Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo (semana 11)

Residuos e integrales impropias (parte A)

1. Calcular los polos y los residuos de las siguientes funciones
   (a) $\dfrac{1}{4z^2+10z+4}$, (b) $\dfrac{z^4+1}{z^2(4z^2+10z+4)}$, (c) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$
2. Usar residuos para mostrar que $2\pi\left(\frac{7}{\sqrt{3}}-4\right)$ es el valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{cos(2\theta)}{2+cos(\theta)}d\theta$.
3. Utilizar los residuos para mostrar que $\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es igual a la integral
$$\int_0^{\pi/2}\frac{cos(2\theta)}{2+cos^2(\theta)}d\theta.$$
4. Probar que para todo $0<|a|<1$ se cumple que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+acos(\theta)}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.
5. Usar el teorema de los residuos en el semiplano $\{y\leq 0\}$ para mostrar que
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
6. Calcular, por medio de residuos, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.
7. Calcular las siguientes integralas
   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$
   b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$
   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$
   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$
   e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{cos(x)-1}{x^2}dx$
   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(2x)dx}{1-2acos(x)+a^2}$, donde $a^2<1$.
   g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a+cos(x))^2}$, donde $a>1$.
8. Verificar las siguientes identidades
   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(4x)}{x^2+1}=\pi e^{-4}$.
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2cos(2x)}{(x^2+1)^2}=(\pi/2)e^{-2}$.
   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(x)}{(x^2+1)^2}=(\pi/e)$.
   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}=(2\pi)/3$.
9. Usar el lema de Jordan para mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xsen(x)}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{e^a}$, donde $a>0$.
10. Mostrar que el valor principal de la siguiente integral impropia satisface
$$v.p.\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x-1}=0.$$

San Miguel, 2020.