Obs/vista: Los elementos nilpotentes de R son importantes porque permiten formalizar la noción de tangencia, deformación infinitesimal, alrededor de ciertos puntos.

$$\mathbb{C}[x]/(x^2)$$

$\bar{x}$ nilpotente

$$\mathbb{C}[x]/(x) \cong \mathbb{C}$$

$$X = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[x]/(x^2)\right) = \{pt\}$$

$$Y = \mathrm{Spec}\left(\mathbb{C}[x]/(x)\right) = \{pt\}.$$

$\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$

$(\{pt\}, \mathbb{C})$

$$(\{pt\}, \mathcal{O}(X)) = \left(\{pt\}, \mathbb{C}[x]/(x^2)\right)$$

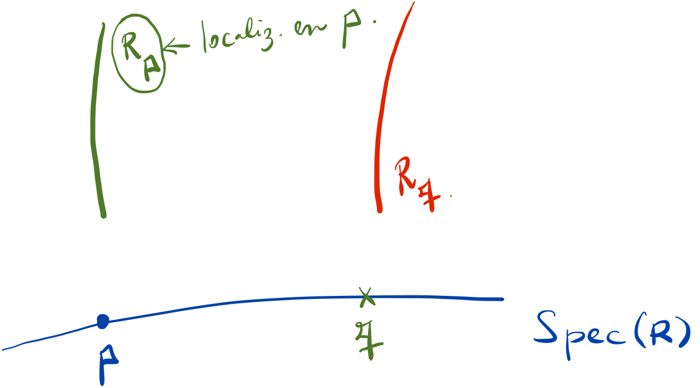
$$(\{pt\}, \mathcal{O}(Y))$$

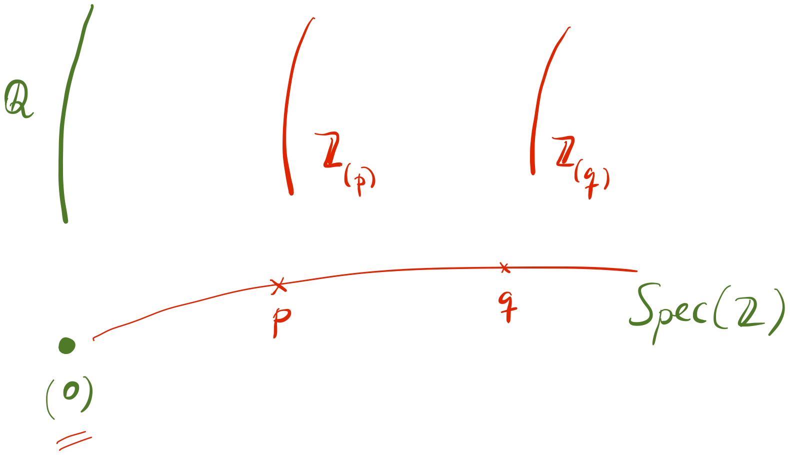
espacio top. anillo funciones

$$(\mathrm{Spec}(R),\ R)$$

$\leftarrow$ ringed spaces ("espacios anillados").

Nos interesa estudiar / describir





Obs: $f \in I \subseteq R \Rightarrow f$ define función cero en $V(I) = \{ \mathfrak{p} \in \mathrm{Spec} R \mid \mathfrak{p} \supseteq I \}$.

$V(I) = V(\mathrm{rad}(I))$.

$R = \mathbb{C}[x]$

Ejm:

- $\mathrm{Spec}(R) = \mathbb{C} \cup \{*\}$ punto genérico
- $\mathrm{Specm}(R) = \mathbb{C}$.

esp. top.

- X Hausdorff, compacto
- $R = C(X) = \{ f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ continua} \}$

anillo.

Obj:

$$\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(C(X)) = ?$$

En su lugar vamos a describir

$$\mathrm{Specm}\, R = \{ \mathfrak{m} \subseteq R \mid \mathfrak{m} \text{ maximal} \}.$$

puntos cerrados.

Notemos: para cada $x \in X$ podemos definir

$$\mathfrak{m}_x = \{ f \in \underbrace{C(X)}_{R} \mid f(x) = 0 \}.$$

$\mathfrak{m}_x$ ideal maximal

$$\mathfrak{m}_x = \operatorname{Ker}\left(ev_x : \begin{array}{ccc} R & \twoheadrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(x) \end{array} \right)$$

Denotemos por $\tilde{X} = \operatorname{Spec\,max} R$.

Definimos la función $\mu : \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \tilde{X} \\ x & \longmapsto & \mathfrak{m}_x \end{array}$

Afirmación 1: μ biyectiva.

- Sobreyectividad: ✓

Sea $\mathfrak{m}$ un ideal maximal de $\frac{C(X)}{\mathbb{R}}$.

Debemos probar que $\mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$ para algún $x \in X$.

Sea $V = V(\mathfrak{m}) = \{x \in X \mid f(x) = 0 \;\; \forall f \in \mathfrak{m}\}$.

Basta mostrar que V es no vacío, pues en ese caso $\exists\, x_0 \in X$ que anula todas las funciones continuas de $\mathfrak{m}$ y por tanto

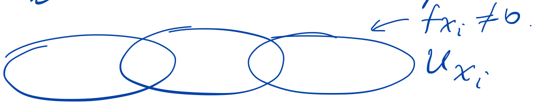
$\mathfrak{m} \subseteq \mathfrak{m}_{x_0}$, pero $\mathfrak{m}$ maximal $\Rightarrow \mathfrak{m} = \mathfrak{m}_x$.

Supongamos (por contradicción) que V es vacío.

Entonces para cada $x \in X$, existe $f_x \in \mathfrak{m}$ tal que $f_x(x) \neq 0$.

Por continuidad, existe una vecindad U_x de x (U_x: abierto) donde f_x no se anula.

Por compacidad, existe un # finito $U_{x_1}, U_{x_2}, \dots, U_{x_n}$ de dichos abiertos que cubren X.



Consideramos

$$f = f_{x_1}^2 + f_{x_2}^2 + \dots + f_{x_n}^2 \in \underline{\underline{\mathfrak{m}}}.$$

Se tiene f no se anula en todo X.

$\Rightarrow f \in C(X)$ es una <u>unidad</u>

(i.e $\frac{1}{f}$ es continua)

$\Rightarrow \mathfrak{m} = C(X)$ $(\Rightarrow \Leftarrow)$ $\therefore$ $V(\mathfrak{m})$ no <u>vacío</u>.

pues $\mathfrak{m} \subsetneq C(X)$!

· inyectividad:

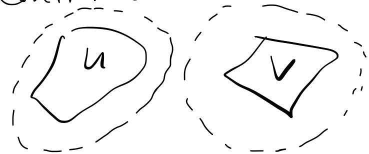
Si $x, y \in X$

$$x \neq y \Rightarrow \underset{\substack{\| \\ m_x}}{\mu(x)} \neq \underset{\substack{\| \\ m_y}}{\mu(y)}.$$

Basta mostrar que existe una función continua $f : X \to \mathbb{R}$ que se anule en uno de ellos pero no en el otro.

Lema de Urysohn:

Hausdorff + compacto X $\Rightarrow$ normal: dados dos cerrados disjuntos $U, V \subseteq X$ existen abiertos disjuntos que los contienen



X normal $\Leftrightarrow$ para cualesquiera cerrados Y, Z disjuntos, existe $f : X \to [0,1]$ continua tal que $f|_Y = 0 \wedge f|_Z = 1$.

Aplicamos el lema de Urysohn a X con los cerrados $\{x\}$, $\{y\}$.

$$\exists\, f : X \to [0,1] \qquad f(x) = 0$$
$$f(y) = 1$$

$\Rightarrow\ m_x \neq m_y$.

$\Rightarrow \boxed{\mu \text{ biyectiva}}$ ✓

Afirmación 2:

μ es un homeomorfismo.

Dado $f \in C(X)$ sean

$$\mathcal{U}_f = \{ x \in X \mid f(x) \neq 0 \}. \quad \text{abierto de } X$$

$$\tilde{\mathcal{U}}_f = \{ m \in \tilde{X} \mid f \notin m \}_{\text{abierto de } \tilde{X}}$$

(top. Zariski)

Afirmación:

$$\mu(\mathcal{U}_f) = \tilde{\mathcal{U}}_f .$$

— Ejercicio! —

Notar que los cjtos $\mathcal{U}_f$ y $\tilde{\mathcal{U}}_f$ forman bases de las top. respectivas en X y $\tilde{X}$.

$\therefore$ μ es un <u>homeomorfismo</u>

$$(X, \tau) \underset{\text{homeom.}}{\simeq} (\tilde{X}, \text{top. Zariski en } \tilde{X}.)$$

X Hausdorff
compacto

i.e. podemos recuperar X a partir de las funciones continuas $C(X)$.

geom $\longleftrightarrow$ alg.

$X \leftrightsquigarrow C(X).$

R anillo

$$\left\{\begin{array}{c}\text{ideales}\\ \text{primos}\\ \text{de}\\ R\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{puntos}\\ \text{de}\\ \operatorname{Spec} R\end{array}\right\} \overset{1:1}{\longleftrightarrow} \left\{\begin{array}{c}\text{conjuntos}\\ \text{cerrados}\\ \text{irreducibles}\\ \text{de}\\ \operatorname{Spec}(R)\end{array}\right\}$$