Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo (semana 10)

Residuos

1. Para un ciclo $\gamma \subset \mathbb{C}$ cuando el subconjuto $\Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \colon \eta(\gamma, a) = 1\}$ induce la inclusión del complemento $\mathbb{C} - \Omega \subset \{z \in \mathbb{C} \colon \eta(\gamma, a) \in \{0, \nexists\}\}$ y $f(z)$ es analítica en la traslación $\gamma + \Omega$, probar que
$$\int_\gamma f(z) = 0 \quad y \quad f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{w}{w-z}dw, \quad \forall z \in \Omega.$$
2. Si $f(z)$ es analítica en la traslación $\gamma + \Omega$ (excepto en las singularidades) con Ω como en la pregunta 1 (la region limitada por γ), probar que
$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)dz = \sum_j Res_{a_j} f(z),$$
donde la suma recorre todas la singularidades a_j.
3. Sea $f(z)$ una función analítica en un abierto U que satisface $|f(z) - 1| < 1$ para todo $z \in U$. Probar que
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = 0$$
sucede para cualquier curva cerrada $\gamma \subset U$.
4. El polinomio $p(z) = z^4 - z^3 - z + 5$ tiene raiz simple en $\{z : 1 < |z| < 2\}$ y tiene una en cada cuadrante.
5. Sea $f(z)$ una función analítica en U, exepto en los polos b_j con a_j los ceros de $f(z)$ se cumple
$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}dz = \sum_j \eta(\gamma, a_j) - \sum_j \eta(\gamma, b_j)$$
para cualquier ciclo γ homologo a cero en U que no pasa por ningún cero o polo.
6. Sea γ un ciclo, homologo a cero en U tal que $\eta(\gamma, z) \in \{0, 1\}$ para todo que no está en γ. Si $f(z)$ y $g(z)$ son analíticas en U y satisfacen
$$|f(z) - g(z)| < |f(z)|, \quad \forall z \in \gamma.$$
Probar que $f(z)$ y $g(z)$ tienen el mismo número de ceros encerrados por γ.
7. Considere dos funciones analíticas $f(z)$ y $g(z)$ en un abierto U. Probar la equivalencia de las siguientes afirmaciones
   a) Existe $a \in U$ tal que $f^{(n)}(a) = g^{(n)}(a)$ para todo $n \geq 0$.
   b) Existe un conjunto $A \subset U$ que admite un punto de acumulación en U tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$
   c) Existe un conjunto abierto $V \subset U$ tal que $f(v) = g(v)$ para todo $v \in V$
8. Encontrar el número de raices de $z^4 - 6z + 3 = 0$ que tiene módulo entre 1 y 2.
9. Hallar los ceros, los polos y los residuos de las siguientes funciones: (a) $\dfrac{1}{z^2 + 5z + 6}$ (b) $\dfrac{1}{(z^2-1)^2}$ (c) $\dfrac{1}{sen^2(z)}$ (d) $\dfrac{z^2+1}{z}$
10. Calcular la integral $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}dz$, donde C es la circunferencia centrada en 1 y radio 1.
11. Encontrar el residuo de $\dfrac{z^2}{z^2-1}$ en $b = 1$
12. Mostrar que $3/4$ es el residuo de $\dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ en $b = 1$

San Miguel, 2020.