# Algebra conmutativa. Clase 7.

**Richard Gonzales**

*Pontificia Universidad Católica del Perú*

26 de septiembre de 2020

**Lema** ( Snake lemma)

Sea

$$\begin{tikzcd}
 & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' &
\end{tikzcd}$$

un diagrama conmut. de $R$-módulos con filas exactas. Entonces existe una sucesión exacta larga:

$$(*) \quad \operatorname{Ker}\alpha \xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ker}\beta \xrightarrow{\psi} \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \underbrace{M'/\operatorname{Im}\alpha}_{\operatorname{coker}\alpha} \xrightarrow{\varphi'} \underbrace{N'/\operatorname{Im}\beta}_{\operatorname{coker}\beta} \xrightarrow{\psi'} \underbrace{P'/\operatorname{Im}\gamma}_{\operatorname{coker}\gamma}$$

Recordar: dada $f: M \to N$ hom. R-módulos

$$\operatorname{coker}(f) = N/\operatorname{Im}(f).$$

Notar:

restricción de $\varphi$ a $\operatorname{Ker}(\alpha)$.

- $$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\alpha \subseteq M &\xrightarrow{\varphi} \operatorname{Ker}\beta \subseteq N \\ x &\longmapsto \varphi(x). \end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[d, mapsto] & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & N \arrow[d] & \varphi(x) \arrow[d, mapsto, "\beta"] \\ 0 & 0 \arrow[r] & 0 & 0 \end{tikzcd}$$

- Similarmente: restricción de $\psi$ a $\operatorname{Ker}\beta$.

$$\begin{aligned} \operatorname{Ker}\beta &\xrightarrow{\psi} \operatorname{Ker}\gamma \\ y &\longmapsto \psi(y) \end{aligned}$$

- $\varphi' : \operatorname{coker}\alpha \to \operatorname{coker}\beta$ ; $\psi' : \operatorname{coker}\beta \to \operatorname{coker}\gamma$.

$\delta : \operatorname{Ker}\gamma \longrightarrow \operatorname{coker}\alpha$

homomorfismo de conexión / frontera (boundary map).

¿cómo definir $\delta$?

$$\begin{tikzcd}
\omega' \arrow[d] & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 & \omega \arrow[d] \\
\beta(\omega') \in & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' & & 0
\end{tikzcd}$$

$\underline{\omega \in P}$

$\gamma(\omega) = 0 \iff \omega \in \operatorname{Ker}\gamma.$

$\psi$ sobreyectiva

$\Rightarrow$ sea $\underline{\omega'} \in N$ una preimagen de $\omega$ vía $\psi$.

Notar $\beta(\omega') \in \operatorname{Ker}\psi'$ (por conm. del diagrama).

Como $\operatorname{Ker}\psi' = \operatorname{Im}\varphi'$.

$$\begin{tikzcd} & N \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\ M' \arrow[r, "\varphi'"] & N' \arrow[r, "\psi'"] & P' & \end{tikzcd}$$

$$\omega' \longmapsto \boxed{\omega} \longmapsto 0$$

$$\theta \longmapsto \beta(\omega') \longmapsto 0$$

$\exists\ \theta \in M'$ tal que $\varphi'(\theta) = \beta(\omega')$

(pues $\beta(\omega') \in \operatorname{Ker} \psi'$).

$\varphi'$ es inyectiva. (i.e. $\theta$ es único).

Así,

$\delta(\omega) = \bar{\theta}$ ← clase en $\operatorname{coker}(\alpha) = M'/\operatorname{Im}\alpha$.

Ahora debemos verificar que $\delta$ está bien definida, i.e.

no depende de los representantes escogidos.

Supongamos tenemos $\omega'' \in N$ tal que

$$\begin{tikzcd}
 & \omega'' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\beta"] & \boxed{\omega} \arrow[d] \\
\theta'' \arrow[r] & \beta(\omega'') \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

$$\Rightarrow \psi(\omega' - \omega'') = 0 \Rightarrow \omega' - \omega'' \in \operatorname{Ker}\psi$$

Como $\operatorname{Ker}\psi = \operatorname{Im}\varphi$:

$\Rightarrow$ existe $y \in M$ tal que $\varphi(\underline{y}) = \omega' - \omega''$.

Además

$$\varphi'(\theta-\theta'') =$$

$$= \varphi'(\theta) - \varphi'(\theta'')$$

$$= \beta(\omega') - \beta(\omega'')$$

$$= \beta(\omega'-\omega'')$$

$$= \beta(\varphi(y))$$

$$= \varphi'(\alpha(y))$$

$$\begin{tikzcd}
y \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \omega'-\omega'' \arrow[r] \arrow[d, "\beta"] & 0 \\
\alpha(y) \arrow[r, "\varphi'"] & \beta(\omega')-\beta(\omega'') &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\arrow[r, "\varphi"] & \omega' \arrow[d, "\beta"] \\
\theta \arrow[r, "\varphi'"] & \beta(\omega')
\end{tikzcd}$$

Como $\varphi'$ es injectiva $\Rightarrow$ $\theta-\theta'' = \alpha(y)$ $\rightarrow$

$\theta$ y $\theta''$ definen la misma clase en

coker $(\alpha)$

pues

$$\theta = \theta'' + \alpha(y), \quad \text{para cierto } y \in M.$$

$$\Rightarrow \quad \overline{\theta} = \overline{\theta''} \text{ en } \operatorname{coker}(\alpha)$$

Luego, la correspondencia

$$\delta : \operatorname{Ker} \gamma \longrightarrow \operatorname{coker} \alpha$$
$$\omega \longmapsto \overline{\theta}$$

está bien definida.

$$
\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Ker}\alpha \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\beta \arrow[r, "\psi"] \arrow[d] & \operatorname{Ker}\gamma \arrow[d] \arrow[dddll, bend left, "\delta"] & \omega \\
 & M \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\alpha"'] & N \arrow[r, "\boxed{\psi}"] \arrow[d, "\beta"] & P \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & M' \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & N' \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & P' \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Coker}\alpha \arrow[r, "\varphi'"] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\beta \arrow[r, "\psi'"] \arrow[d] & \operatorname{Coker}\gamma \arrow[d] & \\
\delta\omega & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Ejercicio: verificar la exactitud de

$$\operatorname{Ker}\alpha \to \operatorname{Ker}\beta \to \operatorname{Ker}\gamma \xrightarrow{\delta} \operatorname{Coker}\alpha \to \operatorname{Coker}\beta \to \operatorname{Coker}\gamma.$$

Sea $R$ un anillo (conmutativo)

$S \subseteq R$ subconjunto multiplicativo.

En $M \times S$ definimos la relación de equiv.

$$(m, s) \equiv (m', s') \iff \exists\, t \in S \text{ tal que } t(sm' - s'm) = 0.$$

"$\frac{m}{s}$" "$\frac{m'}{s'}$"

Similar al caso de $S^{-1}R$, denotamos por

$\frac{m}{s}$ la clase de equiv. de $(m, s)$.

Sea $S^{-1}M$ el cjto de tales fracciones; en este cjto. se definen operaciones de suma y mult. por

escalar, de la manera usual.
(de $S^{-1}R$)

Así $S^{-1}M$ es un $S^{-1}R$-módulo.

Por ejm: $\mathfrak{p}$ : ideal primo.

$$M_{\mathfrak{p}} := S^{-1}M \quad , \text{ con } S = R \setminus \mathfrak{p}.$$

Sea $\varphi: M \to N$ un homomorf. de $R$-mod.

$\varphi$ induce un homomorfismo ($S^{-1}R$-lineal)

$$S^{-1}\varphi : S^{-1}M \longrightarrow S^{-1}N$$
$$\frac{m}{s} \longmapsto \frac{\varphi(m)}{s}.$$

<u>Proposición:</u> Localización es un functor exacto, i.e: localización preserva sucesiones exactas:

si $M' \xrightarrow{f} M \xrightarrow{g} M''$ es exacta en $M$,
(sucesión de $R$-mod)

entonces
$S^{-1}M' \xrightarrow{S^{-1}f} S^{-1}M \xrightarrow{S^{-1}g} S^{-1}M''$ es exacta en $S^{-1}M$.
(sucesión de $S^{-1}R$-mod)

Prueba:

Tenemos $\boxed{g \circ f = 0}$

homomorf. 0

$$\Rightarrow \quad s^{-1}(g \circ f) \underset{\text{verificar}}{=} s^{-1}g \circ \underbrace{s^{-1}f} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Im}(s^{-1}f) \subseteq \ker(s^{-1}g)$$

Para probar $\ker(s^{-1}g) \subseteq \underline{\mathrm{Im}(s^{-1}f)}$

tomamos

$\frac{m}{s} \in \ker(s^{-1}g)$. Se tiene $\frac{g(m)}{s} = 0$ en $s^{-1}M''$;

entonces existe $t \in S$ tal que

$$t\,g(m) = 0 \text{ en } M''.$$

Más aún

hom. R-mod.

$$t\,g(m) = g(t\,m)$$

Así

$$t\,m \in \operatorname{Ker}(g).$$

Como $\operatorname{Ker}(g) = \operatorname{Im} f \Rightarrow t\,m = f(u)$

para cierto $u \in M'$.

Por tanto,

en $S^{-1}M$

$$\frac{m}{s} = \frac{f(u)}{st} = S^{-1}f\left(\frac{u}{st}\right) \in \mathrm{Im}(S^{-1}f).$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{Ker}(S^{-1}g) \subseteq \mathrm{Im}(S^{-1}f)$$

En consecuencia

$$\mathrm{Ker}(S^{-1}g) = \mathrm{Im}(S^{-1}f).$$

**Obs:**

(a) si $f : M \to N$ hom. inyectivo de $R$-mod, entonces

$S^{-1}f : S^{-1}M \to S^{-1}N$ también es inyectivo.

En particular, si $M' \subseteq M$ $R$-submód.

entonces $S^{-1}M' \subseteq S^{-1}M$

$S^{-1}R$ - subm.

## Corolario | Ejercicio :

Localización conmuta con sumas finitas, intersecciones finitas y cocientes. De manera más precisa:

Sean $N$, $P$ submódulos de un $R$-mod $M$, entonces:

(i) $S^{-1}(N+P) = S^{-1}N + S^{-1}P$

(ii) $S^{-1}(N \cap P) = (S^{-1}N) \cap (S^{-1}P)$

(iii) $S^{-1}(M/N) \cong S^{-1}M / S^{-1}N$ iso de $S^{-1}R$-mod.

$0 \to N \to M \to M/N \to 0$ y localizar

Sean $N, P$ submód. de $M$.

Definimos

$$(N : P) = \{ a \in R \mid a.P \subseteq N \}$$

ideal de $R$

En particular

$$(0 : M) = \{ a \in R \mid aM = 0 \}$$

$$= \mathrm{Ann}(M)$$

– anulador de $M$ –

– annihilator –

**Obs:**

- Si $I \subseteq \mathrm{Ann}(M)$ , $I$ ideal de $R$.

entonces $M$ se puede considerar como un

$$R/_{I} \text{ - módulo.}$$

(i.e "$R/_{\mathrm{Ann}(M)}$ anillo natural de coeff. de $M$ " ).

Recordar:

$R$ : anillo conmutativo.

Decimos que un $R$-mod $M$ es finitam. generado

si existen $x_1, \dots, x_n \in M$ tales que:

todo $m \in M$ se puede escribir como una

combinación $R$-lineal de los $x_i$'s:

(i.e. $m = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \dots + r_n x_n$ ).

para ciertos $r_i \in R$

no es necesariam. única

**Obs:**

$M$ R-mod. finitam. generado

$\Updownarrow$

existe un homomorfismo (de R-módulos)

$\varphi: R^n \to M$ sobreyectivo. $\left(M \simeq R^n/_{\mathrm{Ker}\,\varphi}\right)$

- $M$ R-módulo libre finitam. generado

$\Leftrightarrow$ $M \simeq R^n$ para cierto $n$.

Teorema (Lema de Nakayama):

Sea $M$ un $R$-módulo finitamente generado. Sea $I$ un ideal contenido en el radical de Jacobson.

Si $M = I \cdot M$ entonces $M = 0$.

---

Recordar: Radical de Jacobson = intersección de todos los ideales maximales de $R$

$\mathcal{J}(R)$ ó $\mathcal{J}ac(R)$

(2) $x \in J(R)$ radical de Jacobson $\iff$ $1 - xy$ es una unidad de $R$ para todo $y \in R$.

(ver Atiyah-MacDonald).

Prueba del Lema de Nakayama:

Por contradicción, asumamos que $M \neq 0$.

Como $M$ es finit. generado (hipótesis) podemos elegir una colección mínima de generadores $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ de $M$.

$u_1 \in M$ tiene la sgte prop.

$\forall m \in M$:
$m \in M = IM$

$m = r_1 u_1 + \dots + r_n u_n$
$r_i \in I$.

$u_1 = r_1 u_1 + \dots + r_n u_n$, para ciertos $r_i \in I$.

$\Rightarrow (1 - r_1) u_1 = r_2 u_2 + r_3 u_3 + \dots + r_n u_n$

Como $r_1 \in I \Rightarrow 1 - r_1$ es unidad (por ② pg. 23)

$\Rightarrow u_1 = (1-r_1)^{-1} r_2 u_2 + \dots + (1-r_1)^{-1} r_n \cdot u_n$

$\Rightarrow u_1 \in \operatorname{Span}\{u_2, \dots, u_n\}$

Es decir

$\{u_2, \dots, u_n\}$ es un cjto de generadores de $M$, lo cual contradice la minimalidad de $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

En consecuencia, $M = 0$ //.

Corolario 1:

$M$ $R$-mod. finitam. generado.

Sea $N$ un submódulo de $M$

$I \underset{\text{ideal}}{\subseteq}$ rad. Jacobson de $R$

Si $\underbrace{M = N + IM}_{(*)}$ entonces $M = N$.

Prueba: $M/N$ $R$-mod.

Por hipótesis $I(M/N) = M/N \overset{\text{Nakayama}}{\Rightarrow} M/N = 0 \Rightarrow \underline{M=N}$

$$M \twoheadrightarrow_{\text{sobrey.}} M/\mathfrak{m}M$$

Corolario 2:

Sea $(R, \mathfrak{m})$ un anillo local.
Los elementos $x_1, x_2, \ldots, x_n \in M$ forman una colección mínima de generadores de $M$

si y sólo si

$$\overline{x_1}, \overline{x_2}, \ldots, \overline{x_n} \in M/\mathfrak{m}M$$

forman una base de este $K$-espacio vectorial

$(K = R/\mathfrak{m} \leftarrow$ cuerpo residual$)$.

Obs:

$$\mathrm{Ann}\left(M/\mathfrak{m}M\right) = \mathfrak{m}.$$

así

$$M/\mathfrak{m}M \text{ es un } \underbrace{\left(R/\mathfrak{m}\right)}_{\text{cuerpo residual}}\text{-mod}$$

$\Rightarrow$ $M/\mathfrak{m}M$ es un $k$-espacio vectorial

Prueba de Cor. 2:

$M \xrightarrow[\text{sobrey}]{} \!\!\!\!\to M/_{mM}$

$(\Rightarrow)$

$(\Leftarrow)$ $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n \in \underbrace{M/_{mM}}_{K\text{-esp. vectorial.}}$

Hip: $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n\}$ forman ${}^{K}$ base de $M/_{mM}$.

Sea $N = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle \underset{\text{submódulo}}{\subseteq} M$

$f, g \in R$

$\underset{(R_f)}{M_f} \xrightarrow{\times (f/g)} \underset{(R_g)}{M_g}$

Notar:

$$\boxed{M = N + M/\mathfrak{m}M}$$

pues $\pi : M \to M/\mathfrak{m}M$ proy. canónica

$$\pi(N) = M/\mathfrak{m}M.$$

Así, por cor. 1 $\Rightarrow \boxed{M = N}$

Próxima: (principio local-global)

$M$ $R$-mod.

$M = 0 \iff M_\mathfrak{p} = 0 \quad \forall\, \mathfrak{p}$ ideal primo de $R$

$\iff M_\mathfrak{m} = 0 \quad \forall\, \mathfrak{m}$ ideal max. de $R$