Pontificia Universidad Católica del Perú

Escuela de Posgrado

Análisis Complejo

Sucesiones y series
(semana 3)

1. Probar que una sucesión de Cauchy es acotada.
2. Considere que $\lim_{n\to\infty} z_n = A$. ¿Es verdad que
$$\lim_{n\to\infty} \frac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n} = A?$$
Justifique.
3. Probar que la suma de una serie absolutamente convergente no cambia si los terminos son reordenados.
4. Analizar la convergencia y la convergencia absoluta de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+i}.$$
5. Discutir la convergencia uniforme de la serie
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1+nx^2)}$$
para valores reales $x \in \mathbb{R}$.
6. Considere las series absolutamente convergentes
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = A \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} b_n = B.$$
Probar que la serie $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} c_k$, dada por la regla $c_k = \displaystyle\sum_{n=0}^{k} a_n b_{k-n}$ converge absolutamente al producto AB.
7. Probar que la función
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{2n-1}}{2n-1}$$
no solo es analítica e inyectiva en el disco unitario $\mathbb{D} = \{z \colon ||z|| < 1\}$, sino también que la imagen $f(\mathbb{D}) = \{z \colon \frac{-\pi}{4} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{4}\}$.
8. Expandir
$$\frac{2z+3}{z+1}$$
en potencias de $z-1$ y encuentre el radio de convergencia.
9. Hallar el radio de convergencia de las siguientes series
$$\sum_n n^p z^n. \quad \sum_n \frac{z^n}{n!}. \quad \sum_n z^{n!}.$$
10. Para que valores de z la serie
$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{1+z}\right)^n$$
es convergente?

San Miguel, 2020.