Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de Posgrado
Doctorado en Matemáticas

Variedades Complejas
TAREA 1
2020-II

Indicaciones Generales:

- La TAREA 1 puede ser subida a la plataforma Paideia o enviada al correo electrónico jcuadros@pucp.edu.pe.

1. Sean $a_0, a_1, \ldots, a_m$ enteros positivos con máximo común divisor igual a 1. Sea $\mathbb{C}^{m+1}$ con coordenas complejas $(z_0, \ldots, z_m)$, y denotamos por $\mathbb{C}^*$ a $\mathbb{C}\backslash\{0\}$. Definimos la siguiente relación de equivalencia

$$(z_0, \ldots, z_m) \sim (u^{a_0} z_0, \ldots, u^{a_m} z_m)\,, \qquad \text{for } u \in \mathbb{C}^*$$

Se define el **espacio proyectivo ponderado** (*weighted projective space*) $\mathbb{CP}^m(a_0, \ldots, a_m)$ como el cociente $(\mathbb{C}^{m+1}\backslash\{0\})\,/\sim$.

a) Muestre que $\mathbb{CP}^m(a_0, \ldots, a_m)$ es compacto y Hausdorff.

b) Observe que $\mathbb{CP}^m(1, \ldots, 1)$ es el espacio proyectivo complejo usual $\mathbb{CP}^m$. Por tanto, los espacios proyectivos ponderados $\mathbb{CP}^m(a_0, \ldots, a_m)$ determinan un famila de espacios que generalizan las variedades complejas $\mathbb{CP}^m$. Muestre que los espacios proyectivos ponderados $\mathbb{CP}^m(a_0, \ldots, a_m)$ no son *variedades* complejas (complex manifolds) genericamente. (Piense en vecindades alrededor de puntos como $[1, 0, \ldots, 0]$, estas vecindades serán homeomorfas a abiertos de $\mathbb{C}^m$?) De hecho, estos espacios son ejemplos de *orbifolds* (o *V-manifolds*). Ver libro de Joyce.

c) Si a_0 y a_2 no fuesen primos relativos, podría Ud. encontrar alguna vecindad alrededor puntos de la forma $[1, 0, 1 \ldots, 0]$ tal que dicha vecindad fuese homeomorfa a algún abierto de $\mathbb{C}^m$?.

d) Podría Ud. encontrar condiciones en los pesos a_i que determinen si ciertas vecindades son homeomorfas a abiertos de $\mathbb{C}^m$?.