Algebra conmutativa. Clase 18.

Richard Gonzales

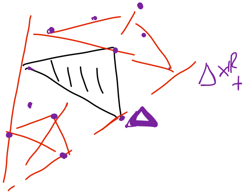
Pontificia Universidad Católica del Perú

12 de noviembre de 2020

Ejm (continuación):

Clásico: $\underbrace{\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}}_{} \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^n$

"Cono" sobre $\mathbb{P}^n$.



Sea $M = \mathbb{Z}^n$

$$M_{\mathbb{R}} = M \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R} = \mathbb{R}^n.$$

Sea $\Delta \subseteq M_{\mathbb{R}}$ un politopo convexo (compact convex lattice polytope).

i.e existe un conjunto finito $V \subseteq M$ tal que

"$\mathbb{P}^n$" $\xleftrightarrow[\text{análogo}]{}$ $\Delta = \text{convex hull}(V) \subseteq M_{\mathbb{R}}$.

Sea

$$C(\Delta) = \{ (m,r) : m \in r\Delta, r \in \mathbb{R}, r \geq 0 \}$$

$\Gamma\Gamma^{n+1}_{\mathbb{A}} = \,$,,

$$C(\Delta) \subseteq M_{\mathbb{R}} \oplus \mathbb{R}$$

generado por # finito de vectores v_i

gen. se pueden elegir $v_i \in M \oplus \mathbb{Z}$.

$\Rightarrow$ $C(\Delta)$ cono convexo poliedral racional.

(rational polyhedral convex cone).

Consideremos el anillo:

$$S = k[\underbrace{C(\Delta) \cap (M \oplus \mathbb{Z})}_{\text{monoide}}] = \bigoplus_{p \in C(\Delta) \cap (M \oplus \mathbb{Z})} k \cdot \underline{\underline{z}}^{\underline{p}}$$

monoid ring.

Multiplicación en S

$$z^{p} \cdot z^{p'} = z^{p+p'}$$

Notar:

S anillo graduado vía

$$\deg z^{(m,r)} = r$$

verificar: $\deg z^{(m_1,r_1)} \cdot z^{(m_2,r_2)} = \deg z^{(m_1+m_2,\, r_1+r_2)}$

$= r_1 + r_2 .$

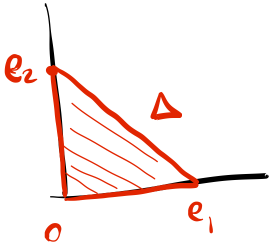
Definimos así

$$\mathbb{P}_\Delta = \underbrace{\operatorname{Proj} S}_{\substack{\text{esquema}\\ \text{proyectivo}\\ \text{asociado}\\ \text{a } S}} \longleftarrow \boxed{\text{Proj}\, S \text{ es una variedad proyectiva tórica}}$$

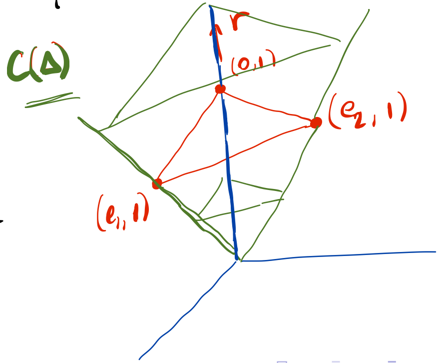
Ejemplos particulares: de la construcción anterior.

(1) Tomemos $\Delta = \text{Convex hull}\,\{0, e_1, \dots, e_n\}$

e_i base estándar de $M \cong \mathbb{Z}^n$.



$n = 2$



En este caso, tenemos el isomorfismo de anillos:

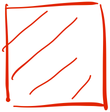
$$K[x_0, \dots, x_n] \xrightarrow{\sim} K[\underbrace{C(\Delta) \cap M \oplus \mathbb{Z}}_{S}]$$

$$x_i \longmapsto \begin{cases} z^{(0,1)}, & i = 0 \\ z^{(e_i, 1)} & i \neq 0 \end{cases}$$

Así $\boxed{\operatorname{Proj} S \cong \mathbb{P}^n}$

Obs: $C(\Delta) \cap (M \oplus \mathbb{Z})$ generado libremente por $(0,1), (e_1, 1), \dots, (e_n, 1)$.

(2) Sea Δ la envolvente convexa de $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$, $(1,1)$.



Notar que

$C(\Delta) \cap (M \oplus \mathbb{Z})$ está generado (como monoide) por

$$u \; (0,0,1),\ \overset{v}{(1,0,1)},\ \overset{w}{(1,1,1)},\ \overset{z}{(0,1,1)}$$

con una sola relación:

$$(0,0,1)+(1,1,1) = (1,0,1)+(0,1,1)$$

$$u \cdot w = v \cdot z$$

Así

$$S \cong k[u,v,w,z] \big/ (uw - vz)$$

Es más,

$Q : \{uw - vz\} \subseteq \mathbb{P}^3$

$Q \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1.$

$\boxed{\operatorname{Proj} S}$ es una superficie cuadrática

Esquema proyectivo

$$\operatorname{Proj} S \simeq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$$

Obs: $\mathrm{Spec}(S)$ representa al cono sobre $\mathrm{Proj}(S)$.

Caso clásico:

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Spec}\,S \arrow[r, leftrightarrow, "\text{análogo}"] & V = \{uw - vz = 0\} \subseteq \mathbb{A}^4 \arrow[d, "\pi"] \\
\mathrm{Proj}\,S \arrow[r, leftrightarrow, "\text{análogo}"] & \mathbb{P}(V) \subseteq \mathbb{P}^3
\end{tikzcd}$$

$(*)$

Variedad afín

Observación:

(paso de local a global: pegado de esquemas afines):

$$M = \mathbb{Z}^n.$$

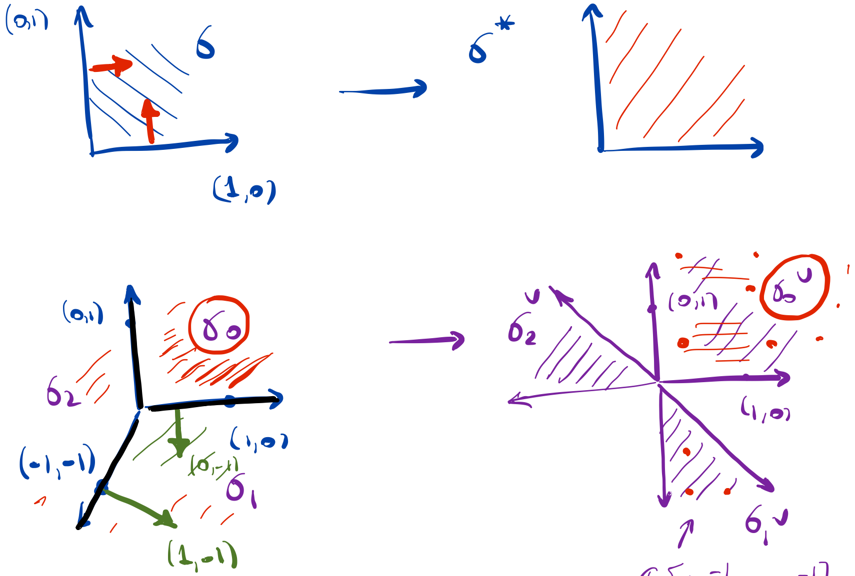
$$M_{\mathbb{R}} = \mathbb{Z}^n \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$$

$$\sigma \subseteq M_{\mathbb{R}} \xrightarrow[\text{asignar}]{} \underline{\sigma^\vee} \subseteq M_{\mathbb{R}}^* = \{ \alpha \in (\mathbb{R}^n)^* \mid \underbrace{\langle \alpha, v \rangle}_{\alpha(v)} \geq 0 \ \forall v \in \sigma \}.$$

cono poliedral racional

cono dual

Además: asumir $\sigma \cap (-\sigma) = 0$. ← estrictam. convexo.



$\mathbb{C}[Y^{-1}, XY^{-1}]$

Como procedimos anteriorm.

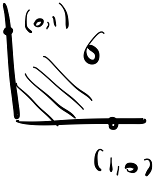
$$\underset{\substack{\text{cono}\\\text{poliedral}}}{\sigma \subseteq M_{\mathbb{R}}} \rightsquigarrow \underset{\substack{\text{cono}\\\text{dual}}}{\sigma^{\vee}} \rightsquigarrow \underbrace{\sigma^{\vee} \cap M}_{\text{- monoide -}} \rightsquigarrow S_{\sigma} = \underbrace{K[\sigma^{\vee} \cap M]}_{\substack{K\text{-algebra}\\\text{asociada a}\\\sigma.}}$$

$$\Big\updownarrow$$

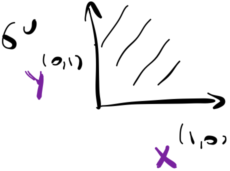
esquema afín,

$$X_{\sigma} = \operatorname{Spec} S_{\sigma}$$

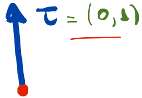
Conos en $\mathbb{R}^2 = \mathbb{Z}^2 \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$



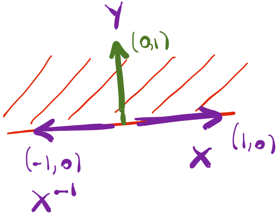
$\rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow \underbrace{\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]}_{\mathbb{A}^2_k}$

✱ 

$\rightsquigarrow$

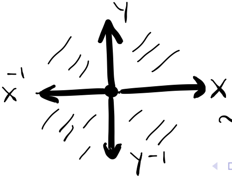


$\rightsquigarrow \underbrace{\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y,x^{-1}]}_{\cong}$

$(\mathbb{A}^1 - \{0\}) \times \mathbb{A}^1$

$\{0\}$

$\rightsquigarrow$



$\rightsquigarrow \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,x^{-1},y,y^{-1}]$

$$\operatorname{Spec}[x, x^{-1}, y, y^{-1}] \simeq \operatorname{Spec}[x,y]_{\left(\frac{1}{xy}\right)}$$

$$\simeq (\mathbb{C} - \{0\}) \times (\mathbb{C} - \{0\}).$$

$$\simeq \underbrace{\mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*}_{\substack{\text{grupo algebraico} \\ \text{(toro)}}}$$

$\leftarrow$ - órbita - abierto denso.

- $\tau \subseteq \tau' \rightsquigarrow X_\tau \subseteq X_{\tau'}$
- $\{0\} \subseteq \tau' \rightsquigarrow X_{\{0\}} \subseteq X_{\tau'} \rightsquigarrow (\mathbb{C}^*)^2 \subseteq X_{\tau'}$

En X_σ tenemos una copia de X_0 encajada

$((\mathbb{C}^*)^n)$

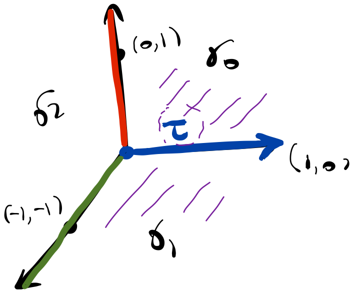
toro.

$X_\sigma \leftarrow$ variedad afín tórica.

$\mathcal{F}$

Abanico: unión de conos con la propiedad $\sigma \cap \sigma'$ es un cono de $\mathcal{F}$.

$\mathcal{F}$ contiene información de pegado de esquemas afines, en el sgte. sentido:



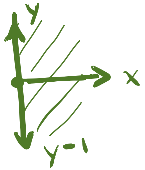
$\sigma_0 \rightsquigarrow \mathbb{C}[x,y]$

$\sigma_1 \qquad \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]$

$\sigma_1^\vee$

Notar $\tau = \sigma_0 \cap \sigma_1$

$\tau^\vee$



$$\underbrace{X_\tau = \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x, y^{-1}, y]}_{\mathbb{C}_x \times \mathbb{C}^*_{(y\neq 0)}}$$

$$\begin{tikzcd} & X_{\sigma_0} \\ X_\tau \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & X_{\sigma_1} \end{tikzcd}$$

abierto común.

$$\begin{tikzcd} & \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y] \\ \operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y^{-1},y] \arrow[ur, hook] \arrow[dr, hook] & \\ & \operatorname{Spec} \mathbb{C}[\underbrace{\overset{u}{\widetilde{xy^{-1}}}}, \underbrace{\overset{v}{\widetilde{y^{-1}}}}] \end{tikzcd}$$

$xy^{-1} = u \quad = v$

y^{-1} ″

$\mathbb{C}^2_{(x,y)}$

$uv^{-1} = x$

$v^{-1} = y$

$\mathbb{C}^2_{(xy^{-1},\, y^{-1})}$

- $\mathbb{C}[x,y] \xrightarrow{\varphi} \mathbb{C}[x,y]_{\left(\frac{1}{y}\right)} \simeq \mathbb{C}[x,y,y^{-1}]$

φ induce una inmersión

$$\underbrace{\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y,y^{-1}]}_{X_\tau} \hookrightarrow \underbrace{\operatorname{Spec} \mathbb{C}[x,y]}_{X_{\sigma_0}}$$

- $\mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}] \xrightarrow{\tilde{\varphi}} \mathbb{C}[xy^{-1}, y^{-1}]_{\left(\frac{1}{y^{-1}}\right)} \simeq \mathbb{C}[x,y,y^{-1}]$

$$X_\tau \hookrightarrow X_{\sigma_1}$$

Así X_{σ_0} X_{σ_1}

se pueden pegar a través de X_τ.

Similarmente, usando las otras intersecciones es posible pegar los esquemas $\underset{\mathbb{C}^2}{X_{\sigma_0}}$, $\underset{\mathbb{C}^2}{X_{\sigma_1}}$, $\underset{\mathbb{C}^2}{X_{\sigma_2}}$

a través de las intersecciones $\underbrace{X_{\sigma_0} \cap X_{\sigma_1}}_{\mathbb{C}_x \times \mathbb{C}^*_{y \neq 0}}$, $X_{\sigma_0} \cap X_{\sigma_2}$

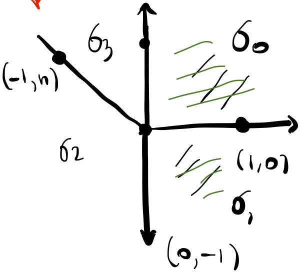
y $X_{\sigma_1} \cap X_{\sigma_2}$.

verificar:

- $X_{\sigma_0} \cup X_{\sigma_1} \cup X_{\sigma_2} / \sim \qquad \mathbb{P}^2$.

info pegado dado por $\mathcal{F}$

Corregir! (en la gradación de zoom se consideró la arista equivocada)



Verificar que el esquema asociado a este abanico es isomorfo a

$$\mathbb{F}(n) \subseteq \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1$$

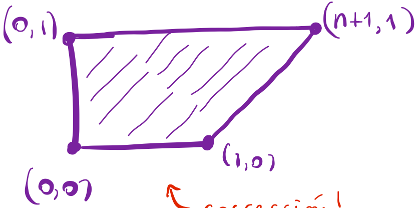
$$\mathbb{F}(n) = \left\{ \left([x_0 : x_1 : x_2], [y_1 : y_2] \right) \in \underline{\underline{\mathbb{P}^2}} \times \underline{\underline{\mathbb{P}^1}} \;\middle|\; \boxed{x_1 y_1^{\,n} = x_2 y_2^{\,n}} \right\}.$$

obs: conviene así, para evitar permutar.

superficie de Hirzebruch.

Análogamente:

Considerar el politopo Δ



corrección!

verificar:

$\mathbb{F}(n) \simeq \mathbb{P}_{\Delta}$.

corrección

Condiciones de finitud y anillos noetherianos

- Recordar:

Sea R un anillo conmutativo.

Decimos que un R-módulo M es noetheriano si toda cadena ascendente de submódulos de M se estabiliza, i.e

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \dots \subseteq M_n \subseteq \dots$$

existe N tal que $M_k = M_N \quad \forall k \geq N$.

R anillo Noetheriano si es Noetheriano como R-módulo.

Teorema: Sea R un anillo (conmutativo). Las sgte propiedades son equivalentes:

(i) R Noetheriano

(ii) Todo ideal de R es finitam. generado.

• **Teorema A**: (Teorema de la base de Hilbert)

Si R anillo Noetheriano (R conmut.)

$\Rightarrow R[x]$ es Noetheriano

• **Teorema B**:

Sea R anillo Noetheriano

$\Rightarrow$ Spec$R$ es un espacio topológico Noetheriano.

(satisface condición descendente para conjuntos cerrados)

Más aún

Spec R es una unión finita de cerrados irreducibles,

$$\operatorname{Spec} R = \bigcup_i X_i \quad \text{donde } X_i \not\subseteq X_j \ \forall i \neq j.$$

X_i : componentes irreducibles de $X = \operatorname{Spec} R$.

Recordar: Corresp 1-1 ideales radicales de R $\longleftrightarrow$ subconj. cerrados de Spec R

Corolario:

$I \subseteq R$ ideal. Entonces

$$\sqrt{I} = \bigcap_{i=1}^{n} P_i$$ para ciertos ideales primos P_i, con $P_i \not\subseteq P_j$, $i \neq j$.

los P_i en el corolario son los ideales primos minimales que contienen a I.