# Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

## Análisis Complejo

### Función analítica (semana 2)

1. Si $g(w)$ y $f(z)$ son analíticas, probar que $g(f(z))$ también es analítica.
2. Verificar las ecuaciones de Cauchy-Riemann para las funciones $z^2$ y $z^3$.
3. Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.
4. Probar que la función $f(z) = \sqrt{|xy|}, z = x+iy$ satisface la ecuaciones de Cauchy-Riemann en el origen, pero no existe la derivada $f'(0,0)$.
5. Probar que una función analítica no puede tener módulo constante sin reducirse a una constante.
6. Demostrar rigurosamente que las funciones $f(z)$ y $\overline{f(\bar{z})}$ son simultaneamente analíticas.
7. Probar que las funciones $u(z)$ y $u(\overline{z})$ son simultaneamente armónicas: $\triangle u = 0$.
8. Probar que las funciones armónicas, satisfacen formalmente la ecuación
$$\frac{\partial^2 u}{\partial z \partial \overline{z}} = 0.$$
9. Demostrar que si todos los ceros de un polinomio $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n, a_n \neq 0$ $(n \geq 1)$ se encuentran un semiplano, entonces los ceros de la derivada $P'(z)$ están en el mismo semiplano
10. Probar que una función racional $R(z) = P(z)/Q(z)$ ($P(z)$ y $Q(z)$ son polinomios sin ceros en común) de orden $p$ tiene $p$ ceros y $p$ polos. Además, cada ecuación $R(z) = a$ tiene exactamente $p$ raíces.
11. Escriba la siguientes funciones
$$\frac{z^4}{z^3 - 1} \quad \text{y} \quad \frac{z^4}{z+i}$$
como una suma de fracciones parciales.
12. Definir la función exponencial de $z = x + iy$ en la base $e$ por medio de la identidad:
$$e^z = e^x\big(\cos(y) + i\mathrm{sen}(y)\big).$$
Probar la función exponencial es biyectiva desde la franja $B = \{z\colon -\pi < \mathrm{Im}(z) \leq \pi\}$ sobre $\mathbb{C}$. ¿ Es inyectiva en la franjas horizontales de anchura menor que $2\pi$? Describir la imagen de la recta $y = mx$.
13. Para cada $z \neq 0$ se define el logaritmo de $z$, $\log(z)$ como cualquier número complejo $w$ tal que $e^w = z$. Probar que
$$\log(z) = Log|z| + i\arg(z),$$
donde $Log\colon (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ es la inversa de la función exponencial ¿Es la diferencia entre dos logaritmos complejos de $z$ un multiplo entero de $2\pi$? En este contexto, se define el logaritmo principal haciendo uso del argumento principal:
$$\mathrm{Log}(z) = Log|z| + i\mathrm{Arg}(z).$$
¿Es el logaritmo principal una función discontinua en la parte negativa del eje real?
14. Las funciones trigonometricas se define como
$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \quad \text{y} \quad \mathrm{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad z \in \mathbb{C}.$$
¿De entre las funciones $cos(z)$ y $sen(z)$, alguna es acotada?
15. Probar que la función $cos(z)$ envia la franja $B = \{z\colon 0 < \mathrm{Re}(z) < \pi\}$ sobre el dominio $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}\colon |x| \geq 1\}$ de forma injectiva y conforme.
16. Probar que la función $\arctan(z) = tan^{-1}(z)$ con $tan(z) = \frac{cos z}{sen z}$ tiene una rama analítica en el disco unitario. ¿Cómo son todas sus ramas analíticas?

San Miguel, 2020.