Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo (semana 11 y 12)

Residuos e integrales impropias (parte A)

1. Calcular los polos y los residuos de las siguientes funciones
   (a) $\dfrac{1}{4z^2+10z+4}$, (b) $\dfrac{z^4+1}{z^2(4z^2+10z+4)}$, (c) $\dfrac{1}{(z^2+1)(z^2+4)}$
2. Usar residuos para mostrar que $2\pi\left(\frac{7}{\sqrt{3}}-4\right)$ es el valor de $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{cos(2\theta)}{2+cos(\theta)}d\theta$.
3. Utilizar los residuos para mostrar que $\pi\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es igual a la integral
$$\int_0^{\pi/2}\frac{cos(2\theta)}{2+cos^2(\theta)}d\theta.$$
4. Probar que para todo $0<|a|<1$ se cumple que $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+acos(\theta)}=\frac{2\pi}{\sqrt{1-a^2}}$.
5. Usar el teorema de los residuos en el semiplano $\{y\leq 0\}$ para mostrar que
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{x^4+1}dx=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.$$
6. Calcular, por medio de residuos, la integral impropia $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}dx$.
7. Calcular las siguientes integralas
   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^4+1}$
   b) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{x^2}{x^4+x^2+1}dx$
   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2-x+2}{x^4+10x^2+9}dx$
   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2}{(x^2+1)^3}dx$
   e) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{cos(x)-1}{x^2}dx$
   f) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(2x)dx}{1-2acos(x)+a^2}$, donde $a^2<1$.
   g) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(a+cos(x))^2}$, donde $a>1$.
8. Verificar las siguientes identidades
   a) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(4x)}{x^2+1}=\pi e^{-4}$.
   b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x^2cos(2x)}{(x^2+1)^2}=(\pi/2)e^{-2}$.
   c) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{cos(x)}{(x^2+1)^2}=(\pi/e)$.
   d) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^6+1}=(2\pi)/3$.
9. Usar el lema de Jordan para mostrar que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{xsen(x)}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{e^a}$, donde $a>0$.

10. Mostrar que el valor principal de la siguiente integral impropia satisface
$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x-1} = 0.$$

PARTE B

1. Para un entero $k \geq 1$ probar que
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}} = \frac{\pi}{2^{2k}} \binom{2k}{k}.$$
2. Recordar que la transformada de Fourier de $f(x)$ puede ser definida como
$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$
Probar que si $\sqrt{2\pi} f(x) = e^{\frac{-x^2}{2}}$ entonces $\hat{f}(t) = e^{\frac{-t^2}{2}}$ (utilizar rectangulos en lugar de circuferencias).
3. Sea $f(z)$ una función analítica en $D^*(z_0, R) = \{z \colon 0 < |z - z_0| < R\}$. Considere el siguiente arco de circunferencia $\gamma_r : z = z_0 + re^{it}, \theta_1 \leq t \leq \theta_2$. Probar que si z_0 es un polo simple para $f(z)$, entonces
$$\int_{\gamma_r} f(z)dz \to i(\theta_2 - \theta_1) Res(f, z_0), \quad \text{cuando} \quad r \to 0.$$
($f(z) - \frac{Res(f,z_0)}{(z-z_0)}$ es analítica en $D(z_0, R) = \{z \colon |z - z_0| < R\}$)
4. Probar que por un cambio de variable es posible obtener
$$\int_0^{2\pi} (cos(t))^{2k} dt = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{k+1}}$$
5. Probar que para cualquier $a \in \mathbb{R}$ el valor principal satisfce
$$v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{sen(x)}{x-a} dx = \pi cos(a), \quad v.p. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{cos(x)}{x-a} dx = -\pi sen(a).$$
6. Considere $0 < u + 1 < v$. Probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{x^u}{1+x^v} dx = \frac{\pi}{vsen\left(\frac{(u+1)\pi}{v}\right)}.$$
(usar el cambio $y = x^v$ y trabajar con $g(z) = z^{a-1}\left(\frac{1}{1+z}\right)$ con $a = \frac{u+1}{v}$ que esta en el intevarlo abierto $(0,1)$).
7. Usar el cambio $t = e^x$ para probar que
$$\int_0^{+\infty} t^{a-1} f(t) dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ax} f(e^{ax}) dx$$
   a) Describir las singularidades de $f(z) = \frac{e^{bz}}{1+e^z}$
   b) Encontrar las singularidades en el rectangulo de vertices $-S, R, R + 2\pi i$ y $-S + 2\pi i$
   c) Calcular el residuo en el polo simple
8. Usar lo anterior para probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{1+u} du = \frac{\pi}{sen(a\pi)}$$
9. Probar que
$$\int_0^{+\infty} \frac{log(x)}{(1+x^2)^2} dx = \frac{-\pi}{4}$$

San Miguel, 2020.