Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo (semana 13 y 14)

Laurent

1. Sea $f_n(z)$ una función analítica en la región U tal que $f_n(z_0) \neq 0$ para todo $z_0 \in U$. Si $f_n(z)$ converge uniformemente en cada compacto de U y $f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z)$ para todo $z \in U$, pruebe que $f(z)$ es identicamente cero o bien $f(z) \neq 0$ para todo $z \in U$.
2. Probar que la serie
$$\varsigma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$
converge para todo z con $\mathrm{Re}(z) > 1$.
3. Desarrollar $\dfrac{1}{1+z^2}$ en potencias de $(z-1)$
4. Usar la representación en una serie de Taylor para probar que el conjunto de polos de una función definida en una región, no admite un punto de acumulación.
5. Probar que la serie de Laurent de una función $f(z)$ es única
6. Halle la serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{z^2}{z-1} e^{1/z}$$
en cada anillo $0 < |z| < 1$ y $|z| > 1$.
7. Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo abierto $D^*(a,r) : 0 < |z-a| < r$ con un polo en a y $g(z)$ una función entera. Probar que $g(f(z))$ tiene un polo en a
8. Sea $f(z)$ una función analítica en el anillo abierto $D^*(a,r) : 0 < |z-a| < r$. Si la imagen $f(D^*)$ está incluida en el semiplano $Im(z) > 0$, probar que $f(z)$ tienen una singularidad removible en el punto a.
9. Probar que las seire de Laurent de $\dfrac{1}{e^z - 1}$ en una vecindad de origen tiene la forma
$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{B_n}{(2n)!} z^{2n-1}.$$
Probar la regla de recurrencia
$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1} B_k}{(2k)!(2n-2k+1)!} = \frac{1}{2(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!}$$
y calcule B_1, B_2 y B_3.
10. Probar que cualquier función analítica $f(z)$ en el semiplano Π^+ dado por $\mathrm{Im}(z) > 0$ y de periodo 2π admite una expansion de la forma
$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}, \quad \forall z \in \Pi^+.$$
Halle una expresión integral para los coeficientes c_n.
11. Sea $f(z)$ una función analítica e inyectiva en el disco abierto U. Si el disco cerrado D dado por $|z-a| \leq r$ está incluido en U probar que
$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \frac{z f'(z)}{f(z) - w} dz$$
para todo $w \in f(D)$
12. Halle la serie de Laurent de $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ en el anillo $A(1,1,\infty)$ dado por las desigualdades $1 < |z-1| < \infty$.

13. Encuentre la descomposición de
$$\frac{z^4}{(z-i)^2(z+i)}$$
en sumas parciales dadas por fracciones simples de la forma $\dfrac{c}{(z-a)^k}$ con $a, c \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{N}$.
14. Encuentre la serie de Laurent de la función
$$f(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{2-z},$$
definida en el anillo $|z| > 2$.
15. Use la derivada de $\frac{1}{1-z}$ para encontrar la serie de Laurent de
$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$
en el anillo $|z| > 1$.
16. Utilice la serie de Lurent para determinar el orden del polo $a = 0$ en la función
$$f(z) = \frac{e^{z^2} - 1}{z^4}.$$
17. Probar que las siguientes funciones son armónicas en la región dada
    a) $u(x, y) = x^2 - y^2$ en $\mathbb{C}$.
    b) $u(x, y) = e^x \operatorname{sen}(y)$ en $\mathbb{C}$.
    c) $u(x, y) = Arg(z)$ (con $z = x + iy$) en $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$.
    d) $u(x, y) = Log(\sqrt{x^2 + y^2}) =$ en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.
18. Considere u y v dos funciones armónicas, pruebe que cada combinación lineal $au + bv$ con las constantes $a, b \in \mathbb{R}$ es armónica.
19. Si Considere u es armónica en una región U, pruebe que su gradiente conjugado
$$\frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$
es analítica en U.
20. Halle el gradiente conjugado de la función armónica
$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad y > 0.$$
21. Sea $f(z)$ una función analítica y w una función de clase C^2 en la región $f(U)$. Pruebe que el laplaciano satisface
$$\triangle(w \circ f) = |f'|^2 \triangle w.$$
22. Encuentre una función armónica conjugada[1] de $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$
23. Pruebe que si v es la armónica conjugada de u, entonces $-u$ es la armonica conjugada de v.
24. Sea u una función armónica en un disco D centrado en $a \in D$. Pruebe que
$$v(z) = \int_{[a,z]} \frac{\partial u}{\partial x} dy - \frac{\partial u}{\partial y} dx$$
es la armónica conjugada de u en D ($[a, z]$ es el segmento orientado que une a con z.)
25. Analizar si $log|z| = log\sqrt{x^2 + y^2}$ tiene una conjugada armónica en $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

San Miguel, 2020.

[1] Si las funciones armónicas u y v inducen la función analítica $u + iv$, se dice que v es una armónica conjugada de u.