Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo
(semana 8)

Funciones analíticas y singularidades

1. Cada una de las siguientes funciones admite una singularidad en $z = 0$. Si es removible, determine la extensión. En el caso de ser un polo, halle la parte singular. Cuando sea una singularidad esencial, describa $\{f(z) \colon 0 < |z - a| < \delta\}$ para $\delta > 0$, arbitrariamente pequeño.
   $f(z) = \frac{\operatorname{sen}(z)}{z}$, $\quad f(z) = \frac{\cos(z)}{z}$, $\quad f(z) = \frac{\cos(z)-1}{z}$, $\quad f(z) = exp(\frac{1}{z})$, $\quad f(z) = \frac{z^2+1}{z(z-1)}$, $\quad f(z) = \frac{1}{1-e^z}$.
2. Sea $f(z)$ una función analítica en una region U, con algún $a \in U$ tal que $f'(a) \neq 0$. Probar que
   $$\frac{2\pi i}{f'(a)} = \int_C \frac{1}{f(z) - f(a)} dz,$$
   donde C es una pequeña circunferencia centrada en $a \in U$.
3. Sea U la región que se obiene al omitir el punto $a \in D$ de un disco abierto D y $f(z)$ una función analitica en U. Analizar la equivalencia de las siguientes afirmaciones
   a) $a \in D$ es una singularidad removible para $f(z)$
   b) $f(z)$ es límitada en alguna vecindad abierta de a
4. Sea $R > 0$ y $U = \{z \colon |z| > R\}$. Se dice que $f \colon U \to \mathbb{C}$ tiene una singularidad removible, polo o esencial en el infinito si $g(z) = f\left(\frac{1}{z}\right)$ tiene en $z = 0$ una singulariad removible, un polo on una singularidad esencial. Si ∞ es un polo para $f(w)$, su orden es el orden del polo $z = 0$ para $f\left(\frac{1}{z}\right)$.
   a) Una función entera tiene una singularidad removible en el infinito si y solo si es constante.
   b) La función entera tiene un polo de orden m en ∞ si y solo si es un polinomio de grado m.
   c) Caracterizar las funciones racionales que tienen una singularidad removible en el infinito.
   d) Caracterizar las funciones racionales que tienen un polo de orden m en el infinito.
5. Describir los ceros de la función $\operatorname{sen}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$.
6. Probar que las funciones e^z, $\operatorname{sen}(z)$ y $\cos(z)$ tienen singularidades esenciales en el infinito.
7. Considere una función analítica en un abierto conexo U. Probar que por cada $a \in U$ existe $R > 0$ de modo que $\{z \colon |z - a| < R\} \subset U$ y esta subconjunto se cumple la siguiente igualdad
   $$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z - a)^n.$$
   Además, el radio de convergencia de la serie es $\geq R$.
8. Sea $f(z)$ un polinomio en un disco abierto $B(a, R) = \{z \colon |z-a| < R\}$, cuyas raies son $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Suponga que la curva cerrada γ no contiene ninguna raiz, analizar el valor de verdad de la siguiente afirmación
   $$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{m} \eta(\gamma, a_j)$$
   ($\eta(\gamma, a)$ denota el indice de a respecto a la curva γ).
9. Considere el problema 8 cuando todas las raices tienen multiplicidad uno y $f(z)$ sea una función analítica. ¿Qué se puede afirmar en caso que alguna de las raices de la función analítica tenga multiplicidad > 1?
10. Probar que si $z = a$ es una singularidad esencial para $f(z)$, entonces para cada $\delta > 0$ la clausura del conjunto $\{f(z) \colon 0 < |z - a| < \delta\}$ es todo el plano $\mathbb{C}$ (Casorati-Weierstrass).
11. Probar que una singularidad aislada de $f(z)$ no puede ser un polo de $exp(f(z))$.
12. Determinar las regiones donde $f(z) = \frac{1}{sen(\frac{1}{z})}$ es analítica.
13. Un automorfismo del abierto U es una biyección analitica $f : U \to U$ cuya inversa es analítica. Probar que los autormorfismos de $\mathbb{C}$ tienen la forma $f(z) = az + b$, donde a, b son constantes, $a \neq 0$.

San Miguel, 2020.