Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo

Espacios métricos (semana 4)

1. En el espacio métrico (X, d), probar que
$$\rho(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$$
es una distancia en X.
2. Las distancias d y ρ se dice que son equivalentes en X si cada una genera el mismo conjunto de abiertos. Demuestre que d y ρ son equivalentes si y solo si para cada $\epsilon > 0$ existe δ tal que $d(x,y) < \delta$ implica $\rho(x,y) < \epsilon$, y viceversa. Verifique las condiciones en el ejercicio 1.
3. Analizar si la equivalencia entre dos metricas es lo mismo que afirmar que una métrica es continua repecto a la otra, y viceversa.
4. Considere el conjunto A de los números complejos cuyas partes real e imaginaria son racionales. Describrir el interior, la clausura y la fontera de A.
5. Un conjunto se dice discreto cuanto todos sus elementos son discretos. Probar que cada conjunto discreto de $\mathbb{C}$ es contable: finito o biyectivo con los naturales (numerable).
6. Un punto de acumulación de A es el límite de una sucesión en A, pero formada por infinitos puntos. Probar que $A' = \{x\colon x \text{ es un punto de acumulación de } A\}$ es cerrado.
7. Probar que A es cerrado (abierto) si y solo si A es igual a su clausura $\overline{A}$ (interior $int(A)$).
8. Considere $A \subset X$ en el espacio (X, d). Probar que G es abierto en el espacio métrico inducido (A, d) si y solo si $G = A \cap B$ para algún abierto B en (X, d).
9. Probar que los intervalos son los unicos subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ (A es un intervalo si por cada $a, b \in A$ el segmento $[a, b] = \{x\colon a \leq x \leq b\}$ está incluido en A).
10. Probar que la unión de dos regiones es una región si y solo si tienen algún punto en común (una región es un abierto conexo y no vacío).
11. Considere los conjuntos $A = \{(0, y)\colon -1 \leq y \leq 1\}$ y $B = \{(x, \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right))\colon x > 0\}$ ¿La unión $A \cup B$ es conexa?
12. Consider $E = \{(x, \frac{1}{n})\colon 0 \leq x \leq 1, n \in \mathbb{N}\} \cup ([0,1] \times \{0\})$. Describir las componentes de E (una componente es un conjunto conexo maximal respecto a la inclusión).
13. Considere una sucesión de Cauchy, analizar la convergencia de la sucesión cuando admita alguna subsucesión convergente.
14. Utilizar el límite inferior para probar que cada sucesión limitada admite una subsucesión convergente.
15. Demuestre que la propiedad Heine-Borel también se puede expresar de la siguiente manera: cada colección de conjuntos cerrados con una intersección vacía contiene una subcolección finita con intersección vacía.
16. Utilice la compacidad para demostrar que un conjunto cerrado de números reales tiene un máximo.
17. Si $K_1 \supset K_2 \supset \cdots$ es una sucesión decresiente de compactos no vacios, probar que la intersercción $\cap_n K_n$ es no vacia.
18. Considere las sucesiones $x = (x_n)$ de soporte finito ($x_k \neq 0$ solo para un conjunto finito) y defina la distancia $d(x,y) = \text{máx}\{|x_n - y_n|\}$. ¿Es este espacio métrico completo? Analizar si este espacio es totalmente acotado.
19. Analizar si la unión finita de conjuntos compactos es compacto.
20. Construir un homeomorfismo entre el disco $|z| < 1$ y todo el plano $\mathbb{C}$.
21. ¿Cuál de las siguientes funciones son uniformemente continuas en la recta real entera: $\operatorname{sen}(x)$, $x\operatorname{sen}(x)$, $x\operatorname{sen}(x^2)$ $\sqrt{|x|}\operatorname{sen}(x)$?

San Miguel, 2020.