Variedades Complejas (tarea 5)

Eduardo León (梁遠光)

Octubre 2020

Ejercicio 1. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial complejo de rango k. Sean $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ las funciones de transición sobre una cobertura abierta $\{U_\alpha\}$. Muestre que toda sección global $\sigma : M \to E$ se puede identificar con una colección de funciones diferenciables $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^k$ que satisface la condición de compatibilidad $\sigma_\beta = g_{\alpha\beta} \cdot \sigma_\alpha$ sobre cada intersección $U_\alpha \cap U_\beta$.

Solución. Sean $\varphi_\alpha : E_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ las trivializaciones locales de E. Tenemos

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, v) = (p, g_{\alpha\beta}(p) \cdot v)$$

para cada punto $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y cada vector $v \in \mathbb{C}^k$. Entonces son equivalentes:

- Una sección global $\sigma : M \to E$ del fibrado $\pi : E \to M$.
- Una colección de secciones locales $\sigma_\alpha : U_\alpha \to E_\alpha$ tales que $\sigma_\alpha = \sigma_\beta$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.
- Una colección de secciones $\sigma_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ tales que $\varphi_\alpha^{-1} \circ \sigma_\alpha = \varphi_\beta^{-1} \circ \sigma_\beta$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.
- Una colección de secciones $\sigma_\alpha : U_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ tales que $\sigma_\beta = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} \circ \sigma_\alpha$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.
- Una colección de funciones diferenciables $\sigma_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{C}^k$ tales que $\sigma_\beta = g_{\alpha\beta} \cdot \sigma_\alpha$ sobre $U_\alpha \cap U_\beta$.

Ejercicio 2. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial complejo sobre una variedad compleja. Demuestre que este fibrado es holomorfo si y sólo si E es una variedad compleja y π es una aplicación holomorfa.

Solución. Sean $\varphi_\alpha : E_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ las trivializaciones locales de E y sean $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ las funciones de transición correspondientes. Supongamos sin pérdida de generalidad que los abiertos U_α son biholomorfos a abiertos de $\mathbb{C}^n$, de tal manera que cada φ_α pueda ser considerada una carta. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $\pi : E \to M$ es un fibrado vectorial holomorfo.
- Las funciones de transición $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ son holomorfas.
- Las trivializaciones locales φ_α forman un atlas complejo de E.
- Las proyecciones locales $\pi_\alpha : E_\alpha \to U_\alpha$ son holomorfas.
- E es una variedad compleja y la proyección global $\pi : E \to M$ es holomorfa.

Ejercicio 3. Sea $\pi : E \to M$ un fibrado vectorial holomorfo con sección cero $\sigma : M \to E$. Demuestre que $\mathbb{P}(E)$ es una variedad compleja y la proyección $\psi : E \setminus \sigma(M) \to \mathbb{P}(E)$ es holomorfa.

Solución. Consideremos la acción de $\mathbb{C}^\star$ sobre E por reescalamientos en cada fibra. Entonces,

- La proyección $\pi : E \to M$ es $\mathbb{C}^\star$-invariante.
- Las trivializaciones locales $\varphi_\alpha : E_\alpha \to U_\alpha \times \mathbb{C}^k$ son $\mathbb{C}^\star$-equivariantes.
- Las funciones de transición $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{GL}(k, \mathbb{C})$ conmutan con la acción de $\mathbb{C}^\star$.

Entonces $\tilde{\pi} : \mathbb{P}(E) \to M$ es un fibrado (no vectorial) holomorfo definido por

- La proyección $\tilde{\pi} : \mathbb{P}(E) \to M$.
- Las trivializaciones locales $\tilde{\varphi}_\alpha : \mathbb{P}(E_\alpha) \to U_\alpha \times \mathbb{CP}^{k-1}$.
- Las funciones de transición $\tilde{g}_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \to \mathrm{PGL}(k, \mathbb{C})$.

Formalmente, las funciones $\tilde{\varphi}_\alpha$ no son cartas de $\mathbb{P}(E)$, pues, para empezar, $\mathbb{P}(E_\alpha)$ no es biholomorfo a un abierto de $\mathbb{C}^m$. Sin embargo, como cada $U_\alpha \times \mathbb{CP}^{k-1}$ tiene una estructura compleja conocida, $\tilde{\varphi}_\alpha$ se puede ver como una "carta generalizada" que transporta esta estructura a un abierto de $\mathbb{P}(E)$. Las funciones de transición $\tilde{g}_{\alpha\beta}$ inducen los "cambios de carta generalizados" holomorfos definidos por

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}(p, [v]) = (p, \tilde{g}_{\alpha\beta} \cdot [v]) = (p, [g_{\alpha\beta}(p) \cdot v])$$

para cada punto $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ y cada recta $[v] \subset \mathbb{C}^k$. Entonces $\mathbb{P}(E)$ es una variedad compleja. Finalmente, $\tilde{\pi}$ es holomorfa porque se representa localmente por las funciones $\pi_1 \circ \tilde{\varphi}_\alpha : \mathbb{P}(E_\alpha) \to U_\alpha$, holomorfas por construcción.