Variedades Complejas (tarea 2)

Eduardo León (梁遠光)

Setiembre 2020

Ejercicio 1. Muestre que $\mathbb{C}^n$ no tiene subvariedades compactas de dimensión positiva. (En particular, no existe un análogo complejo del teorema de encaje de Whitney.)

Solución. Sea $X \subset \mathbb{C}^n$ una subvariedad compacta y conexa. Sea $z : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ una función coordenada. Por compacidad, $|z|$ se maximiza en algún punto de X. Tomemos una carta de X centrada en dicho punto de referencia, con coordenadas en una bola $B \subset \mathbb{C}^d$, y denotemos por $f : B \to \mathbb{C}$ la representación de $z \mid X$ en esta carta.

Tomemos una recta compleja $L \subset \mathbb{C}^d$ que pasa por el punto de referencia. Entonces $B_L = B \cap L$ es una bola unidimensional en $L \cong \mathbb{C}$ y la restricción $f_L = f \mid B_L$ es una función holomorfa de una variable cuyo módulo $|f_L|$ alcanza un valor máximo. Por el principio del módulo máximo, f_L debe ser constante. Puesto que todas las rectas L pasan por un punto común, f es constante.

Sea $Y \subset X$ la intersección de X con el hiperplano $z = b$, donde $b \in \mathbb{C}$ es el valor constante de f. Por el argumento anterior, Y es un subconjunto abierto de X. Por definición de topología relativa, Y es también un subconjunto cerrado de X. Puesto que X es conexo e Y es no vacío, tenemos $Y = X$, es decir, X está contenida en el hiperplano $z = b$. Repitiendo este argumento usando las demás $n - 1$ coordenadas de $\mathbb{C}^n$, demostramos que X es un punto.

Ejercicio 2. (Teorema de la función implícita) Considere el espacio $\mathbb{C}^m$ con coordenadas $z = (z^1, \dots, z^m)$ y el espacio $\mathbb{C}^n$ con coordenadas $w = (w^1, \dots, w^n)$. Sea $f : U \to \mathbb{C}^n$ una aplicación holomorfa definida en un subconjunto abierto $U \subset \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n$. Suponga que $(z_0, w_0) \in U$ es un punto en el cual

$$\det \frac{\partial f}{\partial w} \neq 0$$

Demuestre que existen un abierto encajado $Z \times W \subset U$ y una aplicación holomorfa $g : Z \to W$ tales que $f(z, w) = f(z_0, w_0)$ si y sólo si $g(z) = w$.

Solución. Asumiremos como cierta la versión real[1] del teorema. Reinterpretemos $df : \mathbb{C}^m \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ como una transformación $\mathbb{R}$-lineal $df_{\mathbb{R}} : \mathbb{R}^{2m} \times \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$. La manera obvia de hacer esto es reinterpretar cada entrada compleja $z = a + ib$ del jacobiano como la matriz

$$\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$$

Tras complejificar los espacios vectoriales $\mathbb{R}^{2m} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^{2m}$ y $\mathbb{R}^{2n} \otimes \mathbb{C} = \mathbb{C}^{2n}$, podemos diagonalizar simultáneamente todas las matrices 2×2 arriba mencionadas. El resultado es

$$\begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \bar{z} \end{bmatrix}$$

Reordenando las filas y columnas y denotando $f_z = \partial f / \partial z$, $f_w = \partial f / \partial w$ por claridad notacional (pero recordando que son matrices), las entradas del jacobiano real complejificado y diagonalizado son

$$df_{\mathbb{R}} \otimes 1 = \begin{bmatrix} f_z & f_w \end{bmatrix} \otimes 1 = \begin{bmatrix} f_z & 0 & f_w & 0 \\ 0 & \overline{f_z} & 0 & \overline{f_w} \end{bmatrix}$$

[1] Esto es hacer trampa, porque es en la versión real del teorema donde está toda la dificultad.

Entonces $df_{\mathbb{R}} \otimes 1$ es una matriz de rango total. Por ende, $df_{\mathbb{R}}$ es una matriz de rango total. Usando la versión real del teorema de la función implícita, existe una aplicación $g : Z \to W$ con todas las propiedades requeridas excepto una: g es meramente de clase C^∞, no necesariamente holomorofa.

Puesto que f es una función holomorfa, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left[f(z, g(z))\right] = \cancel{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z, g(z))} + \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} + \cancel{\frac{\partial f}{\partial \bar{w}} \cdot \frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}}} = \frac{\partial f}{\partial w} \cdot \frac{\partial g}{\partial \bar{z}} = 0$$

Pero, como $\partial f / \partial w$ es una matriz invertible, esto implica que $\partial g / \partial \bar{z} = 0$. Es decir, g es holomorfa.

Ejercicio 3. En el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$, un polinomio homogéneo $F(z_0, \ldots, z_n)$ no define una función, pues su valor en el punto $[a_0 : \cdots : a_n]$ no siempre está bien definido. Sin embargo, el conjunto de ceros en $\mathbb{CP}^n$ de un polinomio homogéneo $F(z_0, \ldots, z_n)$ sí está bien definido, ya que

$$F(z_0, \ldots, z_n) = 0 \iff F(tz_0, \ldots, tz_n) = t^k F(z_0, \ldots, z_n)$$

para todo $t \in \mathbb{C}^\star$. El conjunto de ceros de una cantidad finita de polinomios homogéneos en $\mathbb{CP}^n$ se denomina una *variedad proyectiva compleja*. Una variedad definida por un único polinomio homogéneo de grado k se denomina una *hipersuperficie de grado k*. Muestre que la hipersuperficie $Z(F)$ definida por $F(z_0, z_1, z_2) = 0$ es una variedad compleja suave (manifold) si las derivadas parciales $\partial F / \partial z_i$ no se anulan simultáneamente en ningún punto de $Z(F)$.

Solución. Sea $p \in \mathbb{C}^3$ un punto distinto del origen. Supongamos que el polinomio homogéneo $F(z_0, z_1, z_2)$ se anula en p, pero alguna de las derivadas parciales $\partial F / \partial z_i$ no se anula en p. Sea $U \subset \mathbb{CP}^2$ una vecindad afín del punto $[p] \in \mathbb{CP}^2$ y sea H la parte de $Z(F)$ contenida en U. Finalmente, sean $\tilde{U}, \tilde{H}$ las preimágenes de U, H bajo la proyección canónica $\pi : \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{CP}^2$.

Utilizando esta información, construiremos un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & T_1\mathbb{C}^\star \arrow[r] \arrow[d] & T_1\mathbb{C}^\star \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_p\tilde{H} \arrow[r] \arrow[d] & T_p\tilde{U} \arrow[r] \arrow[d] & T_0\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & T_{[p]}H \arrow[r] \arrow[d] & T_{[p]}U \arrow[r] \arrow[d] & T_0\mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

cuyas filas y columnas son todas exactas:

- El cuadrado superior izquierdo conmuta porque la incrustación $\tilde{\imath} : \tilde{H} \to \tilde{U}$ es $\mathbb{C}^\star$-equivariante, así que respeta los campos tangentes a las órbitas generados por la acción del álgebra de Lie $T_1\mathbb{C}^\star$.
- El cuadrado superior derecho conmuta porque $\ker \pi_p = T_1\mathbb{C}^\star$ está incluido en $\ker dF_p = T_p\tilde{H}$. Esto último se debe a que F es constante sobre la órbita $[p]$.
- El cuadrado inferior izquierdo conmuta porque $\tilde{\imath}$ induce una incrustación $\iota : H \to U$.
- El cuadrado inferior derecho conmuta por una razón un tanto elaborada. Recordemos que existe un biholomorfismo $\mathbb{C}^\star$-equivariante entre $\tilde{U}$ y el producto cartesiano $\mathbb{C}^\star \times U$, donde $\mathbb{C}^\star$ actúa de manera trivial sobre el segundo factor U. Este biholomorfismo induce una manera canónica de expresar todo vector tangente en $T_p\tilde{U}$ como suma de un vector tangente en $T_{[p]}U$ y un vector tangente a la órbita, ahora identificada con el factor $\mathbb{C}^\star$. Pero F es constante sobre la órbita, así que dF_p se anula sobre la parte tangente a ella, así que dF_p está determinado por cómo actúa sobre $T_{[p]}U$.

- Las dos primeras columnas son exactas porque la proyección canónica $\pi : \tilde{U} \to U$ es una sumersión cuyas fibras son precisamente las órbitas de la acción de $\mathbb{C}^\star$.
- La tercera columna es exacta porque, si utilizamos la representación local de $\tilde{U}$ que lo identifica con $\mathbb{C}^\star \times U$, entonces la representación local de $\mathrm{id} : T_0\mathbb{C} \to T_0\mathbb{C}$ es el morfismo identidad.
- La primera fila es exacta porque $\mathrm{id} : T_1\mathbb{C}^\star \to T_1\mathbb{C}^\star$ es el morfismo identidad.
- La segunda fila es exacta porque el diferencial $dF_p : T_p\tilde{U}_0 \to T_0\mathbb{C}$ es sobreyectivo (por hipótesis, todo $p \in \tilde{H}$ es un punto regular de F) y su núcleo es, por definición, $T_pH = \ker dF_p$.
- Entonces, por el lema de los nueve, la tercera fila es exacta. Pero esto implica que $Z = Z(F)$ tiene un espacio tangente unidimensional bien definido en $[p]$, ya que

  $$\dim_{\mathbb{C}} T_{[p]}Z = \dim_{\mathbb{C}} T_{[p]}H = \dim_{\mathbb{C}} T_{[p]}U - \dim_{\mathbb{C}} T_0\mathbb{C} = 2 - 1 = 1$$

  Entonces p no es un punto singular de $Z(F)$. Generalizando, si las derivadas parciales $\partial F/\partial z_i$ no se anulan simultáneamente para ningún punto $[p] \in Z$, entonces Z es una variedad compleja suave.

Ejercicio 4. Sea V un espacio vectorial complejo de dimensión $n \in \mathbb{N}$. Como una generalización del espacio proyectivo $\mathbb{P}(V)$, identificado de manera natural con el conjunto de rectas en V que pasan por el origen, uno define el *grassmanniano* $\mathrm{Gr}_k(V)$ como el espacio de k-planos en V que pasan por el origen. Esto es,

$$\mathrm{Gr}_k(V) = \{W \subset V : \dim W = k\}$$

En particular, $\mathrm{Gr}_1(V) = \mathbb{P}(V)$ y $\mathrm{Gr}_{n-1} V = \mathbb{P}(V^\star)$.

Para mostrar que $\mathrm{Gr}_k(V)$ es una variedad compleja, se puede asumir que $V = \mathbb{C}^n$. Todo $W \in \mathrm{Gr}_k(V)$ es generado por las filas de una matriz $k \times n$ de rango k. Denote por $M_{k,n}$ el conjunto de tales matrices y observe que $M_{k,n}$ es un subconjunto abierto del espacio de todas las matrices $k \times n$. Este último es una variedad compleja canónicamente isomorfa a $\mathbb{C}^{k\times n}$. Esto induce una sobreyección natural $\pi : M_{k,n} \to \mathrm{Gr}_k(V)$, que es el cociente por la acción natural de $\mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ sobre $M_{k,n}$.

Fije un orden $\{B_1, \dots, B_m\}$ para los menores $k \times k$ de una matriz $k \times n$ y defina U_i como el subconjunto abierto de $\mathrm{Gr}_k(V)$ en el cual $\det B_i \neq 0$. Si $\pi(A) = \pi(A')$, entonces $\det(B_i) \neq 0$ si y sólo si $\det(B_i') \neq 0$, así que los abiertos U_i están bien definidos. Puesto que A es de rango total, se tiene $\det(B_i) \neq 0$ para algún i, así que $U_1, \dots, U_m$ forman una cobertura abierta de $\mathrm{Gr}_k(V)$. Tras permutar las columnas de $A \in \pi^{-1}(U_i)$, uno puede escribir A como $A = (B_i, C_i)$, donde C_i es una matriz de orden $k \times (n-k)$. Entonces la aplicación $\varphi_i : U_i \to \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$ dada por $\varphi \circ \pi(A) = B_i^{-1}C_i$ está bien definida.

a) Verifique que $\{(U_i, \varphi_i)\}$ es un atlas holomorfo sobre $\mathrm{Gr}_k(V)$.

b) Demuestre que todo $\sigma \in \mathrm{GL}(V)$ induce un biholomorfismo $\sigma : \mathrm{Gr}_k(V) \to \mathrm{Gr}_k(V)$.

c) Determine la dimensión de las variedades grassmannianas.

Solución.

a) Ya sabemos que $U_1, \dots, U_m$ cubren $\mathrm{Gr}_k(V)$ y las cartas $\varphi_i : U \to \mathbb{C}^{k\times(n-k)}$ están bien definidas. Sólo nos falta demostrar que cada función de transición $\tau_{ij} = \varphi_j \circ \varphi_i^{-1}$ es holomorfa.

   Tomemos un punto $W \in U_i \cap U_j$, representado por $K_i = \varphi(W)$ en las coordenadas de U_i. Permutemos las columnas de (I, K_i) para obtener una matriz de la forma (B_j, C_j). Puesto que $W \in U_j$, la matriz B_j es invertible, así que $(I, B_j^{-1}C_j)$ es un punto bien definido y está en la órbita de (B_j, C_j). Entonces $K_j = B_j^{-1}C_j$ es la representación de W en las coordenadas de U_j. Por construcción, las entradas de K_j son funciones racionales de las entradas de K_i, así que τ_{ij} es holomorfa.

b) Sea $\sigma : V \to V$ un isomorfismo lineal y sea $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ la matriz que representa a σ. El efecto de aplicar σ a las filas de $A \in M_{k,n}$ es que A se multiplica a la derecha por S^t. Puesto que S es invertible, $\sigma(A) = AS^t$ es de rango total, así que $\sigma(A) \in M_{k,n}$. Por ende, σ se interpreta de manera natural como una aplicación holomorfa $\sigma : M_{k,n} \to M_{k,n}$.

Por otro lado, el efecto de la acción de $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$ es que cada $A \in M_{k,n}$ se multiplica a la izquierda por el elemento actuante $P \in \mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$. La multiplicación de matrices es asociativa, i.e., PAS^t es una expresión bien definida, independientemente de si primero multiplicamos PA o AS^t. Esto implica que σ es $\mathrm{GL}(k,\mathbb{C})$-equivariante, i.e., σ se interpreta de manera natural como una aplicación continua bien definida $\tilde{\sigma} : \mathrm{Gr}_k(V) \to \mathrm{Gr}_k(V)$. Sólo falta demostrar que $\tilde{\sigma}$ es holomorfa.

Consideremos representación local de $\tilde{\sigma}$ en un punto $W \in U_i$ cuya imagen es $\tilde{\sigma}(W) \in U_j$. Para hallar $K_j = \varphi_j \circ \tilde{\sigma}(W)$ a partir de $K_i = \varphi_i(W)$, utilizamos el siguiente procedimiento:

- Obtener el representante $A \in M_{k,n}$ cuya permutación de columnas es (I, K_i).
- Aplicar σ a fin de obtener $\sigma(A) = AS^t$ como representante de $\tilde{\sigma}(W)$.
- Permutar las columnas de AS^t para obtener una matriz extendida (B_j, C_j).
- Calcular $K_j = B_j^{-1} C_j$.

Evidentemente, K_j es una función racional de K_i, así que $\tilde{\sigma}$ es una aplicación holomorfa. Finalmente, por supuesto, el automorfismo lineal inverso $\sigma^{-1} : V \to V$ induce la aplicación holomorfa inversa $\tilde{\sigma}^{-1} : \mathrm{Gr}_k(V) \to \mathrm{Gr}_k(V)$, así que $\tilde{\sigma}$ es un biholomorfismo.

c) El enunciado nos da una cobertura de $\mathrm{Gr}_k(V)$ por abiertos biholomorfos a $\mathbb{C}^{k\times(n-k)}$. Por lo tanto, la dimensión compleja de $\mathrm{Gr}_k(V)$ no puede ser otra cosa que $k \times (n-k)$.

Ejercicio 5. (Variedades de Hopf) Sea $G \subset \mathbb{C}^\star$ el subgrupo cíclico generado por algún punto $0 < |z| < 1$. Considere la acción multiplicativa de G sobre el espacio vectorial agujereado $M = \mathbb{C}^n - \{0\}$. El espacio de órbitas $X = M/G$ de esta acción se denomina una variedad de Hopf.

a) Muestre que la acción de G sobre M es libre y propiamente discontinua, y el cociente $X = M/G$ es difeomorfo a $S^1 \times S^{2n-1}$.

b) Para $n = 1$, exhiba un isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}/\Gamma \to X$, donde $\Gamma \subset \mathbb{C}$ es un retículo.

c) Para $n > 1$, verifique que X no admite estructuras simplécticas, mucho menos de Kähler, y por tanto X no es una variedad proyectiva.

   Sugerencia. Utilice la fórmula de Künneth para calcular $H^2_{dR}(X)$.

d) Muestre que toda variedad de Hopf admite una fibración por curvas elípticas.

   Sugerencia. Extienda la fibración de Hopf: $S^1 \hookrightarrow S^{2n-1} \twoheadrightarrow \mathbb{CP}^{n-1}$.

e) Sea $G \subset (\mathbb{C}^\star)^n$ el subgrupo cíclico generado por un punto con coordenadas $0 < |z_i| < 1$. Considere la acción multiplicativa de G sobre cada coordenada de M. Los espacios cociente $X = M/G$ de este tipo son una generalización de las variedades de Hopf. Muestre que, pese a los cambios en la construcción, X sigue siendo difeomorfo a $S^1 \times S^{2n-1}$.

Solución.

a) Recordemos que el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{n-1}$ se construye cocientando M por la acción de $\mathbb{C}^\star$ vía la multiplicación en cada componente. Para estudiar la topología cociente, es conveniente factorizar el grupo actuante como $\mathbb{C}^\star = \mathbb{R}^+ \times S^1$. Existe un difeomorfismo $\mathbb{R}^+$-equivariante $\varphi : M \to \mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$, donde $\mathbb{R}^+$ actúa multiplicativamente sobre el primer factor y trivialmente sobre el segundo factor del producto cartesiano $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$.

   Si ejecutamos la factorización $\mathbb{C}^\star = \mathbb{R}^+ \times S^1$ con cuidado, entonces podemos conseguir que G sea un subgrupo del factor $\mathbb{R}^+$. Con ello, la acción de G sobre $\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ hereda las cualidades de la acción de $\mathbb{R}^+$, i.e., es multiplicativa en el primer factor y trivial en el segundo. Entonces,

$$\frac{M}{G} \cong \frac{\mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}}{G} \cong \frac{\mathbb{R}^+}{G} \times S^{2n-1} \cong S^1 \times S^{2n-1}$$

La acción de G sobre $\mathbb{R}^+$ es libre y propiamente discontinua, pues $\mathbb{R}^+$ es un grupo Hausdorff y G es un subgrupo discreto de $\mathbb{R}^+$. (Los detalles se darán en la solución del ejercicio 6.a.) Esto implica que la acción de G sobre $M \cong \mathbb{R}^+ \times S^{2n-1}$ también es libre y propiamente discontinua.

Ahora describiremos explícitamente la factorización cuidadosa de $\mathbb{C}^\star$ antes mencionada. Consideremos el recubrimiento universal $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$. Como homomorfismo de grupos, su núcleo es $K = 2\pi i\mathbb{Z}$ y está contenido en el eje imaginario, que denotaremos $M \subset \mathbb{C}$. Tomemos una recta $L \subset \mathbb{C}$ cuya imagen $\exp(L)$ pasa por el generador de G. Observemos que L, M son oblicuas, porque $\exp(M)$ es el círculo unitario, que por hipótesis no contiene al generador de G. Entonces,

$$\mathbb{C}^\star \cong \frac{\mathbb{C}}{K} = \frac{L \times M}{K} = L \times \frac{M}{K} \cong \mathbb{R}^+ \times S^1$$

Como comentario final, observemos que, si $b \in \mathbb{R}$, entonces $\exp(L)$ es el eje real positivo $\mathbb{R}^+$, mientras que, si $b \notin \mathbb{R}$, entonces $\exp(L)$ es una espiral logarítmica que emana del origen removido en $\mathbb{C}^\star$.

b) Para $n = 1$, tenemos $M = \mathbb{C}^\star$. Componiendo la proyección canónica $\pi : \mathbb{C}^\star \to X$ con el recubrimiento universal $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^\star$, obtenemos otro recubrimiento universal $\tilde{\varphi} : \mathbb{C} \to X$ cuyo núcleo es el retículo $\Gamma = G \oplus K$. Entonces $\tilde{\varphi}$ induce un isomorfismo $\varphi : \mathbb{C}/\Gamma \to X$.

c) Puesto que $X = S^1 \times S^{2n-1}$ es un producto de espacios compactos, tenemos

$$H^\bullet_{dR}(X) = H^\bullet_{dR}(S^1) \otimes H^\bullet_{dR}(S^{2n-1})$$

En particular, en dimensión 2, tenemos

$$H^2_{dR}(X) = \bigoplus_{i+j=2} H^i_{dR}(S^0) \otimes H^j_{dR}(S^{2n-1})$$

Supongamos que $n > 1$ y analicemos cada sumando por separado:

- Para $i = 0$, el factor $H^2_{dR}(S^{2n-1})$ es trivial, porque $j = 2$ no es la dimensión de S^{2n-1}.
- Para $i = 1$, el factor $H^1_{dR}(S^{2n-1})$ es trivial, porque $j = 1$ no es la dimensión de S^{2n-1}.
- Para $i = 2$, el factor $H^2_{dR}(S^1)$ es trivial, porque $i = 2$ excede la dimensión de S^1.

Entonces $H^2_{dR}(X)$ es trivial. Saquemos conclusiones:

- Supongamos por el absurdo $\omega \in \Omega^2(X)$ es una forma simpléctica sobre X. Puesto que $H^2_{dR}(X)$ es trivial, ω es exacta. Esto implica que ω^n es exacta, i.e., existe $\alpha \in \Omega^{2n-1}_{dR}(X)$ tal que $\omega = d\alpha$. Entonces, por el teorema de Stokes,

$$\int_M \omega^n = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0$$

  Pero esto contradice el hecho de que ω, por ser una forma simpléctica, es no degenerada. Por lo tanto, X no admite ninguna estructura simpléctica.

- Supongamos por el absurdo que existe un encaje holomorfo $X \subset \mathbb{CP}^m$. Entonces el pullback de la forma de Fubini-Study induce una estructura de Kähler sobre X. Dicha estructura de Kähler contiene una estructura simpléctica como parte de su definición. Pero en el ítem anterior hemos demostrado que X no admite estructuras simplécticas. Por lo tanto, X no puede ser encajada de manera holomorfa en $\mathbb{CP}^m$ para ningún $m \in \mathbb{N}$.

d) Puesto que $\mathbb{C}^\star$ es un grupo abeliano, G es un subgrupo normal de $\mathbb{C}^\star$, así que el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^{n-1}$ se puede construir a partir de M en dos etapas, primero cocientando M por la acción de G y sólo entonces concientando X por la acción del toro complejo $\mathbb{C}^\star/G \cong \mathbb{C}/\Gamma$. Entones las fibras de la proyeción canónica $\pi : X \to \mathbb{CP}^{n-1}$ son copias de $\mathbb{C}/\Gamma$ encajadas de manera holomorfa en X.

e) El argumento es similar al caso original. Consideremos el recubrimiento universal $\exp : \mathbb{C}^n \to (\mathbb{C}^\star)^n$, cuyo núcleo $K = \ker \exp$ es un retículo en el n-plano real $M \subset \mathbb{C}^n$ generado por los ejes imaginarios en cada copia de $\mathbb{C}$. Tomemos una recta $L \subset \mathbb{C}^n$ tal que $L' = \exp(L)$ pasa por el generador de G. Por construcción, $L \cap M = 0$, así que $L \cap K = 0$. Entonces L' es isomorfo a $\mathbb{R}^+$.

Ahora consideremos la acción de $(\mathbb{C}^\star)^n$ sobre M en la cual cada copia de $\mathbb{C}^\star$ actúa únicamente sobre la coordenada correspondiente de M. Restrinjamos el grupo actuante a L'. Cada L'-órbita interseca a la esfera unitaria $S^{2n-1} \subset M$ en un único punto. Entonces existe una única función bien definida $f : M \to L'$ con la propiedad de que $\|\lambda \cdot z\| = 1$ si y sólo si $\lambda = f(z)$.

Sea λ_k la k-ésima coordenada de $(\mathbb{C}^\star)^n$. Observemos que $r_k = |\lambda_k|$ es un parámetro regular para las L'-órbitas contenidas en el abierto $z_k \neq 0$ de M. Diferenciando $g(\lambda) = |\lambda \cdot z|^2$, tenemos

$$\frac{\partial g}{\partial r_k} = 2r_k\,|z_k|^2 > 0$$

Entonces las L'-órbitas son transversas a S^{2n-1}. Por el teorema de la función implícita[2], existe una vecindad de z_0 en la cual (una función con la propiedad que define a) f es diferenciable. Como z_0 es arbitrario, f es globalmente diferenciable.

Finalmente, sea $\varphi : M \to L' \times S^{2n-1}$ el difeomorfismo $\varphi(z) = (f(z)^{-1}, f(z) \cdot z)$. Este difeomorfismo es L'-equivariante si consideramos que L' actúa de manera multiplicativa sobre sí mismo y de manera trivial sobre S^{2n-1}. Puesto que G es un subgrupo de L', tenemos

$$\frac{M}{G} \cong \frac{L' \times S^{2n-1}}{G} \cong \frac{L'}{G} \times S^{2n-1} \cong S^1 \times S^{2n-1}$$

Ejercicio 6. (Variedad de Iwasawa) Dado un anillo (conmutativo, con unidad) R, el grupo de Heisenberg $H_3(R)$ está conformado por las matrices 3×3 de la forma

$$A(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & z_2 \\ 0 & 1 & z_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Considere la acción izquierda sobre $G = H_3(\mathbb{C})$ del subgrupo $H = H_3(\mathbb{Z}[i])$.

a) Muestre la acción de H sobre G es propiamente discontinua y, por ende, el cociente $X = G/H$ es una variedad compleja de dimensión 3.

b) Considere el toro complejo $Y = \mathbb{C}/\mathbb{Z}[i]$. Muestre que X es el espacio total de una fibración de Y^2 por curvas isomorfas a Y.

Solución.

a) Incluso sin utilizar la estructura diferenciable, dados un grupo topológico Hausdorff G y un subgrupo discreto $H \subset G$, es automático que H es un subgrupo cerrado de G y la acción izquierda de H sobre G es propiamente discontinua. En el ejercicio anterior, usamos este hecho sin demostración, para no sobrecargar aún más la respuesta dada. Ahora daremos la demostración detallada.

Puesto que $H \subset G$ es discreto, podemos tomar una vecindad $U \subset G$ de la identidad que no contiene otros puntos de H. Por continuidad de la multiplicación, podemos tomar vecindades $U_1, U_2 \subset G$ de la identidad tales que $U_1 \cdot U_2 \subset U$. Entonces $V = U_1 \cap U_2 \cap U_1^{-1} \cap U_2^{-1}$ es una vecindad de la identidad que satisface tanto $V^{-1} = V$ como $V^2 \subset U$.

Tomemos dos elementos $h_1, h_2 \in H$. Si existiese algún $g \in G$ tal que la traslación gV pasa por ambos, entonces $h_1^{-1}h_2 \in U \cap H$, lo cual sólo es posible si $h_1 = h_2$. Así pues, toda traslación de V visita a lo más un punto de H. Entonces podemos pensar en H como la familia localmente finita de sus propios puntos. Puesto que G es Hausdorff, sus puntos son cerrados y, por ende, H es cerrado.

[2] Descubrir este paso me tomó más tiempo del que me gustaría admitir.

Tomemos ahora un elemento $g \notin H$. Como H es cerrado en G, podemos asumir que U es disjunto de la clase lateral Hg. Dados $h \in H$, $v \in V$ arbitrarios, tenemos

$$hg \notin U \implies hg \notin V \implies hgv \notin V^2 \implies hgv \notin V$$

Entonces V es disjunto de HgV. En general, para separar dos clases laterales arbitrarias, aplicamos una traslación que mueva una de las clases a H. Un representante de la otra clase fungirá de g en el procedimiento antes descrito.

Finalmente, en nuestro caso particular, G es un grupo de Lie complejo y H es un subgrupo discreto de G. Por lo tanto, $X = G/H$ es una variedad compleja de la misma dimensión de G, que es 3.

b) Identifiquemos $R \subset H_3(R)$ con el subgrupo con coordenada z_2 e identifiquemos $R^2 \subset H_3(R)$ con el subgrupo con coordenadas z_1, z_3. Entonces $H_3(R)$ es algebraicamente un producto semidirecto de la forma $R \rtimes R^2$. En otras palabras, tenemos una sucesión exacta partida

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & R \arrow[r] & H_3(R) \arrow[r] & R^2 \arrow[l, bend right, dashed] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

La construcción de este diagrama es funtorial con respecto al anillo R. Por ende, la inclusión de los enteros gaussianos $\mathbb{Z}[i]$ en los números complejos $\mathbb{C}$ induce el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathbb{Z}[i] \arrow[r] \arrow[d] & H \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{Z}[i]^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathbb{C} \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[r] & \mathbb{C}^2 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & Y \arrow[d] & & Y^2 \arrow[d] & \\
 & 0 & & 0 &
\end{tikzcd}$$

Todas las filas y todas las columnas son exactas. Sin embargo, la columna central no se extiende más allá de G, porque H no es un subgrupo normal de G y, por lo tanto, X no es un grupo.

Componiendo la proyección de G sobre $\mathbb{C}^2$ (horizontal) con la proyección de $\mathbb{C}^2$ sobre Y^2 (vertical), obtenemos un homomorfismo sobreyectivo de grupos de Lie $\tilde{\pi} : G \to Y^2$ cuyo núcleo contiene a H, porque el camino $H \to G \to \mathbb{C}^2 \to Y^2$ es equivalente al camino $H \to \mathbb{Z}[i]^2 \to \mathbb{C}^2 \to Y^2$ y este último envía $\mathbb{Z}[i]$ a cero. Entonces existe una aplicación holomorfa sobreyectiva $\pi : X \to Y^2$ que completa el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d] \arrow[dr, "\tilde{\pi}"] & \\
X \arrow[r, dashed, "\pi"] & Y^2
\end{tikzcd}$$

Las fibras de π son isomorfas al cociente K/H, donde $K = \ker \tilde{\pi} = \mathbb{C} \rtimes \mathbb{Z}[i]^2$ es el grupo de matrices de la forma $A(z_1, z_2, z_3)$, con entradas $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_1, z_3 \in \mathbb{Z}[i]$. Como $N = \mathbb{Z}[i]$ es el factor normal de H en el producto semidirecto $H = N \rtimes N^2$, tenemos

$$\frac{K}{H} \cong \frac{K/N}{H/N} \cong \frac{Y \times N^2}{N^2} \cong Y \times \frac{N^2}{N^2} \cong Y$$

La acción de N^2 no afecta al factor $Y = \mathbb{C}/N$, que es la coordenada z_2 módulo una traslación.

Ejercicio 7. Sea $\rho \in \mathbb{C}^\star$ una raíz quinta de la unidad. Considere la acción de $G = \langle \rho \rangle$ sobre $\mathbb{CP}^3$ por

$$\rho \cdot [z_0 : z_1 : z_2 : z_3] = [z_0 : \rho z_1 : \rho^2 z_0 : \rho^3 z_3]$$

Sea $Y \subset \mathbb{CP}^3$ el conjunto de ceros del polinomio $f = z_0^5 + z_1^5 + z_2^5 + z_3^5$. La superficie de Godeaux se define como el espacio de órbitas Y/G de la acción de G restricta a Y.

a) Describa los puntos fijos de la acción de G sobre $\mathbb{CP}^3$.

b) Muestre que Y es una superficie G-invariante y no contiene puntos fijos de la acción.

Solución.

a) La acción de G puede verse como un automorfismo lineal $\rho : \mathbb{C}^4 \to \mathbb{C}^4$ que rota cada eje coordenado por un ángulo diferente. La única manera una recta compleja $L \subset \mathbb{C}^4$ sea G-invariante es que L sea uno de los ejes coordenados. Por lo tanto, los puntos fijos de la acción de G son

$$[1 : 0 : 0 : 0], \qquad [0 : 1 : 0 : 0], \qquad [0 : 0 : 1 : 0], \qquad [0 : 0 : 0 : 1]$$

b) La superficie Y es G-invariante porque la rotación de cada z_i por una raíz quinta de la unidad tiene efecto nulo sobre su quinta potencia z_i^5. Además, por simple inspección, f no se anula en ninguno de los puntos arriba listados.