Variedades Complejas (tarea 4)

Eduardo León (梁遠光)

Octubre 2020

Ejercicio 1. Muestre que toda estructura casi compleja sobre una superficie real es integrable.

Solución. Sea (M, J) una variedad casi compleja de dimensión real 2. Puesto que $J^2 = -1$, el operador J no tiene autovalores y, por lo tanto, ningún autovector (¿autocampo?) en M. Esto significa que cualquier campo local no nulo $X \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ y su imagen $JX \in \mathfrak{X}^\infty(U)$ son una base local de $\mathfrak{X}^\infty(U)$. Evaluando el tensor de Nijenhuis en esta base, tenemos

$$N_J(X, JX) = [X, JX] + J[JX, JX] + J[X, -X] - [JX, -X] = 0$$

(Los detalles se darán en el ejercicio 4.) Entonces el tensor de Nijenhuis N_J es idénticamente cero. Por el teorema de Newlander-Nirenberg, esto implica que J es una estructura casi compleja integrable, i.e., J es inducida por una estructura compleja.

Ejercicio 2. (Esferas casi complejas)

a) Demuestre que, si S^n admite una estructura casi compleja, entonces S^{n+1} es paralelizable.

b) Sea $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ la esfera unitaria. Para cada $p \in S^2$, el plano tangente T_pS^2 es perpendicular al vector radial p. Entonces, para todo $v \in T_pS^2$, el vector $J_p(v) = p \times v$ también pertenece a T_pS^2. Demuestre que J, definida de esta manera, es una estructura casi compleja sobre S^2.

c) Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ una superficie orientada. ¿Cómo podría usar el producto interno de $\mathbb{R}^3$ para generar una estructura casi compleja sobre S?

   Sugerencia. Utilice la aplicación normal de Gauss.

Solución.

a) Pendiente.

b) Mediante una rotación de los ejes coordenados de $\mathbb{R}^3$, que preserva tanto S^2 como J, identifiquemos un punto arbitrariamente tomado $p \in S^2$ con el polo norte de S^2. Entonces, el plano tangente T_pS^2, como espacio vectorial, es el plano ecuatorial generado por los vectores $\imath, \jmath \in \mathbb{R}^3$. Tenemos

$$J_p(\imath) = p \times \imath = \jmath, \qquad J_p(\jmath) = p \times \jmath = -\imath$$

   Entonces $J_p^2(v) = -v$ se cumple para estos dos vectores básicos, así que $J_p = -1$. Puesto que p es un punto arbitrario, se cumple $J^2 = -1$ de manera global, i.e., J es una estructura casi compleja.

c) Sea $N : S \to S^2$ la aplicación normal de Gauss. Para cada $p \in S^2$, el vector $N(p)$ es perpendicular al plano tangente T_pS. Entonces la expresión $J_p(v) = N(p) \times v$ define un automorfismo de T_pS, por el mismo argumento que en el caso anterior: fijamos p, rotamos los ejes coordenados para que $N(p)$ sea el vector vertical, etc.

Ejercicio 3. Muestre que el tensor de Nijenhuis N_J es, en efecto, un tensor. Esto es, dados dos campos escalares $f, g \in \mathbb{C}^\infty(M)$ y dos campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, se cumple

$$N_J(fX, gY) = fg \cdot N_J(X, Y)$$

Solución. Recordemos que la definición del tensor de Nijenhuis es

$$N_J(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$$

El primer término es antisimétrico, al igual que el cuarto. El segundo y el tercero no lo son, pero su suma sí lo es. Entonces N_J es antisimétrico. Por ende, basta verificar que N_J respeta la multiplicación escalar en uno de sus argumentos, digamos, el segundo. Puesto que J es un tensor,

$$N_J(X,fY) = [X,fY] + J[JX,fY] + J[X,f(JY)] - [JX,f(JY)]$$

Recordemos la regla de Leibniz para el corchete de Lie:

$$[X,fY] = f\cdot[X,Y] + X(f)\cdot Y$$

Entonces cada corchete de Lie en la expresión de $N_J(X,fY)$ contribuye un término de $f\cdot N_J(X,Y)$ y un término de error. En el segundo y tercer término de error, tenemos que usar

$$J\big(X(f)\cdot Y\big) = X(f)\cdot JY$$

Entonces la expresión de $N_J(X,Y)$ se reduce a

$$N_J(X,fY) = f\cdot N_J(X,Y) + \cancel{X(f)\cdot Y} + \cancel{(JX)(f)\cdot JY} + \cancel{X(f)\cdot J^2 Y} - \cancel{(JX)(f)\cdot JY}$$

Puesto que los términos de error se cancelan mutuamente, N_J es un tensor.

Ejercicio 4. Muestre que $N_J(X,JX) = 0$.

Solución. Expandiendo la definición del tensor de Nijenhuis, tenemos

$$N_J(X,JX) = [X,JX] + J[JX,JX] + J[X,J^2X] - [JX,J^2X]$$

Puesto que J es una estructura casi compleja, $J^2 = -1$. Entonces,

$$N_J(X,JX) = [X,JX] + J[JX,JX] + J[X,-X] - [JX,-X]$$

Puesto que el corchete de Lie es anticonmutativo, los dos términos intermedios se cancelan, mientras que el primer y el cuarto término son uno el negativo del otro. Entonces, $N_J(X,JX) = 0$.

Ejercicio 5. Un campo vectorial complejo Z sobre una variedad compleja se dice *holomorfo* si es de tipo $(1,0)$ y, para toda función holomorfa local f, la derivada direccional $Z(f)$ también es holomorfa. Muestre que todo campo vectorial holomorfo se puede escribir en coordenadas locales como

$$Z = \xi^i \frac{\partial}{\partial z^i}$$

donde ξ^i son funciones holomorfas.

Solución. La existencia de las funciones ξ^i no está en duda, pues los campos coordenados forman una base local del fibrado tangente holomorfo. Entonces,

$$dz^i(Z) = Z(z^i) = \xi^j \frac{\partial z^i}{\partial z^j} = \xi^j\,\delta^i_j = \xi^i$$

Por lo tanto, las funciones ξ^i son holomorfas.

Ejercicio 6. Una forma diferenciable compleja α se dice *holomorfa* si es de tipo $(p,0)$ y $\bar\partial\alpha = 0$. Muestre que toda forma holomorfa se puede escribir en coordenadas locales como

$$\alpha = f_I\,dz^I$$

donde f_I son funciones holomorfas e I corre sobre los multi-indices de grado p.

Solución. La existencia de las funciones f_I no está en duda, ya que las $(p,0)$-formas coordenadas forman una base local del fibrado de $(p,0)$-formas. Entonces,

$$\bar{\partial}\alpha = \bar{\partial}(f_I\, dz^I) = \bar{\partial} f_I \wedge dz^I + f_I\, \bar{\partial} dz^I = 0$$

Por inducción en p, tenemos $\bar{\partial} dz^I = 0$, así que el segundo sumando se anula. Entonces,

$$\bar{\partial}\alpha = \frac{\partial f_I}{\partial \bar{z}^i}\, d\bar{z}^i \wedge dz^I = 0$$

Pero las $(p,1)$-formas coordenadas $d\bar{z}^i \wedge dz^I$ son linealmente independientes. Entonces,

$$\frac{\partial f_I}{\partial \bar{z}^i} = 0$$

Por lo tanto, las funciones f_I son holomorfas.

Ejercicio 7. Un campo vectorial real X sobre una variedad compleja se dice *real holomorfo* o *automorfo* cuando su componente $(1,0)$, i.e., $X - iJX$, es un campo vectorial holomorfo. En clase se demostró que X es real holomorfo si y sólo si la identidad $[X, JY] = J[X, Y]$ se cumple para todo Y. Demuestre que X es real holomorfo si y sólo si JX es real holomorfo.

Solución. Por conveniencia, daremos un nombre a la expresión que se debe anular:

$$K_J(X, Y) = [X, JY] - J[X, Y]$$

Entonces podemos escribir el tensor de Nijenhuis como

$$N_J(X, JY) = K_J(X, Y) - K_J(JX, JY)$$

En una variedad compleja, N_J es idénticamente cero. Por lo tanto, son equivalentes:

- X es un campo real holomorfo.
- $K_J(X, Y) = 0$ para todo campo vectorial Y.
- $K_J(JX, JY) = 0$ para todo campo vectorial Y.
- $K_J(JX, Y) = 0$ para todo campo vectorial Y. (Recordemos que J es un automorfismo.)
- JX es un campo real holomorfo.

Ejercicio 8. Considere el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$. Denote por

- (M, J) la variedad casi compleja subyacente a $\mathbb{CP}^n$.
- $F : M \to M$ el difeomorfismo inducido por la conjugación compleja en $\mathbb{C}^{n+1}$.
- $\overline{\mathbb{CP}}^n$ la variedad compleja cuyas cartas son los complejos conjugados de las cartas estándares en $\mathbb{CP}^n$.

Responda a las siguientes preguntas:

a) Demuestre F está bien definido y dF anticonmuta con J.

b) Determine los puntos fijos de F.

c) Determine si $\mathbb{CP}^n$ y $\overline{\mathbb{CP}}^n$ son biholomorfos.

Solución. Para entender este problema, remontémonos a la época en que aún no conocíamos los números imaginarios. Tenemos la recta real $\mathbb{R}$ y nos dicen que el plano complejo $\mathbb{C}$ se forma adjuntando una raíz de la ecuación $x^2 + 1 = 0$. La pregunta es: ¿Hemos adjuntado i o hemos adjuntado $-i$?

La teoría de Galois nos dice que cualquier respuesta a esta pregunta es metafísica, no matemática. Los polinomios con coeficientes reales no nos permiten hacer observaciones del plano que distingan un número complejo de su conjugado. Por tanto, mientras nuestros objetos sean puramente algebraicos y no usemos herramientas del análisis (e.g. normas arbitrarias sobre $\mathbb{R}^n$), entonces la conjugación compleja será sólo un diccionario que permite a dos observadores entenderse mutuamente, aún cuando ambos insistan que "mi i no es lo mismo que tu i".

a) En el abierto afín $U_i \subset M$, las coordenadas estándares son $z_0, \ldots, \widehat{z_i}, \ldots, z_n$, tomadas de tal manera que la coordenada suprimida sea $z_i = 1$. Entonces la restricción $F_i : U_i \to U_i$ se representa como la conjugación compleja usual en las coordenadas restantes z_j, con $j \neq i$. Obviamente, $F_i = F \mid U_i$ es un difeomorfismo antiholomorfo, así que F es un difeomorfismo antiholomorfo.

b) Los puntos fijos de F son los puntos del espacio proyectivo real $\mathbb{RP}^n$.

c) La estructura casi compleja de $\overline{\mathbb{CP}}^n$ es $-J$, así que $F : \mathbb{CP}^n \to \overline{\mathbb{CP}}^n$ es un biholomorfismo.