Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo (semana 15)

Familias normales

1. Considere una familia de funciones analticas $f : U \to \mathbb{C}$. Si la parte real de cada elemento de la familia es positiva, probar que tal familia es normal.
2. En la región U considere $U_n = \{z : |z| \leq n\} \cap U \cap \{z : dist(z, \mathbb{C} - U) \geq \frac{1}{n}\}$. En el espacio de las funciones continuas $f : U \to \mathbb{C}$, escribir $|f|_n = \sup\{|f(z)|\colon z \in U_n\}$ y muestre que
$$|f|_s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f|_n}{1 + |f|_n}$$
es una norma, con la cual la familia de las funciones continuas $f : U \to \mathbb{C}$ es un espacio métrico completo.
3. Sea f_k una sucesión en el espacio presentado en la pregunta 2. Probar que f_k converge uniformemente en los compactos de U si y solo si cada $a \in D$ induce un disco compacto $D(a, \delta) \subset U$ donde f_k converge uniformemente.
4. Sea $\mathcal{F} \subset C(U, \mathbb{C})$ una familia en el espacio definido en la pregunta 2. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones.
   a) $\mathcal{F}$ es una familia normal.
   b) La clausura $\overline{\mathcal{F}}$ es compacto.
   c) Si $K \subset U$ es compacto y $\epsilon > 0$ existe un conjunto finito $f_1, \ldots, f_n$ en $\mathcal{F}$ de modo que por cada $f \in \mathcal{F}$ induce algun f_j tal que $|f - f_j|_s < \epsilon$
5. Sea f_k una sucesión de funciones analíticas del espacio presentado en la pregunta 2. Si f_k converge uniformemente en compactos de U a f, pruebe que f es análitica en U de dos maneras: Por medio del teorema de Morera y por la formula integral de Cauchy.
6. Sea f_k una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente en compactos de U a f. Si las funciones f_k son injectivas en la región U, pruebe que la función límite f es inyectiva o bien constante en U.
7. Usar el teorema de Ascoli-Arzelá para probar le equivalencia de las siguientes afirmaciones sobre la familia $\mathcal{F}$ de funciones analíticas y definidas en una region U.
   a) $\mathcal{F}$ es normal.
   b) Por cada compacto $K \subset U$ existe $M_k > 0$ tal que $\sup\{|f(z)| : z \in K\} < M_k$ para todo $f \in \mathcal{F}$.
8. Sea $\mathcal{F}$ una familia normal como en el problema 7. Probar que las derivadas $\{f'\colon f \in \mathcal{F}\}$ también es normal.
9. Sea f_k una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente en compactos de U a f. Suponer que $f \not\equiv 0$ tiene m distintos ceros en U, pruebe que para n suficientemente grande la función f_n tiene al menos m ceros en U.
10. Sea c_n un sucesión limitada de números complejos. Pruebe que la serie de funciones
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z^n}{1 - z^n} \tag{1}$$
converge uniformemente en compactos de $\mathbb{D} = \{|z| \leq 1\}$. Si la serie $\sum c_n$ es convergente, demuestre que la serie (1) converge uniformemente en compactos de $|z| \neq 1$ a una función analítica $g(z)$. Concluir que en este último caso $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ satisface las desigualdades
$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n), \quad |z| < 1 \quad \text{y} \quad g(z) = -\sum_{n=1}^{\infty} f(z^{-n}), \quad |z| > 1.$$

San Miguel, 2020.