Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo
(semana 7)

Formula integral de Cauchy

1. Calcular
$$\int_\gamma \frac{dz}{(z-1)(z+i)(z-i)},$$
donde γ es una curva simple para cada uno de los siguientes casos
   a) El punto 1 está en el interior de γ, pero $\pm i$ están en el exterior de la curva.
   b) Los puntos i y 1 están en el interior de γ y $-i$ está en el exterior de la curva.
   c) Los tres puntos 1, i y $-i$ están en el interior de γ.
   (El exterior (resp. interior) de una curva simple es la componente conexa (resp. limitada) ilimitada que contiene el infinito).
2. Evaluar las siguientes integrales.
   a) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^z}{z+1}dz, \quad \gamma : z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   b) $\displaystyle\int_\gamma \frac{z^2+3z-1}{(z+3)(z-2)}dz, \quad \gamma : z(t) = 1+2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   c) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{\pi z}}{z^2+1}dz, \quad \gamma : z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   d) $\displaystyle\int_\gamma z^m(1-z)^n dz, \quad \gamma : z(t) = 2e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   e) $\displaystyle\int_\gamma \frac{e^{iz}}{z^2}dz, \quad \gamma : z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   f) $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z-a}, \quad \gamma : z(t) = a+re^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
   g) $\displaystyle\int_\gamma \frac{sen(z)}{z^3}dz, \quad \gamma : z(t) = e^{it}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$
3. Calcular
$$\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z}dz + \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}dz.$$
4. Calcular
$$\int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+1}$$
por medio de una descomposición del integrando en fracciones parciales.
5. Calcular
$$\int_{|z|=\rho} \frac{|dz|}{|z-a|^2}$$
bajo la suposición que $|a| \neq \rho$ (usar $z\bar{z} = \rho^2$ y $|dz| = -i\rho\frac{dz}{z}$).
6. Evaluar la integral de $\frac{e^{(z^2-1)}}{z^2-4}$ sobre el cuadrado de vertices $1+i$, $-1+i$, $-1-i$ y $1-i$ trazado 10 veces en el sentido antihorario.
7. Sea $n \geq 1$ un entero.
   a) Verificar la identidad
$$\frac{z^n}{z-a} = z^{n-1} + a\frac{z^{n-1}}{z-a}.$$

b) Sea γ una curva cerrada simple con orientación positiva tal que a está en su interior. Usar inducción y la parte $(7a)$ para probar

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{z^n}{z-a} = a^n.$$

8. Considere una curva cerrada simple γ, positivamente orientada.
   a) Probar
   $$\int_\gamma \bar{z}dz = 2iA,$$
   donde A es el área de la regíon limtada por γ.
   b) Use $(8a)$ para calcular $\int_\gamma \mathrm{Re}(z)dz$ y $\int_\gamma \mathrm{Im}(z)dz$.
9. Sea $f(z)$ una función analítica en una vecindad abierta de $D_1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| \leq 1\}$. Para cada $a \in D_1$, halle el valor
   $$\int_{\partial D_1} \frac{f(z)}{z - \frac{1}{a}}dz.$$
10. Probar que cada curva cerrada $\gamma \subset E$ en el dominio de una función analítica f satisface
    $$\int_\gamma f(z)dz = 0,$$
    siempre que E sea estrellado: existe un ponto $z_0 \in E$ de modo que cada elemento $z \in E$ genera un segmento $[z_0, z] = \{(1-t)z_0 + tz : 0 \leq t \leq 1\} \subset E$ (construya una primitiva).
11. Probar la siguientes afirmaciones.
    a) Sea una $f(z)$ continua en la región U. Si la integral a lo largo de la frontera de cualquier retangulo cerrado en U es cero, entonces $f(z)$ es analítica en U.
    b) Si $f(z)$ es analítica en la región U, entonces $f(z)$ tiene derivadas de todos los ordenes y cada una también es analítica.
    c) Cada función analítica y acotada en todo el plano es constante.
    d) Cada polinomio $P(z)$ de grado mayor que uno admite al menos una raiz: existe z_0 con $P(z_0) = 0$.
12. Probar que una función analítica en todo el plano (entera) que satisface $|f(z)| < |z|^n$ para algún n y todo z en el complemento de un disco compacto se reduce a un polinomio.
13. Si $f(z)$ es analítica y $|f(z)| \leq M$ para $|z| \leq R$, hallar una cota superior para la derivada $|f^{(n)}(z)|$ en $|z| \leq \rho < R$.
14. Para función analítica $f(z)$ analice la siguiente afirmación: «existe z donde las derivadas satisfacen $|f^{(n)}(z)| > n!n^n$».
15. Considere una función analítica en una vecindad abierta del rectangulo $R = [a, b] \times [c, d]$. Mostrar que la integral de linea en la frontera ∂R satisface
    $$\frac{1}{2i}\int_{\partial R} f(z)dz = \int\int_R \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}dxdy,$$
    donde la integral de la derecha denota la integral doble, usual.
16. Sea $f(z)$ una función analítica en una región $\tilde{D}$ que se obtiene de un disco D al omitir un número finito de puntos interiores w_i. Asumir que $\lim_{z\to w_j}(z - w_j)f(z) = 0, 1 \leq j \leq n$ y $a \notin \{w_1, \ldots, w_n\}$. Si a no está en una curva cerrada γ, probar
    $$\eta(\gamma, a)f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}dz,$$
    donde $\eta(\gamma, a)$ es el índice de a con respecto a γ.
17. Utilizar el índice de un punto respecto a una curva cerrada para probar que el complemento de cada curva cerrada simple tiene al menos dos componentes (teorema de la curva de Jordan)

San Miguel, 2020.