Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo

Introducción a los números complejos (semana 1)

1. Si $z = x + iy$ (x y y son reales), encuentre la parte real e imaginaria de
$$z^2, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}.$$
2. Si $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ satisface $\beta \neq 0$, encuentre la solución de la ecuación: $(x+iy)^2 = \alpha + i\beta$.
3. (*) Probar que en $\mathbb{C}$ no existe el conjunto de los números positivos[1]
4. Probar que el sistema de todas la matrices de la forma $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$ define un cuerpo que contiene a un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$, y la ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución.
5. Analizar el valor de verdad:
   - Si $|a| = 1$ y $|b| = 1$, entonces $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$.
   - Si $|a| = 1$ o bien $|b| = 1$, entonces $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| = 1$.
   - El modulo de un producto es igual al producto de los modulos de cada factor.
6. Probar que $|a+b| \leq |a| + |b|$, para todo $a, b \in \mathbb{C}$.
7. Probar que $\left|\dfrac{a-b}{1-\overline{a}b}\right| < 1$, siempre que $|a| < 1$ y $|b| < 1$.
8. Dar todas la soluciones de la ecuación $z^n = r\big(cos(\theta) + isen(\theta)\big), n \geq 2$ con $r > 0$ y probar que todas tienen el mismo modulo, y sus argumentos están igualmente espaciados. Demostrar, en particular, que si $\omega = cos\left(\frac{2\pi}{n}\right) + isen\left(\frac{2\pi}{n}\right), n \geq 2$, la suma
$$1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k}$$
es cero, para cualquier entero k que no sea un multiplo de n.
9. Considere la correspondencia $(x_1, x_2, x_3) \mapsto z$ y $(x_1', x_2', x_3') \mapsto z'$ en la proyección estereografica. Probar la siguientes afirmaciones.
   - Cualquier circunferencia en la esfera corresponde a circunferencias o rectas en el plano horizontal y la correspondencia es inyectiva.
   - La suma $(x_1 - x_1')^2 + (x_2 - x_2')^2 + (x_3 - x_3')^2$ no solo es igual a la diferencia $2 - 2(x_1x_1' + x_2x_2' + x_3x_3')$ sino también al cociente
   $$\frac{(1+|z|^2)(1+|z'|^2) - 2|z-z'|^2}{(1+|z|^2)(1+|z'|^2)}.$$
   - Si $z, w \in \mathbb{C}$ son distintos de cero y $d(z,w)$ denota la distancia euclidiana en $\mathbb{R}^3$ de los puntos correspondientes en la proyección, entonces se cumple las igualdades:
   $$d(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}, \quad z, w \in \mathbb{C};$$
   $$d(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}, \quad z \in \mathbb{C}.$$
10. Probar que z y w corresponden a puntos diamentralmente opuestos en la esfera $\mathbb{S}^2$ si y solo si el producto $z\overline{w} = -1$ (en $\mathbb{C}$).
11. Probar que si hay una rama de $\sqrt{z}$ en un conjunto abierto del plano U con $0 \notin U$, entonces existe también una rama de $arg(z)$.

San Miguel, 2020.

[1] Un subconjunto $P \subset F$ de un cuerpo se dice que está formado por elementos positivos si satisfce: (a) $0 \notin P$.(b) por cada elemento $x \neq 0$ se obtiene $x \in P$ o bien $-x \in P$. (c) P es cerrado por las dos operaciones del cuerpo.