Algebra conmutativa. Clase 5.

Richard Gonzales

Pontificia Universidad Católica del Perú

15 de septiembre de 2020

Definición: (anillo local)

R anillo local si sólo tiene un único ideal maximal $\mathfrak{m} \subseteq R$.

- Obs: $(R, \mathfrak{m})$ local $\Rightarrow$
  - $\operatorname{Specmax}(R) = \{\mathfrak{m}\}$.
  - $\operatorname{Spec} R$ tiene un solo punto cerrado.

- Obs: $(R, \mathfrak{m})$ local $\Rightarrow$ $R/\mathfrak{m}$ $\leftarrow$ se denomina cuerpo residual

  cuerpo

Ejercicio: (R anillo conmutativo)

1. Sea R anillo, $\mathfrak{m} \subsetneq R$ ideal de R.
Si todo $x \in R \setminus \mathfrak{m}$ es una unidad de R entonces R es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$.

2. R anillo, $\mathfrak{m}$ ideal.
si todo elem. de $1+\mathfrak{m}$ es unidad de R entonces R es un anillo local con ideal maximal $\mathfrak{m}$.

Ejemplo: R anillo

Sea $\mathfrak{p} \subseteq R$ ideal primo de R.

Sabemos $S = R \setminus \mathfrak{p}$ es un cjto. multiplicativo

Denotamos por $R_{\mathfrak{p}}$ el anillo $S^{-1}R$.

Los elem. $\frac{a}{s} \in R_{\mathfrak{p}}$, con $a \in \mathfrak{p}$, forman un ideal $\underline{\mathfrak{m} \text{ de } R_{\mathfrak{p}}}$.

si $\frac{b}{t} \notin \underline{\underline{\mathfrak{m}}}$, entonces $b \notin \mathfrak{p}$, i.e $b \in S$.

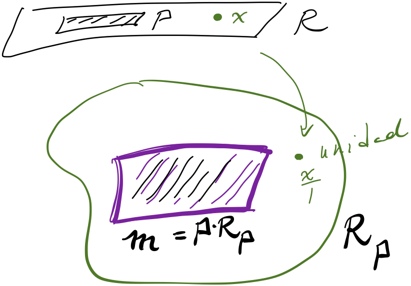
$\Rightarrow$ b es unidad de $R_{\mathfrak{p}}$ y así $\frac{b}{t}$ $\underline{\text{unidad de } R_{\mathfrak{p}}}$.

Por tanto, por el ejercicio (item 1),

$R_{\mathfrak{p}}$ es un anillo local con ideal maximal

$$\mathfrak{m} = \left\{ \frac{a}{b} \in R_{\mathfrak{p}} \;\middle|\; a \in \mathfrak{p} \right\}.$$

$$R \downarrow R_{\mathfrak{p}} = S^{-1}R$$



Obs: El objetivo es probar que

$f \in R$

$$\mathrm{Spec}(R) - V((f)) = D(f) \leftarrow \underline{\text{abierto básico}}$$

$$D(f) \underset{\text{homeom.}}{\simeq} \mathrm{Spec}(R_f).$$

Para ello necesitamos determinar el comportam. de los ideales en $\underline{S^{-1}R}$.

Teorema 1 R anillo.

S cjto. multiplicativo.

Los ideales primos de $S^{-1}R$ están en biyección natural con los ideales primos de R que son disjuntos de S, i.e.

$$\operatorname{Spec}(S^{-1}R) \cong \{\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R \mid \mathfrak{p} \cap S = \emptyset\}.$$

Lema: $f : A \to B$ homomf anillos.

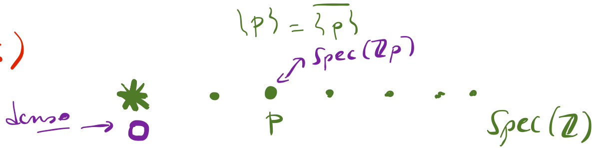
se tiene $\mathrm{Spec}(f) : \mathrm{Spec}(B) \to \mathrm{Spec}(A)$.

$$p \longmapsto f^{-1}(p)$$

- $\mathrm{Spec}(f)$ continua ✓

- $\boxed{\cdot}$ Si f corresponde a la localización $A \to S^{-1}A$, entonces $\mathrm{Spec}(f)$ establece un homeomorfismo entre $\mathrm{Spec}(S^{-1}A)$ y el subespacio $\{p \in \mathrm{Spec}(A) \mid p \cap S = \phi\}$

(Prueba: pendiente)



Ejm:

- $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = \{0\} \cup \{(p) \mid p : \text{primo en } \mathbb{Z}\}$.

- $\mathbb{Z} \xrightarrow{\pi} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ homomorfismo sobreyectivo

$\rightsquigarrow \mathrm{Spec}(\pi) : \underbrace{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})}_{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)} \hookrightarrow \mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ inmersión.

$\mathrm{Spec}(\underline{\underline{\mathbb{Z}_p}}) \xrightarrow{\sim} V(p) = \{p\}$.

- $\mathbb{Z} \to \underbrace{S^{-1}\mathbb{Z}}_{\mathbb{Q}}$ con $S = \mathbb{Z} - \{0\}$.

$$\underbrace{\operatorname{Spec}(S^{-1}\mathbb{Z})}_{\operatorname{Spec}(\mathbb{Q})} \xrightarrow[\text{Lema}]{\sim} \{ p \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid p \cap (\mathbb{Z} - \{0\}) = \emptyset \} = \{0\}$$

- En otras palabras, podemos pensar en $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z})$ como la unión

$$\longrightarrow \operatorname{Spec}\underline{\underline{\mathbb{Q}}} \cup \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_2) \cup \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_3) \cup \dots$$

- $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)})$

$$\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_{(p)} = S^{-1}\mathbb{Z} \qquad S = \mathbb{Z} - (p).$$

Lemma: $\operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_{(p)}) \xrightarrow[\text{homeo}]{\sim} \underbrace{\{ \mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}\mathbb{Z} \mid \mathfrak{p} \cap S = \phi \}}_{\{p,\, 0\}.}$

$$\simeq \operatorname{Spec}(\mathbb{Z}_p) \cup \operatorname{Spec}(\mathbb{Q}).$$

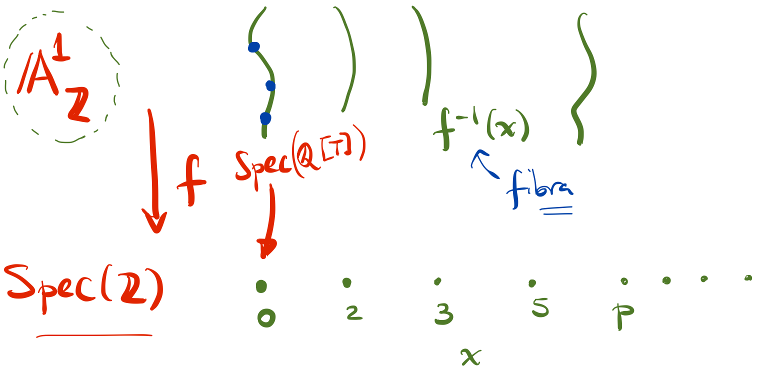
Ejm:

Consideremos $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}[T]$

homomorfismo canónico.

Tenemos así una función continua

$$f: \underbrace{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}[T])}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}} \longrightarrow \underline{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})}$$



Nota: $\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}} = f^{-1}(\{0\}) \cup \left(\bigcup_{p:\text{ primo}} f^{-1}((p)) \right)$

partición

Descripción de las fibras:

- Fibra en $\{0\}$: $f^{-1}(\{0\})$

Sea $\underline{\underline{S}} = \mathbb{Z} - \{0\}$ cjto. multiplicativo de $\mathbb{Z}[T]$.

Así

$\mathfrak{p} \in \mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ está contenido en $f^{-1}(\{0\})$

ideal primo de $\mathbb{Z}[T]$

$$\iff \mathfrak{p} \cap \mathbb{Z} = 0.$$
$$\iff \mathfrak{p} \cap S = \emptyset$$

Por el Lema:

como $S^{-1}\mathbb{Z}[T] = \mathbb{Q}[T]$

se tiene

$$f^{-1}(\{0\}) \underset{\text{homeo.}}{\simeq} \underbrace{\operatorname{Spec}(\mathbb{Q}[T])}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Q}}}.$$

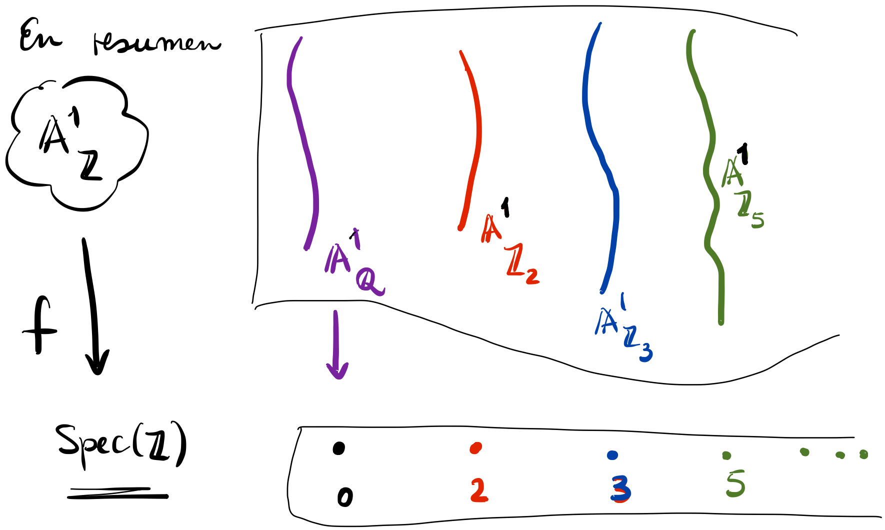
- Sea $p \in \mathbb{Z}$, número primo.

$$\mathfrak{p} \in f^{-1}((p)) \iff p \in \mathfrak{p}. \quad \checkmark$$

Como $\mathbb{Z}[T]/(p) = \mathbb{Z}_p[T]$

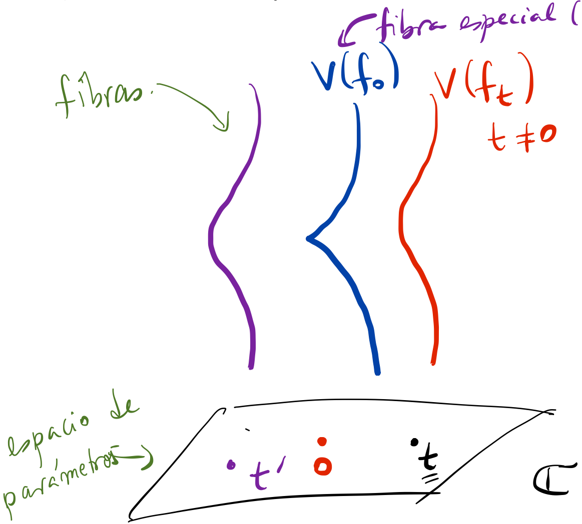
$$\Rightarrow \quad f^{-1}((p)) \underset{\text{homeo.}}{\simeq} \underbrace{\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p[T])}_{\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}_p}}$$

En resumen



$\mathbb{A}^1_{\mathbb{Z}}$ contiene rectas afines parametrizadas por puntos de $\mathrm{Spec}\,\mathbb{Z}$ y sobre cuerpos de distinta característica.

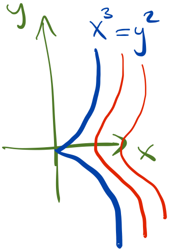
Contraste con una noción conocida:



$$f_t(x,y) = x^3 - y^2 - t$$

para t fijo

$V(f_t)$.



Módulos sobre anillos conmutativos: (recordar)

R anillo conmutativo

un R-módulo M es un grupo abeliano $(M,+)$ en el cual R actúa de manera lineal:

$$\mu : R \times M \longrightarrow M$$
$$(a, m) \longmapsto a \cdot m$$

$$\left(\text{equiv}: \quad \mu : R \longrightarrow \mathrm{Hom}(M) \atop \qquad\quad r \longmapsto \mu_r : M \to M \right)$$

tal que si $a \in R$, $x, y \in M \Rightarrow a(x+y) = ax + ay$.

· si $a, b \in R$

$$(a+b)x = ax + by$$

$$(ab)x = a(bx)$$

$$1.x = x$$

Ejm:

(1) un ideal de R es un R-módulo.

(2) R es un cuerpo, un R-módulo es un espacio vect. sobre R.

(3) $R = \mathbb{Z}$

entonces un $\mathbb{Z}$-módulo es un grupo abeliano.

(4) R anillo, $\quad R^n = \underbrace{R \oplus \cdots \oplus R}^{n \text{ veces}}$

R-módulo

Obs: Un R-módulo finitam. generado M es un cociente de R^n para algún n.

$$M \cong R^n / I \quad , \; I \text{ submódulo.}$$

M, N R-módulos

una función $f: M \to N$ es un homomorfismo de R-módulos si

$$\left(f: R\text{-lineal} \right) \begin{cases} \cdot\, f(x+y) = f(x)+f(y) & \forall x,y \in M \\ \cdot\, f(ax) = a f(x) & \forall a \in R \\ & x \in M. \end{cases}$$

Nota:

$$\mathrm{Hom}_R(M,N) = \{ f: M \to N \mid f \text{ hom. de } R\text{-mod} \}$$

R-modulo:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(af)(x) = a f(x) \qquad a \in R,\ x \in M.$$

Dados homomorfismos: $u : M' \to M \xrightarrow{f} N$

$v : N \to N''$

se tiene

$$\bar{u} : \operatorname{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M', N)$$
$$f \longmapsto f \circ u$$

$$\bar{v} : \operatorname{Hom}_R(M, N) \longrightarrow \operatorname{Hom}_R(M, N'')$$
$$g \longmapsto v \circ g$$

$$R_p \to M_p$$

Spec R