# Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

## Análisis Complejo

### Integrales de linea (semana 6)

1. Considere $\gamma$ como el cuadrado de vertices en 1, $i$, $-1$ y $-i$. Calcular la integral
$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz.$$
2. En la circunferencia $\mathbb{S}^1 : |z| = 1$, calcular
$$\int_{\mathbb{S}^1} \frac{\operatorname{sen}(z)}{z^2-4}dz.$$
3. Considere $\sigma$ y $\gamma$ los dos poligonos[1] $[1, i]$ y $[1, 1+i, i]$. Calcular
$$\int_\sigma |z|^2 dz \quad y \quad \int_\gamma |z|^2 dz.$$
Analizar la existencia de una primitiva para $f(z) = |z|^2$ a la luz del ejercicio $14b$.
4. En $\gamma : z(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$; calcular
$$\int_\gamma z^n dz,$$
para cada entero $n \in \mathbb{Z}$.
5. Sea $I(r) = \displaystyle\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}dz$, donde $\gamma_r : z(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq \pi$. Mostrar que $\lim_{r\to\infty} I(r) = 0$.
6. Calcular
$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}dz$$
en los siguientes casos: (a) $\gamma$: la semicircunferencia unitaria superior de 1 a $-1$. (b)$\gamma$ la semicircunferencia unitaria inferior de 1 a $-1$.
7. Calcular
$$\int_\gamma x dz,$$
donde $\gamma$ es el segmento orientado de 0 a $1+i$.
8. Encontrar
$$\int_{|z|=r} x dz,$$
para la circunferencia en el sentido positivo, de dos maneras: primero, utilice el parametro y segundo use que $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^r}{z}\right)$ en la circunferencia.
9. Calcular
$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}dz$$
en dos caso complementarios. (a) $\gamma : z(t) = 1 + e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ (b) $\gamma$ es la circunferencia $|z| = 2$, en el sentido positivo.
10. Calcular
$$\int_{|z|=1} |z-1|\,|dz|.$$

[1] $[z_0, z_1, \ldots, z_n]$ es el poligono dado por $\cup_{i=1}^n [z_{i-1}, z_i]$ de segmentos $[z_{i-1}, z_i] = \{(1-t)z_{i-1} + tz_i : 0 \leq t \leq 1\}$.

11. Una función $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si por cada partición $P : \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b\}$ de $[a, b]$ el siguiente supremo
$$V_g[a, b] = \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})| \colon P \text{ partición de } [a.b] \right\} < \infty.$$
   *a*) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente. Mostrar que $f$ es de variacion acotada y $V_f[a, b] = f(b) - f(a)$.
   *b*) $g\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ es de variación acotada si y solo si existe $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$, monótona creciente tal que $x < y \Rightarrow g(y) - g(x) \leq \varphi(y) - \varphi(x)$.
   *c*) Definir $f(0) = 0$ y $f(x) = x \sin(1/x), 0 < x \leq 1$. Probar que $f$ es continua, limitada pero $V_f[0, 1] = +\infty$. Sin embargo, $g(x) = xf(x)$ es de variación acotada en $[0, 1]$.
   *d*) Considere $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de variación acotada. Probar que $f$ es continua en $x \in [a, b]$ si y solo si $x$ es un punto de continuidad de $x \mapsto V_f[a, x]$.
12. El camino suave por partes $\gamma : z = z(t) \in U \subset \mathbb{C}$ se dice rectificable si la parte real $\mathrm{Re}(z(t))$ y la parte imaginaria $\mathrm{Im}(z(t))$ son de variación acotada. Mostrar que si la función $f : U \to \mathbb{C}$ es continua
$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\sigma f(z)dz,$$
para cualquier $\sigma$ equivalente a $\gamma$. Es decir, $\sigma : z = z(\varphi(s))$ con $\varphi$ monotona creciente y suave entre intervalos compactos. (Los caminos rectificables equivalentes definen las curvas rectificables como clases de equivalencia, asi las integrales $\int_\gamma f$ sobre la curvas no dependen del camino que representa la clase).
13. Sea $\gamma$ una curva rectificable, con imagen $\gamma^* \subset U \subset \mathbb{C}$ y $f$ una función continua en $U$. Probar.
   *a*) $\int_\gamma f = -\int_{-\gamma} f$
   *b*) $\left|\int_\gamma f\right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz| \leq \sup_P \left\{ \sum_P |z_k - z_{k-1}| : P(z_0, z_1, \ldots, z_n) \right\} \sup_{z \in \gamma^*} |f(z)|$, donde $P(z_0, z_1, \ldots, z_n)$ denota una partición de $\gamma^*$.
   *c*) Si $c \in \mathbb{C}$, entonces $\int_\gamma f(z)dz = \int_{c+\gamma} f(z - c)dz$
14. Considere una curva rectificable $\gamma : z = z(t) \in U, a \leq t \leq b$ y $f : U \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función continua. Probar
   *a*) Para cada $\epsilon > 0$, existe una curva poligonal $\Gamma : z = z(t) \in U, a \leq t \leq b$ tal que $\gamma(a) = \Gamma(a)$, $\gamma(b) = \Gamma(b)$ y $\left|\int_\gamma f - \int_\Gamma f\right| < \epsilon$.
   *b*) Si $F : U \to \mathbb{C}$ es una primitiva de $f$ (es decir $F' = f$), entonces
$$\int_\gamma f = F(\gamma(b)) - F(\gamma(a)).$$
   (Cuando la curva es cerrada: $\gamma(a) = \gamma(b)$, en el item anterior se obtiene $\int_\gamma f = 0$)
15. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$. Probar que si $f' = 0$, entonces $f$ es constante.
16. Considere que la función $f(z)$ es analítica en la curva cerrada $\gamma$. Analizar si
$$\int_\gamma \overline{f(z)} f'(z)dz$$
es imaginario puro (asumir la continuidad de $f'(z)$).
17. Considere una sucesión $f_n$ que converge uniformemente a $f$ en el abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$. Probar
$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)dz = \int_\gamma f(z)dz.$$

San Miguel, 2020.