# Algebra conmutativa. Preliminares.

**Richard Gonzales**

*Pontificia Universidad Católica del Perú*

2 de septiembre de 2020

**Referencias:**

I. Bibliografía básica:

1. M. F. Atiyah, I. G. MacDonald *Introduction to Commutative Algebra*.

2. D. Eisenbud. *Commutative Algebra with a view towards algebraic geometry*.

3. E. Kunz *Introduction to Commutative Algebra and Algebraic Geometry*.

4. M. Reid *Undergraduate commutative algebra*.

5. H. Matsumura. *Commutative Ring Theory*.

II. Bibliografía avanzada:

1. U. Gortz, T. Wedhorn. *Algebraic Geometry I.* Schemes with examples and exercises.

2. J. P. Serre. *Faisceaux Algebriques Coherents*.

3. Hartshorne. *Algebraic Geometry*.

## Recordar:

### Anillos conmutativos:

**Def:** $R$ cjto

$R$ anillo si posee dos oper. binarias

$$+ : R \times R \to R \quad (a,b) \to a+b \qquad y \qquad \cdot \; R \times R \to R \quad (a,b) \mapsto a \cdot b$$

tales que

(i) $(R,+)$ gp. conmutativo con elem. neutro $0_R$.

(ii) $(ab)c = a(bc) \quad \forall\, a,b,c \in R$

(iii) $a(b+c) = ab + ac$ y $ba + ca = (b+c)a$

$\forall\, a,b,c \in R$.

(iv) Existe un elem. $1_R \in R$ el cual satisface

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a \quad , \forall a \in R.$$

(v) (conmutatividad) $ab = ba \quad , \forall a, b \in R.$

Propiedades:

Sea $R$ un anillo (conmutativo)

(i) si $1_R = 0_R \Rightarrow R = \{0\}$. anillo trivial

(ii) $\forall\, a, b \in R$, se tiene $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

$$(-a)(-b) = a \cdot b.$$

Ejm:

(1) $\underbrace{(\mathbb{Z}, +, \times)}$, $(\mathbb{Q}, +, \times)$ (en general $(K, +, \times)$ $K$ cuerpo.)

(2) $(\mathbb{Z}_n, +, \times)$ anillo.

(3) $M$ variedad diferenciable

$C^\infty(M) = \{$ funciones diferenciables suaves $(C^\infty)$ $M \to \mathbb{R}\}$

(espacio de funciones)

anillo conmutativo con la suma y mult. de funciones usual.

**Definición:** Sea $R$ un anillo.

(1) Decimos que $a \in R$ es <u>invertible</u> si existe $b \in R$ para el cual se tiene $ab = ba = 1$.

Denotamos por $R^{\times}$ el subconjunto de $R$ que consiste de elem. invertibles:

$$R^{\times} = \{ a \in R \mid a \text{ invertible} \}.$$

(2) Decimos que $a \in R$ es <u>divisor de cero</u> si existe $b \in R - \{0\}$ tal que

$$ab = 0.$$

<u>Propiedades</u>: Sea $R$ un anillo

1. El cjto $(R^\times, \cdot)$ es un grupo.

2. Se tiene $R^\times \subset R \setminus \{\text{divisores de cero}\}$

— ejercicio —

Definición / Recordatorio de nomenclatura:

Sea $R$ un anillo.

- $a \in R$ es nilpotente si $a^n = 0$ para cierto $n \geq 1$.
- $a \in R$ es irreducible si $a$ no es unidad y la condición $a = bc$ implica que $b$ ó $c$ son unidades.
- $a \in R$ es primo si el ideal principal $(a) \subseteq R$ es ideal primo.
- $a \in R$ es idempotente si $a^2 = a$.

Recordar: $I \subseteq R$

$\nwarrow$ subc. de $R$

$I$ es un ideal de $R$ si • $I \subseteq R$ subgrupo de $(R, +)$

y

• $\forall\, a \in I,\ b \in R$

$ab \in I$.

Nota: Sea $R$ un anillo, $I$ ideal de $R$.

$$I = R \iff 1_R \in I.$$

**Definición:** (ideal primo)

$R$ anillo, $I \subseteq R$ ideal

$I$ <u>primo</u> si $I \neq R$ y para cualesquiera $a, b \in R$ se cumple:

$$ab \in I \Rightarrow a \in I \text{ ó } b \in I.$$

(equivalentemente,

$I \neq R$ y si $a, b \notin I \Rightarrow ab \notin I$ para cualesq. $a, b \in I$).

<u>Obs:</u> $I$ primo $\Longleftrightarrow$ $R/I$ <u>dominio integral</u> $(*)$

[ R anillo,
R dominio integral si $R \neq \{0\}$ y R no
tiene divisores de cero no triviales. ]

<u>Def.</u> (ideal maximal)

R anillo, I ideal.

I maximal si $I \neq R$, y no existe un ideal J tal que

$$I \subsetneq J \subsetneq R$$

<u>Obs</u>: I maximal $\Leftrightarrow$ $R/I$ es un <u>cuerpo</u>.

Obs: $I$ maximal $\Rightarrow$ $I$ primo. (la recíproca no es cierta en general).

Definición: $R$ anillo $I$ ideal

(1) $I$ es ideal nilpotente si existe $n \geq 1$ tal que $I^n = 0$.

(2) $I$ es ideal principal si existe $a \in I$ tal que $I = (a)$.

Además,

**Def:** $R$ anillo.

(1) $R$ es <u>local</u> si $R$ tiene un único ideal maximal.

(2) $R$ es <u>semi-local</u> si $R$ tiene solo un número finito de ideales maximales.

(3) $R$ es <u>reducido</u> si $R$ no tiene elem. nilpotentes no triviales.

(4) $R$ es un <u>dominio de ideales principales</u> si:

$R$ es un dominio integral y todo ideal de $R$ es principal.

<u>Ejm</u>: $K$ cuerpo

$$R = K[x_1, x_2, \dots, x_n]$$

dominio integral. ( • cuando $n=1$ $R = K[x]$ es DIP

• cuando $n \neq 1$ NO DIP ).

## Homomorfismo de anillos:

**Def:** Sean $R$ y $R'$ dos anillos.

Una función $f: R \to R'$ es un homomorfismo de anillos si para todo $a, b \in R$ se cumplen:

(i) $f(a +_R b) = f(a) +_{R'} f(b)$

(ii) $f(a \cdot_R b) = f(a) \cdot_{R'} f(b)$

(iii) $f(1_R) = f(1_{R'})$

## Lema:

Sea $f : A \to B$ homomorfismo de anillos.

Entonces

(1) $f(A^\times) \subset B^\times$

(2) $f$ induce un homomorfismo de grupos

$$\tilde{f} : A^\times \to B^\times.$$

(3) Si $J \subseteq B$ ideal (primo) entonces $f^{-1}(J)$ es ideal (primo) de $A$.

(en particular $\operatorname{Ker} f = f^{-1}(0)$ es ideal).

Ejemplos:

① Sea $R = \mathbb{Z}[x]$

El ideal $I = (x)$ es primo, pero $I$ no es maximal.

(pues $R/_I \simeq \mathbb{Z}$ no es cuerpo).

② Considerar $I = (x, 2) \subseteq \mathbb{Z}[x]$.

Notar $(x) \subseteq I$. Además $R/_I$ es un cuerpo. $(\simeq \mathbb{Z}_2)$.

(por tanto $I$ es maximal).

En general, verificar que

$$I_p = (x, p) \qquad p : \text{primo}$$

es ideal maximal de $\mathbb{Z}[x]$.

③ El ideal $(x^2) \subseteq \mathbb{Z}[x]$

no es ideal primo, pues $x \cdot x \in (x^2)$

pero $x \notin (x^2)$.

¿Qué estructura posee

$$\mathbb{Z}[x]/(x^2) \ ?$$

anillo de polinomios truncado a orden 2

$\overline{p(x)} \in \mathbb{Z}[x]/(x^2)$ es de la forma $\overline{p(x)} = a + b\bar{x}$, $a, b \in \mathbb{Z}$.

En $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ se tiene $\bar{x} \cdot \bar{x} = 0$

pero $\bar{x} \neq 0$.

si $\deg(x)=2$ $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ es iso $H^*(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z})$. -coh-

es decir $\mathbb{Z}[x]/(x^2)$ posee divisores de cero no triviales.

(anillo cociente no es reducido).

como $\mathbb{Z}$-módulo: $\mathbb{Z}[x]/(x^2) \simeq \overset{H^0}{\mathbb{Z}} \oplus \mathbb{Z}^{H^2}$. (si $\deg(x)=2$)

## Otros ejemplos:

- Sea $R = \mathbb{R}[x]$

  El ideal $I = (1+x^2)$ es ideal maximal.

  Pues

  $$R/I \simeq \mathbb{C} \quad \text{(verificar)}.$$

  cuerpo

  ($I$ maximal).

- Por otro lado, sea

  $$\tilde{R} = \mathbb{C}[x]$$

  Consideremos $\tilde{I} = (1+x^2)$ maximal?

Notar

$$1 + x^2 = (x-i)(x+i)$$

pero $x-i \notin \tilde{I}$, $x+i \notin \tilde{I}$

$\tilde{I}$ No es primo ($\Rightarrow$ No es maximal).

Ejm: Sea $x \in \mathbb{R}^n$.

Sea $R = C^0(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}) = \{$ anillo de funciones continuas $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \}$

Consideremos

$$M_x = \{ f \in R \mid f(x) = 0 \}.$$

Afirmación: $M_x$ es un ideal maximal.

En efecto, considerar evaluación $ev_x : R \to \mathbb{R}$, $f \mapsto f(x)$ hom. de anillos.

Notar: • $\operatorname{Ker}(ev_x) = M_x$ (ideal primo)

• $ev_x$ es sobreyectiva.

dado $a \in \mathbb{R}$, existe $\varphi_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

tal que $ev_x(\varphi_a) = a$.

(basta tomar $\varphi_a = a$ func. cte)

$$\Rightarrow \boxed{R/M_x \cong \mathbb{R}} \Rightarrow M_x \text{ maximal.}$$

$R = A[x_1, \dots, x_n]$

Anillo conm. (dominio) $\longrightarrow$ $a \in A^n$.

Tomamos $a = (a_1, \dots, a_n)$ , $a_i \in A$.

$$ev_a : R \longrightarrow A$$
$$p \longmapsto p(a) \quad , \quad \text{sobre} \checkmark$$

$$M_a = \{ p \in R \mid p(a) = 0 \}$$

$M_a = \operatorname{Ker}(p) \Rightarrow R/M_x \cong A$

$M_x$ max si $A$ cuerpo.

$A$ cuerpo alg. cerrado.

$\longrightarrow$

Nullstellensatz $\quad \underline{M_x} = (x - a_1, x - a_2, \ldots, x - a_n)$

Contexto importante ($\Rightarrow$ aplic. geom. de anillos)

$R$ anillo conmutativo.

$\mathrm{Spec}(R) = \{ \mathfrak{p} \subseteq R \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo} \}$.

Espectro de $R$

$$R = \mathbb{C}[x] \longleftrightarrow \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x])$$

$$= \{ \mathfrak{p} \subseteq \mathbb{C}[x] \mid \mathfrak{p} \text{ ideal primo} \}$$

$$= \underbrace{\{0\}}_{\substack{\text{ideal primo} \\ \text{no max.}}} \cup \overbrace{\{ \underline{(x-a)} \mid a \in \mathbb{C} \}}^{\text{ideales primos maximales}}$$

punto de $\mathbb{C}$

Corresp. a los ideales maximales de $\mathbb{C}[x]$

$\operatorname{Spec}(R)$ $\quad (x-a) \quad (x-\lambda)$


← corresp al ideal $0$.

$$\mathrm{Spec}(R) = \{(x-a) \mid a \in \mathbb{C}\} \cup \{0\}$$

ideal 0.

$\to$ $0 \subseteq P$

$P$ ideal.

$\mathrm{Spec}(R)$ $\quad (x-a) \quad$ ?

$a \in \mathbb{C}$

$\updownarrow \quad (x-\lambda) = P_\lambda$


$\overline{\{\lambda\}} = \{\lambda\}$ $\quad \lambda$ punto cerrado $\quad$ + $\quad$ pto. denso

Top. Zariski $\quad \overline{\{0\}} = \mathrm{Spec}(R)$

**Obs:** $\mathrm{Specm}(R)$ espectro maximal

$= \{ p \in R \mid p \text{ maximal} \}$

$= \{ (x-a) \mid a \in \mathbb{C} \}.$

$\mathrm{Specm}(R) \longleftrightarrow \mathbb{C}.$

top. Zariski homeom.

Próxima:

- Spec(R) + top. de Zariski $(\tau)$

- $(\mathrm{Spec}(R), \tau)$ espacio topológico que codifica info sobre R.

$$\underset{\text{reducido}}{R} \longleftrightarrow \underset{\text{var. alg.}}{\mathrm{Spec}(R)}$$

– ALG. –  – GEO –

Anillo $\qquad$ Esp. Top.

$$R \rightsquigarrow \mathrm{Spec}(R) = X$$

$$M \rightsquigarrow \tilde{M} \text{ haz sobre } X$$

R-módulo

$$\begin{array}{c} \tilde{M} \\ \downarrow \pi \\ X \end{array}$$

Local $\rightsquigarrow$ "local"

(invertir elem. en R) $\qquad$ restricción a abierto