Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo

Grupo lineal (semana 5)

1. Hallar los puntos fijos de la traslación, la dilatación y la inversión $\frac{1}{z}$ en el plano extendido.
2. Probar que la reflexión $z \mapsto \overline{z}$ no es una transformación de Möbius.
3. Si $S(z) = \frac{z+2}{z+3}$ y $T(z) = \frac{z}{z+1}$. Hallar ST, TS y $S^{-1}T$.
4. Probar que cualquier transformación de Möbius que envia el eje real en si mismo, puede escribirse con coeficientes reales.
5. Mostrar que cualquier transformación de Möbius que no es la identidad, tiene a lo más dos puntos fijos.
6. Probar que cada transformación de Möbius está únicamente determinada por su acción en cualquier colección de tres puntos dados del plano extendido.
7. Considere $z_2, z_3, z_4 \in \hat{\mathbb{C}}$. En cada uno de los cuatro casos, escriba una formula de la transformación de Möbius como una función racional con $S(z_2) = 1$, $S(z_3) = 0$ y $S(z_4) = \infty$. (*a*) $z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ (finitos). (*b*) $z_2 = \infty$. (*c*) $z_3 = \infty$. (*d*) $z_4 = \infty$.
8. Considere $\{z_2, z_3, z_4, w_2, w_3, w_4\} \subset \hat{\mathbb{C}}$ (distintos).
   a) $(z : z_2 : z_3 : z_4) = (Tz : Tz_2 : Tz_3 : Tz_4)$ para todo T.
   b) Existe una única transformación S tal que $S(z_j) = w_j$ para $j = 2, 3, 4$.
   c) $(w_2 : z_2 : z_3 : z_4) \in \mathbb{R}$ si y solo si los cuatro puntos están en una circunferencia en $\hat{\mathbb{C}}$ (rectas o circunferencias del plano $\mathbb{C}$).
   d) Cada transformación de Möbius envía circunferencias en circunferencias (en $\hat{\mathbb{C}}$).
9. Halle la transformación que envia $0, i, -i$ sobre $1, -1, 0$ (respectivamente).
10. Probar para cualquier colección de cuatro puntos distintos se envía por una transformación de Möbius a las posiciones $1, -1, k$ y $-k$, donde k depende de los puntos.
11. Sea $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| < 1\}$. Halle todas las transformaciones de Möbius con $S(\mathbb{D}) = \mathbb{D}$.
12. Considere una función analítica $f \colon G \to \mathbb{C}$, definida en una región de modo que la imagen $f(G)$ está incluida en una circunferencia ¿Es f constante?
13. Probar que cada reflexión[1] envía circunferencias en circunferencias.
14. Refleja el eje imaginario, la recta $x = y$, y la circunferencia $|z| = 1$ en $|z - 2| = 1$.
15. Encuentre la transformación lineal que lleva la circunferencia $|z| = 2$ en $|z + 1| = 1$, el punto -2 en el origen y el origen en i.
16. Encuentre la transformación general que envia la circunferencia $|z| = R$ en si misma
17. Halle una transformación que lleve $|z| = 1$ y $|z - \frac{1}{4}| = \frac{1}{4}$ en circunferencias concéntricas
18. Considere los puntos z_1, z_2, z_3, z_4 en una circunferencia.
    a) Probar que z_1, z_3, z_4 y z_2, z_3, z_4 dan la misma orientación si $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) > 0$
    b) ¿Qué se puede decir de las orientaciones anteriores, cuando $(z_2 : z_1 : z_3 : z_4) > 0$?
19. Verifique que en la circunferencia $|z - a| = R$ con una derminada orientación todos los puntos que están en uno de los lados satisfacen $|z - a| < R$.
20. El ángulo entre dos circunferencias orientadas en un punto de intersección es definido como el ángulo entre las tangentes en ese punto, equipadas con el misma orientación. Probar mediante un razonamiento analítico, en lugar de una inspecció geométrica, que los ángulos en los dos puntos de intersección son opuestos el uno al otro.

San Miguel, 2020.

[1] Una reflexión es un mapeo del plano en sí mismo que es una isometría con un eje como un conjunto de puntos fijos.