Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo
(semana 9)

Funciones analíticas y ceros

1. Determine el mayor disco abierto centrado en el origen donde $f(z) = z^2 + z$ es inyectiva.
2. Utilice la representación $f(z) = w_0 + \zeta(z)^n$ para $cos(z)$ con $z_0 = 0$. Determine explicitamente $\zeta(z)$.
3. Probar que el conjunto de los ceros de la función
$$\operatorname{sen}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$$
admite un punto de acumulación en $\mathbb{C}$.
4. Probar que la función $f(z) = e^z - z$ tiene un cero simple en cada franja abierta semi-infinita
$$\{z = x + iy \colon x > 0, 2n\pi < y < 2(n+1)\pi\},$$
y no tiene otros ceros.
5. Si $f(z)$ es analítica en una vecindad del origen y $f'(0) \neq 0$, pruebe la existencia de una función analítica $g(z)$ tal que
$$f(z^n) = f(0) + (g(z))^n,$$
en una vecindad del cero.
6. Sea $p(z) = z^3 + ikz - 1$, donde $0 < k < 1$. Probar que las raices de p estan en anillo $\{z \colon \frac{1}{2} < |z| < 2\}$. ¿Existe algún cuadrante que no contiene raices de p?
7. Sea $p(z)$ un polinomio y $a_1, a_2, \ldots, a_k$ las raices, con m_j el orden de a_j. Probar que
$$p(z) = c(z - a_1)^{m_1}(z - a_2)^{m_2} \ldots (z - a_k)^{m_k}$$
para alguna constante c y la suma $m_1 + m_2 + \cdots + m_k$ coincide con el grado del polinomio.
8. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica en un abierto U. Analizar la equivalencia de los items.
   a) $f \equiv 0$ (es identicamente cero)
   b) Existe $a \in U$ tal que la derivada $f^{(n)}(a) = 0$, para cada $n \geq 0$.
   c) $\{z \colon f(z) = 0\}$ tiene un punto de acumulación.
9. Estudie el item anterior asumiendo que U es un abierto conexo.
10. Sea $f : U \to \mathbb{C}$ una función analítica no-constante en un abierto conexo U. Probar que si $f(a) = 0$, entonces existe $r > 0$ de modo que $B(a, r) \subset U$ y $f(z) \neq 0, \forall 0 < |z - a| < r$

11. Considere una función entera $f(z)$. Si existen las constante $M > 0$, $r > 0$ y entero $m > 0$ tal que
$$|z| > r \implies |f(z)| \leq M|z|^m,$$
entonces $f(z)$ es un polinomio de grado $\leq m$.
12. Sean $f(z)$ y $g(z)$ dos funciones analiticas en un abierto conexo U de modo que por cada z se tiene $f(z)g(z) = 0$. Probar $f \equiv 0$ o bien $g \equiv 0$.
13. Si $f(z)$ es analítica y no-constate en una región U, entonces $|f(z)|$ no tiene un máximo en U
14. Probar el «princípio del máximo» utilizando la formula integral de Cauchy.
15. Considere $\gamma \subset D$ es una curva cerrada en un disco abierto D, donde $f(z)$ es analítica.
    a) Probar que el índice $\eta(\gamma, z) = 0$ siempre que
    $$d(z, \partial U) < \frac{1}{2} d(\gamma, \partial U)$$
    b) Para cada $w_0 \in \mathbb{C}$, analice el número de elementos del conjunto
    $$\{z \in D \colon f(z) = w_0, \eta(\gamma, z) \neq 0\}$$
16. Si $f(z)$ es analítica e inyectiva en la region U, pruebe que la derivada $f'(z) \neq 0, \forall z \in U$
17. Analice las siguientes afirmaciones
    a) Cada función analitica definida en una región envia conjuntos abiertos en abiertos
    b) Cada función analitica definida en una región envia conjuntos cerrados en cerrados
    c) $f(z) = \mathrm{Re}(z)$ satisface (a) y (b)
18. Estudie el ítem anterior para el caso de una biyección analítica.
19. Sea $f(z) = (z-a)^m g(z)$ con $g(z)$ analítica en U y $g(z) \neq 0, \forall z \in U$. Sea γ un ciclo que es homologo a cero en U y $a \in U$ que no está en γ. Probar que
$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \eta(\gamma, a) m$$
20. Sea U un conjunto simplemente conexo (su complemento en el plano extendido es conexo) y $a_1, \ldots, a_n$ en U. Sea $f(z)$ analítica en $U^* = U \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ y C_k una circunferencia pequeña centrada en a_k y considere
$$b_k = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_k} f(z) dz.$$
Probar que existe una función analítica $H(z)$ en U^* tal que
$$H'(z) = f(z) - \sum_k \frac{b_k}{z - a_k}.$$

San Miguel, 2020.