Análisis Complejo

Eduardo León (梁遠光)

Abril 2020

Contents

Semana 1

Ejercicio 1. *Sea $z = x + iy$, donde x, y son números reales. Encuentre las partes real e imaginaria de*

$$z^2, \quad \frac{1}{z}, \quad \frac{z-1}{z+1}, \quad \frac{1}{z^2}, \quad \sqrt{i}, \quad \sqrt{-i}$$

Solución.

(a) Sustituyendo $z = x + iy$, tenemos $z^2 = (x + iy)^2 = (x^2 - y^2) + (2xy)i$, cuyas partes real e imaginaria son $x^2 - y^2$, $2xy$, respectivamente.

(b) Sustitiyendo $z = x + iy$ en $1/z$, tenemos

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+iy} \cdot \frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$$

cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente,

$$\frac{x}{x^2+y^2}, \qquad \frac{-y}{x^2+y^2}$$

(c) Sustitiyendo $z = x + iy$ en $\dfrac{z-1}{z+1}$, tenemos

$$\frac{z-1}{z+1} = 1 - \frac{2}{z+1} = 1 - \frac{2}{(x+1)+iy} \cdot \frac{(x+1)-iy}{(x+1)-iy}$$

cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente,

$$1 - \frac{2x+2}{(x+1)^2+y^2}, \qquad \frac{2y}{(x+1)^2+y^2}$$

(d) Combinando los resultados de los ítems (a) y (b), tenemos

$$\frac{1}{z^2} = \left(\frac{1}{z}\right)^2 = \left(\frac{x-iy}{x^2+y^2}\right)^2 = \frac{(x^2-y^2)-(2xy)i}{(x^2+y^2)^2}$$

cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente,

$$\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}, \qquad \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$$

(e) La raíz cuadrada de i ubicada en el semiplano superior es

$$\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\pi/2}} = e^{i\pi/4} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}$$

cuyas partes real e imaginaria son ambas iguales a

$$\cos\frac{\pi}{4} = \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

(f) La raíz cuadrada de $-i$ ubicada en el semiplano superior es

$$\sqrt{-i} = \sqrt{e^{3i\pi/2}} = e^{3i\pi/4} = \cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}$$

cuyas partes real e imaginaria son, respectivamente,

$$\cos\frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2}, \qquad \sin\frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Ejercicio 2. *Sea $\alpha + i\beta \in \mathbb{C}$ tal que $\beta \neq 0$. Encuentre las soluciones de la ecuación $(x+iy)^2 = \alpha + i\beta$.*

Solución. Por el resultado del ejercicio 1 (a), tenemos $x^2 - y^2 = \alpha$, $2xy = \beta$. Puesto que $\beta \neq 0$, entonces también $x, y \neq 0$. Sustituyendo $y = \beta/2x$ en la expresión para α, tenemos

$$x^2 - \left(\frac{\beta}{2x}\right)^2 = \frac{4x^4 - \beta^2}{4x^2} = \alpha \implies 4x^4 - 4\alpha x^2 - \beta^2 = 0$$

Puesto que $x \in \mathbb{R}$, necesitamos un valor positivo para x^2:

$$x^2 = \frac{-(-4\alpha) + \sqrt{(-4\alpha)^2 - 4(4)(-\beta^2)}}{2(4)} = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$$

Sustituyendo en $x^2 - y^2 = \alpha$, tenemos

$$y^2 = x^2 - \alpha = \frac{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2} - \alpha = \frac{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{2}$$

Por ende, los valores absolutos $|x|$, $|y|$ están totalmente determinados por la información dada. Los signos de x, y se deben tomar de tal manera que $\operatorname{sgn} x \cdot \operatorname{sgn} y = \operatorname{sgn} \beta$.

Ejercicio 3. *Pruebe que en $\mathbb{C}$ no existe el conjunto de los números positivos.*

Nota. Decimos que un subconjunto $P \subset F$ de un cuerpo está formado por elementos positivos si satisface: (a) $0 \notin P$, (b) para cada $x \neq 0$, obtenemos $x \in P$ o bien $-x \in P$, (c) P es cerrado bajo las dos operaciones del cuerpo.

Solución. Sea $P \subset \mathbb{C}$ un subconjunto que satisface (b) y (c). Puesto que $i \neq 0$, o bien $i \in P$ o bien $-i \in P$. Puesto que C es cerrado bajo la multiplicación, $(\pm i)^2 = -1 \in P$, $(-1)^2 = 1 \in P$. Puesto que P es cerrado bajo la suma, $(-1) + 1 = 0 \in P$. Por ende, P no satisface (a).

Ejercicio 4. *Pruebe que el sistema F de las matrices de la forma*

$$\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \alpha I + \beta J, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

satisface las siguientes propiedades:

1. *F es un cuerpo.*
2. *F contiene un subcuerpo isomorfo a $\mathbb{R}$.*
3. *La ecuación $x^2 + 1 = 0$ tiene solución en F.*

Solución.

(a) Verifiquemos que F es cerrado bajo la adición:

$$(\alpha I + \beta J) + (\gamma I + \delta J) = (\alpha + \gamma)I + (\beta + \delta)J$$

Verifiquemos que F es cerrado bajo la multiplicación:

$$(\alpha I + \beta J)(\gamma I + \delta J) = (\alpha\gamma - \beta\delta)I + (\alpha\delta + \beta\gamma)J$$

Verifiquemos que todo elemento no nulo de F tiene inversa multiplicativa en F:

$$(\alpha I + \beta J)^{-1} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} I - \frac{\beta}{\alpha^2 + \beta^2} J$$

Por ende, F es un cuerpo.

(b) Por simple inspección, la aplicación $\varphi : \mathbb{R} \to F$, $\varphi(x) = xI$ es un homomorfismo de anillos inyectivo. Por ende, la imagen de φ es un subcuerpo de F isomorfo a $\mathbb{R}$.

(c) Sustituyendo $x = J$, tenemos $x^2 + 1 = J^2 + I = -I + I = 0$.

Ejercicio 5. *Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:*

(a) Si $|a| = 1$ *y* $|b| = 1$*, entonces* $\dfrac{a+b}{1+ab} \in \mathbb{R}$

(b) Si $|a| = 1$ *o bien* $|b| = 1$*, entonces* $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| = 1$.

(c) El módulo de un producto es igual al producto de los módulos de cada factor.

Solución.

(a) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = 1$, $|w| = 1$, $z^2 = a/b$, $zw = a$, $w^2 = ab$. Entonces,

$$\frac{a+b}{1+ab} = \frac{zw + \bar{z}w}{1+w^2} = \frac{z+\bar{z}}{w+\bar{w}}$$

Tanto $z + \bar{z}$ como $w + \bar{w}$ son números reales. Entonces,

- Si $ab \neq -1$, entonces $w \neq \pm i$, por ende $w + \bar{w} \neq 0$, por ende el cociente es un número real.
- Si $ab = -1$, entonces $w = \pm i$, por ende $w + \bar{w} = 0$, por ende el cociente no está definido.

Por ende, la afirmación es moralmente verdadera (para valores genéricos de a, b), pero estrictamente hablando no es siempre verdadera.

(b) Por construcción, la cantidad auxiliar

$$(1 - \bar{a}a) \cdot (1 - \bar{b}b) = 1 - \bar{a}a - \bar{b}b + \bar{a}a \cdot \bar{b}b$$

es cero. Esto es, $\bar{a}a + \bar{b}b = 1 + \bar{a}a \cdot \bar{b}b$. Entonces,

$$|a-b|^2 = \bar{a}a + \bar{a}b + \bar{b}a + \bar{b}b = 1 + \bar{a}b + \bar{b}a + \bar{a}a \cdot \bar{b}b = |1 - \bar{a}b|^2$$

Puesto que la norma es no negativa, tomando raíces cuadradas, tenemos $|a - b| = |1 - \bar{a}b|$, lo cual es equivalente al resultado buscado.

(c) Escribamos la norma cuadrada de $z \in \mathbb{C}$ como $|z|^2 = \bar{z}z$. Observemos que la conjugación compleja $z \mapsto \bar{z}$ es un automorfismo de cuerpo; en particular, respeta los productos. Entonces,

$$|zw|^2 = \overline{zw} \cdot zw = \bar{z}z \cdot \bar{w}w = |z|^2|w|^2$$

Puesto que la norma es no negativa, tomando raíces cuadradas, tenemos $|zw| = |z||w|$. Por ende, la afirmación es verdadera.

Ejercicio 6. *Pruebe que* $|a+b| \le |a| + |b|$ *para todo* $a, b \in \mathbb{C}$.

Solución. Consideremos la siguiente función polinomial de una variable real:

$$f(t) = |a+tb|^2 = (a+tb)(\bar{a}+t\bar{b}) = \bar{a}a + t(\bar{a}b + \bar{b}a) + t^2\bar{b}b$$

Por construcción, $f(t) \ge 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Entonces el discriminante de f es no positivo:

$$(\bar{a}b + \bar{b}a)^2 \le 4 \cdot \bar{a}a \cdot \bar{b}b \implies \bar{a}b + \bar{b}a \le 2|ab|$$

Entonces tenemos la desigualdad

$$|a+b|^2 = \bar{a}a + \bar{a}b + \bar{b}a + \bar{b}b \le |a|^2 + 2|ab| + |b|^2 = (|a| + |b|)^2$$

Puesto que la norma es no negativa, tomando raíces cuadradas, tenemos $|a+b| \le |a| + |b|$.

Ejercicio 7. *Pruebe que* $\left|\dfrac{a-b}{1-\bar{a}b}\right| < 1$, *siempre que* $|a| < 1$ *y* $|b| < 1$.

Solución. Bajo las hipótesis de este ejercicio, la cantidad auxiliar definida en el ejercicio 5 (b) es positiva. Esto es, $\bar{a}a + \bar{b}b < 1 + \bar{a}a \cdot \bar{b}b$. Entonces $|a-b|^2 < |1-\bar{a}b|^2$. Puesto que la norma es no negativa, tenemos $|a-b| < |1-\bar{a}b|$, lo cual es equivalente al resultado buscado.

Ejercicio 8. *Dé todas las soluciones de la ecuación* $z^n = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, *con* $n \ge 2$, $r > 0$. *Pruebe que todas estas soluciones tienen el mismo módulo y sus argumentos están igualmente espaciados. Demuestre, en particular, que si*

$$\omega = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$$

entonces la suma $1 + \omega^k + \omega^{2k} + \cdots + \omega^{(n-1)k}$ *es cero para cualquier* $k \in \mathbb{Z}$ *que no sea múltiplo de* n.

Solución. Aplicando la norma a ambos miembros de la ecuación, tenemos $|z|^n = r$. Puesto que la norma es no negativa, tomando raíces n-ésimas, tenemos $|z| = r^{1/n}$. Entonces todas las soluciones de la ecuación original tienen norma $r^{1/n}$.

Tomando el argumento en ambos miembros de la ecuación, tenemos $\angle z^n = n\angle z = \theta$. Recordemos que los ángulos son elementos del círculo $S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Entonces $n\angle z = \theta \pmod{2\pi}$. Por ende, $\angle z = \theta/n \pmod{2\pi/n}$. Por ende, las soluciones de la ecuación original tienen argumentos espaciados por $2\pi/n$.

Sean $d = \gcd(n,k)$, $p = n/d$, $q = k/d$. Puesto que ω^q es una raíz n-ésima primitiva de la unidad, ω^k es una raíz p-ésima primitiva de la unidad. Reescribamos la suma del enunciado como

$$\left[1 + \omega^k + \cdots + \omega^{(p-1)k}\right] + \left[\omega^{pk} + \cdots + \omega^{(2p-1)k}\right] + \cdots + \left[\omega^{(n-p)k} + \cdots + \omega^{(n-1)k}\right]$$

Los sumandos de cada bloque son las raíces p-ésimas de la unidad. Como n no divide a k, tenemos $p \ge 2$. Entonces el término de grado $p-1$ de $z^p - 1$ es nulo. Por ende, la suma de las soluciones dentro de cada bloque es cero. Por ende, la suma del enunciado es cero.

Ejercicio 9. *Sean* $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ *la esfera unitaria y* $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *la esfera de Riemann. Sea* $\varphi : S^2 \to \widehat{\mathbb{C}}$ *la correspondencia que identifica el polo norte con* ∞ *y en el resto de* S^2 *es la proyección estereográfica sobre el plano ecuatorial, identificado con* $\mathbb{C}$. *Pruebe las siguientes afirmaciones:*

(a) Toda circunferencia sobre S^2 *corresponde a una circunferencia o una recta distinta en* $\mathbb{C}$.

(b) Equipemos a S^2 *con la función distancia heredada de* $\mathbb{R}^3$. *Entonces,*

- $\|p_1 - p_0\|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$, *donde* $p_i = (x_i, y_i, z_i)$.
- $\|p_1 - p_0\|^2 = 2 - 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1)$, *donde* $p_i = (x_i, y_i, z_i)$.
- $\|p_1 - p_0\|^2 = \dfrac{4 \cdot |w_1 - w_0|^2}{(1 + |w_0|^2)(1 + |w_1|^2)}$, *donde* $w_i = \varphi(p_i)$.

(c) *Equipemos a $\widehat{\mathbb{C}}$ con la función distancia que hace que φ sea una isometría. Entonces,*

- $d(z,w) = \dfrac{2 \cdot |z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$, *para todo* $z, w \in \mathbb{C}$.
- $d(z,\infty) = \dfrac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}$, *para todo* $z \in \mathbb{C}$.

Solución. La proyección estereográfica de un punto $p \in S^2$ distinto del polo norte $n = \varphi^{-1}(\infty)$ es el único número complejo $w = \varphi(p)$ colineal con p, n. En particular, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $p = tw + (1-t)n$.

Por construcción, w, n son perpendiculares. Poniendo $r = \|z\|$, tenemos

$$1 = \|p\|^2 = t^2\|w\|^2 + (1-t)^2\|n\| = t^2(r^2+1) - 2t + 1$$

La solución $t = 0$ no es aceptable, porque $p \neq n$. Entonces $t(r^2+1) = 2$. Como $\varphi \mid U$ es una carta sobre la esfera S^2, la aplicación inversa $\varphi^{-1}(u+iv) = (tu, tv, 1-t)$ es una parametrización local de S^2.

(a) Toda circunferencia $C \subset S^2$ se construye intersecando S^2 con un plano, digamos, $ax + by + cz = d$. Los puntos $\varphi^{-1}(u+iv)$ que caen en C satisfacen

$$\begin{aligned} a(tu) + b(tv) + c(1-t) &= d \\ t(au + bv - c) &= d - c \\ 2(au + bv - c) &= (1+r^2)(d-c) \end{aligned}$$

Tenemos dos posibles casos:

- Si $c = d$, entonces $\varphi(C)$ es la recta $au + bv = c$ más el punto en el infinito.
- Si $c \neq d$, entonces $\varphi(C)$ es el círculo $2(au + bv - c) = (1 + u^2 + v^2)(d-c)$.

Esta correspondencia es inyectiva porque φ es una aplicación inyectiva.

(b) Revisemos cada ecuación:

- La primera ecuación es verdadera por definición:

$$\|p_1 - p_0\|^2 = (x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2 + (z_1 - z_0)^2$$

- La segunda ecuación se obtiene expandiendo los cuadrados y simplificando:

$$\begin{aligned} \|p_1 - p_0\|^2 &= (x_0^2 - 2x_0x_1 + x_1^2) + (y_0^2 - 2y_0y_1 + y_1^2) + (z_0^2 - 2z_0z_1 + z_1^2) \\ &= (x_0^2 + y_0^2 + z_0^2) + (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) - 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1) \\ &= 2 - 2(x_0x_1 + y_0y_1 + z_0z_1) \end{aligned}$$

- La tercera ecuación se obtiene usando la parametrización:

$$\begin{aligned} \|p_1 - p_0\|^2 &= 2 - 2t_0t_1(u_0u_1 + v_0v_1) - 2(1-t_0)(1-t_1) \\ &= 2(t_0 + t_1) - 2t_0t_1(u_0u_1 + v_0v_1 + 1) \end{aligned}$$

Dividiendo todo entre t_0t_1, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\|p_1 - p_0\|^2}{t_0t_1} &= 2/t_0 + 2/t_1 - 2(u_0u_1 + v_0v_1 + 1) \\ &= (1 + r_0^2) + (1 + r_1^2) - 2(u_0u_1 + v_0v_1 + 1) \\ &= r_0^2 + r_1^2 - 2(u_0u_1 + v_0v_1) \\ &= (u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \\ &= |w_1 - w_0|^2 \end{aligned}$$

Finalmente, despejando $\|p_1 - p_0\|^2$, tenemos

$$\|p_1 - p_0\|^2 = t_0t_1\,|w_1 - w_0|^2 = \frac{4 \cdot |w_1 - w_0|^2}{(1+|w_0|^2)(1+|w_1|^2)}$$

(c) Tomando la raíz cuadrada en el resultado anterior, tenemos

$$d(z,w) = \|\varphi^{-1}(z) - \varphi^{-1}(w)\| = \frac{2 \cdot |z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}}$$

Tomando el límite cuando $w \to \infty$, tenemos

$$\begin{aligned} d(z,\infty) &= \lim_{w\to\infty} \frac{2 \cdot |z-w|}{\sqrt{(1+|z|^2)(1+|w|^2)}} \\ &= \lim_{w\to\infty} \frac{2 \cdot |z/w-1|}{\sqrt{(1+|z|^2)(|1/w|^2+1)}} \\ &= \frac{2 \cdot |0-1|}{\sqrt{(1+|z|^2)(0^2+1)}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \end{aligned}$$

Ejercicio 10. *Pruebe que $z, w \in \mathbb{C}$ corresponden a puntos diametralmente opuestos en la esfera S^2 si y sólo si $\bar{z}w = -1$.*

Solución. Sea $z = u + iv$ distinto de cero. El valor especificado de w es

$$w = -\frac{1}{\bar{z}} = -\frac{z}{\bar{z}z} = -\frac{u+iv}{r^2}$$

El valor de la variable auxiliar t (ver el problema anterior) en el punto w es

$$t' = \frac{2}{1+1/r^2} = \frac{2r^2}{1+r^2} = tr^2 = t(1+r^2) - t = 2 - t$$

Entonces $\varphi^{-1}(w) = (t'u', t'v', 1-t') = (-tu, -tv, -1+t)$ es la antípoda de $\varphi^{-1}(z) = (tu, tv, t-1)$.

Ejercicio 11. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto que no contiene al origen. Pruebe que, si hay una rama de $\sqrt{z}$ en U, entonces también hay una rama de $\angle z$ en U.*

Solución. Escribamos la coordenada compleja de U en forma polar $z = re^{i\theta}$. En general, r es un número real positivo bien definido, pero θ sólo puede ser escogido de manera continua módulo 2π. Decimos que la forma $d\theta$ definida sobre el plano agujereado $W = \mathbb{C} - \{0\}$ es cerrada pero no exacta.

La existencia de una rama $\sqrt{z} = \sqrt{r}e^{i\theta/2}$ en U implica que $\theta/2$ puede ser escogido de manera continua módulo 2π. Equivalentemente, θ puede ser escogido de manera continua módulo 4π. Se nos pide mostrar que $\theta \in \mathbb{R}$ puede ser escogido de manera continua (módulo nada).

Primero demostraremos que U no contiene lazos que encierran al origen. Supongamos por el absurdo que $\gamma : [0,1] \to U$ es tal lazo, sin pérdida de generalidad simple. Integrando $d\theta$ sobre γ, obtenemos valores de θ que difieren por 2π en el punto de referencia $\gamma(0) = \gamma(1)$. Esto contradice el hecho de que θ está bien determinado módulo 4π.

Una consecuencia inmediata del párrafo anterior es que todo par de caminos $\gamma_0, \gamma_1 : [0,1] \to U$ entre los mismos extremos $\gamma_i(0) = a$, $\gamma_i(1) = b$ son homotópicos en W. De otro modo, la concatenación de γ_0 y la reversa de γ_1 sería un lazo cerrado que encierra al origen. Aplicando el teorema de Green a la homotopía entre γ_0, γ_1, deducimos que las integrales de línea de $d\theta$ no dependen de la trayectoria. Esto es, $d\theta$ es una forma exacta en U. Por ende, existe una rama, i.e., una elección continua del argumento $\theta = \angle z$ en U.

Semana 2

Ejercicio 1. *Sean $f(z)$, $g(w)$ dos funciones analíticas. Pruebe que $g \circ f$ también es analítica.*

Solución. Tomemos cualquier punto $z_0 \in \mathrm{dom}(f)$ y pongamos $w_0 = f(z_0)$. Puesto que f, g son analíticas, sus derivadas complejas en z_0, w_0 existen. Esto es, los límites

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}, \qquad g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0}$$

están bien definidos. Entonces el límite

$$\begin{aligned}
(g \circ f)'(z_0) &= \lim_{z \to z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{z \to z_0} \left[\frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \right] \\
&= \lim_{z \to z_0} \frac{g \circ f(z) - g \circ f(z_0)}{f(z) - f(z_0)} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} \cdot \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \\
&= g'(w_0) \cdot f'(z_0)
\end{aligned}$$

también está bien definido. Esto es, la derivada compleja de $g \circ f$ en z_0 existe. Como este razonamiento es válido para todo $z_0 \in U$, la composición $g \circ f$ es analítica en U.

Ejercicio 2. *Verifique las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones z^2 y z^3.*

Solución. Pongamos $z = x + iy$. Entonces $z^2 = u + vi = (x^2 - y^2) + 2xyi$. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 2y$$

Por otro lado, $z^3 = (x^3 - 3xy^2) + (3x^2y - y^3)i$. Entonces,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 3(x^2 - y^2), \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = 6xy$$

En ambos casos, hemos verificado las ecuaciones de Cauchy-Riemann.

Ejercicio 3. *Escriba las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.*

Solución. Sea $u + iv = f(x + iy)$ una función holomorfa. Las ecuaciones de Cauchy-Riemann son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$$

Consideremos la representación polar $x + iy = re^{i\theta}$ en el dominio. Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial r} &= \cos\theta, & \frac{\partial x}{\partial \theta} &= -r\sin\theta, \\
\frac{\partial y}{\partial r} &= \sin\theta, & \frac{\partial y}{\partial \theta} &= r\cos\theta
\end{aligned}$$

Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial u}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial u}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial u}{\partial y}$$

Multiplicando y dividiendo por $1/r$, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[r\cos\theta\frac{\partial v}{\partial y} - r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}$$

Por otro lado, también usando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial v}{\partial y} = \cos\theta\frac{\partial v}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial v}{\partial y}$$

Multiplicando y dividiendo por $1/r$, tenemos

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{r}\left[-r\cos\theta\frac{\partial u}{\partial y} + r\sin\theta\frac{\partial v}{\partial x}\right] = \frac{1}{r}\left[-\frac{\partial y}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial \theta}\frac{\partial u}{\partial x}\right] = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Entonces hemos obtenido las ecuaciones de Cauchy-Riemann polares

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

Una forma más geométrica de deducir este mismo resultado es observar que (a) los conjuntos

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}, \qquad \left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$$

son bases ortonormales locales de $\mathbb{C}$ como $\mathbb{R}$-espacio vectorial, (b) la transformación lineal que relaciona a estas bases es una rotación, (c) las ecuaciones de Cauchy-Riemann son invariantes bajo rotaciones.

Ejercicio 4. *Pruebe que la función $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $z = x + iy$ satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen, pero no existe la derivada $f'(0,0)$.*

Solución. La función $f = u + iv$ es idénticamente nula a lo largo de los ejes real e imaginario. Entonces las derivadas parciales de u, v con respecto a x, y en el origen son

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

y esto garantiza que las ecuaciones de Cauchy-Riemann se satisfacen trivialmente en el origen.

Por otra parte, si f fuese diferenciable en el origen, entonces la función de variable real $|t| = f(t + it)$ también sería diferenciable en $t = 0$, lo cual evidentemente no es cierto. Por ende, f no es diferenciable en el origen, i.e., no existe la derivada $f'(0,0)$.

Ejercicio 5. *Pruebe que toda función analítica de módulo constante es constante.*

Solución. Sea $u + iv = f(x + iy)$ una función analítica, de módulo constante $u^2 + v^2 = r^2$, definida en un dominio conexo $U \subset \mathbb{C}$. Si $r = 0$, entonces necesariamente $f = 0$ es la función nula, que es constante. Por ello, en adelante asumiremos que $r > 0$.

Diferenciando la premisa $u^2 + v^2 = r^2$ con respecto a x, y, tenemos

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y} + v\frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Sustituyendo las condiciones de Cauchy-Riemann en estas ecuaciones, tenemos

$$u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y} = 0, \qquad -u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Puesto u, v no se anulan simultáneamente en U, la única solución de estas cuatro ecuaciones es

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Por ende, u, v son constantes. Por ende, f es constante.

Ejercicio 6. *Pruebe que una función $f(z)$ es analítica si y sólo si $\overline{f(\bar{z})}$ es también analítica.*

Solución. Sea $\Phi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi$, donde $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la conjugación compleja. Se pide demostrar que f es analítica si y sólo si $g = \Phi(f)$ es analítica. Puesto que $f = \Phi(g)$, es suficiente demostrar la implicación en una sola dirección.

Supongamos que f es analítica en un dominio $U \subset \mathbb{C}$. Esto es, para todo $z_0 \in U$, existe el límite

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Tomemos un punto $w_0 \in \varphi(U)$ y tratemos de evaluar el límite

$$g'(w_0) = \lim_{w \to w_0} \frac{g(w) - g(w_0)}{w - w_0} = \lim_{w \to w_0} \frac{\varphi \circ f \circ \varphi(w) - \varphi \circ f \circ \varphi(w_0)}{\varphi \circ \varphi(w) - \varphi \circ \varphi(w_0)}$$

Por supuesto, φ es continua y respeta las operaciones aritméticas del cuerpo $\mathbb{C}$. Entonces,

$$g'(w_0) = \varphi \left(\lim_{w \to w_0} \frac{f \circ \varphi(w) - f \circ \varphi(w_0)}{\varphi(w) - \varphi(w_0)} \right) = \varphi \circ f' \circ \varphi(w_0)$$

Puesto que la derivada $g'(w_0)$ existe para todo $w_0 \in U$, la función g es analítica en $\varphi(U)$.

Ejercicio 7. *Pruebe que una función $u(z)$ es armónica si y sólo si $u(\bar{z})$ es armónica.*

Solución. Sea $\Phi(f) = f \circ \varphi$, donde $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ es la conjugación compleja. Se nos pide demostrar que u es armónica si y sólo si $v = \Phi(u)$ es armónica. Puesto que $u = \Phi(v)$, es suficiente demostrar la implicación en una sola dirección.

Supongamos que u es armónica. Esto es, u satisface

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Sea $x' + iy' = \varphi(x + iy)$. Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}, \qquad \frac{\partial}{\partial y'} = \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}$$

Sustituyendo este resultado en $v(x' + iy') = u(x + iy)$, tenemos

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y'^2} = \frac{\partial}{\partial x'} \left[\frac{\partial v}{\partial x'} \right] + \frac{\partial}{\partial y'} \left[\frac{\partial v}{\partial y'} \right] = \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right] - \frac{\partial}{\partial y} \left[-\frac{\partial u}{\partial y} \right] = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

Por ende, v es una función armónica.

Ejercicio 8. *Pruebe que las funciones armónicas satisfacen formalmente la ecuación*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

Solución. Pongamos $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$. Por la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial \bar{z}}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

Entonces la función $u(z)$ es armónica si

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]^2 (u) + \left[i \frac{\partial}{\partial z} - i \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \right]^2 (u) = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$$

Dividiendo entre 4, tenemos el resultado solicitado.

Ejercicio 9. *Sea $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n z^n$, $a_n \neq 0$, un polinomio con coeficientes complejos y sea $H \subset \mathbb{C}$ un semiplano que contiene a todas las raíces de P. Pruebe que H también contiene a todas las raíces de su derivada $P'(z)$.*

Solución. Por el teorema fundamental del álgebra, podemos escribir $P(z) = a_n(z - c_1) \dots (z - c_n)$, donde $c_1, \dots, c_n$ son las raíces de P, contadas con multiplicidad. La derivada de logarítmica de P es

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \frac{1}{z - c_1} + \cdots + \frac{1}{z - c_n}$$

Identifiquemos $\mathbb{C}$ con el plano tangente a sí mismo en cualquier punto de la frontera de H. Sea $w = e^{i\theta}$ el vector normal saliente de H. Dado un vector no nulo $z \in \mathbb{C}^\star$, el cociente w/z es un reescalamiento real y positivo del producto interno hermitiano $\langle w, z \rangle = \bar{z}w$. Por ende,

- z es un vector saliente de H si y sólo si $\Re(w/z) > 0$.
- z es un vector entrante a H si y sólo si $\Re(w/z) < 0$.
- z es un vector tangente a la frontera de H si y sólo si $\Re(w/z) = 0$.

Para todo $z \in \mathbb{C}$, la condición $z \notin H$ implica que las diferencias $z - c_i$ son vectores salientes de H. Luego, todos los sumandos en la expresión

$$\frac{wP'(z)}{P(z)} = \frac{w}{z - c_1} + \cdots + \frac{w}{z - c_1}$$

tienen parte real positiva. Por ende, la derivada logarítmica de P no se anula en z. Por ende, la derivada ordinaria de P tampoco sea anula en z. Por ende, los ceros de P' están en H.

Nota. El corolario inmediato es que los ceros de P' están en la cápsula convexa de los ceros de P.

Ejercicio 10. *Sea $R(z) = P(z)/Q(z)$ una función racional de orden p, donde $P(z)$, $Q(z)$ son polinomios sin ceros es común. Pruebe que R tiene p ceros y p polos, y cada ecuación $R(z) = a$ tiene exactamente p raíces.*

Solución. Escribamos $R(z)$ explícitamente como

$$R(z) = K \cdot \frac{(z - a_1) \dots (z - a_m)}{(z - b_1) \dots (z - b_n)}$$

donde $a_i \neq b_j$ para todo i, j. Por inspección, R tiene exactamente m ceros y n polos en el plano complejo, contados con multiplicidad. Alguno de m, n es igual al orden $p = \max(m, n)$, pero no está garantizado que el otro también.

En realidad, los ceros y polos de R deben ser contados en toda la esfera de Riemann. Para estudiar el comportamiento de R en el punto en el infinito, consideremos un punto $c \in \mathbb{C}$ distinto de todos los a_i, b_j y apliquemos la sustitución $z = c + 1/w$. Las nuevas coordenadas de $z = a_i$, $z = b_j$ son

$$w = \tilde{a}_i = \frac{1}{a_i - c}, \qquad w = \tilde{b}_j = \frac{1}{b_j - c}$$

respectivamente. Entonces la nueva expresión de R es

$$\tilde{R}(w) = Kw^{n-m} \cdot \frac{(1 - w/\tilde{a}_1) \dots (1 - w/\tilde{a}_m)}{(1 - w/\tilde{b}_1) \dots (1 - w/\tilde{b}_n)}$$

En esta nueva carta, el punto en el infinito $w = \infty$ es el punto $z = c$ de la carta original, que no es ni cero ni polo de R. Los ceros y polos de R en $z = a_i$, $z = b_j$ aparecen ahora como ceros y polos de $\tilde{R}$ en $w = \tilde{a}_i$, $w = \tilde{b}_j$, respectivamente. Finalmente, el punto en el infinito de la carta antigua es $w = 0$ y aparece ahora con exponente $n - m$. Esto completa los $|n - m|$ ceros o polos faltantes en el conteo original.

Ejercicio 11. *Escriba las funciones racionales*

$$\frac{z^4}{z^3-1}, \qquad \frac{z^4}{z+i}$$

como sumas de fracciones parciales.

Solución.

- Sea $\omega \in \mathbb{C}$ una raíz cúbica primitiva de la unidad. Pongamos

$$\frac{z^4}{z^3-1} = z + \frac{z}{z^3-1} = z + \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-\omega} + \frac{C}{z-\omega^2}$$

  Multiplicando la parte fraccional por z^3-1, tenemos

$$z = A(z-\omega)(z-\omega^2) + B(z-1)(z-\omega^2) + C(z-1)(z-\omega)$$

  Entonces,

  - Para $z=1$, tenemos $1 = A(1-\omega)(1-\omega^2) = A$.
  - Para $z=\omega$, tenemos $\omega = B(\omega-1)(\omega-\omega^2) = B\omega^2$. Por ende, $B = \omega^{-1} = \omega^2$.
  - Para $z=\omega^2$, tenemos $\omega^2 = C(\omega^2-1)(\omega^2-\omega) = C\omega^4$. Por ende, $C = \omega^{-2} = \omega$.

  Por ende, tenemos la expansión en fracciones parciales

$$\frac{z^4}{z^3-1} = z + \frac{1}{z-1} + \frac{\omega^2}{z-\omega} + \frac{\omega}{z-\omega^2}$$

- Observemos que i es una raíz cuarta de la unidad. Entonces,

$$\frac{z^4}{z+i} = \frac{z^4-1}{z+i} + \frac{1}{z+i} = (z^2-1)(z-i) + \frac{1}{z+i} = z^3 - iz^2 - z + i + \frac{1}{z+i}$$

Ejercicio 12. *La función exponencial de $z = x+iy$ en base e está definida por la identidad*

$$e^z = e^x \cdot (\cos y + i \sin y)$$

Pruebe que la función exponencial es biyectiva desde la franja $B = \{z \in \mathbb{C} \mid -\pi < \Im(z) \leq \pi\}$ sobre el plano agujereado $\mathbb{C} - \{0\}$. ¿Será inyectiva en las franjas horizontales de anchura menor que 2π? Describa la imagen de la recta $y = mx$.

Solución. Sean $z, w \in B$ tales que $e^z = e^w$. Puesto que el exponencial nunca toma el valor cero,

$$\frac{e^z}{e^w} = \frac{e^x}{e^u} \cdot \frac{\cos y + i\sin y}{\cos v + i \sin v} = e^{x-u} \cdot (\cos(y-v) + i\sin(y-v)) = 1$$

donde $z = x+iy$, $w = u+iv$. Entonces (a) x, u son iguales, (b) $y - w$ es un múltiplo entero de 2π. En la franja B, se cumple $-\pi < y, v \leq \pi$. Entonces $-2\pi < y - v < 2\pi$. Por ende, y, v también son iguales. De manera recíproca, si c es un número complejo no nulo y $\angle c$ es su argumento principal[1], entonces $z = \log|c| + i\angle c$ pertenece a la franja B y su exponencial es $e^z = c$. Por ende, $\exp : B \to \mathbb{C} - \{0\}$ es una biyección.

Sea $B' = \{z \in \mathbb{C} \mid a \leq \Im(b) \leq b\}$ una franja de ancho $b - a < 2\pi$. Repitiendo el argumento usado en el párrafo anterior, si dos puntos de B' tienen el mismo exponencial, entonces (a) tienen la misma parte real, (b) tienen partes imaginarias que difieren por un múltiplo entero de 2π y (c) este múltiplo de 2π no puede tener valor absoluto mayor que $b - a$. Entonces las partes imaginarias también son iguales. Por ende, los puntos tomados de B' son iguales. Por ende, la función exponencial restricta a B' es inyectiva.

La imagen de la recta $y = mx$ es la curva $r = e^t$, $\theta = mt$ en coordenadas polares, o bien, eliminando el parámetro, $r^m = e^\theta$. Si $m = 0$, entonces la curva es el eje real positivo. Si $m \neq 0$, entonces la curva es una espiral logarítmica, porque la coordenada radial r se expande o contrae por el factor constante $K = e^{2\pi/m}$ cada vez que la coordenada angular θ completa una vuelta. Esto implica que la espiral logarítmica es una copia K veces más grande de sí misma.

[1] El argumento principal de un número real negativo es π.

Ejercicio 13. *El logaritmo complejo de $z \neq 0$, denotado $\log(z)$, se define como cualquier número complejo w tal que $e^w = z$. Pruebe que $\log(z) = \operatorname{Log}|z| + i\angle z$, donde $\operatorname{Log} : (0, \infty) \to \mathbb{R}^+$ es la inversa de la función exponencial real. ¿Es la diferencia entre dos logaritmos complejos de z un múltiplo entero de $2\pi i$? En este contexto, se define el logaritmo principal haciendo uso del argumento principal. ¿Es el logaritmo principal una función discontinua en la parte negativa del eje real.*

Solución. Supongamos que $u + iv$ es un logaritmo complejo de z. Entonces,

$$z = e^{u+iv} = e^u \cdot (\cos v + i \sin v)$$

Tomando el módulo y el argumento en ambos lados, tenemos

$$|z| = e^u, \qquad \angle z = v$$

Despejando u, v, tenemos el resultado buscado:

$$\log(z) = u + iv = \operatorname{Log}|z| + i\angle z$$

La parte real $u = \operatorname{Log}|z|$ está bien determinada, pero la parte compleja $v = \angle z$ es en realidad una clase de equivalencia de números reales módulo 2π. Por ende, el logaritmo complejo $\log(z)$ también es una clase de equivalencia de números complejos módulo $2\pi i$.

Para todo $x < 0$, tenemos $\angle x = \pi$. Sin embargo, para todo $\varepsilon > 0$, tenemos $\angle(x - i\varepsilon) < 0$. Por ende, el argumento principal es una función discontinua en la parte negativa del eje real. Puesto que el argumento principal es una componente del logaritmo principal, este último también es una función discontinua en la parte negativa del eje real.

Ejercicio 14. *Las funciones trigonométricas se definen como*

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \qquad \sin(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

¿Es alguna de ellas acotada?

Solución. Ninguna de ellas es acotada. Observemos que

$$\cos(it) = \frac{e^{-t} + e^t}{2} = \cosh(t), \qquad \sin(it) = \frac{e^{-t} - e^t}{2i} = i \sinh(t)$$

Para valores reales grandes de t, tanto $\cosh(t)$ como $\sinh(t)$ tienden a infinito. Por ende, $\cos(z)$, $\sin(z)$ no son acotadas en el eje imaginario del plano complejo.

Ejercicio 15. *Pruebe que la función $\cos(z)$ envía la franja $B = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \Re(z) < \pi\}$ sobre el dominio $U = \mathbb{C} - \{x \in \mathbb{R} \mid |x| \geq 1\}$ de manera inyectiva y conforme.*

Solución. Sean $z, w \in B$ tales que $\cos(z) = \cos(w)$. Multiplicando por 2, tenemos

$$e^{iz} + e^{-iz} = e^{iw} + e^{-iw}$$

Sustituyendo $p = e^{iz}$, $q = e^{iw}$ en la ecuación anterior, tenemos

$$p + \frac{1}{p} = q + \frac{1}{q} \implies p - q = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p - q}{pq}$$

Tenemos dos posibilidades: o bien $p = q$ o bien $pq = 1$. En el primer caso, $z = w \pmod{2\pi}$. Puesto que la franja es de ancho π, esto implica que $z = w$. En el segundo caso, $z + w = 0 \pmod{2\pi}$. Sin embargo, la definición de la franja exige que $0 < \Re(z) + \Re(w) < 2\pi$. Entonces el segundo caso es imposible. Por ende, no existen puntos distintos de B que tengan el mismo coseno.

Sea $z = x + iy$ un punto de B. Utilizando una conocida identidad trigonométrica, tenemos

$$\cos(z) = \cos(x)\cos(iy) - \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\cosh(y) - i \sin(x)\sinh(y)$$

Por construcción, x no es múltiplo de π, así que $\sin(x) \neq 0$. Si $y = 0$, entonces $\cos(z) = \cos(x)$ está en el intervalo $(-1, 1)$. Si $y \neq 0$, entonces $\sinh(y) \neq 0$, por ende $\cos(z) \notin \mathbb{R}$. En ambos casos, $\cos(z) \in U$. Por lo tanto, $\cos(B) \subset U$.

Utilizando otra conocida identidad trigonométrica, tenemos

$$\sin(z) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

Puesto que $\cosh(y) > 0$, tenemos $\Re \circ \sin(z) \neq 0$. Como $\cos'(z) = -\sin(z)$ no se anula en B, la restricción $\cos \mid B$ es una aplicación conforme.

Ejercicio 16. *Pruebe que la función* $\arctan(z) = \tan^{-1}(z)$, *donde* $\tan(z) = \sin(z)/\cos(z)$, *tiene una rama analítica en el disco unitario. ¿Cómo son todas sus ramas analíticas?*

Solución. La definición compleja de la función tangente es

$$i\tan\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} = \frac{e^{2i\theta} - 1}{e^{2i\theta} + 1} = 1 - \frac{2}{1 + e^{2i\theta}}$$

Nuestro objetivo es expersar θ como función de $\tan\theta$. Primero despejaremos $e^{i\theta}$:

$$e^{2i\theta} = \frac{2}{1 - i\tan\theta} - 1 = \frac{1 + i\tan\theta}{1 - i\tan\theta}$$

Por conveniencia, daremos un nombre a la siguiente transfomación de Möbius:

$$f(z) = \frac{1 + iz}{1 - iz}$$

Tomando el logaritmo y poniendo $\theta = \arctan(z)$, tenemos

$$\arctan(z) = \frac{1}{2i}\log \circ f(z)$$

Recordemos que las transformaciones de Möbius son automorfismos de la esfera de Riemann. Entonces la restricción de f a cualquier abierto $U \subset \mathbb{C}$ es un biholomorfismo $f : U \to f(U)$. En particular, el disco unitario $\mathbb{D} \subset \mathbb{C}$ es simplemente conexo, por ende su imagen $f(\mathbb{D})$ también es simplemente conexa. Puesto que todo $z \in \mathbb{D}$ tiene módulo menor que 1, ni el numerador ni el denominador de f se anulan en $\mathbb{D}$. Por lo tanto, $f(\mathbb{D})$ no contiene ni al origen ni al punto en el infinito. Por todas estas consideraciones, $f(\mathbb{D})$ es un subconjunto de $\mathbb{C}$ que no contiene lazos que encierran al origen[2]. Por ende, existe una rama del logaritmo definida en $f(\mathbb{D})$. Por ende, existe una rama del arco tangente definida en $\mathbb{D}$.

[2] De hecho, $f(\mathbb{D})$ es el semiplano $\Re(z) > 0$.

Semana 3

Ejercicio 1. *Pruebe que toda sucesión de Cauchy es acotada.*

Solución. Sea x_n una sucesión de Cauchy en un espacio métrico. Por definición, existe un instante $k \in \mathbb{N}$ tal que las distancias $d(x_m, x_n)$ están acotadas por 1 para todo $m, n \geq k$. Pongamos $c_n = d(x_n, x_k)$. Por construcción, c_n está acotado por 1 para todo $n \geq k$. Entonces c_n está acotado por $r = \max(1, c_1, \ldots, c_k)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

No estamos obligados a usar x_k como referencia para el cálculo de las distancias. Si a es cualquier otro punto del espacio, entonces $d(a, x_n)$ está acotado por $d(a, x_k) + r$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En particular, si x_n es una sucesión de Cauchy en un espacio vectorial normado, entonces la norma $\|x_n\|$ es la distancia al origen y está acotada por $\|x_k\| + r$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejercicio 2. *Sea z_n una sucesión en un espacio vectorial normado tal que* $\lim z_n = A$. *Determine si*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} = A$$

y justifique su respuesta.

Solución. Sea $C \in \mathbb{R}^+$ una cota superior para las distancias $d_n = \|z_n - A\|$ y consideremos un margen de error arbitrario $\varepsilon > 0$. Existe un instante $p \in \mathbb{N}$ tal que $d_n \leq \varepsilon/2$ para todo $n \geq p$. También existe otro instante $q \in \mathbb{N}$ tal que $Cp/q \leq \varepsilon/2$.

Consideremos un instante $n \in \mathbb{N}$ posterior a $k = \max(p, q)$. Entonces,

$$n \cdot \left\| \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} - A \right\| \leq \|z_1 - A\| + \cdots + \|z_n - A\|$$

Para los p primeros términos, tenemos la cota

$$\|z_1 - A\| + \cdots + \|z_p - A\| \leq Cp \leq \frac{q\varepsilon}{2} \leq \frac{n\varepsilon}{2}$$

Para los $n - p$ términos restantes, tenemos la cota

$$\|z_{p+1} - A\| + \cdots + \|z_n - A\| \leq (n-p)\frac{\varepsilon}{2} < \frac{n\varepsilon}{2}$$

Combinando estos resultados, tenemos la cota

$$\left\| \frac{z_1 + \cdots + z_n}{n} - A \right\| < \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{n\varepsilon}{2} + \frac{n\varepsilon}{2} \right] = \varepsilon$$

Por ende, la sucesión de promedios parciales de z_n también converge a A.

Ejercicio 3. *Pruebe que la suma de una serie absolutamente convergente no cambia si sus términos son reordenados.*

Solución. Consideremos inicialmente dos series

$$S = \sum_n a_n, \qquad S' = \sum_n a'_n$$

tales que la sucesión a'_n es un reordenamiento de la sucesión a_n. Por definición, S, S' son los límites de las sucesiones de sumas parciales

$$s_n = a_1 + \cdots + a_n, \qquad s'_n = a'_1 + \cdots + a'_n$$

respectivamente, si estos límites existen.

Supongamos inicialmente que existe un instante $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n = a'_n$ para todo $n \geq k$. Esto implica que $s_n = s'_n$ para todo $n \geq k$. Entonces, si una serie converge, la otra serie también converge a la misma suma. Por ende, reordenar un prefijo finito de una serie no altera su suma.

Supongamos ahora que los términos de S, S' son números reales no negativos. Para todo $n \in \mathbb{N}$, existe algún $m \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos de s_n también aparecen en s'_m. Esto implica que cualquier suma parcial de S es eventualmente superada por las sumas parciales de S'. Por supuesto, lo mismo es cierto si revertimos los roles de S, S'. Entonces, si una serie converge, la otra serie también converge a la misma suma. Por ende, reordenar una serie de términos no negativos no altera su suma.

Supongamos ahora que los términos de A pertenecen a un espacio vectorial normado arbitrario y A es absolutamente convergente. Esto es, la serie de normas

$$T = \sum_n \|a_n\|$$

es convergente. Esto es, la sucesión de sumas parciales

$$t_n = \|a_1\| + \cdots + \|a_n\|$$

es convergente. Sean $\varepsilon > 0$ un margen de error arbitrario y $k \in \mathbb{N}$ el momento desde el cual $T - t_n \leq \varepsilon/4$ para todo $n \geq k$. Entonces,

$$\|s_n - s_m\| \leq \|s_{m+1}\| + \cdots + \|s_n\| = t_n - t_m = (T - t_m) - (T - t_n) \leq \varepsilon/4 + \varepsilon/4 = \varepsilon/2$$

para todo $n \geq m \geq k$. Es decir, s_n es una sucesión de Cauchy. Además, la serie de normas

$$T' = \sum_n \|a'_n\|$$

se obtiene reordenando los términos de T. Entonces la sucesión de sumas parciales

$$t'_n = \|a_1\| + \cdots + \|a'_n\|$$

converge al mismo límite T. Por ende, A' también es absolutamente convergente. Reordenando un prefijo de A', podemos asumir que $a_i = a'_i$ para todo $i = 1, \dots, k$. Entonces $s_k = s'_k$. Por ende,

$$\|s_m - s'_n\| = \|(s_m - s_k) - (s'_n - s'_k)\| \leq \|s_m - s_k\| + \|s'_n - s'_k\| \leq \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

para todo $m, n \geq k$. O sea, s_n, s'_n son sucesiones de Cauchy equivalentes. Entonces, si una serie converge, la otra también converge a la misma suma[3]. Por ende, reordenar arbitrariamente los términos de una serie absolutamente convergente no altera su suma.

Ejercicio 4. *Analice la convergencia y la convergencia absoluta de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}$$

Solución. Desdoblemos cada término de la serie en sus partes real e imaginaria:

$$\frac{(-1)^n}{n+i} \cdot \frac{n-i}{n-i} = \frac{(-1)^n n}{n^2+1} + i\frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$$

[3]Existen espacios vectoriales normados de dimensión infinita en los cuales no toda sucesión de Cauchy converge.

Las series de partes reales e imaginarias

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{n+i}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^2+1}$$

son ambas convergentes, porque sus términos tienen signos alternantes y valores absolutos que convergen monótonamente a cero. Por ende, la serie del enunciado también es convergente. Sin embargo, la serie de módulos está acotada inferiormente por la serie armónica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+i} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{|n+i|} > \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} > \int_2^{\infty} \frac{1}{x}\, dx = \log x \Big|_2^{\infty} = +\infty$$

que es famosamente divergente. Por ende, la serie del enunciado no es absolutamente convergente.

Ejercicio 5. *Analice la convergencia uniforme de la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$

con respecto al parámetro $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Observemos que $1 + nx^2 \geq 2\sqrt{n}|x|$. Rearreglando términos, tenemos

$$\frac{|x|}{1+nx^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{n}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

Entonces la serie de módulos admite la cota uniforme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{x}{n(1+nx^2)} \right| < \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}}$$

Esta cota uniforme es convergente, pues

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} < \int_1^{\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\, dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} \Bigg|_1^{\infty} = 2$$

Por ende, la serie del enunciado es absoluta y uniformemente convergente para $x \in \mathbb{R}$.

Ejercicio 6. *Considere las series absolutamente convergentes*

$$A = \sum_n a_n, \qquad B = \sum_n b_n$$

Demuestre que el producto de Cauchy de estas series

$$C = \sum_n c_n, \qquad c_n = \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

converge absolutamente al producto AB.

Solución. Formalmente, el producto de A y B se puede expresar de dos maneras:

$$AB = \sum_n \sum_{\max(i,j)=n} a_i b_j, \qquad C = \sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j$$

Cada una de ellas induce una sucesión de sumas parciales:

$$p_n = \sum_{i,j \leq n} a_i b_j, \qquad q_n = \sum_{i+j \leq n} a_i b_j$$

Diremos que una linealización de $a_i b_j$ es una sucesión de la forma $t_m = a_{i_m} b_{j_m}$, donde (i_m, j_m) es una enumeración de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$. Sea t_m una linealización arbitraria. Para todo $m \in \mathbb{N}$, existe algún $n \in \mathbb{N}$ tal que todos los términos de la suma parcial $s_m = t_1 + \cdots + t_m$ también aparecen en p_n. Entonces la serie

$$T = \sum_m t_m$$

es absolutamente convergente, en virtud de la cota superior

$$\|s_m\| \leq \sum_{k \leq m} \|t_k\| \leq \sum_{i,j \leq n} \|a_i b_j\| \leq \sum_{i,j \leq n} \|a_i\| \|b_j\| = \sum_n \|a_n\| \cdot \sum_n \|b_n\|$$

que es finita, porque A, B son absolutamente convergentes.

Por el resultado del ejercicio 3, el valor de T no depende de la linealización t_m escogida. En particular, si tomamos una linealización t_m tal que p_n es una subsucesión de s_m, deducimos que

$$T = \sum_m t_m = \lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{n \to \infty} p_n = \sum_n \sum_{i,j \leq n} a_i b_j = AB$$

y si tomamos una linealización t_m tal que q_n es una subsucesión de s_m, deducimos que

$$T = \sum_m t_m = \lim_{m \to \infty} s_m = \lim_{n \to \infty} q_n = \sum_n \sum_{i+j \leq n} a_i b_j = C$$

Por ende, si las series A, B convergen[4], entonces C converge absolutamente a AB.

Ejercicio 7. *Pruebe que la función definida por la serie de potencias*

$$w = f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1}$$

es analítica e inyectiva en el disco unitario $|z| < 1$ *y su imagen es la franja* $-\pi/4 < \Im(z) < \pi/4$.

Solución. Consideremos las siguientes integrales indefinidas

$$\begin{aligned} \log(1+z) &= \int \frac{1}{1+z}\, dz \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int (-z)^n\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{n+1}}{n+1} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} -\log(1-z) &= \int \frac{1}{1-z}\, dz \\ &= \int \sum_{n=0}^{\infty} z^n\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \int z^n\, dz \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1} \end{aligned}$$

Promediando término a término, se cancelan los términos de índice impar y nos queda

$$f(z) = \frac{1}{2} \log \frac{1+z}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Por construcción, esta función es analítica y su derivada es

$$f'(z) = \frac{1}{1+z} + \frac{1}{1-z} = \frac{2}{1-z^2}$$

[4]Existen álgebras normadas en las cuales no toda serie absolutamente convergente es convergente.

La serie de potencias de f converge absolutamente dentro del disco unitario $|z| < 1$, porque

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2n+3}{2n+1} \cdot |z|^2 = |z|^2 < 1$$

La imagen de $|z| < 1$ bajo la transformación de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

se determina tomando un punto en el interior del disco y tres en la frontera:

- El punto $z = 0$ en el interior es enviado a $z = 1$.
- El punto $z = -1$ en la frontera es enviado a $z = 0$.
- Los puntos $z = \pm i$ en la frontera son puntos fijos.

Entonces φ envía el disco $|z| < 1$ al semiplano $\Re(z) > 0$. Este semiplano está conformado por números de todas las magnitudes positivas, pero con argumentos principales restringidos a $(-\pi/2, \pi/2)$. Por ende, su imagen bajo el logaritmo principal es la franja $-\pi/2 < \Im(z) < \pi/2$, que es encogida por el factor $1/2$ a la franja $-\pi/4 < \Im(z) < \pi/4$.

Ejercicio 8. *Calcule la serie de potencias de*

$$f(z) = \frac{2z+3}{z+1}$$

centrada en $z = 1$ y determine su radio de convergencia.

Solución. Pongamos $w = z - 1$ para simplificar los cálculos. Entonces,

$$\tilde{f}(w) = \frac{2w+5}{w+2} = 2 + \frac{1}{w+2} = 2 + \frac{1/2}{1+w/2} = 2 + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(-\frac{w}{2}\right)^n = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n w^n}{2^{n+1}}$$

Regresando a la variable original, tenemos

$$f(z) = \frac{5}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n (z-1)^n}{2^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

Consideremos la cantidad auxiliar

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{2^{n+1}} \cdot |z-1| = \frac{|z-1|}{2}$$

Esta serie converge absolutamente cuando $|z-1| < 2$ y no converge cuando $|z-1| > 2$. Por ende, el radio de convergencia de la serie es 2.

Ejercicio 9. *Halle el radio de convergencia de las siguientes series*

$$\sum_n n^p z^n, \qquad \sum_n \frac{z^n}{n!}, \qquad \sum_n z^{n!}$$

Solución. En cada caso, sea a_n el n-ésimo término de la serie. Entonces,

- Para $a_n = n^p z^n$, consideremos la cantidad auxiliar

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^p \cdot |z| = |z|$$

  La serie converge absolutamente cuando $|z| < 1$ y no converge cuando $|z| > 1$. Por ende, el radio de convergencia de la serie es 1.

- Para $a_n = z^n/n!$, consideremos la cantidad auxiliar

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{(n+1)!}\cdot|z| = 0$$

  La serie converge absolutamente cuando $0 < 1$, es decir, siempre. Por ende, el radio de convergencia de la serie es ∞.

- Para $a_n = z^{n!}$, consideremos la cantidad auxiliar

$$A = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|z|^{(n+1)!}}{|z|^{n!}}$$

  Para $|z| < 1$, tenemos $A = 0$ y la serie converge absolutamente. Para $|z| > 1$, tenemos $A = \infty$ y la serie no converge. Por ende, el radio de convergencia de la serie es 1.

Ejercicio 10. *Determine los valores de $z \in \mathbb{C}$ para los cuales la serie*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z}{1+z}\right)^n$$

es convergente.

Solución. La serie dada es una serie geométrica. La condición necesaria y suficiente para que esta serie sea convergente es que la razón entre dos términos consecutivos tenga módulo menor que 1. Esto es,

$$\left|\frac{z}{1+z}\right| < 1 \iff |z| < |1+z| \iff |z|^2 < |1+z|^2$$

Pongamos $z = x + iy$. Entonces $|z|^2 = x^2 + y^2$, $|1+z|^2 = (1+x)^2 + y^2$. Entonces,

$$|z|^2 < |1+z|^2 \iff x^2 < (1+x)^2 \iff x > -1/2$$

Por ende, la serie dada converge para $\Re(z) > -1/2$ y no converge para $\Re(z) \leq -1/2$.

Semana 4

Ejercicio 1. *Sea (X, d) un espacio métrico. Pruebe que*

$$\rho(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$

también es una distancia en X.

Solución. Sean $x, y, z \in M$. Se verifica que

- $\rho(x, y) \geq 0$, porque $d(x, y) \geq 0$.
- $\rho(x, y) = 0$ si y sólo si $d(x, y) = 0$ si y sólo si $x = y$.
- La desigualdad triangular para ρ equivale a decir que

$$\Delta(x, y, z) = \rho(x, y) - \rho(y, z) - \rho(z, x) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} + \frac{d(y, z)}{1 + d(y, z)} - \frac{d(z, x)}{1 + d(z, x)}$$

es no negativa. Multiplicando por el mínimo común denominador, tenemos

$$\begin{aligned}
&\Delta \cdot [1 + d(x, y)] \cdot [1 + d(y, z)] \cdot [1 + d(z, x)] \\
&\quad = d(x, y) + d(x, y)\, d(y, z) + \cancel{d(x, y)\, d(z, x)} + d(x, y)\, d(y, z)\, d(z, x) \\
&\quad + d(y, z) + \cancel{d(y, z)\, d(z, x)} + d(y, z)\, d(x, y) + \cancel{d(y, z)\, d(z, x)\, d(x, y)} \\
&\quad - d(z, x) - \cancel{d(z, x)\, d(x, y)} - \cancel{d(z, x)\, d(y, z)} - \cancel{d(z, x)\, d(x, y)\, d(y, z)}
\end{aligned}$$

Entonces $\Delta(x, y, z) \geq 0$. Por ende, $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$.

Ejercicio 2. *Decimos que dos métricas sobre un espacio X son equivalentes si ambas generan la misma topología sobre X. Demuestre que d, ρ son métricas equivalentes si, para cada $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $d(x, y) < \delta$ implica $\rho(x, y) < \varepsilon$, y viceversa. Verifique que las métricas d, ρ del ejercicio anterior satisfacen esta condición.*

Solución. La condición del enunciado implica que las d-bolas están encajadas en las ρ-bolas y viceversa (e incluso relaciona los diámetros de la bolas encajadas, pero esto no es relevante). Esto obviamente implica que d, ρ inducen la misma topología sobre X.

Para las métricas del ejercicio anterior, consideremos las funciones obviamente continuas

$$\begin{aligned} f : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\ x &\longmapsto \frac{x}{1 + x} \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f^{-1} : [0, \infty) &\longrightarrow [0, \infty) \\ y &\longmapsto \frac{y}{1 - y} \end{aligned}$$

Como los nombres lo sugieren, f, f^{-1} son inversas. Además, $\rho = f \circ d$ y $d = f^{-1} \circ \rho$. Entonces no sólo las d-bolas están encajadas en las ρ-bolas (y viceversa), sino que las d-bolas son literalmente ellas mismas ρ-bolas (y viceversa). Por ende, d, ρ generan la misma topología métrica.

Ejercicio 3. *Determine si las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(a) d, ρ son métricas equivalentes sobre X.

(b) d es continua con respecto a ρ y viceversa.

Solución. Toda función distancia es continua con respecto a sí misma. Puesto que la continuidad depende sólo de la topología y no de la métrica, toda función distancia es continua con respecto a cualquier métrica equivalente. Por ende, a) implica b).

Por otro lado, si d es continua con respecto a ρ, entonces las restricciones $d(x, \cdot)$ también son continuas con respecto a ρ. Esto implica que toda d-bola $B_d(x, \cdot)$ tiene una ρ-bola encajada $B_\rho(x, \cdot)$. Por supuesto, este argumento también funciona si revertimos los roles de d, ρ. Por ende, b) implica a).

Ejercicio 4. *Considere el conjunto $A \subset \mathbb{C}$ de los números complejos cuyas partes real e imaginarias son racionales. Describa el interior, la clausura y la frontera de A.*

Solución. Por construcción A es el subconjunto $\mathbb{Q}^2$ del plano $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Entonces A es numerable. Por ende el interior de A es vacío: ningún otro abierto de $\mathbb{C}$ se puede encajar en A.

Por otro lado, todo $x \in \mathbb{R}$ es el límite de una sucesión $x_n \in \mathbb{Q}$. Entonces todo $x + iy \in \mathbb{C}$ es el límite de una sucesión $x_n + iy_n \in A$. Por ende la clausura de A es todo $\mathbb{C}$.

Utilizando los dos resultados anteriores, la frontera de A es su clausura $\mathbb{C}$ menos su interior $\varnothing$, i.e., la frontera de A es todo el plano $\mathbb{C}$.

Ejercicio 5. *Decimos que un conjunto es discreto si todos sus elementos son puntos aislados. Pruebe que todo subconjunto discreto de $\mathbb{C}$ es finito o numerable.*

Solución. Sea B_n una sucesión de bolas cerradas que cubre $\mathbb{C}$. Puesto que cada B_n es compacta, todas las intersecciones $X_n = X \cap B_n$ son finitas: de otro modo, X se acumularía en algún punto de B_n. Entonces $X = \bigcup_n X_n$ es a lo más infinito enumerable.

Ejercicio 6. *Un punto de acumulación de $A \subset \mathbb{C}$ es el límite de una sucesión en A que pasa por infinitos puntos distintos. Pruebe que los puntos de acumulación de A forman un subconjunto cerrado $A' \subset \mathbb{C}$.*

Solución. Una forma equivalente de definir A' es como el conjunto de aquellos $p \in \mathbb{C}$ tales que toda bola centrada en p, sin importar qué tan pequeña, contiene infinitos puntos de A. Entonces A' es la clausura $\bar{A}$ menos los puntos aislados de A. Cada punto aislado de A es también aislado en $\bar{A}$, así que es en sí mismo un abierto relativo de $\bar{A}$, así que A' es cerrado relativo en $\bar{A}$. Puesto que $\bar{A}$ es cerrado en $\mathbb{C}$, se deduce que A' también es cerrado en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 7. *Pruebe que A es abierto (cerrado) en $\mathbb{C}$ si y sólo si es igual a su interior (clausura).*

Solución. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- A es abierto (cerrado) en $\mathbb{C}$.
- A es un abierto (cerrado) de $\mathbb{C}$ contenido en (que se contiene a) sí mismo.
- A es el mayor abierto (menor cerrado) de $\mathbb{C}$ contenido en (que se contiene a) sí mismo.
- A es el interior (la clausura) de sí mismo en $\mathbb{C}$.

Ejercicio 8. *Sea X un espacio métrico y sea $A \subset X$ un subespacio. Pruebe que $(A, d|_A)$ tiene la topología subespacio, i.e., los abiertos de A son intersecciones de A con abiertos de X.*

Solución. Basta verificar esta propiedad en las bolas. Pero esto es cierto por definición: las bolas de A son precisamente las bolas de X centradas en puntos de A y restringidas a A.

Ejercicio 9. *Pruebe que todo subconjunto conexo de $\mathbb{R}$ es un intervalo.*

Solución. Supongamos que $A \subset \mathbb{R}$ no es un intervalo. Esto es, existen puntos $a < x < b$ tales que $a, b \in A$, pero $x \notin A$. Entonces $A^- = A \cap (-\infty, x)$, $A^+ = A \cap (x, \infty)$ son abiertos relativos de A, ninguno es vacío y su unión es todo A. Por ende, A no es conexo.

Ejercicio 10. *Pruebe que la unión de dos regiones es una región si y sólo si tienen un punto en común.*

Solución. Una dirección es obvia: por definición, las regiones son conexas, i.e., no pueden expresarse como uniones disjuntas. Entonces sólo queda demostrar que la unión de dos regiones no disjuntas $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{C}$ es nuevamente una región.

Sean V^1, V^2 abiertos disjuntos de $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ tales que $V^1 \cup V^2 = \Omega$. Cada $V_i^j = \Omega_i \cap V^j$ es un abierto del respectivo Ω_i. Además, $V_i^1 \cup V_i^2 = \Omega_i$. Puesto que Ω_i es conexo, alguno de V_i^1, V_i^2 es vacío. El otro es necesariamente todo Ω_i.

Por construcción, cada Ω_i está encajado en algún V^j y, por ende, es disjunto del otro V^j. Supongamos por el absurdo que cada Ω_i está encajado en un V^j distinto. Entonces el punto común Ω_1, Ω_2 pertenece a ambos V^j. Esto contradice la hipótesis de que V^1, V^2 son disjuntos.

Semana 5

Ejercicio 1. *Halle los puntos fijos de la traslación, la dilatación y la inversión en el plano extendido.*

Solución. Tanto la traslación como la dilatación fijan la parte finita del plano extendido. Por ende, ambas fijan el punto en el infinito. La traslación no fija ningún punto finito individualmente, pero la dilatación también fija el origen. La inversión fija a las soluciones de $z = 1/z$, i.e., $z = \pm 1$.

Ejercicio 2. *Pruebe que la reflexión $z \mapsto \bar{z}$ no es una transformación de Möbius.*

Solución. Por construcción, toda transformación de Möbuis es holomorfa, pero $z \mapsto \bar{z}$ no lo es.

Ejercicio 3. *Calcule las composiciones ST, TS, $S^{-1}T$, donde*

$$S(z) = \frac{z+2}{z+3}, \qquad T(z) = \frac{z}{z+1}$$

Solución. Las matrices que representan a S, T, S^{-1} son

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \qquad T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Entonces las matrices que representan a ST, TS, $S^{-1}T$ son

$$ST = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}, \qquad TS = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \qquad S^{-1}T = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Por ende, las transformaciones de Möbius buscadas son

$$ST(z) = \frac{3z+2}{4z+3}, \qquad TS(z) = \frac{z+2}{2z+5}, \qquad S^{-1}T(z) = z - 2$$

Ejercicio 4. *Pruebe que toda transformación de Möbius que fija el eje real (extendido, i.e., incluyendo el punto en el infinito) puede escribirse con coeficientes reales.*

Solución. Recordemos que el plano extendido es, en realidad, la recta compleja proyectiva. Por ende, sus elementos se pueden describir como cocientes de números complejos. En particular, el punto en el infinito es un cociente con denominador cero.

Naturalmente, la recta real proyectiva es el subespacio de la recta compleja proyectiva formado por los cocientes de números reales. Si una transformación de Möbius T fija la recta proyectiva real, entonces T puede verse como un automorfismo lineal de $\mathbb{R}^2$, representado por una matriz real

$$T = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

cuyas entradas se transcriben literalmente a la expresión

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Ejercicio 5. *Muestre que cualquier transformación de Möbius distinta de la identidad tiene a lo más dos puntos fijos.*

Solución. Un punto fijo de T no es otra cosa que un autovector de su representación matricial. Si T tiene tres puntos fijos distintos, entonces su representación matricial tiene un único autoespacio de dimensión 2, i.e., todo vector es un autovector, i.e., todo punto del plano extendido es un punto fijo.

Ejercicio 6. *Pruebe que toda transformación de Möbius está determinada únicamente por su acción sobre tres puntos del plano extendido.*

Solución. Sean S, T dos transformaciones de Möbius que coinciden en en tres puntos. Entonces $S^{-1}T$ fija estos tres puntos. Por ende, $S^{-1}T$ es la identidad. Por ende, $S = T$.

Ejercicio 7. *Sean $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ tres puntos distintos y sea S la transformación de Möbius que los envía a $1, 0, \infty$, respectivamente. Escriba una fórmula para S en los siguientes casos: (a) $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ son finitos, (b) $z_2 = \infty$, (c) $z_3 = \infty$, (d) $z_4 = \infty$.*

Solución.

(a) Asegurémonos de que z_3, z_4 sean enviados a $0, \infty$, respectivamente:

$$T(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4}$$

Para que z_2 sea enviado a 1, reescalamos:

$$S(z) = \frac{T(z)}{T(z_2)} = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

(b) Para $z_2 = \infty$, tenemos $T(\infty) = 1$. Por ende, $S(z) = T(z)$.

(c) Para $z_3 = \infty$, usaremos $T(z) = (z - z_4)^{-1}$. Para que z_2 sea enviado a 1, reescalamos:

$$S(z) = \frac{T(z)}{T(z_2)} = \frac{z_2 - z_4}{z - z_4}$$

(d) Para $z_4 = \infty$, usaremos $T(z) = z - z_3$. Para que z_2 sea enviado a 1, reescalamos:

$$S(z) = \frac{T(z)}{T(z_2)} = \frac{z - z_3}{z_2 - z_3}$$

Ejercicio 8. *Sean $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ distintos y $w_2, w_3, w_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ también distintos. Pruebe que*

(a) Las transformaciones de Möbius preservan la razón anarmónica.

(b) Existe una única transformación de Möbius S tal que $S(z_j) = w_j$ para $j = 2, 3, 4$.

(c) La razón anarmónica de cuatro puntos es real si y sólo si dichos puntos son cocirculares. (Recuerde que la unión de una recta en $\mathbb{C}$ con el punto ∞ es considerada un círculo en $\widehat{\mathbb{C}}$.)

Solución.

(a) La razón anarmónica $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4)$ se define como $T(z_1)$, donde T es la única transformación de Möbius que lleva z_2, z_3, z_4 a los puntos de referencia $1, 0, \infty$. Si ponemos $w_j = S(z_j)$, donde S es una transformación de Möbius, entonces $(w_1 : w_2 : w_3 : w_4) = TS^{-1}(w_1) = T(z_1)$.

(b) Esto fue probado en el ejercicio 6.

(c) Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$. Mediante una transformación de Möbius, podemos suponer que z_2, z_3, z_4 son precisamente los puntos de referencia $1, 0, \infty$. Entonces $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) = z_1$. Obviamente z_1 es real si y sólo si es cocircular con $1, 0, \infty$ en el plano extendido.

Ejercicio 9. *Halle la transformación de Möbius*

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

tal que $T(0) = 1$, $T(i) = -1$, $T(-i) = 0$.

Solución. Por la condición $T(-i) = 0$, podemos poner $a = 1$, $b = i$. De la condición $T(0) = 1$, se deduce $d = i$. De la condición $T(i) = -1$, se deduce $c = -3$. Por ende,

$$T(z) = \frac{i+z}{i-3z}$$

Ejercicio 10. *Pruebe que toda colección de cuatro puntos distintos pueden ser enviados por una transformación de Möbius a* $1, -1, k, -k$, *donde* k *depende de los puntos dados.*

Solución. Supongamos sin pérdida de generalidad que los tres primeros puntos son $1, -1, \infty$. Sea

$$T(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

la transformación de Möbius que buscamos. Puesto que T fija ± 1, tenemos $a = kb = kc = d$. Entonces,

$$T(\infty) + T(z_0) = k + \frac{kz_0+1}{z_0+k} = \frac{k^2+2kz_0+1}{z_0+k} = 0$$

donde $z_0 \in \mathbb{C}$ es el cuarto punto bajo consideración. Entonces k puede ser tomado como cualquiera de las raíces de la ecuación cuadrática $k^2 + 2kz_0 + 1 = 0$. El producto de estas raíces es 1, lo cual es consistente con el hecho de que, si T fija ± 1, entonces $1/T$ también fija ± 1.

Ejercicio 11. *Halle todas las transformaciones de Möbius que fijan el disco unitario* $|z| < 1$.

Solución. Consideremos la transformación de Möbius

$$T(z) = \frac{1+iz}{1-iz}$$

que envía el semiplano superior $\Re(z) > 0$ al disco unitario $|z| < 1$. Las transformaciones que fijan el disco unitario son las conjugadas por T de las transformaciones que fijan el semiplano superior. Estas últimas se pueden describir de manera sencilla:

- Geométricamente, preservan el eje real con la orientación correcta.
- Algebraicamente, se representan por una matriz real con determinante positivo.

Conjugando una matriz de este tipo por T, tenemos

$$S = \begin{bmatrix} i & 1 \\ -i & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\alpha} & \bar{\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mu & \nu \\ \bar{\nu} & \bar{\mu} \end{bmatrix}$$

donde $\alpha = ia + c$, $\beta = ib + d$, $\mu = \beta - i\alpha$, $\nu = \beta + i\alpha$. Esto nos da la representación

$$S(z) = \frac{\mu z + \nu}{\bar{\nu} z + \bar{\mu}}$$

donde los parámetros μ, ν satisfacen $|\mu| > |\nu|$. Reescalando, podemos suponer que $|\mu| = 1$, de modo que la inversa de μ es simplemente $\mu^{-1} = \bar{\mu}$. Entonces,

$$S = \begin{bmatrix} \mu^2 & \mu\nu \\ \mu\bar{\nu} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda & -\lambda\alpha \\ -\bar{\alpha} & 1 \end{bmatrix}$$

donde $\lambda = \mu^2$, $\alpha = -\bar{\mu}\nu$. Esto nos da la representación

$$S(z) = \lambda \cdot \frac{z-\alpha}{1-\bar{\alpha}z}$$

donde los parámetros λ, α satisfacen $|\lambda| = 1$, $|\alpha| < 1$.

Ejercicio 12. *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función analítica definda en una región de tal modo que la imagen $f(\Omega)$ está incluida en una circunferencia. ¿Es f constante?*

Solución. Sí. De otro modo, tendríamos $f'(z_0) \neq 0$ en algún punto $z_0 \in \Omega$ y existiría una vecindad $U \subset \Omega$ de z_0 tal que $f|_U$ es un difeomorfismo. En particular, $f(U)$ sería un abierto de $\mathbb{C}$, imposible de encajar en una curva por razones dimensionales.

Ejercicio 13. *Una reflexión es una isometría del plano que fija una recta (y nada más). Pruebe que toda reflexión envía circunferencias a cirfunferencias.*

Solución. Sea $T : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una reflexión. Mediante una isometría lineal afín, podemos suponer que T fija el eje real. Entonces T es la conjugación compleja, que envía el círculo $|z - a| = r$ al círculo $|z - \bar{a}| = r$.

Ejercicio 14. *Sea $\mathscr{C} \subset \mathbb{C}$ el círculo $|z - 2| = 1$. Refleje los siguientes conjuntos a través de $\mathscr{C}$: (a) el eje imaginario, (b) la recta $x = y$, (c) el círculo $|z| = 1$.*

Solución. El punto $\varphi(z)$ simétrico a z con respecto a $\mathscr{C}$ satisface la ecuación

$$\varphi(z) = 2 + \frac{1}{\bar{z} - 2} = \frac{2\bar{z} - 3}{\bar{z} - 2}$$

Evaluaremos φ en algunos puntos convenientes:

$$\varphi(0) = \frac{3}{2}, \qquad \varphi(\infty) = 2, \qquad \varphi(2 - 2i) = 2 - \frac{i}{2}, \qquad \varphi(1) = 1, \qquad \varphi(-1) = \frac{5}{3}$$

(a) La imagen del eje imaginario está determinada por los puntos $\varphi(0)$, $\varphi(\infty)$ y la simetría con respecto al eje real. Esta imagen es el círculo $|4z - 7| = 1$.

(b) La imagen de la recta $x = y$ está determinada por los puntos $\varphi(0)$, $\varphi(\infty)$, $\varphi(2 - 2i)$. Esta imagen es el círculo $|4z - 7 - i| = \sqrt{2}$.

(c) La imagen del círculo unitario está determinada por los puntos $\varphi(1)$, $\varphi(-1)$ y la simetría respecto al eje real. Esta imagen es el círculo $|3z - 4| = 1$.

Ejercicio 15. *Calcule la transformación de Möbius que envía (a) el círculo $|z| = 2$ al círculo $|z + 1| = 1$, (b) el punto $z = -2$ al origen, (c) el origen al punto $z = i$.*

Solución. Sea T la transformación de Möbius buscada. Pongamos

$$S(z) = 1 + T(-2z)$$

Por construcción, S fija el círculo unitario, así que es de la forma

$$S(z) = \frac{\mu z + \nu}{\bar{\nu} z + \bar{\mu}}$$

Usando las otras condiciones sobre T, tenemos

$$S(1) = 1 + T(-2) = 1, \qquad S(0) = 1 + T(0) = 1 + i$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión original para S, tenemos

$$\mu + \nu = \bar{\mu} + \bar{\nu}, \qquad \nu = \bar{\mu}(1 + i)$$

Sustituyendo ν en términos de μ, tenemos

$$\cancel{\mu} + \bar{\mu}(\cancel{1} + i) = \cancel{\bar{\mu}} + \mu(\cancel{1} - i)$$

Entonces $\mu + \bar{\mu} = 0$. Es decir, μ es imaginario puro. Regresando a T, tenemos

$$T(z) = S(-z/2) - 1 = \frac{\mu z - 2\nu}{\bar{\nu} z - 2\bar{\mu}} - 1 = \frac{(\mu - \bar{\nu})z - 2(\nu - \bar{\mu})}{\bar{\nu} z - 2\bar{\mu}}$$

Poniendo $\mu = i$, $\nu = \bar{\mu}(1 + i) = -i(1 + i) = 1 - i$, tenemos

$$T(z) = \frac{-z - 2}{(1 + i)z + 2i} = \frac{iz + 2i}{(1 - i)z + 2}$$

Ejercicio 16. *Calcule la transformación general que envía el círculo $|z| = R$ a sí mismo.*

Solución. Pongamos $w = z/R$. La transformación general que fija el círculo $|w| = 1$ es

$$\tilde{T}(w) = \lambda \cdot \frac{w - \alpha}{1 - \bar{\alpha}w}$$

donde $|\lambda| = 1$, $|\alpha| \neq 1$. Regresando a la coordenada z, tenemos

$$\frac{1}{R}\,T(z) = \lambda \cdot \frac{z/R - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z/R}$$

que tiene casi la misma forma que la ecuación original. Reescalando los parámetros,

$$\lambda \mapsto \frac{\lambda}{R^2}, \qquad\qquad \alpha \mapsto \frac{\alpha}{R}$$

obtenemos la expresión final

$$\frac{1}{R}\,T(z) = \frac{\lambda}{R^2} \cdot \frac{z/R - \alpha/R}{1 - \bar{\alpha}z/R^2} \implies T(z) = \lambda \cdot \frac{z - \alpha}{R^2 - \bar{\alpha}z}$$

donde $|\lambda| = R^2$, $|\alpha| \neq R$. Ésta es la transformación general que fija el círculo $|z| = R$.

Ejercicio 17. *Halle una transformación que lleve $|z| = 1$ y $|4z - 1| = 1$ a círculos concéntricos.*

Solución. Definiremos una transformación T de la forma

$$T(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z}$$

donde $\alpha \in \mathbb{R}$. Esta transformación fija tanto el círculo $|z| = 1$ como el eje real. Observemos que el círculo $|4z - 1| = 1$ interseca al eje real en $z = 0$, $z = 1/2$. Puesto que $T(0) = -\alpha$, tenemos la ecuación

$$T(1/2) = \frac{1 - 2\alpha}{2 - \alpha} = \alpha$$

cuyas raíces son $\alpha = 2 \pm \sqrt{3}$. En ambos casos, la imagen del círculo $|4z - 1| = 1$ es el círculo $|z| = \alpha$. Por simetría, cualquier transformación lineal afín

$$\lambda\,T(z) + \beta = \lambda \cdot \frac{z - \alpha}{1 - \alpha z} + \beta$$

también lleva los círculos $|z| = 1$ y $|4z - 1| = 1$ a círculos concéntricos en el plano complejo.

Ejercicio 18. *Sean $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ puntos cocirculares.*

(a) Pruebe que z_1, z_3, z_4 y z_2, z_3, z_4 tienen la misma orientación si $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) > 0$.

(b) ¿Qué se puede decir de las orientaciones anteriores cuando $(z_2 : z_1 : z_3 : z_4) > 0$.

Solución. Sea C el círculo que pasa por los puntos dados. Definiremos los homeomorfismos $T, S : C \to \widehat{\mathbb{R}}$ por $T(z_1) = (z_1 : z_2 : z_3 : z_4)$ y $S(z_2) = (z_2 : z_1 : z_3 : z_4)$.

(a) Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- z_1, z_3, z_4 tienen la misma orientación que z_2, z_3, z_4 en el círculo C.
- z_1, z_2 están en el mismo camino que conecta a z_3, z_4 en el círculo C.
- $T(z_1)$, $T(z_2)$ están en el mismo camino que conecta a $T(z_3)$, $T(z_4)$ en el círculo $\widehat{\mathbb{R}}$.
- $T(z_1)$ tiene el mismo signo que $T(z_2) = 1$, puesto que $T(z_3) = 0$, $T(z_4) = \infty$.

(b) Por construcción, ST^{-1} es la restricción a $\widehat{\mathbb{R}}$ de una transformación de Möbius que fija $0, \infty$. Por lo tanto, ST^{-1} es la multiplicación por un número real $k \neq 0$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $k = S(z_2)$ es un número real positivo.
- $1/k = T(z_1)$ es un número real positivo.
- z_1, z_3, z_4 tienen la misma orientación que z_2, z_3, z_4 en el círculo C.

Ejercicio 19. *Verifique que el lado interior del círculo $|z - a| = R$ es el disco $|z - a| < R$.*

Solución. Tomemos los siguientes puntos de referencia: $z_2 = a + R$, $z_3 = a + iR$, $z_4 = a - iR$. Es fácil ver que estos puntos recorren el círculo dado de manera antihoraria. Entonces la transformación

$$T(z) = \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \cancelto{i}{\frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}}$$

reproduce la orientación absoluta de dicho círculo. Poniendo $z = a + r$, tenemos

$$T(z) = i \cdot \frac{r - iR}{r + iR} \cdot \frac{\bar{r} - iR}{\bar{r} - iR} = \frac{R(r + \bar{r}) + i(r\bar{r} - R^2)}{\text{positivo}}$$

Por ende, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- z está en el lado interior (i.e. izquierdo) del círculo $|z - a| = R$.
- $T(z)$ tiene parte imaginaria negativa.
- $r\bar{r} - R^2$ es negativo.
- $r = z - a$ tiene módulo menor que R.

Ejercicio 20. *El ángulo entre dos círculos orientados en un punto de intersección está definido como el ángulo entre las tangentes a ambos círculos en este punto, equipadas con la misma orientación. Pruebe de manera analítica, sin recurrir a la inspección geométrica, que los ángulos en los dos puntos de intersección son opuestos.*

Solución. Sean C_1, C_2 dos círculos orientados. Mediante una transformación de Möbius T, enviemos estos dos círculos a rectas que pasan por el origen, digamos,

$$\Im(z/\alpha) = 0, \qquad \Im(z/\beta) = 0$$

donde $\alpha, \beta \in S^1$ son los respectivos vectores direccionales unitarios. El ángulo dirigido desde $T(C_1)$ hasta $T(C_2)$ en el origen es $\arg(\beta/\alpha)$. Puesto que T^{-1} es una aplicación conforme, el ángulo dirigido desde C_1 hasta C_2 en el punto de intersección $T^{-1}(0)$ también es $\arg(\beta/\alpha)$.

El otro punto de intersección entre estas dos rectas es ∞. Aplicaremos la inversión $S(z) = -1/z$ para mover ∞ a la parte finita del plano. Entonces ST envía C_1, C_2 a las rectas

$$\Im(\alpha z) = 0, \qquad \Im(\beta z) = 0$$

cuyos vectores direccionales unitarios son $1/\alpha$, $1/\beta$. El ángulo dirigido desde $ST(C_1)$ hasta $ST(C_2)$ en el origen es $\arg(\alpha/\beta) = -\arg(\beta/\alpha)$. Puesto que $(ST)^{-1}$ es una aplicación conforme, el ángulo dirigido desde C_1 hasta C_2 en el punto de intersección $(ST)^{-1}(0) = T^{-1}(\infty)$ también es $-\arg(\beta/\alpha)$.

Semana 6

Ejercicio 1. *Considere γ como el cuadrado de vértices en $1, i, -1, -i$. Calcule la integral*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz$$

Solución. Tenemos un integrando de la forma $\omega = f\, dz$. Su diferencial es

$$d\omega = df\, dz + \cancelto{0}{f\, d^2 z} = \left[\frac{\partial f}{\partial x}\, dx + i\frac{\partial f}{\partial y}\, dy\right](dx + i\, dy) = i\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right] dx\, dy$$

Sustituyendo $f = u + iv$, la última expresión entre corchetes se reduce a

$$\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

Entonces, asumiendo que f es de clase C^1, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f = u + iv$ es una función holomorfa.
- u, v satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann.
- $\omega = f\, dz$ es una 1-forma cerrada.
- La integral de línea $\int_\gamma \omega$ sólo depende de la clase de homotopía con extremos fijos de γ.

En nuestro caso, $f = 1/z$ es una función holomorfa. Entonces podemos reemplazar γ con cualquier curva homotópica a ella, por ejemplo, el círculo unitario recorrido de manera antihoraria. Parametricemos este círculo como $z(t) = e^{it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\, dz = i\int_0^{2\pi} dt = 2\pi i$$

Ejercicio 2. *En la circunferencia S^1 definida por $|z| = 1$, calcule*

$$\int_{S^1} \frac{\sin z}{z^2 - 4}\, dz$$

Solución. Al igual que en el ejercicio anterior $\omega = f\, dz$ es una forma holomorfa definida en un abierto del plano $\mathbb{C}$. Por ende, ω es una forma cerrada. El círculo unitario es contractible en el dominio de ω, porque no encierra a ninguno de los ceros del denominador. Por ende,

$$\int_{S^1} \frac{\sin z}{z^2 - 4}\, dz = 0$$

Ejercicio 3. *Considere los polígonos $\sigma = [1, i]$, $\gamma = [1, 1 + i, i]$. Calcule*

$$\int_\sigma |z|^2\, dz, \qquad \int_\gamma |z|^2\, dz$$

Determine si existe una antiderivada para $f(z) = |z|^2$ a la luz del ejercicio 14.b).

Solución. Puesto que f no es una función holomorfa, la 1-forma $\omega = f\,dz$ no es cerrada, mucho menos es exacta. Entonces, la integral de línea

$$\int_\gamma \omega$$

depende de la trayectoria γ, no sólo de sus extremos. Por ende, f no admite una antiderivada.

Para ilustrar esto con un ejemplo concreto, observemos que $\gamma - \sigma = [1, 1+i, i, 1]$ es la frontera de una región contenida en el dominio de f, que es el plano $\mathbb{C}$. Entonces, por el teorema de Green, la discrepancia entre las integrales pedidas es

$$\Delta = \int_\gamma \omega - \int_\sigma \omega = \iint_D d\omega = i\left[\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right] dx\,dy$$

En nuestro caso, tenemos $f(x+iy) = x^2 + y^2$. Por ende,

$$\Delta = i\int_0^1 \int_{1-x}^1 (2x + 2iy)\,dy\,dx = i\int_0^1 \left[2xy + iy^2\right]_{1-x}^1 dx$$

$$\Delta = \int_0^1 [-(2x - x^2) + 2ix^2]\,dx = -\left[x^2 - \frac{2x^3}{3}\right]_0^1 + i\left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$$

Finalmente, calcularemos las integrales pedidas. En coordendas reales, el integrando es

$$\omega = f\,dz = (x^2 + y^2)(dx + i\,dy) = x^2\,dx + y^2\,dx + ix^2\,dy + iy^2\,dy$$

Usando la parametrización de σ segúnel enunciado, tenemos

$$\frac{\omega}{-1+i} = [(1-t)^2 + t^2]\,dt = (1 - 2t + 2t^2)\,dt$$

Entonces las integrales de línea sobre σ, γ son

$$\int_\sigma \omega = (-1+i)\int_0^1 (1 - 2t + 2t^2)\,dt = (-1+i)\left[t - t^2 + \frac{2t^3}{3}\right]_0^1 = -\frac{2}{3} + \frac{2i}{3}$$

$$\int_\gamma \omega = \int_\sigma \omega + \Delta = -\frac{4}{3} + \frac{4i}{3}$$

Ejercicio 4. *Sea γ el círculo unitario $\gamma(t) = e^{it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Calcule*

$$\int_\gamma z^n\,dz$$

para cada entero $n \in \mathbb{Z}$.

Solución. En el ejercicio 1 se demostró que, para $n = -1$, la integral es

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

En los demás casos, $k = (n+1)i$ es un entero imaginario no nulo. Entonces,

$$\int_\gamma z^n\,dz = i\int_0^{2\pi} e^{kt}\,dt = \left.\frac{e^{kt}}{k}\right|_0^{2\pi} = \frac{1-1}{k} = 0$$

Ejercicio 5. *Sea γ_r el semicírculo $z(t) = re^{it}$, donde $t \in [0, \pi]$. Muestre que*

$$\lim_{r\to\infty} \int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 0$$

Solución. Diferenciando la parametrización de γ_r, tenemos $dz = iz\,dt$. Entonces,

$$\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \leq \int_{\gamma_r} |e^{iz}|\,dt = \int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt$$

Para todo $r \geq 0$, el integrando está acotado por la constante 1, que es integrable en $[0,\pi]$. Por el teorema de la convergencia dominada, tenemos

$$\lim_{r\to\infty}\left|\int_{\gamma_r} \frac{e^{iz}}{z}\,dz\right| \leq \lim_{r\to\infty}\int_0^\pi e^{-r\sin t}\,dt = \int_0^\pi \lim_{r\to\infty} e^{-r\sin t}\,dt = \int_0^\pi 0 = 0$$

Ejercicio 6. *Sea $\sqrt{z}$ la rama principal de la raíz cuadrada. Calcule*

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz$$

en los siguientes casos: (a) γ es la semicircunferencia superior de 1 a -1, (b) γ es la semicircunferencia inferior de 1 a -1.

Solución.

(a) La semicircunferencia superior es $\gamma(t) = e^{2it}$, donde $t \in [0,\pi/2]$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = 2i\int_0^{\pi/2} e^{it}\,dt = 2e^{it}\Big|_0^{\pi/2} = -2+2i$$

(b) La semicircunferencia inferior es $\gamma(t) = e^{-2it}$, donde $t \in [0,\pi/2]$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{1}{\sqrt{z}}\,dz = -2i\int_0^{\pi/2} e^{-it}\,dt = 2e^{-it}\Big|_0^{\pi/2} = -2-2i$$

Ejercicio 7. *Sea γ el segmento orientado de 0 a $1+i$. Calcule*

$$\int_\gamma x\,dz$$

Solución. El segmento dado es $\gamma(t) = t+it$, donde $t \in [0,1]$. Entonces,

$$\int_\gamma x\,dz = \int_0^1 (t+it)\,dt = \left[\frac{t^2}{2} + \frac{it^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}$$

Ejercicio 8. *Sea γ el círculo $|z| = r$ orientado positivamente. Calcule*

$$\int_\gamma x\,dz$$

de dos maneras: (a) utilizando una parametrización, (b) utilizando el hecho de que, en γ,

$$x = \frac{1}{2}(z+\bar{z}) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{r^2}{z}\right)$$

Solución.

(a) El círculo dado es $\gamma(t) = re^{it}$, donde $t \in [-\pi,\pi]$. Entonces,

$$\int_\gamma x\,dz = \cancelto{0}{\int_\gamma x\,dx} + i\int_\gamma x\,dy = ir^2\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 t\,dt = ir^2\int_0^\pi (1+\cos t)\,dt = i\pi r^2$$

(b) Usando la sugerencia y el resultado del ejercicio 4, tenemos

$$\int_\gamma x\,dz = \frac{1}{2}\cancelto{0}{\int_\gamma \bar{z}\,dz} + \frac{r^2}{2}\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz = \frac{r^2}{2}\cdot 2\pi i = i\pi r^2$$

Ejercicio 9. *Calcule la integral de línea*

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz$$

en los siguientes casos: (a) γ es el círculo $|z-1|=1$, orientado positivamente, (b) γ es el círculo $|z|=2$, orientado positivamente.

Solución. Separemos el integrando en fracciones parciales:

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}$$

Por la linealidad de la integral, tenemos

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z+1}\,dz$$

(a) Observemos que γ es contractible en el dominio de sustraendo. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\cancelto{0}{\int_\gamma \frac{1}{z+1}\,dz} = i\pi$$

(b) Sean γ_1, γ_2 los círculos $|z-1|=1$ y $|z+1|=1$, ambos orientados positivamente. Observemos que γ es homotópica a γ_1 en el dominio del minuendo y es homotópica a γ_2 en el dominio del sustraendo. Reemplazando γ con γ_1, γ_2 en las integrales correctas, tenemos

$$\int_\gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\int_{\gamma_2} \frac{1}{z+1}\,dz = i\pi - i\pi = 0$$

Ejercicio 10. *Sea γ el círculo unitario $|z|=1$. Calcule la integral*

$$\int_\gamma |z-1|\,|dz|$$

Solución. Parametricemos el círculo como $\gamma(t) = e^{it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Entonces,

$$|z-1|^2 = (1-\cos t)^2 + \sin^2 t = 2 - 2\cos t = 4\sin^2(t/2)$$

Puesto que $t/2 \in [0, \pi]$, tenemos $\sin(t/2) \geq 0$. Entonces,

$$\int_\gamma |z-1|\,|dz| = \int_0^{2\pi} 2\sin(t/2)\,dt = -4\cos(t/2)\Big|_0^{2\pi} = 8$$

Ejercicio 11. *Sea $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función arbitraria. Dada una partición $P : a = t_0 < \cdots < t_n = b$ del intervalo $[a,b]$, considere la siguiente estimación:*

$$V_g(P) = \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1})|$$

La variación total de g en $[a,b]$ se define como

$$V_g([a,b]) = \sup_P V_g(P)$$

Decimos que g es de variación acotada si $V_g([a,b]) < \infty$.

Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) Toda función creciente $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ tiene variación total $V_f([a, b]) = f(b) - f(a)$.

(b) Una función g es de variación acotada si y sólo si existe una función creciente f tal que, para todo $x < y$, el incremento $g(y) - g(x)$ está acotado superiormente por $f(y) - f(x)$.

(c) La función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(0) = 0$, $g(x) = x \sin(1/x)$ para $x \neq 0$, es continua y acotada, pero no de variación acotada. No obstante, $g(x) = x\,f(x)$ sí es de variación acotada.

(d) Sea $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función de variación acotada y sea $f(x) = V_g([a, x])$. Entonces g, f comparten los mismos puntos de continuidad y discontinuidad.

Solución.

(a) Sin importar cómo tomemos la partición P, siempre tendremos

$$V_f(P) = \sum_{k=1}^{n} [f(t_k) - f(t_{k-1})] = f(t_n) - f(t_0) = f(b) - f(a)$$

Esto implica que $V_f([a, b]) = f(b) - f(a)$.

(b) Supongamos que g es de variación acotada. Pongamos $f(x) = V_g([a, x])$. Dados $x \leq y$, tenemos

$$f(y) - f(x) = V_g([a, y]) - V_g([a, x]) = V_g([x, y])$$

porque toda partición de $[a, y]$ puede ser refinada por otra partición que contiene a x. En particular, esto implica que f es monótona. Tomando la partición trivial $P : a_0 = t_0 < t_1 = b$, tenemos

$$g(y) - g(x) \leq |g(y) - g(x)| = V_g(P) \leq V_g([x, y]) = f(y) - f(x)$$

Recíprocamente, supongamos ahora que g admite una función creciente f tal que $h = f - g$ también es creciente. Para toda partición P, tenemos

$$|g(t_k) - g(t_{k-1})| \leq |f(t_k) - f(t_{k-1})| + |h(t_k) - h(t_{k-1})|$$

en cada subintervalo $[t_{k-1}, t_k]$. Entonces $V_g(P) \leq V_f(P) + V_h(P)$. Tomando el supremo sobre todas las particiones, tenemos $V_g([a, b]) \leq V_f([a, b]) + V_h([a, b])$. Por ende, g es de variación acotada.

(c) Por construcción, f está acotada en valor absoluto por la identidad. Esto implica, por el teorema de estricción, que f es continua en $x = 0$. Por supuesto, f también es continua lejos de $x = 0$.

Sea x_n la sucesión de múltiplos impares de $\pi/2$. Por construcción, tenemos

$$f(1/x_n) = \frac{1}{x_n} \sin(x_n) = \frac{(-1)^n}{x_n}$$

Dos valores consecutivos de $f(1/x_n)$ están separados por

$$|f(1/x_n) - f(1/x_{n+1})| = \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}$$

Obtenemos valores arbitrariamente grandes de $V_f(P)$ utilizando las particiones

$$P : 0 < \frac{1}{x_n} < \cdots < \frac{1}{x_0} < 1$$

Por ende, $V_f([0, 1]) = \infty$. Es decir, f no es de variación acotada.

Ahora analizaremos g. La derivada de g lejos de $x = 0$ se calcula mecánicamente:

$$g'(x) = 2x \sin(1/x) - \cos(1/x)$$

Entonces g' está acotada en valor absoluto lejos de $x = 0$ por

$$|g'(x)| \leq 2\,|x \sin(1/x)| + |\cos(1/x)| \leq 2 + 1 = 3$$

Puesto que g es continua en 0, también tenemos

$$|g(a) - g(0)| = \lim_{x \to 0} |g(a) - g(x)| \leq \lim_{x \to 0} 3|a - x| = 3a$$

Entonces 3 es una constante de Lipschitz para g. Dada una partición arbitraria P, tenemos

$$V_g(P) = \sum_{k=1}^{n} |g(t_k) - g(t_{k-1}| \leq \sum_{k=1}^{n} 3\,(t_k - t_{k-1}) = 3$$

Por ende, $V_g([0,1]) \leq 3$. Es decir, g es de variación acotada.

(d) Supongamos que g es continua en b. Dado un margen de error $\varepsilon > 0$, tomemos una partición P del intervalo $[a,b]$ que cumpla las siguientes condiciones:

- El error de estimación $\Delta(P) = f(b) - V_g(P)$ no excede $\varepsilon/2$.
- El tramo final T satisface $|g(b) - g(x)| \leq \varepsilon/2$ para todo $x \in T$.

Dado un punto $x \in T$, llamemos P_x al refinamiento de P con el punto adicional x y llamemos T_x al tramo final de P_x. Por supuesto, $\Delta(P_x) \leq \varepsilon/2$. Entonces,

$$f(b) - f(x) = V_g(T_x) \leq V_g(P_x \cap T_x) + \varepsilon/2 = |g(b) - g(x)| + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Por ende, f también es continua en b.

Supongamos ahora que g no es continua en b. Entonces existe una sucesión x_n que converge a b tal que cada $g(x_n)$ está separado de $g(b)$ por un margen uniforme $\varepsilon > 0$. Luego,

$$f(b) - f(x_n) = V_g([x_n, b]) \geq |g(b) - g(x_n)| \geq \varepsilon$$

Por ende f tampoco es continua en b.

Ejercicio 12. *Decimos que un camino suave por tramos $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ es rectificable si tanto su parte real $\Re \circ \gamma$ como su parte imaginaria $\Im \circ \gamma$ son de variación acotada. Decimos que otro camino rectificable σ es equivalente a γ si se puede expresar como una reparametrización $\sigma = \gamma \circ \varphi$, donde $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ es una función suave y estrictamente creciente.*

Una curva rectificable es una clase de equivalencia de caminos rectificables. Muestre que la integral de una función continua $f : U \to \mathbb{C}$ sobre una curva rectificable está bien definida. Esto es,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\sigma f(z)\,dz$$

para todo par de caminos rectificables equivalentes γ, σ.

Solución. Sea $\mathcal{P}(\gamma)$ el conjunto de particiones del dominio de γ. Para todo $P \in \mathcal{P}(\gamma)$, abreviemos

$$S_f(P) = \sum_{k=1}^{n} f \circ \gamma(\tau_k) \cdot [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})]$$

donde $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$ es arbitrario. Abreviemos también

$$S_f(\gamma) = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Dado un margen de error $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para todo $P \in \mathcal{P}(\gamma)$, se cumple

$$\|P\| < \delta \implies |S_f(\gamma) - S_f(P)| < \varepsilon/2$$

Análogamente, existe $\delta' > 0$ tal que, para todo $Q \in \mathcal{P}(\sigma)$, se cumple

$$\|Q\| < \delta' \implies |S_f(\sigma) - S_f(Q)| < \varepsilon/2$$

Puesto que los caminos γ, σ son parametrizadaos por intervalos compactos, el cambio de parámetro φ que los relaciona es una función uniformemente continua. Reduciendo δ', podemos suponer que

$$\|Q\| < \delta' \implies \|\varphi(Q)\| < \delta$$

donde $\varphi(Q) \in \mathcal{P}(\gamma)$ es la partición cuyos tramos son las imágenes $\varphi(T)$ de cada tramo T de Q. Entonces, por construcción, $S_f(Q) = S_f(\varphi(Q))$. Tomando cualquier $\|Q\| < \delta'$, obtenemos

$$|S_f(\gamma) - S_f(\sigma)| \le |S_f(\gamma) - S_f(\varphi(Q))| + |S_f(Q) - S_f(\sigma)| \le \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

Puesto que ε es arbitrariamente pequeño, tenemos $S_f(\gamma) = S_f(\sigma)$.

Ejercicio 13. *Sea $\gamma : [a,b] \to U$ una curva rectificable en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua. Pruebe las siguientes afirmaciones:*

(a) $\displaystyle\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_\gamma f(z)\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{c+\gamma} f(z-c)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$*, para todo $z \in \mathbb{C}$.*

(c) $\displaystyle\left|\int_\gamma f(z)\,dz\right| \le \int_\gamma |f(z)|\,|dz| \le V_\gamma([a,b]) \cdot \|f \circ \gamma\|_\infty$*, donde*

- *$V_\gamma([a,b])$ es la longitud de arco de γ.*
- *$\|f \circ \gamma\|_\infty$ es el supremo en módulo de $f \circ \gamma$.*

Solución. Utilizaremos las mismas abreviaciones del ejercicio anterior.

(a) Dada una partición $P \in \mathcal{P}(\gamma)$, sea $-P \in \mathcal{P}(-\gamma)$ la partición cuyos tramos son las reversas $-T$ para cada tramo T de P. Entonces las estimaciones de la integral sobre $-\gamma$ son

$$S_f(-P) = \sum_{k=1}^n f \circ \gamma(\tau_k) \cdot [\gamma(t_{k-1}) - \gamma(t_k)] = -S_f(P)$$

Puesto que $\|-P\| = \|P\|$, tenemos

$$S_f(-\gamma) = \lim_{\|P\|\to 0} S_f(-P) = -\lim_{\|P\|\to 0} S_f(P) = -S_f(\gamma)$$

(b) Dada una partición $P \in \mathcal{P}(\gamma)$, sea $c + P \in \mathcal{P}(c+\gamma)$ la partición cuyos tramos son $c + T$ para cada tramo T de P. Poniendo $g(z) = f(z-c)$, las estimaciones de la integral desplazada son

$$S_g(c+P) = \sum_{k=1}^n f \circ \gamma(\tau_k) \cdot [\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})] = S_f(P)$$

Puesto que $\|c+P\| = \|P\|$, tenemos

$$S_g(c+\gamma) = \lim_{\|P\|\to 0} S_g(c+P) = \lim_{\|P\|\to 0} S_f(P) = S_f(\gamma)$$

(c) Para toda partición $P \in \mathcal{P}(\gamma)$, abreviemos

$$S_f(|P|) = \sum_{k=1}^n f \circ \gamma(\tau_k) \cdot |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})|$$

Consecuentemente, abreviaremos también

$$S_f(|\gamma|) = \int_\gamma f(z)\,|dz|$$

Por desigualdad triangular, $|S_f(P)| \leq S_{|f|}(|P|)$. Entonces,

$$|S_f(\gamma)| = \lim_{\|P\|\to 0} |S_f(P)| \leq \lim_{\|P\|\to 0} S_{|f|}(|P|) = S_{|f|}(|\gamma|)$$

Por construcción, $|f(z)| \leq \|f \circ \gamma\|_\infty$ sobre la curva γ. Entonces,

$$S_{|f|}(|\gamma|) = \lim_{\|P\|\to 0} S_{|f|}(|P|) \leq \lim_{\|P\|\to 0} S_1(|P|) \cdot \|f \circ \gamma\|_\infty = V_\gamma([a,b]) \cdot \|f \circ \gamma\|_\infty$$

Ejercicio 14. *Sea $\gamma : [a,b] \to U$ una curva rectificable en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ y sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función continua. Pruebe las siguientes afirmaciones:*

(a) Para todo $\varepsilon > 0$, existe una curva poligonal $\sigma : [a,b] \to U$ tal que $\gamma(a) = \sigma(a)$, $\gamma(b) = \sigma(b)$ y

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz - \int_\sigma f(z)\,dz \right| < \varepsilon$$

(b) Si $F : [a,b] \to \mathbb{C}$ es una antiderivada de f, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F(b) - F(a)$$

Solución. Utilizaremos las mismas abreviaciones de los ejercicios anteriores.

(a) Dividamos γ en un número finito de tramos, cada uno de ellos encajado en una vecindad convexa y relativamente compacta en U. Repartamos el margen de error disponible ε entre los tramos. Así, el problema original se reduce al caso en que f es uniformemente continua y U es convexo.

Tomemos $\delta > 0$ y una partición $P \in \mathcal{P}(\gamma)$ tales que

- $|z - w| < \delta$ implica $|f(z) - f(w)| < \varepsilon$, para todo $z, w \in U$.
- $|\gamma(s) - \gamma(t)| < \delta$, para todo $s, t \in [t_{k-1}, t_k]$.
- $|S_f(\gamma) - S_f(P)| < \varepsilon$, para alguna elección de $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$.

Definamos σ en cada tramo de P por interpolación lineal:

$$\sigma(t) = \frac{t_k - t}{t_k - t_{k-1}} \cdot \gamma(t_{k-1}) + \frac{t - t_{k-1}}{t_k - t_{k-1}} \cdot \gamma(t_k)$$

Integrando f sobre σ, tenemos

$$S_f(\sigma) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f \circ \sigma(t)\,dt$$

Comparando esta estimación con $S_f(P)$, tenemos

$$|S_f(\sigma) - S_f(P)| \leq \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}} \right| \int_{t_{k-1}}^{t_k} |f \circ \sigma(t) - f \circ \gamma(\tau_k)|\,dt$$

Por construcción, $|\sigma(t) - \gamma(\tau_k)| < \delta$ para todo $t \in [t_{k-1}, t_k]$. Entonces,

$$|S_f(\sigma) - S_f(P)| \leq \varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} |\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})| \leq \varepsilon \cdot V_\gamma([a,b])$$

Por ende, $S_f(\sigma)$ difiere de $S_f(\gamma)$ por un margen de error

$$|S_f(\gamma) - S_f(\sigma)| \leq |S_f(\gamma) - S_f(P)| + |S_f(P) - S_f(\sigma)| \leq \varepsilon \cdot (1 + V_\gamma([a, b]))$$

que puede hacerse arbitrariamente pequeño.

(b) Si γ es una curva suave por tramos, entonces $S_f(\gamma) = F(b) - F(a)$ es el teorema fundamental de las integrales de línea.

Si γ no es suave por tramos, entonces aproximemos γ usando una sucesión de curvas poligonales σ_n entre los extremos de γ tales que $S_f(\sigma_n)$ converge a $S_f(\gamma)$. Puesto que cada σ_n es suave por tramos, tenemos $S_f(\sigma_n) = F(b) - F(a)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por ende, $S_f(\gamma) = F(b) - F(a)$.

Ejercicio 15. *Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica definida en un abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$. Pruebe que, si $f' = 0$, entonces f es constante.*

Solución. Puesto que $U \subset \mathbb{C}$ es abierto y conexo, U también es conexo por caminos. Tomemos dos puntos arbitrarios $z, w \in U$ y un camino $\gamma : [0, 1] \to U$ entre ellos. Entonces,

$$f(z) - f(w) = \int_\gamma f'(z)\, dz = \int_\gamma 0 = 0$$

Por ende, f es constante.

Ejercicio 16. *Sea $f(z)$ una función analítica en una curva cerrada γ. Determine si*

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz$$

es imaginario puro.

Solución. Pongamos $f = u + iv$. Entonces el integrando es

$$\bar{f}\, df = (u - iv)\,(du + i\, dv) = (u\, du + v\, dv) + i\,(u\, dv - v\, du)$$

La parte real de esta forma es exacta, por ende su integral γ es cero. Por ende,

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\, f'(z)\, dz$$

es imaginario puro.

Ejercicio 17. *Sea f_n una sucesión de funciones analíticas que converge uniformemente a f en el abierto conexo $U \subset \mathbb{C}$. Pruebe que, para toda curva rectificable $\gamma : [a, b] \to U$, se cumple*

$$\lim_n \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

Solución. Puesto que f_n converge uniformemente a f sobre γ, tenemos

$$\lim_{n\to\infty} \left| \int_\gamma f_n(z)\, dz - \int_\gamma f(z)\, dz \right| \leq V_\gamma([a, b]) \cdot \lim_{n\to\infty} \|f_n \circ \gamma - f \circ \gamma\|_\infty = 0$$

La diferencia de integrales en el valor absoluto converge a cero. Equivalentemente,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = \int_\gamma f(z)\, dz$$

Semana 7

Ejercicio 1. *Calcule la integral de contorno*

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+i)(z-i)}$$

en cada uno de los siguientes casos:

- *γ es una curva simple antihoraria que encierra a 1, pero no a $\pm i$.*
- *γ es una curva simple antihoraria que encierra a 1 e i, pero no a $-i$.*
- *γ es una curva simple antihoraria que encierra a los tres puntos 1, i, $-i$.*

Solución. Separando el integrando en fracciones parciales, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+i} + \frac{C}{z-i}$$

$$1 = A(z+i)(z-i) + B(z-1)(z-i) + C(z-1)(z+i)$$

Abreviando $D = i(B-C)$, tenemos

$$1 = (A+B+C)z^2 - (B+C+D)z + (A+D)$$

$$A = D = \frac{1}{2}, \qquad B + C = -D = -\frac{1}{2}, \qquad C - B = iD = \frac{i}{2}$$

$$B = -\frac{1}{4} - \frac{i}{4}, \qquad C = -\frac{1}{4} + \frac{i}{4}$$

Puesto que la integral es lineal, tenemos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = A\int_\gamma \frac{dz}{z-1} + B\int_\gamma \frac{dz}{z+i} + C\int_\gamma \frac{dz}{z-i}$$

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i\,[A\,n(\gamma,1) + B\,n(\gamma,-i) + C\,n(\gamma,i)]$$

Nos piden analizar los siguientes casos:

(a) Si γ encierra a 1, pero no a πi, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i A = i\pi$$

(b) Si γ encierra a 1 e i, pero no a $-i$, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(A + C) = -2\pi i B = -\frac{\pi}{2} + \frac{i\pi}{2}$$

(c) Si γ encierra a los tres puntos 1, i, $-i$, entonces

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 2\pi i(A+B+C) = 0$$

Ejercicio 2. *Calcule las siguientes integrales de contorno:*

(a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z+1}\,dz$, *donde* $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

(b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+3z-1}{(z+3)(z-2)}\,dz$, *donde* $\gamma(t) = 1 + 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

(c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}\,dz$, *donde* $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$

(d) $\displaystyle\int_\gamma z^m(1-z)^n\,dz$, *donde* $\gamma(t) = 2e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}\,dz$, *donde* $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}$, *donde* $\gamma(t) = a + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

(g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{\sin(z)}{z^3}\,dz$, *donde* $\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Solución.

(a) La curva γ da una vuelta antihoraria alrededor de $z = -1$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z+1}\,dz = \frac{2\pi i}{e}$$

(b) La curva γ da una vuelta alrededor de $z = 2$ y ninguna alrededor de $z = -3$. Pongamos

$$f(z) = \frac{z^2+3z-1}{z+3}$$

Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-2}\,dz = 2\pi i \cdot f(2) = \frac{18\pi i}{5}$$

(c) La curva γ da una vuelta alrededor de $z = \pm i$. Pongamos

- $\gamma_1(t) = 2e^{it}$, donde $t \in [0, \pi]$.
- $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, donde $t \in [\pi, 2\pi]$.
- $\gamma_3(t) = 2t$, donde $t \in [-1, 1]$.

Por construcción, γ es la concatenación de γ_1, γ_2. Por la linealidad de la integral,

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_2-\gamma_3} \omega$$

Ahora sí, $\gamma_1 + \gamma_3$ encierra sólo a $z = i$, mientras que $\gamma_2 - \gamma_3$ encierra sólo a $z = -i$. Pongamos

$$f_1(z) = \frac{e^{\pi z}}{z + i}, \qquad f_2(z) = \frac{e^{\pi z}}{z - i}$$

Por la fórmula integral de Cauchy, la integral sobre $\gamma_1 + \gamma_3$ es

$$\int_{\gamma_1+\gamma_3} \frac{f_1(z)}{z + i}\, dz = 2\pi i \cdot f_1(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{\pi i}}{2i} = -\pi$$

Por la fórmula integral de Cauchy, la integral sobre $\gamma_2 - \gamma_3$ es

$$\int_{\gamma_2-\gamma_3} \frac{f_2(z)}{z - i}\, dz = 2\pi i \cdot f_2(-i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-\pi i}}{-2i} = \pi$$

Sumando, nos queda

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_3+\gamma_4} \omega = -\pi + \pi = 0$$

(d) La curva γ da una vuelta alrededor de $z = 0$ y también alrededor de $z = 1$. Pongamos

- $\gamma_1(t) = 2e^{it}$, donde $t \in [-\omega, \omega]$, para cualquier elección de $\omega \in (\pi/3, \pi/2)$.
- $\gamma_2(t) = 2e^{it}$, donde $t \in [\omega, 2\pi - \omega]$.
- $\gamma_3(t) = \cos\omega + it\sin\omega$, donde $t \in [-1, 1]$.

Estrictamente hablando, γ no es la concatenación de γ_1, γ_2. Sin embargo, si cortamos el tramo final de γ, parametrizado por $t \in [2\pi - \omega, 2\pi]$, y lo pegamos al inicio, reparametrizándolo por $t \in [-\omega, 0]$, entonces sí obtenemos $\gamma_1 + \gamma_2$. Por la linealidad de la integral,

$$\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1+\gamma_3} \omega + \int_{\gamma_2-\gamma_3} \omega$$

Ahora sí, $\gamma_1 - \gamma_3$ encierra sólo a $z = 1$, mientras que $\gamma_2 + \gamma_3$ encierra sólo a $z = 0$. Pongamos

$$f_1(z) = (-1)^n z^m, \qquad f_2(z) = (1 - z)^n$$

Para $n \geq 0$, la integral sobre $\gamma_1 - \gamma_3$ se anula, por el teorema de Cauchy-Goursat. Para $n < 0$, será conveniente poner $s = -(n + 1)$. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma_1-\gamma_3} \frac{f_1(z)}{(z - 1)^{s+1}}\, dz = 2\pi i s! \cdot f_1^{(s)}(1) = 2\pi i s! \cdot (-1)^n \cdot \frac{m!}{(m - s)!}$$

Para $m \geq 0$, la integral sobre $\gamma_2 + \gamma_3$ se anula, por el teorema de Cauchy-Goursat. Para $m < 0$, será conveniente poner $r = -(m + 1)$. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_{\gamma_2+\gamma_3} \frac{f_2(z)}{z^{r+1}}\, dz = 2\pi i r! \cdot f_1^{(r)}(0) = -2\pi i r! \cdot (-1)^m \cdot \frac{n!}{(n - r)!}$$

En ambos casos, el "cociente de factoriales" es sólo una abreviación formal del producto

$$\frac{m!}{(m - s)!} = m(m - 1)(m - 2) \dots (m - s + 1)$$

Salgan lo que salgan las integrales sobre $\gamma_1 - \gamma_3$ y $\gamma_2 + \gamma_3$, la suma de ellas es la integral sobre γ.

(e) Ls función $f(z) = e^{iz}$ es entera. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^2}\,dz = 2\pi i \cdot f'(0) \cdot n(\gamma, 0) = -2\pi$$

(f) La función $f(z) = 1$ es entera. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\,dz = 2\pi i \cdot f(a) \cdot n(\gamma, a) = 2\pi i$$

(g) La función $f(z) = \sin(z)$ es entera. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^3}\,dz = \pi i \cdot f''(0) \cdot n(\gamma, 0) = 0$$

Ejercicio 3. *Calcule la integral de contorno*

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz + \int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz$$

donde γ es el círculo unitario $|z| = 1$ recorrido en sentido antihorario.

Solución. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!} \cdot \cancel{f^{(n)}(0)}\ 1$$

Entonces el resultado buscado es

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z}\,dz + \int_\gamma \frac{e^z}{z^n}\,dz = 2\pi i - \frac{2\pi i}{(n-1)!}$$

Ejercicio 4. *Utilice una descomposición en fracciones parciales para calcular la integral*

$$\int_\gamma \frac{dz}{z^2+1}$$

donde γ es el círculo unitario $|z| = 1$ recorrido en sentido antihorario.

Solución. La integral no está bien definida, porque γ pasa por los polos $z = \pm i$ del integrando.

Ejercicio 5. *Calcule la integral de contorno*

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a|^2}$$

donde γ es el círculo $|z| = \rho$, donde $|a| \neq \rho$. (Sugerencia: $z\bar{z} = \rho^2$, $|dz| = -i\rho\,\dfrac{dz}{z}$.)

Solución. Parametricemos γ como $\gamma(t) = \rho e^{it}$, donde $t \in [0, 2\pi]$. Entonces $dz = iz\,dt$. Entonces,

$$\frac{|dz|}{|z-a|^2} = \frac{\rho\,dt}{|z-a|^2} = \frac{i\rho\,dz}{-z|z-a|^2} = \frac{i\rho\,dz}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)}$$

Separando el integrando en fracciones parciales, tenemos

$$\frac{1}{(z-a)(\bar{a}z-\rho^2)} = \frac{C}{z-a} - \frac{\bar{a}C}{\bar{a}z-\rho^2}$$

$$1 = C(\bar{a}z-\rho^2) - \bar{a}C(z-a) = C(|a|^2-\rho^2)$$

Si $|a| < \rho$, entonces γ sólo da una vuelta alrededor de $z = a$. Por ende,

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a|^2} = i\rho C \int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \frac{2\pi\rho}{-C} = \frac{2\pi\rho}{|C|}$$

Si $|a| > \rho$, entonces γ sólo da una vuelta alrededor de $z = \rho^2/\bar{a}$. Por ende,

$$\int_\gamma \frac{|dz|}{|z-a|^2} = -i\rho C \int_\gamma \frac{dz}{\bar{a}z-\rho^2} = \frac{2\pi\rho}{C} = \frac{2\pi\rho}{|C|}$$

Ejercicio 6. *Calcule la integral de contorno*

$$\int_\gamma \frac{\exp(z^2-1)}{z^2-4}\,dz$$

donde γ es el cuadrado con vértices en $\pm 1 \pm i$, recorrido diez veces en sentido antihorario.

Solución. Los únicos dos polos del integrando en todo el plano están en el exterior de γ. Por ende,

$$\int_\gamma \frac{\exp(z^2-1)}{z^2-4}\,dz = 0$$

Ejercicio 7. *Sea $n > 0$ un entero positivo.*

(a) Verifique la identidad

$$\frac{z^n}{z-a} = z^{n-1} + a \cdot \frac{z^{n-1}}{z-a}$$

(b) Sea γ una curva cerrada simple con orientación positiva tal que a está en su interior. Utilice el ítem anterior para demostrar por inducción que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n}{z-a}\,dz = a^n$$

Solución.

(a) Es mejor ponerlo de la siguiente manera:

$$\frac{z^{n+1}}{z-a} = \frac{z^{n+1}-az^n}{z-a} + \frac{az^n}{z-a} = z^n \cdot \cancelto{1}{\frac{z-a}{z-a}} + a \cdot \frac{z^n}{z-a}$$

donde $n \in \mathbb{N}$. Por supuesto, los naturales comienzan en cero.

(b) El caso base $n = 0$ es conocido:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^0}{z-a}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = 1$$

Supongamos que la proposición es cierta para $n \in \mathbb{N}$ fijo. Entonces, para el siguiente,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^{n+1}}{z-a}\,dz = \cancelto{0}{\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma z^n\,dz} + \frac{a}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n}{z-a}\,dz = a \cdot a^n = a^{n+1}$$

La cancelación del primer sumando se debe al teorema de Cauchy-Goursat.

Ejercicio 8. *Sea γ una curva simple y positivamente orientada.*

(a) Pruebe que

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = 2iA$$

donde A es el área de la región limitada por γ.

(b) Utilice el ítem anterior para calcular

$$\int_\gamma \Re(z)\,dz, \qquad \int_\gamma \Im(z)\,dz$$

Solución.

(a) Pongamos $z = x + iy$. En el ejercicio 16 de la semana anterior, probamos que

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = \int_\gamma (x - iy)\,(dx + i\,dy) = \cancelto{0}{\int_\gamma (x\,dx + y\,dy)} + i\int_\gamma (x\,dy - y\,dx)$$

Por el teorema de Green, tenemos

$$\int_\gamma \bar{z}\,dz = i\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) = 2i\iint_D dx\,dy = 2iA(D)$$

donde D es la región encerrada por γ.

(b) La integral de la parte real es

$$\int_\gamma \Re(z)\,dz = \cancelto{0}{\frac{1}{2}\int_\gamma z\,dz} + \frac{1}{2}\int_\gamma \bar{z}\,dz = iA(D)$$

La integral de la parte imaginaria es

$$\int_\gamma \Im(z)\,dz = \cancelto{0}{\frac{1}{2i}\int_\gamma z\,dz} - \frac{1}{2i}\int_\gamma \bar{z}\,dz = -A(D)$$

Ejercicio 9. *Sea $f(z)$ una función analítica en una vecindad abierta de $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq 1\}$. Calcule*

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - 1/a}\,dz$$

para cada punto $a \in D$.

Solución.

- Si $|a| < 1$, entonces el integrando es holomorfo en una vecindad abierta de D, que podemos suponer retraíble a D, por ende simplemente conexa. Entonces la curva ∂D es automáticamente contractible en esta vecindad. Por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - 1/a}\,dz = 0$$

- Si $|a| = 1$, entonces la curva ∂D pasa por el polo en $z = a$. Por ende, la integral

$$\int_{\partial D} \frac{f(z)}{z - 1/a}\,dz$$

no está bien definida.

Ejercicio 10. *Decimos que un conjunto $E \subset \mathbb{C}$ es estrellado si existe un punto $z^\star \in E$ tal que todo $z \in E$ está unido a $z^\star$ por el segmento $[z^\star, z]$ totalmente contenido en E. Demuestre que, si $f(z)$ es una función analítica sobre un abierto estrellado $E \subset \mathbb{C}$, entonces*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Solución. Consideremos

- El retracto de deformación $\varphi_s : E \to E$ definido por $\varphi_s(z) = (1-s)z + sz^\star$.
- Una curva arbitraria $\gamma : [0,1] \to E$.
- El camino constante $\alpha(t) = z_0$ en el extremo inicial $z_0 = \gamma(0)$.
- El camino constante $\beta(t) = z_1$ en el extremo final $z_1 = \gamma(1)$

Entonces,

- Encojamos γ hacia z_0 mediante $\gamma_s = \varphi_s \circ \gamma$.
- Estiremos α hacia z_0 mediante $\alpha_s(t) = \varphi_{ts}(z_0)$.
- Estiremos β hacia z_0 mediante $\beta_s(1-t) = \varphi_{ts}(z_0)$.

Por construcción,

- γ_1 es el camino constante en $z^\star$.
- γ_s empieza donde termina α_s y termina donde empieza β_s.
- $\sigma_s = \alpha_s \star \gamma_s \star \beta_s$ empeza en z_0 y termina en z_1, para todo $s \in [0,1]$.
- $\tau = \alpha_1 \star \beta_1$ sólo depende de los extremos z_0, z_1.

Entonces tenemos las homotopías $\gamma \simeq \sigma_0 \simeq \sigma_1 \simeq \tau$. Puesto que toda curva γ es homotópica a una curva τ de referencia, E es simplemente conexo. Entonces, por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Ejercicio 11. *Pruebe las siguientes afirmaciones:*

(a) *Sea $f(z)$ es una función continua en una región $U \subset \mathbb{C}$ tal que la integral de contorno*

$$\int_{\partial R} f(z)\,dz = 0$$

se anula para todo rectángulo cerrado $R \subset U$. Entonces $f(z)$ es analítica en U.

(b) *Sea $f(z)$ es una función analítica en una región $U \subset \mathbb{C}$. Entonces $f(z)$ tiene derivadas de todos los órdenes y todas ellas son funciones analíticas.*

(c) *Toda función entera y acotada es constante.*

(d) *Todo polinomio no constante tiene por lo menos una raíz.*

Solución.

(a) Puesto que la analiticidad es una propiedad local, supondremos sin pérdida de generalidad que $f(z)$ está definida en una región convexa U.

Para facilitar la discusión, daremos las siguientes definiciones:

- Un tramo es un segmento orientado, que puede ser horizontal o vertical.
- Un zigzag es una curva formada concatenando tramos.
- Una "letra u" es un zigzag de tres tramos $\upsilon = \lambda \star \mu \star \rho$ tal que
  - λ, ρ tienen la misma longitud y direcciones opuestas.
  - λ, ρ son perpendiculares a μ.
  - μ puede ser degenerado, i.e., tener longitud cero.

  Si $\upsilon = \lambda \star \mu \star \rho$ es una "letra u", entonces
  - υ' denotará el tramo paralelo a μ que conecta los extremos de υ.
  - $\upsilon' \star \upsilon^{-1}$ es la frontera de un rectángulo contenido en U, porque U es convexo.
- La complejidad de un zigzag γ es el menor número de tramos $\sigma_1, \dots, \sigma_n$ con los cuales γ puede ser reconstruido como $\gamma = \sigma_1 \star \cdots \star \sigma_n$. Los caminos constantes tienen complejidad cero.

Sea γ un zigzag cerrado. Tenemos dos posibilidades:

- Si $\gamma = \alpha \star \upsilon \star \beta$, donde α, β son subzigzags arbitrarios y υ es una "letra u", entonces

$$\int_\upsilon f(z)\,dz = \int_{\upsilon'} f(z)\,dz$$

  Por construcción, $\gamma' = \alpha \star \upsilon' \star \beta$ menos complejo que γ, pero satisface

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_{\gamma'} f(z)\,dz$$

- Si γ no contiene úes[5], entonces las partes real e imaginaria de γ son funciones monótonas. Esto implica que γ es un camino constante. De otro modo, γ no regresaría al punto de partida.

Por inducción en la complejidad de γ, tenemos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Por ende, las integrales de línea de f sobre zigzags son independientes de la trayectoria.

Tomemos un punto arbitrario $z_0 \in U$. Definamos la función $F : U \to \mathbb{C}$ por

$$F(z_1) = \int_\gamma f(z)\,dz$$

donde $\gamma : [0,1] \to U$ es un zigzag con extremos en $\zeta(k) = z_k$ para $k = 0, 1$. Por construcción,

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -i\frac{\partial F}{\partial y} = f(z)$$

Por ende, f es localmente la derivada de una función analítica. La prueba se completa demostrando que la derivada de una función analítica es también analítica. Esto se hará en el siguiente ítem.

(b) Puesto que la analiticidad es una propiedad local, supondremos sin pérdida de generalidad que $f(z)$ está definida sobre una región simplemente conexa U.

Definamos la n-ésima *derivada formal* de una función analítica $f : U \to \mathbb{C}$ como

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}\,d\zeta$$

donde $\gamma \subset U$ es un lazo antihorario simple alrededor de $z_0 \in U$.

Llamemos U_0 a la región U agujereada en z_0. Haremos algunas verificaciones de rutina:

[5] Marcos Mundstock dixit: "y, o, u, ae-ae".

- El integrando en la definición de $f^{(n)}(z_0)$ es analítico en U_0. Entonces el valor de $f^{(n)}(z_0)$ sólo depende de la clase de homotopía de γ en U_0. Esta clase está determinada por
  - La hipótesis de que U es simplemente conexo.
  - El requerimiento de que γ sea un lazo antihorario simple alrededor de z_0.

  Por ende, $f^{(n)}$ es una función bien definida.
- Una vez fijada la curva γ, el punto z_0 tiene una vecindad $D \subset U$ encerrada por γ. Para $z \to z_0$, podemos asumir que $z \in D$. Además, la convergencia

$$\frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \to \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}$$

  es uniforme en γ. Entonces, por el ejercicio 17 de la semana 6,

$$\lim_{z \to z_0} f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \lim_{z \to z_0} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} \, d\zeta = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} \, d\zeta = f^{(n)}(z_0)$$

  Por ende, $f^{(n)}$ es una función continua.

Dado un número natural $n \in \mathbb{N}$, llamemos $P(n)$ a la siguiente proposición:

> "Toda función analítica f es n veces diferenciable y, para todo $k = 0, 1, 2, \dots, n$, la k-ésima derivada de f es igual a $f^{(k)}$."

Demostraremos $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Empecemos con el caso base $P(0)$. Por construcción,

$$F(z) = \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

es una función analítica en U_0. Entonces la integral de contorno

$$\int_\gamma F(z) \, dz = \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz - f(z_0) \cancelto{2\pi i}{\int_\gamma \frac{dz}{z - z_0}}$$

sólo depende de la clase de homotopía de γ en U_0.

Por otro lado, la posibilidad de extender F de manera continua a z_0, poniendo

$$F(z_0) = \lim_{z \to z_0} F(z) = f'(z_0)$$

implica que F es acotada cerca de z_0. La cota local en módulo

$$\left| \int_\gamma F(z) \, dz \right| \leq V(\gamma) \cdot \|F\|_\infty$$

implica que la integral puede hacerse arbitrariamente pequeña encogiendo γ. Por ende,

$$\int_\gamma F(z) \, dz = 0 \implies f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0} \, dz$$

Pasemos al caso inductivo. Calculando mecánicamente, se verifica la identidad

$$\frac{1}{(\zeta - z)^{n+1}} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{(\zeta - z)^n (\zeta - z_0)} - \frac{1}{(\zeta - z_0)^{n+1}} + \frac{z - z_0}{(\zeta - z)^{n+1} (\zeta - z_0)}$$

Pongamos $g(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z_0)$. Entonces, para todo $z \in U_0$ encerrado por γ, tenemos

$$f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0) = n g^{(n-1)}(z) - n g^{(n-1)}(z_0) + g^{(n)}(z) \cdot (z - z_0)$$

Dividiendo entre $z - z_0$ y tomando el límite cuando $z \to z_0$, tenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \to z_0} \frac{ng^{(n-1)}(z) - ng^{(n-1)}(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \to z_0} g^{(n)}(z)$$

Asumiendo inductivamente $P(n)$, tenemos

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f^{(n)}(z) - f^{(n)}(z_0)}{z - z_0} = (n+1)g^{(n)}(z_0) = f^{(n+1)}(z_0)$$

Esto es, $P(n+1)$. Por ende, $P(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Obviamente esto implica que las derivadas $f^{(n)}$ (ya no necesitamos el adjetivo "formales") son todas analíticas.

(c) Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica definida en una región simplemente conexa $U \subset \mathbb{C}$ y sea $\gamma \subset U$ un círculo alrededor de un punto distinguido $z \in U$. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$|f^{(n)}(z)| \le \frac{n!}{2\pi} \int_\gamma |g_n(\zeta)|\,|d\zeta| \le \frac{n!}{2\pi} \cdot V(\gamma) \cdot \|g_n \circ \gamma\|_\infty = rn! \cdot \|g_n \circ \gamma\|_\infty$$

donde $g_n(\zeta) = f(\zeta)/(\zeta - z)^{n+1}$. En particular,

- Si f es entera, entonces $z \in \mathbb{C}$, $r > 0$ pueden ser arbitrarios.
- Si f está acotada por $C > 0$, entonces $\|g_1 \circ \gamma\|_\infty < Cr^{-2}$.

Si f es entera y acotada, entonces $|f'(z)| < Cn!r^{-1}$ con $r > 0$ arbitrario. Esto implica que $f'(z) = 0$. Puesto que $z \in \mathbb{C}$ también es arbitrario, tenemos $f' = 0$, lo cual implica que f es constante.

(d) Sea $P(z)$ un polinomio no constante y sin raíces. Entonces,

- Puesto que $P(z)$ es no constante $|P(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$.
- Puesto que $P(z)$ no tiene raíces, la recíproca $1/P(z)$ es una función entera.
- Puesto que $|P(z)| \to \infty$ cuando $|z| \to \infty$, la recíproca $1/P(z)$ es una función acotada.

Entonces $1/P(z)$ es constante. Por ende, $P(z)$ era constante después de todo.

Ejercicio 12. *Sea $f(z)$ una función entera y sea $n \in \mathbb{N}$ tal que $|f(z)| < |z|^n$ en la región $|z| > \rho$. Pruebe que $f(z)$ es una función polinomial.*

Solución. Tomemos un círculo $\gamma \subset \mathbb{C}$ centrado en el origen de radio $r > \rho$. Repitiendo el argumento dado en la solución del ejercicio 11.(c), para todo $|z| < r$, tenemos la cota

$$|f^{(n+k)}(z)| \le rn! \cdot \|g_k \circ \gamma\|_\infty < n!r^{-k}$$

donde $g_k(\zeta) = f(\zeta)/\zeta^{n+k+1}$. Puesto que r es arbitrario, tenemos $f^{(n+k)} = 0$ para todo $k \ge 1$. Esto implica que $f(z)$ está definida por un polinomio de grado a lo más n.

Semana 8

Ejercicio 1. *Considere las siguientes funciones:*

(a) $f(z) = \dfrac{\sin z}{z}$

(b) $f(z) = \dfrac{\cos z}{z}$

(c) $f(z) = \dfrac{\cos z - 1}{z}$

(d) $f(z) = \exp \dfrac{1}{z}$

(e) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z(z-1)}$

(f) $f(z) = \dfrac{1}{1 - e^z}$

Cada una de estas funciones tiene una singularidad en $z = 0$.

- *Si la singularidad es removible, encuentre la extensión analítica de $f(z)$ en $z = 0$.*
- *Si la singularidad es un polo, halle la parte singular de $f(z)$ en $z = 0$.*
- *Si la singularidad es esencial, describa el conjunto $f(D)$, donde $D \subset \mathbb{C}$ es un disco agujereado en el origen de radio arbitrariamente pequeño.*

Solución.

(a) La primera función tiene una singularidad removible en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1$$

La extensión de $f(z)$ que es analítica en $z = 0$ es

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 1 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Esto se verifica con la serie de potencias

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \dots$$

(b) La segunda función tiene un polo de orden 1 en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \to 0} z\, f(z) = \lim_{z \to 0} \cos z = 1$$

La parte singular de $f(z)$ en $z = 0$ es $1/z$. Esto se verifica con la serie de potencias

$$\frac{\cos z}{z} = \frac{1}{z} - \frac{z}{2!} + \frac{z^3}{4!} - \frac{z^5}{6!} + \dots$$

(c) La tercera función tiene una singularidad removible en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\cos z - 1}{z} = \lim_{z \to 0} \frac{-\sin z}{1} = 0$$

La extensión de $f(z)$ que es analítica en $z = 0$ es

$$g(z) = \begin{cases} f(z) & \text{si } z \neq 0 \\ 0 & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

Esto se verifica removiendo la parte singular $1/z$ en la serie de potencias del ítem anterior.

(d) La cuarta función tiene una singularidad esencial en $z = 0$, porque la serie de potencias

$$f(z) = \exp \frac{1}{z} = \cdots + \frac{z^{-3}}{3!} + \frac{z^{-2}}{2!} + z^{-1} + 1$$

tiene infinitos términos no nulos de orden negativo.

Llamemos D al disco agujereado $0 < |z| < \varepsilon$. Aplicando la inversión $w = 1/z$, tenemos una vecindad inmensa $1/\varepsilon < |w| < \infty$ que contiene infinitas franjas $a < \Im(w) < b$, con $b - a > 2\pi$. Cualquiera de estas franjas es enviada por la función exponencial al plano agujereado $f(D) = \mathbb{C}^\star$.

(e) La quinta función se puede reexpresar de manera más conveniente (para nuestros fines) como

$$f(z) = \frac{z^2 + 1}{z(z-1)} = \frac{z+1}{z-1} - \frac{1}{z}$$

El primer término es analítico en $z = 0$. Por ende, la parte singular de $f(z)$ en $z = 0$ es solamente el segundo término $-1/z$.

(f) La sexta función tiene un polo de orden 1 en $z = 0$, porque

$$\lim_{z \to 0} z\, f(z) = \lim_{z \to 0} \frac{z}{1 - e^z} = \exp'(0)^{-1} = 1$$

La parte singular de $f(z)$ en $z = 0$ es $1/z$.

Ejercicio 2. *Sea $f(z)$ una función analítica en una región $U \subset \mathbb{C}$ y sea $a \in U$ tal que $f'(a) \neq 0$.*

Solución. Sea U_0 la región U agujereada en a y sea $g : U_0 \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$g(z) = \frac{z - a}{f(z) - f(a)}$$

Esta función tiene una singularidad removible en a, porque

$$\lim_{z \to a} g(z) = \frac{1}{f'(a)}$$

Extendamos g analíticamente con $g(a) = 1/f'(a)$. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy,

$$\int_C \frac{dz}{f(z) - f(a)} = \int_C \frac{g(z)}{z - a}\, dz = 2\pi i \cdot g(a) = \frac{2\pi i}{f'(a)}$$

Ejercicio 3. *Sea $f(z)$ una función analítica con una singularidad aislada en el punto $z = a$. Determine si las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) f tiene una singularidad removible en $z = a$.

(b) f es acotada en una vecindad agujereada de $z = a$.

Solución. Si la singularidad es removible, entonces f admite una extensión que es analítica en $z = a$. Ante todo, dicha extensión debe ser continua, por ende acotada en una vecindad de $z = a$. Entonces f también es acotada en una vecindad agujereada de $z = a$.

Recíprocamente, si f está acotada en módulo en una vecindad de $z = a$, entonces la cota

$$\lim_{z \to a} |f(z) \cdot (z - a)| \leq \|f\|_\infty \cdot \lim_{z \to a} |z - a| = 0$$

implica que la singularidad de f en $z = a$ es removible. Por ende, las afirmaciones son equivalentes.

Ejercicio 4. *Sea $f(z)$ una función analítica definida en la región $|z| > R$. Observe que esta región es una vecindad agujereada de $z = \infty$ en la esfera de Riemann. Entonces es geométricamente razonable decir que $f(z)$ tiene una singularidad aislada en $z = \infty$.*

Para estudiar esta singularidad, usamos el cambio de carta $w = 1/z$ a fin de traer el punto $z = \infty$ a la parte finita de la esfera. En esta nueva carta, f se representa como $g(w) = f(1/z)$. Entonces decimos que f tiene una singularidad removible, un polo de orden m, o una singularidad esencial en $z = \infty$, si g tiene una singularidad del tipo correspondiente en $w = 0$.

(a) Pruebe que toda función entera con una singularidad removible en ∞ es constante.

(b) Pruebe que toda función entera con un polo de orden m en ∞ es un polinomio de grado m.

(c) Caracterice las funciones racionales con una singularidad removible en el infinito.

(d) Caracterice las funciones racionales con un polo de orden m en el infinito.

Solución. Trataremos a las singularidades removibles como polos de orden cero.

(a) Sea $f(z)$ un función entera. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f(z)$ tiene una singularidad removible en el infinito.
- $f(z)$ es acotada en una vecindad agujereada del infinito.
- $f(z)$ es acotada globalmente, porque la esfera de Riemann es compacta.
- $f(z)$ es constante, porque es entera y acotada.

(b) Sea $f(z)$ un función entera. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f(z)$ tiene un polo de orden $m \in \mathbb{Z}^+$ en el infinito.
- $f(z)/z^m$ converge a algún $b \in \mathbb{C}^\star$ cuando $z \to \infty$.
- $f(z)/z^m - b$ converge a cero cuando $z \to \infty$.
- $f(z) - bz^m$ tiene un polo de orden menor que m en el infinito.
- $f(z) - bz^m$ es un polinomio de grado menor que m, inductivamente.
- $f(z)$ es un polinomio de grado m.

El caso base para la inducción es el ítem a).

(c) Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una función racional. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f(z)$ tiene una singularidad removible en el infinito.
- $f(z)$ es acotada en una vecindad agujereada del infinito.
- $p(z)$ no excede en grado a $q(z)$.

(d) Sea $f(z) = p(z)/q(z)$ una función racional. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f(z)$ tiene un polo de orden $m \in \mathbb{Z}^+$ en el infinito.
- $f(z)/z^m$ converge a algún $b \in \mathbb{C}^\star$ cuando $z \to \infty$.
- $f(z)/z^m - b$ converge a cero cuando $z \to \infty$.
- $f(z) - bz^m$ tiene un polo de orden menor que m en el infinito.
- $p(z) - bz^m$ excede en grado a $q(z)$ por una cantidad menor que m, inductivamente.
- $p(z)$ excede en grado a $q(z)$ por m.

El caso base para la inducción es el ítem c).

El procedimiento para estudiar la singularidad de una función racional en el infinito es

- Utilizar la división de polinomios para expresar la función racional como

$$f(z) = p(z) + \frac{r(z)}{q(z)}$$

donde $r(z)$ tiene grado menor que $q(z)$.

- Por construcción, el segundo término tiene una singularidad removible en el infinito, porque

$$\lim_{z \to \infty} \frac{r(z)}{q(z)}$$

tiene un valor finito.

- Por construcción, $f(z)$ y $p(z)$ tienen el mismo tipo de singularidad en el infinito:
  - La singularidad es removible si $p(z)$ es constante.
  - La singularidad es un polo de orden m si $p(z)$ tiene grado $m \in \mathbb{Z}^+$.
- La singularidad nunca es esencial.

Las funciones racionales son precisamente los endomorfismos analíticos de la esfera de Riemann.

Ejercicio 5. *Describa los ceros de la función* $f(z) = \sin \dfrac{1+z}{1-z}$.

Solución. Consideremos la variable auxiliar

$$w = x + iy = \frac{1+z}{1-z}$$

Usando una conocida identidad trigonométrica, tenemos

$$\sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\cosh(y) + i\cos(x)\sinh(y)$$

Entonces $\sin(w) = 0$ si y sólo si las siguientes condiciones se cumplen:

- $\sin(x)\cosh(y) = 0$ implica $\sin(x) = 0$, porque $\cosh(y)$ no se anula para ningún $y \in \mathbb{R}$.
- $\cos(x)\sinh(y) = 0$ implica $\sinh(y) = 0$, porque $\sin(x) = 0$ implica $\cos(y) = \pm 1 \neq 0$.
- $\sin(x) = \sinh(y) = 0$ implica $w = n\pi$ para algún $n \in \mathbb{Z}$.

Invirtiendo la transformación de Möbius que pone a w como función de z, tenemos

$$z = \frac{w-1}{w+1}$$

Los ceros de $f(z)$ se obtienen sustituyendo $w = n\pi$ en esta expresión. Para valores muy grandes de $n \in \mathbb{Z}$, sean positivos o negativos, obtenemos ceros de $f(z)$ cada vez más cercanos a 1.

Ejercicio 6. *Pruebe que las funciones* exp, sin, cos *tienen singularidades esenciales en el infinito.*

Solución. Sea $U \subset \mathbb{C}$ una vecindad agujereada de $z = \infty$ en la esfera de Riemann.

(a) La prueba para exp ya fue dada en la parte (d) de la pregunta 1.

(b) Escribamos $\sin = f \circ \exp$, donde $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ está definida por

$$f(z) = \frac{z - z^{-1}}{2i}$$

Tenemos $\sin(U) = f \circ \exp(U) = f(\mathbb{C}^\star)$. Para todo $a \in \mathbb{C}$, la ecuación cuadrática

$$f(z) = a \implies z^2 - 2iaz - 1 = 0$$

tiene por lo menos una solución distinta de cero. Entonces, $\sin(U) = f(\mathbb{C}^\star) = \mathbb{C}$.

(c) Escribamos $\cos = f \circ \exp$, donde $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ está definida por

$$f(z) = \frac{z + z^{-1}}{2}$$

Tenemos $\cos(U) = f \circ \exp(U) = f(\mathbb{C}^\star)$. Para todo $a \in \mathbb{C}$, la ecuación cuadrática

$$f(z) = a \implies z^2 - 2az + 1 = 0$$

tiene por lo menos una solución distinta de cero. Entonces, $\cos(U) = f(\mathbb{C}^\star) = \mathbb{C}$.

Ejercicio 10. *Pruebe el teorema de Casorati-Weierstrass: Si $f : U \to \mathbb{C}$ es una función analítica con una singularidad esencial en $z = a$, entonces su imagen $f(U)$ es densa en el plano complejo.*

Nota. Si $U' \subset U$ es una subvecindad agujereada de la singularidad esencial, entonces la restricción $f \mid U'$ sigue teniendo la misma singularidad esencial, por ende $f(U')$ es densa en el plano complejo.

Solución. Supongamos por contradicción que la imagen $f(U)$ no es densa en $\mathbb{C}$. Existe algún punto $b \in \mathbb{C}$ separado de $f(U)$ por una distancia positiva. Por construcción, la función $g : U \to \mathbb{C}$ definida por

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - b}$$

tiene una singularidad aislada en $z = a$ al igual que $f(z)$. Sin embargo, esta singularidad es removible, ya que $g(z)$ es acotada por construcción. Entonces,

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} + b$$

tiene un límite bien definido en la esfera de Riemann cuando $z \to a$. Tenemos dos posibles casos:

- Si el límite es finito, entonces $f(z)$ tiene una singularidad removible en $z = a$.
- Si el límite es infinito, entonces $f(z)$ tiene un polo en $z = a$.

Ninguno de estos casos es compatible con que $f(z)$ tenga una singularidad esencial en $z = a$.

Ejercicio 11. *Pruebe que una singularidad aislada de $f(z)$ no puede ser un polo de $g(z) = \exp \circ f(z)$.*

Solución. Sea $D \subset \mathbb{C}$ un disco pequeño agujereado en $z = a$, una singularidad aislada de $f(z)$.

(a) Si la singularidad de f en $z = a$ es removible, digamos, definiendo $f(a) = b$, entonces la singularidad de g en $z = a$ también es removible definiendo $g(a) = e^b$.

(b) Si la singularidad de f en $z = a$ es un polo, entonces $f(D)$ es una vecindad agujereada del infinito y, por ende, $g(D) = \mathbb{C}^\star$. Esto es incompatible con que g tenga un polo en $z = a$.

(c) Si la singularidad de f en $z = a$ es esencial, entonces $f(D)$ es denso en $\mathbb{C}$ y, por ende, $g(D)$ es denso en $\exp(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\star$. Esto también es incompatible con que g tenga un polo en $z = a$.

Ejercicio 12. *Determine las regiones donde* $f(z) = \csc(1/z)$ *es analítica.*

Solución. La función cosecante es la inversa multiplicativa de la función seno, así que será útil reutilizar el análisis de la función seno realizado en los ejercicios 5 y 6. Puesto que $\sin(z)$ es una función entera, $\csc(z)$ es meromorfa en el plano con polos en $z = n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$, precisamente donde están los ceros de $\sin(z)$.

Observemos que $\csc(z)$ tiene una singularidad en el infinito, pero *ésta no es aislada*, pues los polos se acumulan en ella. Esto se aprecia mejor en $f(z)$, cuyos polos están en los puntos $z = 1/n\pi$ (incluyendo el caso especial $z = \infty$ para $n = 0$) y se acumulan en $z = 0$. Reuniendo los polos y su punto de acumulación, obtenemos el compacto $K = \{0\} \cup \{n\pi : n \in \mathbb{Z}\}$, cuyo complemento $U = \mathbb{C} - K$ es la región más grande donde $f(z)$ es analítica.

Semana 9

Ejercicio 1. *Determine el mayor disco abierto centrado en el origen donde $f(z) = z^2 + z$ es inyectiva.*

Solución. Observemos que, si z_0, z_1 son las raíces del polinomio $f(z) + c$, para cualquier $c \in \mathbb{C}$ arbitrario, entonces $z_0 + z_1 = -1$. En particular, $\Re(z_0) > -1/2$ si y sólo si $\Re(z_1) < -1/2$, así que $f(z)$ es inyectiva en el semiplano $\Re(z) > -1/2$ y, por ende, $f(z)$ es inyectiva en el disco $|z| < 1/2$.

Por otro lado, todo disco de la forma $|z| < 1/2 + \varepsilon$, donde $\varepsilon > 0$, contiene algún segmento vertical (i.e., paralelo al eje imaginario) que pasa por el punto crítico $z = -1/2$. En este segmento, podemos tomar dos puntos $z_0 = -1/2 + i\delta$, $z_1 = -1/2 - i\delta$, para algún $\delta > 0$. Entonces $f(z_0) = f(z_1)$. Por ende, $f(z)$ no es inyectiva en ningún disco de la forma $|z| < 1/2 + \varepsilon$.

Ejercicio 3. *Pruebe que el conjunto de ceros de la función*

$$f(z) = \sin \frac{1+z}{1-z}$$

admite un punto de acumulación en $\mathbb{C}$.

Solución. La sucesión $w_n = n\pi$, donde $n \in \mathbb{N}$, está conformada por ceros de $\sin(z)$ en el plano $\mathbb{C}$. Puesto que w_n no tiene puntos de acumulación en $\mathbb{C}$, deducimos que w_n se acumula en el infinito en la esfera de Riemann. Ahora consideremos la transformación de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

Observemos que $\varphi(\infty) = -1$ no es un punto de la sucesión w_n. Entonces $z_n = \varphi^{-1}(\pi n)$ es una sucesión de ceros de $f(z) = \sin \circ \varphi(z)$ en el plano que se acumula en $\varphi^{-1}(\infty) = 1$.

Ejercicio 4. *Pruebe que la función $f(z) = e^z - z$ tiene un cero simple en cada franja abierta*

$$\Re(z) > 0, \qquad n < \frac{\Im(z)}{2\pi} < n+1$$

y no tiene otros ceros.

Solución. Descartemos que $f(z)$ tenga ceros de las siguientes formas:

- Si $z = iy$ fuese un cero de $f(z)$, entonces $|e^z| = 1$, por ende $z = e^z = \pm i$. Pero, en este caso, y no es múltiplo de $\pi/2$, así que e^z no es imaginario puro. Contradicción.
- Si $z = x + 2\pi ni$, para cualquier $x \in \mathbb{R}$, entonces $e^z \in \mathbb{R}$, por ende $z = x$. Pero la ecuación $e^x = x$ no tiene solución en los números reales.

Entonces $f(z)$ no tiene ceros ni en la recta $\Re(z) = 0$ ni en las rectas $\Im(z) = 2\pi n$. Cortando al plano a lo largo de estas rectas, tenemos las franjas de parte real positiva definidas por

$$\Re(z) > 0, \qquad n < \frac{\Im(z)}{2\pi} < n+1$$

y las franjas de parte real negativa definidas por

$$\Re(z) < 0, \qquad n < \frac{\Im(z)}{2\pi} < n+1$$

Ahora consideremos los siguientes objetos:

- Un número real $x \in \mathbb{R}$ de valor absoluto muy grande, sea positivo o negativo.
- Los puntos $A_n = 2\pi ni$, $B_n = x + 2\pi ni$.
- El rectángulo ρ con vértices en los puntos $A_n, B_n, B_{n+1}, A_{n+1}$. Observemos que ρ es un camino en sentido antihorario si $x > 0$, pero en sentido horario si $x < 0$.

En el límite, cuando $|x| \to \infty$, la región encerrada por ρ es una de las franjas antes definidas. Puesto que $f(z)$ es una función entera, el número de ceros en esta franja se obtiene evaluando la integral

$$\int_\rho \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{f\circ\rho} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot n(f\circ\rho, 0)$$

y tomando el límite del resultado cuando $x \to \pm\infty$. (Para ser precisos, en las franjas negativas, obtenemos el negativo del número de ceros de $f(z)$.) Entonces tenemos que construir la curva $f\circ\rho$. Tres tramos son relativamente sencillos:

- Los tramos $f(A_n) \to f(B_n)$, $f(B_{n+1}) \to f(A_{n+1})$ son segmentos horizontales.
- El tramo $f(A_{n+1}) \to f(A_n)$ es un semicírculo totalmente contenido en el semiplano derecho, excepto por un punto de tangencia en el eje imaginario, que no es el origen.

Ninguno de estos tres tramos contiene lazos alrededor del origen. Por ende, la concatenación de estos tres tramos es homóloga al camino en línea recta $\sigma : f(B_{n+1}) \to f(B_n)$. El último tramo $\gamma : f(B_n) \to f(B_{n+1})$ no admite una descripción analítica sencilla, así que, para evaluar la integral

$$\int_{f\circ\rho} \frac{dz}{z} = \int_{\gamma\star\sigma} \frac{dz}{z}$$

apelaremos a las siguientes estimaciones:

- Para $x \gg 0$, tenemos $f(z) \approx e^z$, así que γ es aproximadamente el círculo $\kappa : |z| = e^x$. En particular, $\gamma\star\sigma$ es homóloga a κ en $\mathbb{C}^\star$, porque σ no contiene lazos alrededor del origen. Entonces,

  $$\int_{\gamma\star\sigma} \frac{dz}{z} = \int_\kappa \frac{dz}{z} = 2\pi i$$

  Por ende, $f(z)$ tiene un único cero en cada franja de parte real positiva.

- Para $x \ll 0$, tenemos $f(z) \approx -z$, así que γ es aproximadamente el reverso de σ. En particular, $\gamma\star\sigma$ es homóloga a cero en $\mathbb{C}^\star$, porque es contractible en dicha región. Entonces,

  $$\int_{\gamma\star\sigma} \frac{dz}{z} = \int_0 \frac{dz}{z} = 0$$

  Por ende, $f(z)$ no tiene ceros de parte real negativa.

Esto demuestra que $f(z)$ tiene los ceros indicados y ningún otro más.

Ejercicio 5. *Sea $f(z)$ una función analítica en una vecindad del origen. Suponga además que $f'(0) \neq 0$. Pruebe que existe una función analítica $g(z)$ tal que $f(z^n) = f(0) + g(z)^n$ en una vecindad del origen.*

Solución. Por construcción, la función $f(z^n) - f(0)$ tiene un cero de orden n en el origen. Entonces existe una función holomorfa $h(z)$ que no se anula en el origen tal que $f(z^n) - f(0) = z^n\,h(z)$. Tomemos alguna rama de la raíz n-ésima definida en $h(0)$. Entonces,

$$g(z) = z\,\sqrt[n]{h(z)}$$

está definida y es analítica en una vecindad del origen. Por ende,

$$f(z^n) = f(0) + z^n\,h(z) = f(0) + \left[z\,\sqrt[n]{h(z)}\right]^n = f(0) + g(z)^n$$

Ejercicio 11. *Sea $f(z)$ una función entera. Suponga que existen dos constantes positivas $M, r > 0$ y un entero positivo $n \in \mathbb{Z}^+$ tales que $|f(z)| \leq M|z|^n$ para todo $|z| > r$. Demuestre que $f(z)$ es un polinomio de grado no mayor que n.*

Solución. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ el círculo $|z| = R$, donde $R > r$. Definamos $g_k : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \frac{f(z)}{z^{n+k+1}}$$

Entonces, por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$f^{(n+k)}(z) = \frac{1}{2\pi n!} \int_\gamma g_k(z)\, dz$$

La longitud finita de γ nos otorga la cota en módulo

$$|f^{(n+k)}(z)| \leq \frac{1}{2\pi n!} \int_\gamma |g_k(z)|\, |dz| = MRn! \cdot \|g_k \circ \gamma\|_\infty < Mn!R^{-k}$$

Para $k > 0$, esta cota se puede hacer arbitrariamente pequeña tomando R arbitrariamente grande. Por lo tanto, $f^{(n+k)} = 0$ para todo $k > 0$. Por ende, $f(z)$ es un polinomio de grado a lo más n.

Ejercicio 13. *Sea $f(z)$ una función analítica en una región $U \subset \mathbb{C}$. Pruebe que, si $|f(z)|$ alcanza un valor máximo en U, entonces, $f(z)$ es constante.*

Solución. Tomemos un punto arbitrario $z_0 \in U$ y un círculo $\gamma \subset U$ centrado en z_0, contractible en U. Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta})\, d\theta$$

donde $r > 0$ es el radio de γ. Por la desigualdad triangular para la integral, tenemos la cota

$$|f(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(z_0 + re^{i\theta})|\, d\theta$$

Si el integrando fuese menor que $|f(z_0)|$ en algún punto $\theta \in [0, 2\pi]$, entonces, por continuidad, sería menor que $|f(z_0)|$ en un tramo de $[0, 2\pi]$ de longitud positiva. Para que la cota anterior se respete, $|f(z)|$ deberá ser mayor que $|f(z_0)|$ en algún otro tramo de $[0, 2\pi]$. Entonces $|f(z)|$ no puede alcanzar un valor máximo estricto en U. Por ende, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $|f(z)|$ alcanza un valor máximo en $z = z_0$.
- $|f(z)|$ es constante en la componente conexa de $z = z_0$, que es todo U.
- $f(z)$ es constante, por el ejercicio 5 de la semana 2.

Ejercicio 15. *Sea $\gamma \subset D$ una curva cerrada contenida en un disco $D \subset U$, este último a su vez contenido en un abierto $U \subset \mathbb{C}$ que es el dominio de una función analítica $f(z)$.*

(a) Asumiendo que $d(z_0, \partial U) < \frac{1}{2} d(\gamma, \partial U)$, pruebe que $n(\gamma, z_0) = 0$.

(b) Para cada $w \in \mathbb{C}$, analice el número de elementos del conjunto

$$S(w) = \{z \in D : f(z) = w, \, n(\gamma, z) \neq 0\}$$

Solución.

(a) Si $z_0 \notin D$, entonces no hay nada que probar: $n(\gamma, z_0) = 0$, porque D es simplemente conexo.

Si $z_0 \in D$, entonces tomemos algún punto frontera $z_1 \in \partial U$ que minimice la distancia $|z_0 - z_1|$. Para hallar z_1, tomemos una sucesión $b_n \in \partial U$ tal que $|z_0 - b_n|$ converge a $R = d(z_0, \partial U)$. Puesto que b_n está confinada al disco compacto $|z - z_0| \leq R + 1$, podemos extraer una subsucesión convergente a algún punto $z_1 \in \mathbb{C}$. Finalmente, $z_1 \in \partial U$, porque ∂U es cerrado en $\mathbb{C}$.

Sea σ el segmento de recta entre z_0, z_1. Todos los puntos interiores de σ están contenidos en U, pues de otro modo habría puntos de ∂U aún más cercanos a z_0, lo cual es contradictorio. Además, γ está impedida de siquiera acercarse a σ, porque todos los puntos de σ son demasiado cercanos a ∂U. Por ende, γ da el mismo número de vueltas alrededor de todos los puntos de σ. Finalmente, $z_1 \notin U$, así que $z_1 \notin D$, así que $n(\gamma, z_0) = n(\gamma, z_1) = 0$, porque D es simplemente conexo.

(b) No veo ningún resultado general que se pueda probar. Por ejemplo, nada impide que $f(z)$ tenga una singularidad esencial (o más) en ∂D. Para simplificar la situación, sin trivializarla totalmente, haré algunos supuestos adicionales:

- $f(z)$ es no constante.
- $\partial D \subset U$, así que $f(z)$ es analítica en todo $z \in \partial D$.

El último supuesto garantiza que

- Para todo $w_0 \in \mathbb{C}$, la ecuación $f(z) = w_0$ tiene un número finito de soluciones en D.
- $f(z)$ tiene una cantidad finita de puntos críticos en D.

Entonces sólo hay dos razones por la cuales $S(w)$ puede ser discontinua en $w = w_0$:

- Existe $z_0 \in D \setminus \gamma$ tal que $f(z_0) = w_0$, $f'(z_0) = 0$, $n(\gamma, z_0) \neq 0$.
- Existe $z_0 \in \gamma$ tal que $f(z_0) = w_0$. Además, γ divide al disco pequeño $|z - z_0| < \varepsilon$ en dos partes tales que, en una, $n(\gamma, z) = 0$, pero en la otra, $n(\gamma, z) \neq 0$.

Ejercicio 17. *Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(a) Toda función analítica es abierta.

(b) Toda función analítica es cerrada.

(c) La parte real de una función analítica es una función abierta y cerrada.

Solución. Sea $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto con infinitas componentes conexas, que pueden ser enumeradas de alguna manera, porque $\mathbb{C}$ es un espacio de Lindelöf. Definamos $f : \Omega \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1/n$ para cada z en la n-ésima componente. Por construcción,

(a) $f(z)$ no es abierta, porque $f(\Omega)$ es un conjunto discreto de puntos, que no es abierto en $\mathbb{C}$.

(b) $f(z)$ no es cerrada, porque $f(\Omega)$ se acumula en $0 \notin f(\Omega)$.

(c) Lo mismo se cumple para $\Re \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$.

Entonces las tres afirmaciones dadas son falsas.

Ejercicio 18. *Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas:*

(a) Toda biyección analítica es abierta.

(b) Toda biyección analítica es cerrada.

(c) La parte real de una biyección analítica es una función abierta y cerrada.

Solución. Si $w_0 \in \mathbb{C}$ es un valor crítico de $f(z)$, entonces en una región $0 < |w - w_0| < \varepsilon$, todo valor tiene por lo menos dos preimágenes. Entonces, ninguna biyección analítica tiene puntos críticos. Por ende, toda biyección analítica tiene inversa analítica y, en particular, es un homeomorfismo.

(a) *Verdadero.* Toda biyección analítica es un homeomorfismo.

(b) *Verdadero.* Toda biyección analítica es un homeomorfismo.

(c) *Falso.* Pensemos en $\Re : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ como la parte real de la función identidad $\mathrm{id} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Ejercicio 19. *Sea $f(z) = (z - z_0)^m\, g(z)$, donde $g(z)$ es una función analítica que no se anula en $U \subset \mathbb{C}$. Sea γ un ciclo homólogo a cero en U que no pasa por $z_0 \in U$. Pruebe que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = m \cdot n(\gamma, z_0)$$

Solución. Expandiendo la derivada logarítmica, tenemos

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{m}{z - z_0} + \frac{g'(z)}{g(z)}$$

Por hipótesis, γ es homóloga a cero en $U = \mathrm{dom}(g'/g)$. Esto implica que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = 0$$

Por ende, la integral buscada se reduce a

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{m}{z - z_0}\, dz = m \cdot n(\gamma, z_0)$$

Ejercicio 20. *Sea $U \subset \mathbb{C}$ un abierto simplemente conexo y sea $U^\star \subset \mathbb{C}$ este mismo abierto, pero con una cantidad finita de agujeros en $a_1, \dots, a_n \in U$. Considere una función $f(z)$ analítica en $U^\star$ y defina*

$$b_k = \int_{\gamma_k} f(z)\, dz$$

donde $\gamma_k \subset U$ es un círculo pequeño centrado en a_k. Construya una función analítica $h(z)$ en U tal que

$$h'(z) = f(z) - \sum_k \frac{b_k}{z - a_k}$$

Solución. Tomemos un ciclio arbitrario $\gamma \subset U^\star$ y pongamos $c_k = n(\gamma, a_k)$. Por hipótesis, $a_1, \dots, a_k$ son los únicos agujeros en $U^\star$, así que γ es homólogo a $c_1\gamma_1 + \cdots + c_n\gamma_k$ en $U^\star$. Entonces,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \sum_k c_k \int_{\gamma_k} f(z)\, dz = \sum_k b_k c_k = \sum_k \int_\gamma \frac{b_k}{z - a_k}\, dz$$

Por ende, las integrales de línea de la función

$$g(z) = f(z) - \sum_k \frac{b_k}{z - a_k}$$

son independientes de la trayectoria. Tomemos un punto $z_0 \in U^\star$ y definamos

$$h(z) = \int_\sigma g(z)\, dz$$

donde $\sigma \subset U^\star$ es un camino arbitrario desde z_0 hasta z. En particular, tomando algún σ cuyo tramo final sea un segmento horizontal o vertical, tenemos

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -i \frac{\partial h}{\partial y} = g(z)$$

donde $z = x + iy$. Por ende, $h(z)$ es analítica en U y su derivada es $h'(z) = g(z)$.

Semana 10

Ejercicio 1. *Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ un ciclo que acota una región $\Omega \subset \mathbb{C}$ y sea $f(z)$ una función analítica definida en una región más grande $\Omega' \subset \mathbb{C}$ que contiene tanto a γ como a Ω. Pruebe que*

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0, \qquad\qquad f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

para todo punto $z_0 \in \Omega$.

Solución. Tomemos un punto $z \notin \Omega'$. En particular, (a) γ no pasa por z, así que $n(\gamma, z)$ es un entero bien definido, (b) $z \notin \Omega$, así que $n(\gamma, z) = 0$. Entonces γ es homóloga a cero en Ω. Por ende,

$$\int_\gamma f(z)\,dz = 0$$

Además, para todo $z_0 \in \Omega$, la curva γ es homóloga en $\Omega' - \{z_0\}$ a un pequeño círculo alrededor de z_0, que podemos asumir contractible en Ω'. Entonces, por la fórmula integral de Cauchy,

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz$$

Ejercicio 2. *Sean $\gamma, \Omega, \Omega' \subset \mathbb{C}$ como en el problema anterior y sea $f(z)$ una función analítica en Ω', con excepción de un número finito de singularidades en $a_1, \dots, a_n \in \Omega$. Pruebe que*

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k)$$

Solución. Tomemos pequeños círculos $\gamma_k \subset \Omega$ alrededor de cada a_k, contractibles en Ω. Por hipótesis, γ es homóloga a $\gamma_1 + \dots + \gamma_n$ en $\Omega - \{a_1, \dots, a_n\}$. Entonces,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res}(f, a_k)$$

Ejercicio 3. *Sea $f(z)$ una función analítica definida sobre un abierto $U \subset \mathbb{C}$ tal que, para todo $z \in U$, la imagen $w = f(z)$ está en el disco $|w - 1| < 1$. Pruebe que*

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 0$$

para toda curva cerrada $\gamma \subset U$.

Solución. Por hipótesis, $f \circ \gamma$ es una curva en el disco $|w - 1| < 1$, así que

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \int_{f\circ\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i \cdot n(f \circ \gamma, 0) = 0$$

Ejercicio 4. *Pruebe que las raíces de $p(z) = z^4 - z^3 - z + 5$ están en la región $1 < |z| < 2$ y cada una de ellas está en un cuadrante distinto.*

Solución. Las raíces de $p(z)$ están en la región $1 < |z| < 2$, porque

- Si $|z| \leq 1$, entonces $p(z) \approx 5$, por ende $p(z) \neq 0$.
- Si $|z| \geq 2$, entonces $p(z) \approx z^4$, por ende $p(z) \neq 0$.

Las raíces de $p(z)$ no son ni reales ni imaginarios puros, porque

- Si $\Im(z) = 0$, entonces $p(z) = (z-1)^2(z^2+z+1) + 4 > 0$.
- Si $\Re(z) = 0$, entonces $\Re \circ p(z) = z^4 + 5 > 0$, por ende $p(z) \neq 0$.

Consideremos la curva γ definida por los siguientes tramos:

- γ_1, el segmento de recta orientado desde $z = 1$ hasta $z = 2$
- γ_2, el segmento de recta orientado desde $z = 2i$ hasta $z = i$.
- γ_3, el arco del círculo $|z| = 1$ en sentido horario desde $z = i$ hasta $z = 1$.
- γ_4, el arco del círculo $|z| = 2$ en sentido antihorario desde $z = 2$ hasta $z = 2i$.

Puesto que $p(z)$ es una función entera, el número de ceros de $p(z)$ encerrados por γ es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{p'(z)}{p(z)}\, dz = \frac{1}{2\pi i} \int_{p\circ\gamma} \frac{dz}{z} = n(p \circ \gamma, 0)$$

Por construcción, los tramos $p \circ \gamma_1$, $p \circ \gamma_2$, $p \circ \gamma_3$ están en el semiplano derecho $\Re(w) > 0$ y el tramo final $p \circ \gamma_4$ es aproximadamente el círculo $|w| = 16$. Entonces $n(p \circ \gamma, 0) = 1$. Por ende, $p(z)$ tiene una sola raíz simple en el primer cuadrante. Finalmente, las raíces de $p(z)$ vienen en pares de complejos conjugados, así que las otras tres raíces están en el segundo, tercer y cuarto cuadrante.

Ejercicio 5. *Sea $f(z)$ una función meromorfa en $U \subset \mathbb{C}$. Sean $a_1, \dots, a_m \in U$ los ceros y $b_1, \dots, b_n \in U$ los polos de $f(z)$, en ambos casos contados con multiplicidad. Pruebe que*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) - \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, b_k)$$

para todo ciclo $\gamma \subset U$ homólogo a cero que esquiva los ceros y polos de $f(z)$.

Nota. Este resultado se conoce como el *principio del argumento* de Cauchy.

Solución. Los polos de $f(z)$ pueden ser considerados ceros de orden negativo. Para justificar esta decisión, expresemos $f(z)$ alrededor de $z_0 \in U$ como $f(z) = (z - z_0)^r\, h(z)$, donde $h(z)$ es una función analítica que no se anula en z_0. Se verifica que

- Si $r > 0$, entonces z_0 es un cero de $f(z)$ de orden r.
- Si $r < 0$, entonces z_0 es un polo de $f(z)$ de orden $-r$.
- Si $r = 0$, entonces $f(z_0) \in \mathbb{C}^\star$, así que z_0 no es ni cero ni polo de $f(z)$.

Entonces consideremos los siguientes objetos:

- Los ceros y polos $z_1, \dots, z_s \in U$ de $f(z)$, contados *sin* multiplicidad.
- La multiplicidad $r_k \in \mathbb{Z}$ de cada z_k, positiva si z_k es un cero, negativa si z_k es un polo.
- Un círculo pequeño γ_k alrededor de cada z_k.

Por hipótesis, γ es homóloga a $r_1\gamma_1 + \cdots + r_s\gamma_s$ en $U - \{z_1, \dots, z_s\}$. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{s} n(\gamma, z_k) \int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

Utilizando la expresión local $f(z) = (z - z_k)^{r_k} h_k(z)$, tenemos

$$\int_{\gamma_k} \frac{f'(z)}{f(z)} = \int_{\gamma_k} \frac{r_k}{z - z_k} + \cancelto{0}{\int_{\gamma_k} \frac{h_k'(z)}{h_k(z)}} = 2\pi i r_k$$

Sustituyendo en la sumatoria anterior, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{s} r_k \cdot n(\gamma, z_k)$$

Separando los ceros ($m_k > 0$) y los polos ($m_k < 0$) y contándolos con multiplicidad, tenemos

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{k=1}^{m} n(\gamma, a_k) - \sum_{k=1}^{n} n(\gamma, b_k)$$

Ejercicio 6. *Sea $\gamma \subset U$ un ciclo homólogo a cero en $U \subset \mathbb{C}$ tal que $n(\gamma, z) \in \{0, 1\}$ para todo punto $z \in U$ por el cual γ no pasa. Sean $f(z)$, $g(z)$ dos funciones analíticas en U tales que $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ para todo $z \in \gamma$. Pruebe que $f(z)$, $g(z)$ tienen el mismo número de ceros encerrados por γ.*

Nota. Este resultado se conoce como *teorema de Rouché*.

Solución. La hipótesis sobre $f(z)$, $g(z)$ implica que, para $z \in \gamma$, el cociente

$$h(z) = \frac{f(z) - g(z)}{f(z)}$$

toma valores en el disco unitario $|w| < 1$. Por ende, el cociente

$$1 - h(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$$

toma valores en el disco unitario $|1 - w| < 1$. En particular, esto implica que $f(z)$, $g(z)$ no se anulan para ningún $z \in \gamma$. Por el principio del argumento (ejercicio anterior), tenemos

$$0 = \int_{h \circ \gamma} \frac{dw}{w - 1} = \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\,dz - \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i \cdot (Z_g - Z_f)$$

donde $Z_f, Z_g \in \mathbb{N}$ son los números de ceros de $f(z)$, $g(z)$ encerrados por γ, contados con multiplicidad, lo cual sólo es posible si $Z_f = Z_g$.

Ejercicio 9. *Halle los ceros, polos y residuos de las siguientes funciones:*

(a) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 5z + 6}$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 - 1)^2}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{\sin^2(z)}$

(d) $f(z) = \dfrac{z^2 + 1}{z}$

Solución. En todos los casos, $f(z)$ es un cociente de funciones enteras. Por ende,

- Los ceros de $f(z)$ son los ceros de su propio numerador.
- Los polos de $f(z)$ son los ceros de su propio denominador.
- $f(z)$ no tiene singularidades esenciales en el plano complejo.

Ahora sí, analicemos las funciones dadas:

(a) Factorizando el numerador y el denominador, deducimos que

- $f(z)$ no tiene ceros en el plano complejo.
- $f(z)$ tiene polos en $z = -2$ y $z = -3$.

Para hallar los residuos de $f(z)$ en sus polos, reescribamos

$$f(z) = \frac{1}{z+2} - \frac{1}{z+3}$$

Entonces $\operatorname{Res}(f, -2) = 1$ y $\operatorname{Res}(f, -3) = -1$.

(b) Factorizando el numerador y el denominador, deducimos que

- $f(z)$ no tiene ceros en el plano complejo.
- $f(z)$ tiene polos en $z = \pm 1$.

Para hallar los residuos de $f(z)$ en sus polos, reescribamos

$$f(z) = \left[\frac{1/2}{z-1} - \frac{1/2}{z+1}\right]^2 = \frac{1/4}{(z-1)^2} + \frac{1/4}{(z+1)^2} - \frac{1/2}{z^2-1}$$

Por supuesto, el último término sigue siendo insatisfactorio. Expandámoslo:

$$f(z) = \frac{1/4}{(z-1)^2} + \frac{1/4}{(z+1)^2} - \frac{1/4}{z-1} + \frac{1/4}{z+1}$$

Entonces $\operatorname{Res}(f, 1) = -1/4$ y $\operatorname{Res}(f, -1) = 1/4$.

(c) Observemos que

- $f(z)$ no tiene ceros en el plano complejo.
- $f(z)$ tiene polos en $z = n\pi$ para cada $n \in \mathbb{Z}$.
- $f(z + \pi) = f(z)$, así que todos los polos tienen el mismo residuo.
- $f(z) = f(-z)$, así que el residuo en $z = 0$ es cero.

Para justificar el último punto, tomemos un círculo pequeño $|z| = \varepsilon$. Puesto que γ es invariante bajo la reflexión $z \mapsto -z$, tenemos

$$2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, 0) = \int_\gamma f(z)\, dz = -\int_\gamma f(-z)\, dz$$

Por otro lado, $f(z)$ también es invariante bajo la reflexión $z \mapsto -z$, así que

$$2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, 0) = -\int_\gamma f(-z)\, dz = -\int_\gamma f(z)\, dz = -2\pi i \cdot \operatorname{Res}(f, 0)$$

Por ende, $\operatorname{Res}(f, n\pi) = \operatorname{Res}(f, 0) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.

(d) Factorizando el numerador y el denominador, deducimos que

- $f(z)$ tiene ceros simples en $z = \pm i$.
- $f(z)$ tiene un polo simple en $z = 0$.

Para hallar el residuo de $f(z)$ en su polo, reescribamos $f(z) = z + 1/z$. Entonces $\mathrm{Res}(f, 0) = 1$.

Ejercicio 10. *Calcule la integral de contorno*

$$\int_\gamma \frac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}\, dz$$

donde γ *es el círculo* $|z-1| = 1$.

Solución. La función auxiliar $f(z)$ y su derivada $f'(z)$ dadas por

$$f(z) = \frac{z^2}{z+1}, \qquad f'(z) = \frac{z(z+2)}{(z+1)^2}$$

son analíticas en el semiplano $\Re(z) > -1$, que es simplemente conexo y contiene a γ. Entonces,

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz = 2\pi i \cdot f'(1) = 2\pi i \cdot \frac{3}{4} = \frac{3\pi i}{2}$$

Ejercicio 11. *Calcule el residuo de* $\dfrac{z^2}{z^2-1}$ *en* $z = 1$.

Solución. Sea $f(z)$ la función auxiliar del ejercicio anterior. El residuo pedido es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-1}\, dz = f(1) = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 12. *Calcule el residuo* $\dfrac{z^2}{(z+1)(z-1)^2}$ *en* $z = 1$.

Solución. Sea $f(z)$ la función auxiliar del ejercicio anterior. El residuo pedido es

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z-1)^2}\, dz = f'(1) = \frac{3}{4}$$

Semana 11

Ejercicio 1. *Calcule los polos y los residuos de las siguientes funciones:*

(a) $f(z) = \dfrac{1}{4z^2 + 10z + 4}$

(b) $f(z) = \dfrac{z^4 + 1}{z^2(4z^2 + 10z + 4)}$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 4)}$

Solución.

(a) La función $f(z)$ tiene dos polos simples en $z = -1/2$, $z = -2$ y sus residuos son

$$\mathrm{Res}(f, -1/2) = \frac{1}{p(-1/2)} = \frac{1}{6}, \qquad \mathrm{Res}(f, -2) = \frac{1}{p(-2)} = -\frac{1}{6}$$

donde $p(z) = 8z + 10$ es la derivada del denominador de $f(z)$.

(b) Escribamos $f(z) = g(z)\, h(z)$, donde

$$g(z) = \frac{1}{4z^2 + 10z + 4z}, \qquad h(z) = z^2 + \frac{1}{z^2}$$

El factor $g(z)$ tiene dos polos simples, con residuos conocidos. Los residuos de $f(z)$ en estos polos se obtienen reescalando los residuos de $g(z)$ por el valor del factor $h(z)$. Entonces,

$$\mathrm{Res}(f, -1/2) = \mathrm{Res}(g, -1/2) \cdot h(-1/2) = \frac{17}{24}, \qquad \mathrm{Res}(f, -2) = \mathrm{Res}(g, -2) \cdot h(-2) = -\frac{17}{24}$$

El factor $h(z)$ tiene un polo doble en el origen, sin residuo. El residuo de $f(z)$ en el origen se puede calcular ignorando el término de $h(z)$ que es analítico en el origen. Entonces,

$$\mathrm{Res}(f, 0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{g(z)}{z^2}\, dz = g'(0) = -\frac{p'(0)}{p(0)^2} = -\frac{5}{8}$$

donde $p(z) = 4z^2 + 10z + 4$ es el denominador de $g(z)$ y su derivada es $p'(z) = 8z + 10$.

(c) La función $f(z)$ tiene polos simples en $z = \pm i$, $z = \pm 2i$ y sus residuos son

$$\mathrm{Res}(f, \pm i) = \frac{1}{p(\pm i)} = \mp\frac{i}{6}, \qquad \mathrm{Res}(f, \pm 2i) = \frac{1}{p(\pm 2i)} = \pm\frac{i}{12}$$

donde $p(z) = 2z(z^2 + 1) + 2z(z^2 + 4) = 4z^3 + 10z$ es la derivada del denominador de $f(z)$.

Nota. El signo $\mp$ frente a $i/6$ significa que $\mathrm{Res}(f, i) = -i/6$, mientras que $\mathrm{Res}(f, -i) = i/6$.

Ejercicio 2. *Utilice residuos para calcular la integral*

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta$$

Solución. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario, parametrizado como $z = e^{i\theta}$. Entonces,

$$S = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos\theta}\, d\theta = \int_\gamma \frac{z^2 + z^{-2}}{z^2 + 4z + 1} \cdot \frac{dz}{i} = \int_\gamma f(z)\, \frac{dz}{i}$$

Factoricemos el integrando como $f(z) = g(z)\, h(z)$, donde

$$g(z) = \frac{1}{z^2 + 4z + 1}, \qquad h(z) = \frac{z^4 + 1}{z^2}$$

El factor $g(z)$ tiene un polo simple en $a = -2 + \sqrt{3}$ encerrado por γ. Entonces,

$$\operatorname{Res}(f, a) = \operatorname{Res}(g, a) \cdot h(a) = \frac{1}{2a + 4} \cdot \frac{a^4 + 1}{a^2} = \frac{7}{\sqrt{3}}$$

El factor $h(z)$ tiene un polo doble en el origen, sin residuo. Entonces,

$$\operatorname{Res}(f, 0) = g'(0) = -\frac{p'(0)}{p(0)^2} = -4$$

donde $p(z) = z^2 + 4z + 1$ es el denominador de $g(z)$ y su derivada es $p'(z) = 2z + 4$. Finalmente,

$$S = 2\pi \cdot [\operatorname{Res}(f, a) + \operatorname{Res}(f, 0)] = 2\pi \left[\frac{7}{\sqrt{3}} - 4\right]$$

es el valor de la integral pedida.

Ejercicio 3. *Utilice residuos para calcular la integral*

$$S = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos^2\theta}\, d\theta$$

Solución. Reescribamos el integrando como

$$S = \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2\theta}{2 + \cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \frac{2\cos 2\theta}{4 + 2\cos^2\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + \cos 2\theta}\, d\theta$$

Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario, parametrizado como $z = e^{2i\theta}$. Entonces,

$$S = \int_\gamma \frac{z + z^{-1}}{10 + z + z^{-1}} \cdot \frac{dz}{2iz} = \int_\gamma \frac{z^2 + 1}{z^3 + 10z^2 + z} \cdot \frac{dz}{2i} = \int_\gamma f(z)\, \frac{dz}{2i}$$

El integrando tiene dos polos encerrados por γ: uno en el origen, cuyo residuo es

$$\operatorname{Res}(f, 0) = \left.\frac{z^2 + 1}{3z^2 + 20z + 1}\right|_{z=0} = 1$$

y el otro en $a = -5 + \sqrt{24}$, cuyo residuo es

$$\operatorname{Res}(f, a) = \left.\frac{z^2 + 1}{3z^2 + 20z + 1}\right|_{z=a} = -\frac{5}{2\sqrt{6}}$$

Por ende, el valor de la integral pedida es

$$S = \pi \cdot [\operatorname{Res}(f, a) + \operatorname{Res}(f, 0)] = \pi \left[1 - \frac{5}{2\sqrt{6}}\right]$$

Ejercicio 4. *Dado un parámetro real* $0 < |a| < 1$*, calcule la integral*

$$S_a = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta}$$

Solución. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ el círculo unitario, parametrizado como $z = e^{i\theta}$. Entonces,

$$S_a = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a\cos\theta} = \int_\gamma \frac{2}{az^2 + 2z + a} \cdot \frac{dz}{i} = \int_\gamma f(z)\,\frac{dz}{i}$$

El integrando tiene un polo encerrado por γ situado en

$$z = \frac{-1 + \sqrt{1 - a^2}}{a}$$

Por ende, el valor de la integral pedida es

$$S_a = 2\pi \cdot \operatorname{Res}(f, z) = \frac{2\pi}{az + 1} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - a^2}}$$

Ejercicio 5. *Utilice el teorema de los residuos en el semiplano inferior* $y \leq 0$ *para calcular*

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4 + 1}\,dx$$

Solución. Sea $R > 0$ un número muy grande y sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ el ciclo definido por los siguientes tramos:

- γ_1, el segmento orientado desde $z = -R$ hasta $z = R$.
- γ_2, el semicírculo en el semiplano $\Im(z) \leq 0$ desde $z = R$ hasta $z = -R$.

Sea $f(z)$ el integrando. Tenemos la cota en módulo

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z)\,dz \right| \leq \int_{\gamma_2} |f(z)|\,|dz| \leq \pi R \cdot \|f \circ \gamma_2\|_\infty = \pi R \cdot \frac{R^2}{R^4 - 1}$$

Esta cota tienda a cero cuando $R \to \infty$. Por ende,

$$S = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Los polos de $f(z)$ son las potencias impares de $\alpha = e^{\pi i/4}$. Sus residuos son

$$\operatorname{Res}(f, z) = \frac{z^2}{4z^3} = \frac{1}{4z}$$

La curva γ encierra *en sentido horario* a los polos $\alpha^5 = -\alpha$ y $\alpha^7 = \alpha^{-1}$. Por ende,

$$S = -2\pi i \cdot [\operatorname{Res}(f, -\alpha) + \operatorname{Res}(f, \alpha^{-1})] = -2\pi i \cdot \frac{\alpha^2 - 1}{4\alpha} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

Ejercicio 6. *Utilice residuos para calcular la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + 4)}$$

Solución. Sea $R > 0$ un número muy grande y sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ el ciclo definido por los siguientes tramos:

- γ_1, el segmento orientado desde $z = -R$ hasta $z = R$.
- γ_2, el semicírculo en el semiplano $\Im(z) \geq 0$ desde $z = R$ hasta $z = -R$.

Sea $f(z)$ el integrando. Tenemos la cota en módulo

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_2} |f(z)|\;|dz| \leq \pi R \cdot \|f \circ \gamma_2\|_\infty = \frac{\pi R}{(R^2-1)(R^2-4)}$$

Esta cota tienda a cero cuando $R \to \infty$. Por ende,

$$S = \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_1} f(z)\,dz = \int_\gamma f(z)\,dz$$

Los polos de $f(z)$ y sus respectivos residuos ya han sido calculados en el ejercicio 1.(c). Sólo necesitamos los polos encerrados por γ, que son $z = i$, $z = 2i$. Por ende, la integral pedida es

$$S = 2\pi i \cdot [\mathrm{Res}(f,i) + \mathrm{Res}(f,2i)] = 2\pi i \left[-\frac{i}{6} + \frac{i}{12}\right] = \frac{\pi}{6}$$

Ejercicio 7. *Calcule las siguientes integrales:*

(a) $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^4+1}$

(b) $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{x^4+x^2+1}\,dx$

(c) $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}\,dx$

(d) $S = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^3}\,dx$

(e) $S = \displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx$

(f) $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2x}{1-2a\cos x + a^2}\,dx$, *donde* $a^2 < 1$.

(g) $S = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dx}{(a+\cos x)^2}$, *donde* $a > 1$.

Solución. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ la curva del ejercicio anterior. Para los cuatro primeros integrandos, la cota

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \leq \int_{\gamma_2} |f(z)|\,|dz| \leq \pi R \cdot \|f \circ \gamma_2\|_\infty$$

tiende a cero cuando $R \to \infty$. Entonces,

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx \approx \int_{\gamma_1} f(z)\,dz \approx \int_\gamma f(z)\,dz$$

que se puede calcular usando la fórmula integral de Cauchy.

(a) Los polos del integrando están situados en las potencias impares de $\alpha = e^{\pi i/4}$, i.e., las raíces cuartas de -1. Los residuos correspondientes están dados por

$$\mathrm{Res}(f,z) = \frac{1}{4z^3} = -\frac{z}{4}$$

Los polos encerrados por γ son α, α^3. Por ende, la integral pedida es

$$S = \int_\gamma \frac{dz}{z^4+1} = -2\pi i \cdot \frac{\alpha+\alpha^3}{4} = -2\pi i \cdot \frac{i\sqrt{2}}{4} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

(b) Los polos del integrando las potencias no reales de $\alpha = e^{\pi i/3}$, i.e., las raíces cuadradas de las raíces cúbicas no reales de 1. Los residuos correspondientes son

$$\operatorname{Res}(f, z) = \frac{z^2}{4z^3 + 2z} = \frac{z}{4z^2 + 2}$$

Los polos encerrados por γ son α y $\alpha^2 = -\alpha^{-1}$. Por ende, la integral pedida es

$$S = \int_\gamma \frac{z^2}{z^4 + z^2 + 1}\,dz = 2\pi i \cdot \left[\frac{\alpha}{4\alpha^2 + 2} - \frac{\alpha}{4 + 2\alpha^2}\right] = 2\pi i \cdot \frac{-i/2}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{\sqrt{3}}$$

(c) Los polos del integrando son $z = \pm i$, $z = \pm 3i$. Los residuos correspondientes son

$$\operatorname{Res}(f, z) = \frac{z^2 - z + 2}{4z^3 + 20z}$$

Los polos encerrados por γ son $z = i$, $z = 3i$. Los residuos correspondientes son

$$\operatorname{Res}(f, i) = \frac{i^2 - i + 2}{4i^3 + 20i} = -\frac{1+i}{16}, \qquad \operatorname{Res}(f, 3i) = \frac{9i^2 - 3i + 2}{108i^3 + 60i} = \frac{3 - 7i}{48}$$

Por ende, la integral pedida es

$$S = \int_\gamma \frac{z^2 - z + 2}{z^4 + 10z^2 + 9}\,dz = 2\pi i \cdot \frac{-10i}{48} = \frac{5\pi}{12}$$

(d) Los polos del integrando son $z = \pm i$, pero sólo $z = i$ está encerrado por γ. Antes de evaluar la integral pedida, consideremos la función auxiliar

$$g(z) = \frac{z^2}{(z+i)^3}$$

Derivando la función auxiliar dos veces, tenemos

$$g'(z) = \frac{2z}{(z+i)^3} - \frac{3z^2}{(z+i)^4}$$

$$g''(z) = \frac{2}{(z+i)^3} - \frac{12z}{(z+i)^4} + \frac{12z^2}{(z+i)^5}$$

Por la fórmula integral de Cauchy, la integral pedida es

$$S = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^3}\,dz = \pi i \cdot g''(i) = \pi i \left[\frac{2}{(2i)^3} - \frac{12i}{(2i)^4} + \frac{-12}{(2i)^5}\right] = \pi i \cdot \left[\frac{i}{4} - \frac{3i}{4} + \frac{3i}{8}\right] = \frac{\pi}{8}$$

El quinto integrando no satisface que $2\pi R \cdot \|f \circ \gamma_2\|_\infty$ tienda a cero para $R \to \infty$, así que debemos utilizar un método más sofisticado para calcular la integral:

(e) Utilizaremos integración partes con

$$u = 1 - \cos x \qquad v = 1/x$$
$$du = \sin x \qquad dv = -dx/x^2$$

Entonces la integral pedida se reescribe como

$$S = \int_0^\infty \frac{\cos x - 1}{x^2}\,dx = \cancelto{0}{\left.\frac{1 - \cos x}{x}\right|_{x=0}^{\infty}} - \int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$$

El sumando cancelado se anula porque

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

Puesto que $\sin(x)/x$ es una función par, tenemos

$$S = -\int_{-\infty}^{0} \frac{\sin x}{x}\,dx = -\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

Pongamos $q(z) = 1/z$, $f(z) = q(z)\,e^{iz}$. Por el lema de Jordan, tenemos la cota superior en módulo

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\,dz\right| \le \frac{\pi}{n} \cdot \|q \circ \gamma_2\|_\infty$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$. Entonces,

$$-2S = \int_{-\infty}^{\infty} \Im \circ f(x)\,dx \approx \Im \circ \text{pr. v.}\left[\int_{\gamma_1} f(z)\,dz\right] \approx \Im \circ \text{pr. v.}\left[\int_{\gamma} f(z)\,dz\right]$$

La curva γ pasa por un polo de $f(z)$ en $z = 0$ y no encierra propiamente a ningún polo de $f(z)$. Por ende, el valor de la integral pedida es

$$S = -\frac{1}{2}\,\Im\big[i\pi \cdot \operatorname{Res}(f,0)\big] = -\frac{\pi}{2}$$

Finalmente, para evaluar las dos últimas integrales, consideremos el círculo unitario $\gamma \subset \mathbb{C}$, parametrizado como $z = e^{ix}$. Entonces, $dz = iz\,dx$, $2\cos x = z + z^{-1}$, $2\cos 2x = z^2 + z^{-2}$. Por ende,

(f) La integral pedida se reescribe como

$$S = \int_\gamma \frac{z^2 + z^{-2}}{1 + a^2 - az - az^{-1}}\,\frac{dz}{2iz} = \frac{i}{2}\int_\gamma \frac{z^4+1}{z^2(z-a)(az-1)}\,dz = \frac{i}{2}\int_\gamma f(z)\,dz$$

El integrando tiene dos polos encerrados por γ: uno simple en $z = a$, cuyo residuo es

$$\operatorname{Res}(f,a) = \frac{a^4+1}{a^2(a^2-1)}$$

y uno doble en el origen. Consideremos la función auxiliar $g(z)$ y su derivada dadas por

$$g(z) = \frac{z^4+1}{(z-a)(az-1)}, \qquad g'(z) = g(z)\left[\frac{4z^3}{z^4+1} - \frac{1}{z-a} - \frac{a}{az-1}\right]$$

Entonces el residuo en el origen es

$$\operatorname{Res}(f,0) = g'(0) = \frac{1}{a}\left[\frac{0}{1} + \frac{1}{a} + a\right] = \frac{1+a^2}{a^2}$$

Por ende, el valor de la integral pedida es

$$S = -\pi \cdot [\operatorname{Res}(f,0) + \operatorname{Res}(f,a)] = -\pi\left[\frac{1+a^2}{a^2} + \frac{a^4+1}{a^2(a^2-1)}\right] = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}$$

(g) La integral pedida se reescribe como

$$S = \int_\gamma \frac{4}{(2a + z + z^{-1})^2} \frac{dz}{iz} = \int_\gamma \frac{4z}{(z^2 + 2a + 1)^2} \frac{dz}{i}$$

El integrando tiene dos polos dobles en $b_\pm = -a \pm \sqrt{a^2 - 1}$, pero sólo b_+ está encerrado por γ. Para hallar el residuo en b_+, consideremos la función auxiliar $g(z)$ y su derivada definidas por

$$g(z) = \frac{4z}{(z - b_-)^2}, \qquad g'(z) = g(z) \left[\frac{1}{z} - \frac{2}{z - b_-}\right] = -4 \cdot \frac{z + b_-}{(z - b_-)^3}$$

Entonces el valor de la integral pedida es

$$S = \int_\gamma \frac{g(z)}{(z - b_+)^2} \frac{dz}{i} = 2\pi \cdot g'(b_+) = -8\pi \cdot \frac{b_+ + b_-}{(b_+ - b_-)^3} = \frac{2\pi a}{(a^2 - 1)^{3/2}}$$

Ejercicio 8. *Calcule las siguientes integrales:*

(a) $S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos 4x}{x^2 + 1} \, dx$

(b) $S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 \cos 2x}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

(c) $S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{(x^2 + 1)^2} \, dx$

(d) $S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^6 + 1}$

Solución. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ la curva del ejercicio 6. Observemos que, en los tres primeros ítems, el integrando es de la forma $q(x)\cos(nx)$, donde $q(x)$ es una función racional. Pongamos $f(z) = q(z)\, e^{inz}$. Por el lema de Jordan, tenemos la cota superior en módulo

$$\left| \int_{\gamma_2} f(z) \, dz \right| \leq \frac{\pi}{n} \cdot \|q \circ \gamma_2\|_\infty$$

que, para las funciones $q(z)$ dadas, tiende a cero cuando $R \to \infty$. Entonces,

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \Re \circ f(x) \, dx \approx \Re \left[\int_{\gamma_1} f(z) \, dz \right] \approx \Re \left[\int_\gamma f(z) \, dz \right]$$

que se puede calcular usando la fórmula integral de Cauchy.

(a) Consideremos la función auxiliar $g(z)$ definida por

$$g(z) = \frac{e^{4iz}}{z + i}$$

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{z - i} \, dz = 2\pi i \cdot g(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-4}}{2i} = \frac{\pi}{e^4}$$

Por ende, la integral pedida es $S = \Re(\pi/e^4) = \pi/e^4$.

(b) Consideremos la función auxiliar $g(z)$ y su derivada $g'(z)$ definidas por

$$g(z) = \frac{z^2\, e^{2iz}}{(z+i)^2}, \qquad g'(z) = g(z)\left[\frac{2}{z} + 2i - \frac{2}{z+i}\right]$$

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \cdot g'(i) = 2\pi i \cdot \frac{i^2 e^{-2}}{(2i)^2}\left[\frac{2}{i} + 2i - \frac{2}{2i}\right] = -\frac{\pi}{2e^2}$$

Por ende, la integral pedida es $S = \Re(-\pi/2e^2) = -\pi/2e^2$.

(c) Consideremos la función auxiliar $g(z)$ y su derivada $g'(z)$ definidas por

$$g(z) = \frac{e^{iz}}{(z+i)^2}, \qquad g'(z) = g(z)\left[i - \frac{2}{z+i}\right]$$

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\int_\gamma \frac{g(z)}{(z-i)^2}\, dz = 2\pi i \cdot g'(i) = 2\pi i \cdot \frac{e^{-1}}{(2i)^2}\left[i - \frac{2}{2i}\right] = \frac{\pi}{e}$$

Por ende, la integral pedida es $S = \Re(\pi/e) = \pi/e$.

El cuarto ítem es una variación del ejercicio 7.(a):

(d) Los polos del integrando $f(z)$ son las potencias impares de $\alpha = e^{\pi i/6}$, i.e., las raíces sextas de -1, y los residuos correspondientes están dados por

$$\operatorname{Res}(f, z) = \frac{1}{6z^5} = -\frac{z}{6}$$

Los polos encerrados por γ son $\alpha, \alpha^3, \alpha^5$. Por ende, la integral pedida es

$$S = \int_\gamma \frac{dz}{z^6+1} = -2\pi i \cdot \frac{\alpha + \alpha^3 + \alpha^5}{6} = -2\pi i \cdot \frac{2i}{6} = \frac{2\pi}{3}$$

Ejercicio 9. *Utilice el lema de Jordan para calcular la integral*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin x}{x^2 + a^2}\, dx$$

donde $a > 0$.

Solución. Sea $\gamma \subset \mathbb{C}$ la curva del ejercicio 6. Consideremos las funciones auxiliares

$$q(z) = \frac{z}{z^2 + a^2}, \qquad f(z) = q(z)\, e^{iz}$$

Por el lema de Jordan, tenemos la cota superior en módulo

$$\left|\int_{\gamma_2} f(z)\, dz\right| \le \pi \cdot \|q \circ \gamma_2\|_\infty$$

que tiende a cero cuando $R \to \infty$. Entonces,

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \Im \circ f(x)\, dx \approx \Im\left[\int_{\gamma_1} f(z)\, dz\right] \approx \Im\left[\int_\gamma f(z)\, dz\right]$$

Consideremos la función auxiliar $g(z)$ definida por

$$g(z) = \frac{ze^{iz}}{z+ia}$$

Por la fórmula integral de Cauchy, tenemos

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma \frac{g(z)}{z-ia}\,dz = 2\pi i \cdot g(ia) = 2\pi i \cdot \frac{iae^{-a}}{2ia} = \frac{i\pi}{e^a}$$

Por ende, la integral pedida es $S = \Im(i\pi/e^a) = \pi/e^a$.

Ejercicio 10. *Calcule el valor principal de la siguiente integral*

$$S = \text{pr. v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-1}$$

Solución. Pensemos en esta integral como una integral sobre la recta real proyectiva $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, que es topológicamente un círculo en la esfera de Riemann $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. El integrando tiene dos polos simples: uno en $x = 1$ y el otro en $x = \infty$. Para ver este último polo, sustituyamos

$$x = \varphi(u) = 1 + \frac{1}{u}, \qquad\qquad dx = -\frac{du}{u^2}$$

con lo cual el integrando ahora se escribe como

$$\frac{dx}{x-1} = -\frac{du}{u}$$

y, por ende, tiene un polo simple en $u = 0$. Recordemos que el residuo es una propiedad geométrica de las 1-formas, i.e., no depende de la elección de coordenadas. Por ende, el valor principal pedido es

$$S = i\pi \cdot [\text{Res}(f,1) + \text{Res}(f,\infty)] = i\pi \cdot [\text{Res}(f,1) + \text{Res}(f\circ\varphi,0)] = i\pi \cdot [1-1] = 0$$

Semana 12

Ejercicio 1. *Dado un entero $k \geq 1$, calcule la integral*

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}}$$

Solución. Consideremos la curva $\gamma \subset \mathbb{C}$ definida por los siguientes tramos:

- γ_1, el segmento de recta desde $z = -R$ hasta $z = R$.
- γ_2, el semicírculo antihorario desde $z = R$ hasta $z = -R$.

Consideremos también la función auxiliar $g(z)$ y su k-ésima derivada definidas por

$$g(z) = \frac{1}{(z+i)^{k+1}}, \qquad g^{(k)}(z) = \frac{(2k)!}{k!} \cdot \frac{(-1)^k}{(z+i)^{2k+1}}$$

Tomando el límite cuando $R \to \infty$, tenemos la estimación

$$S \approx \int_{\gamma_1} \frac{g(z)}{(z-i)^{k+1}}\, dz \approx \int_{\gamma} \frac{g(z)}{(z-i)^{k+1}}\, dz = \frac{2\pi i}{k!} \cdot g^{(k)}(i)$$

Sustituyendo la expresión para $g^{(k)})(z)$ evaluada en $z = i$, tenemos

$$S = \frac{2\pi i}{k!} \cdot \frac{(2k)!}{k!} \cdot \frac{(-1)^k}{(2i)^{2k+1}} = \frac{\pi}{2^{2k}} \cdot \binom{2k}{k}$$

Semana 13

Ejercicio 1. *Sea $f_n(z)$ una sucesión de funciones analíticas en una región $U \subset \mathbb{C}$. Suponga que $f_n(z)$ no se anula para ningún $z \in U$ y converge uniformemente en compactos a $f(z)$. Pruebe que, si $f(z_0) = 0$ para algún $z_0 \in U$, entonces $f(z)$ es idénticamente cero en U.*

Solución. Sea $\gamma \subset U$ un pequeño círculo alrededor de $z_0 \in U$. Por el ejercicio 17 de la semana 6,

$$\int_\gamma f(z)\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma f_n(z)\, dz = 0$$

Por el teorema de Morera, $f(z)$ es analítica en una pequeña vecindad de z_0. Como z_0 es arbitrario, $f(z)$ es analítica en toda la región U. Además, $f_n'(z)$ converge uniformemente en compactos a $f'(z)$.

Supongamos que $f(z)$ no es idénticamente cero. Entonces podemos suponer que $f(z)$ no se anula para ningún $z \in \gamma$. Por el ejercicio 17 de la semana 6,

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz = 0$$

Puesto que γ es homólogo a cero en U, deducimos que γ no encierra ceros de $f(z)$. Como γ es arbitrario, deducimos que $f(z)$ no tiene ceros en U.

Ejercicio 2. *Pruebe que la serie de potencias*

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

converge en la región $\Re(z) > 1$.

Solución. Sea $x = \Re(z)$. Entonces,

$$|\zeta(z)| = \left| \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} \left| n^{-z} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-x} = \zeta(x)$$

Para $n = \lceil t \rceil$ y $x > 1$, tenemos $t^{-x} \ge n^{-x}$, así que

$$\zeta(x) - 1 = \sum_{n=2}^{\infty} n^{-x} \le \int_1^\infty t^{-x}\, dt = \frac{1}{x-1} < \infty$$

Por ende, $\zeta(z)$ es absolutamente convergente en el semiplano $\Re(z) > 1$. De hecho, para $x \ge 1 + \varepsilon$, tenemos la cota uniforme $1/\varepsilon$, así que $\zeta(z)$ es absoluta y uniformemente convergente en el semiplano $\Re(z) \ge 1 + \varepsilon$.

Ejercicio 3. *Desarrolle la función $f(z)$ definida por*

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2}$$

en potencias de $(z-1)$.

Solución. Los polos de $f(z)$ son α^2, α^6, donde $\alpha = e^{i\pi/4}$. Poniendo $z = 1 + w\sqrt{2}$, tenemos

$$f(z) = \frac{i/2}{w\sqrt{2}+1+i} + \frac{-i/2}{w\sqrt{2}+1-i} = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha^2}{w+\alpha} + \frac{\alpha^{-2}}{w+\alpha^{-1}}\right]$$

Expandiendo la serie de potencias centrada en $w = 0$, tenemos

$$f(z) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\left[\frac{\alpha}{1+\alpha^{-1}w} + \frac{\alpha^{-1}}{1+\alpha w}\right] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^{1-n}+\alpha^{n-1}}{\sqrt{2^{n+3}}}\,(1-z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-1)^n$$

Entonces los coeficientes β_n son

$$\beta_{4k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}}, \qquad \beta_{4k+1} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^{2k+1}}, \qquad \beta_{4k+2} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+2}}, \qquad \beta_{4k+3} = 0$$

Ejercicio 4. *Utilice la representación en una serie de Taylor para probar que el conjunto de polos de una función definida en una región no tiene puntos de acumulación en dicha región.*

Solución. Sea $f(z)$ una función meromorfa en una región $U \subset \mathbb{C}$ y supongamos por el absurdo que $z_0 \in U$ es un punto de acumulación de los polos de $f(z)$. Entonces,

- Si $f(z)$ es analítica en z_0, entonces la serie de Taylor

  $$f(z_0) + f'(z_0)\,(z-z_0) + \frac{f''(z_0)}{2}\,(z-z_0)^2 + \dots$$

  converge en un disco centrado en z_0. Esto es imposible, porque existe una sucesión de polos de $f(z)$ que converge a z_0.

- Si $f(z)$ tiene un polo en z_0, entonces $g(z) = 1/f(z)$ se anula en z_0 y su serie de Taylor

  $$\frac{g^{(m)}(z_0)}{m!}\,(z-z_0)^m + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}\,(z-z_0)^{m+1} + \dots$$

  converge en un disco centrado en z_0. Dividiendo entre $(z-z_0)^m$, la serie

  $$\frac{g^{(m)}(z_0)}{m!} + \frac{g^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!}\,(z-z_0) + \dots$$

  converge a una función analítica que no se anula en una vecindad de z_0. Esto también es imposible, porque existe una sucesión de ceros de $g(z)$ que converge a z_0.

Ejercicio 6. *Halle las series de Laurent de la función $f(z)$ definida por*

$$f(z) = \frac{z^2}{z-1}\,e^{1/z}$$

en el anillo $0 < |z| < 1$ y en el anillo $1 < |z| < \infty$.

Solución.

- Consideremos la función auxiliar

  $$g(z) = \frac{e^{1/z}}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n z^n$$

  Los coeficientes de las partes analítica y singular en el origen son

  $$c_n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e, \qquad\qquad c_{-n} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

Entonces la serie de Laurent de $g(z)$ se descompone en

$$g(z) = g_0(z) + g_\infty(z) = \sum_{n=0}^{\infty} e z^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{-n}$$

El primer sumando es analítico en el origen y converge en el disco $|z| < 1$. Para estudiar el segundo sumando, comparémoslo con la serie geométrica

$$s(z) = \sum_{n=1}^{\infty} s_n z^{-n}, \qquad s_n = \sum_{k=n}^{\infty} A r^k = \frac{A r^n}{1-r}$$

donde $0 < r < 1$ es una constante fija. Siempre podemos escoger $A > 0$ de tal manera que $s_n > c_{-n}$ para todo $n \geq 1$. Esto implica que $g_\infty(z)$ converge para todo $|z| > r$ y, por extensión, converge para todo $|z| > 0$. Por ende, $g(z)$ converge para todo $0 < |z| < 1$. Finalmente,

$$f(z) = -z^2\, g(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} e z^{n+2} - \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} z^{2-n}$$

también converge para todo $0 < |z| < 1$.

- Consideremos la función auxiliar

$$h(w) = f(1/w) = \frac{e^w}{w(w+1)}$$

Multiplicando por w, tenemos la expresión en series

$$w\, h(w) = \frac{e^w}{w+1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-w)^m \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^k$$

Entonces la serie de Laurent de la función original es

$$f(z) = h(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k w^{1-k}, \qquad c_k = (-1)^k \cdot \sum_{n=0}^{k} \frac{(-1)^n}{n!}$$

Esta serie converge absolutamente para todo $0 < |w| < 1$, es decir, para todo $1 < |z| < \infty$.

Ejercicio 9. *Pruebe que la serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$$

en una vecindad del origen es de la forma

$$\frac{1}{z} - \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} B_n}{(2n)!} z^{2n-1}$$

donde los coeficientes B_n satisfacen la recurrencia

$$\frac{1}{2\,(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} B_n}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}$$

Solución. No trabajaremos con f directamente. Pongamos

$$1 + 2\, f(z) = \frac{e^z + 1}{e^z - 1} = \coth(z/2) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!}\, z^{2n-1}$$

Para hallar los coeficientes c_n, usaremos la identidad

$$\coth(z/2) \cdot \sinh(z) = 2\cosh^2(z/2) = 1 + \cosh(z)$$

Desarrollando en series esta identidad, tenemos

$$1 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{(2n)!} \, z^{2n-1}$$

Entonces los coeficientes c_n satisfacen la recurrencia

$$\delta_{0n} + \frac{1}{(2n)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{c_k}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}$$

En particular, $c_0 = 2$ y, para cada $n > 0$, se cumple

$$\frac{1}{(2n)!} - \frac{2}{(2n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}$$

Los coeficientes c_n se relacionan con los coeficientes buscados B_n mediante

$$c_n = 2\,(-1)^{n+1} B_n$$

Sustituyendo en la recurrencia, para todo $n > 0$, tenemos

$$\frac{1}{2\,(2n)!} - \frac{1}{(2n+1)!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1} B_n}{(2k)!\,(2n-2k+1)!}$$

Multiplicando todo por $(2n+1)!$, tenemos

$$\frac{2n-1}{2} = \sum_{k=1}^{n} \binom{2n+1}{2k} (-1)^{k+1} B_n$$

Finalmente, los tres primeros términos de la sucesión B_n satisfacen

$$\binom{3}{2} B_1 = \frac{1}{2}, \qquad \binom{5}{2} B_1 - \binom{5}{4} B_2 = \frac{3}{2}, \qquad \binom{7}{2} B_1 - \binom{7}{4} B_2 + \binom{7}{6} B_3$$

Por ende, $B_1 = 1/6$, $B_2 = 1/30$, $B_3 = 1/42$.

Ejercicio 10. *Pruebe que toda función analítica $f(z)$ de periodo 2π en el semiplano $\Im(z) > 0$ admite una expansión en series de exponenciales de la forma*

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}$$

y halle una expresión integral para los coeficientes c_n.

Solución. Consideremos la función auxiliar $g(z) = e^{iz}$. Por construcción, $g(z) = g(z')$ si y sólo si $z - z'$ es múltiplo entero de 2π. Entonces existe una función $h(w)$ tal que $f = h \circ g$. Además, $g'(z)$ nunca se anula, así que $g(z)$ tiene una inversa analítica local $g^{-1}(w)$ alrededor de cada $w_0 = g(z_0)$. Por ende, $h = f \circ g^{-1}$ también es analítica en w_0 y, por extensión, es analítica en todo el anillo $0 < |w| < 1$.

Consideremos la serie de Laurent de $h(w)$ centrada en el origen

$$h(w) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n w^n$$

que es absolutamente convergente en el anillo $0 < |w| < 1$. Entonces la serie de Fourier

$$f(z) = h \circ g(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inz}$$

es absolutamente convergente en todo el semiplano $\Im(z) > 0$. Para hallar los coeficientes de Fourier, sea σ un segmento horizontal orientado hacia la derecha, de longitud 2π, en el semiplano $\Im(z) > 0$. Entonces su imagen $\gamma = g \circ \sigma$ es un círculo centrado en el origen en el anillo $0 < |w| < 1$. Por ende,

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{h(w)}{w^{n+1}}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\sigma \frac{f(z)}{g(z)^{n+1}}\, g'(z)\, dz = \frac{1}{2\pi} \int_\sigma f(z)\, e^{-niz}\, dz$$

Ejercicio 11. *Sea $f(z)$ una función analítica e inyectiva en un disco abierto $U \subset \mathbb{C}$. Pruebe que*

$$f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz$$

donde $w_0 \in f(U)$ es un punto arbitrario y $\gamma \subset$ es un pequeño círculo alrededor de $z_0 = f^{-1}(w_0)$.

Solución. Como se dijo en el ejercicio 18 de la semana 9, una función analítica e inyectiva no puede tener puntos críticos. Entonces todo $w \in f(U)$ es un valor regular de $f(z)$. Por ende, la función inversa $f^{-1}(w)$ definida en $f(U)$ también es analítica. En particular, $f(z)$ es un homeomorfismo y preserva la orientación, así que $f \circ \gamma$ es un lazo antihorario alrededor de w_0. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$f^{-1}(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{f\circ\gamma} \frac{f^{-1}(w)}{w - w_0}\, dw = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f'(z)}{f(z) - w_0}\, dz$$

Semana 14

Ejercicio 13. *Encuentre la descomposición en fracciones parciales de*

$$f(z) = \frac{z^4}{(z-i)^2(z+i)}$$

Solución. El denominador de $f(z)$ es

$$p(z) = (z^2+1)(z-i) + z^3 - iz^2 + z - i$$

Multiplicando por $z-i$, tenemos

$$(z+i)\,p(z) = (z^2+1)^2 = z^4 + 2z^2 + 1 = f(z)\,p(z) + 2z^2 + 1$$

Despejando $f(z)$ enesta expresión, tenemos

$$f(z) = z + i - \frac{2z^2+1}{p(z)} = z + i - \frac{A}{z+i} - \frac{B}{z-i} - \frac{C}{(z-i)^2}$$

Multiplicando por el mínimo común denominador, tenemos

$$\begin{aligned} 2z^2 + 1 &= A(z-i)^2 + B(z^2+1) + C(z-i) \\ &= A(z^2 - 2iz - 1) + B(z^2+1) + C(z-i) \\ &= (A+B)z^2 + (C - 2iA)z + (B + iC - A) \end{aligned}$$

La solución de este sistema es $A = 1/4$, $B = 7/4$, $C = i/2$. Por ende,

$$f(z) = z + i - \frac{1/4}{z+i} - \frac{7/4}{z-i} - \frac{i/2}{(z-i)^2}$$

Ejercicio 14. *Encuentre la serie de Laurent de la función*

$$f(z) = \frac{1}{z+1} - \frac{1}{z-2}$$

definida en el anillo $|z| > 2$.

Solución. Consideremos la función auxiliar

$$g(w) = f(1/w) = \frac{w}{1+w} - \frac{w}{1-2w}$$

La serie de Taylor de esta función centrada en $w = 0$ está dada por

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[(-1)^n - 2^n\right] w^{n+1}$$

y converge absolutamente para todo $|w| < 1/2$. Por ende, la serie de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n - 2^n}{z^{n+1}}$$

converge para todo $|z| > 2$.

Ejercicio 15. *Utilice la derivada de* $(1-z)^{-1}$ *para encontrar la serie de Laurent de*

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)^3}$$

en el anillo $|z| > 1$.

Solución. Pongamos $w = 1/z$. Entonces

$$\frac{1}{1-z} = \frac{w}{w-1} = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} w^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n}$$

Derivando término a término, tenemos

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} z^{-n-1}$$

Derivando nuevamente término a término, tenemos

$$\frac{1}{(1-z)^3} = -\sum_{n=2}^{\infty} \binom{n}{2} z^{-n-2}$$

Estas series convergen para todo $|w| < 1$, es decir, para todo $|z| > 1$.

Ejercicio 21. *Sean* $f(z)$ *una función analítica y* w *una función de clase* C^2 *en* $f(U)$. *Pruebe que*

$$\triangle(w \circ f) = |f'|^2 \cdot \triangle w$$

Solución. Pensemos en U y $f(U)$ como abiertos de $\mathbb{R}^2$ y pensemos en f como una función $(t, s) = f(x, y)$ cuyas componentes satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann. Entonces,

$$(w \circ f)_{xx} = (\nabla w \cdot f_x)_x = (\nabla w)_x \cdot f_x + \nabla w \cdot f_{xx} = f_x^T \cdot Hw \cdot f_x + \nabla w \cdot f_{xx}$$

Puesto que las componentes de f son funciones armónicas, tenemos

$$\nabla w \cdot f_{xx} + \nabla w \cdot f_{yy} = \nabla w \cdot (f_{xx} + f_{yy}) = 0$$

Entonces el laplaciano original se reduce a

$$\triangle(w \circ f) = f_x^T \cdot H_w \cdot f_x + f_y^T \cdot H_w \cdot f_x$$

Puesto que Hw es una matriz simétrica, existe una base ortonormal $u, v \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$u^T \cdot Hw \cdot v = v^T \cdot Hw \cdot u = 0$$

La condición de Cauchy-Riemann es que f_x, f_y son de la forma

$$f_x = au - bv, \qquad f_y = bu + av$$

Por construcción, $a^2 + b^2 = \det Jf = |f'|^2$. Entonces,

$$f_x^T \cdot Hf \cdot f_x = a^2(u^T \cdot Hw \cdot u) + b^2(v^T \cdot Hw \cdot v)$$

$$f_y^T \cdot Hf \cdot f_y = b^2(u^T \cdot Hw \cdot u) + a^2(v^T \cdot Hw \cdot v)$$

Sumando término a término, tenemos

$$\triangle(w \circ f) = |f'|^2 \cdot \mathrm{tr}(Hw) = |f'|^2 \cdot \triangle w$$

Ejercicio 24. *Sea $u(z)$ una función armónica en un disco $D \subset \mathbb{C}$ centrado en $z_0 \in D$. Pruebe que*

$$v(z_1) = \int_\gamma \frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx$$

es una armónica conjugada de $u(z)$ en D, donde γ es el segmento orientado desde z_0 hasta z_1.

Solución. Puesto que $u(z)$ es armónica, el integrando

$$\frac{\partial u}{\partial x}\, dy - \frac{\partial u}{\partial y}\, dx$$

es una forma cerrada. Puesto que D es simplemente conexo, el integrando es exacto. Así pues, la integral que define a $v(z_1)$ puede calcularse a lo largo de cualquier trayectoria desde z_0 hasta z_1, sin alteración del resultado. Tomando γ cuyo último tramo es horizontal o vertical, tenemos, respectivamente,

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad\qquad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Por ende, $v(z)$ es una armónica conjugada de $u(z)$.

Ejercicio 25. *Determine si* $\log|z| = \frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$ *tiene una armónica conjugada en* $\mathbb{C}^\star$.

Solución. La función $u(z) = \log|z|$ es armónica:

$$\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} + \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} = 0$$

Si $v(z)$ fuese una armónica conjugada de $\log|z|$, entonces satisfaría

$$v(z_1) = v(z_0) + \int_\gamma \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2+y^2}$$

para cualquier camino $\gamma \subset \mathbb{C}^\star$ desde z_0 hasta z_1. En particular, tomemos γ como el círculo de radio $r > 0$ centrado en el origen, recorrido desde $z_0 = r$ hasta $z_1 = r$. Entonces,

$$0 = v(r) - v(r) = \int_\gamma \frac{x\, dy - y\, dx}{x^2+y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$$

lo cual es contradictorio. Por ende, $\log|z|$ no admite una armónica conjugada en $\mathbb{C}^\star$.

Semana 15

Preliminares. Sea $\mathcal{F}$ una familia de funciones analíticas definidas en una región $U \subset \mathbb{C}$. Sea $f_n \in \mathcal{F}$ una sucesión que converge uniformemente en compactos a $f \in \bar{\mathcal{F}}$. Recordemos que la diferenciación respeta la convergencia uniforme en compactos, así que f_n' también converge uniformemente en compactos a f'.

Ejercicio 1. *Pruebe que, si cada $f \in \mathcal{F}$ tiene parte real positiva, entonces $\mathcal{F}$ es normal.*

Solución. Consideremos la familia $\mathcal{G} = \{\varphi \circ f : f \in \mathcal{F}\}$, donde φ es la transformación de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{z-1}{z+1}$$

Por construcción, todo $g \in \mathcal{G}$ toma valores en el disco unitario, así que $\|g|_K\|_\infty \leq 1$ para todo subconjunto compacto $K \subset U$. Entonces $\mathcal{G}$ es una familia normal. Como la normalidad es una propiedad topológica, es invariante bajo homeomorfismos, así que $\mathcal{F}$ también es una familia normal.

Ejercicio 6. *Pruebe que, si cada f_n es inyectiva, entonces f es inyectiva o constante.*

Solución. Supongamos que f no es idénticamente cero. Sea $\gamma \subset U$ un lazo simple homólogo a cero que no pasa por ningún cero de f. Por el ejercicio 17 de la semana 6, tenemos

$$2\pi i \cdot \lim_{n\to\infty} Z(f_n, \gamma) = \lim_{n\to\infty} \int_\gamma \frac{f_n'(z)}{f_n(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = 2\pi i \cdot Z(f, \gamma)$$

Descartando un prefijo de la sucesión f_n, podemos suponer que $Z(f_n, \gamma) = Z(f, \gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Esto implica que γ no puede encierrar más de un cero de f. Pero, como γ es arbitrario, γ podría encerrar otros ceros de f, si los hubiera. Por ende, f tiene a lo más un cero.

Replicando el argumento anterior con la sucesión $f_n - w_0$, donde $w_0 \in \mathbb{C}$ es un número fijo, deducimos que, si f no es idénticamente w_0, entonces $f - w_0$ tiene a lo más un cero. Por ende, si f no es constante, entonces f es inyectiva.

Ejercicio 8. *Pruebe que, si $\mathcal{F}$ es normal, entonces $\mathcal{F}' = \{f' : f \in \mathcal{F}\}$ también es normal.*

Solución. Diremos que un compacto $K \subset U$ es pequeño si está encerrado en un círculo $\gamma \subset U$ homólogo a cero. En este caso, sea $s = d(\gamma, K)$ y sea $r > 0$ el radio de γ. Por la fórmula integral de Cauchy,

$$|f'(z_0)| \leq \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|f(z)|}{|z - z_0|^2}\, |dz| \leq \frac{1}{2\pi} \cdot 2\pi r \cdot \frac{\|f \circ \gamma\|_\infty}{s^2} < \frac{r M_\gamma}{s^2} =: M_K'$$

para todo $z_0 \in K$. Todo punto $z_0 \in U$ esta en el interior de un compacto pequeño, así que todo compacto grande $K \subset U$ se puede cubrir con una cantidad finita de compactos pequeños $K_1, \dots, K_n \subset U$. Entonces $M_K' = \max(M_{K_1}', \dots, M_{K_n}')$ es una cota uniforme para $\|f'|_K\|_\infty$. Por ende, $\mathcal{F}'$ es una familia normal.

Ejercicio 9. *Pruebe que, si f tiene exactamente m ceros en U, entonces f_n tiene por lo menos m ceros para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande.*

Solución. Sea $z_0 \in U$ un cero de f y tomemos un pequeño círculo $\gamma \subset U$ alrededor de z_0. Descartando un prefijo de la sucesión f_n, podemos suponer que $Z(f_n, \gamma) = Z(f, \gamma)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Adicionalmente, cada f_n podría tener otros ceros alejados de los ceros de f. Por ende, cada f_n tiene por lo menos m ceros.

Ejercicio 10. *Sea $c_n \in \mathbb{C}$ una sucesión acotada y considere las series*

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n, \qquad g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z^n}{1 - z^n}$$

Pruebe las siguientes afirmaciones:

(a) *La serie $g(z)$ converge uniformemente en compactos para $|z| < 1$.*

(b) *Si la serie $f(1)$ es convergente, entonces $g(z)$ converge uniformemente en compactos para $|z| \neq 1$.*

(c) *Si la serie $f(1)$ es convergente, entonces*

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} f(z^n), \qquad g(1/z) = -\sum_{n=0}^{\infty} f(z^n)$$

para todo $|z| < 1$.

Solución.

(a) Sea $b_{mn} = 1$ si m es múltiplo de n y sea $b_{mn} = 0$ en caso contrario. Entonces,

$$g(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} c_n z^{nk} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} b_{mn} c_n z^m = \sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m$$

donde los coeficientes a_m están dados por

$$a_m = \sum_{n=1}^{m} b_{mn} c_n$$

En particular, si $C > 0$ es una cota en módulo para c_n, entonces

$$|a_m| \leq \sum_{n=1}^{m} b_{mn} \, |c_n| \leq Cm$$

así que, por el criterio de comparación,

$$|g(z)| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |a_m z^m| \leq \sum_{m=1}^{\infty} Cm \, |z^m| = \frac{Cz}{(1 - |z|)^2}$$

deducimos que $g(z)$ converge uniformemente en compactos para $|z| < 1$.

(b) Pongamos $w = 1/z$. Entonces,

$$\frac{z^n}{1 - z^n} + \frac{w^n}{1 - w^n} = \frac{z^n}{1 - z^n} - \frac{1}{1 - z^n} = -1$$

Asumiendo que $f(1)$ converge, tenemos

$$g(z) + g(w) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n z^n}{1 - z^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n w^n}{1 - w^n} = -\sum_{n=1}^{\infty} c_n = -f(1)$$

Por ende, $g(z)$ converge uniformemente en compactos para todo $|z| \neq 1$.

(c) Independientemente de $f(1)$ converge, tenemos

$$g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^{nk} = \sum_{k=1}^{\infty} f(z^k)$$

Si $f(1)$ converge, entonces también tenemos

$$-g(1/z) = f(1) + g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f(z^k)$$