Espacios proyectivos y curvas algebraicas.

K cuerpo algebraicamente cerrado.

$$\mathbb{A}^n_K = K^n$$

$\simeq K^{n+1}$

En $\mathbb{A}^{n+1}_K - \{(0,\dots,0)\}$ consideremos una relación de equivalencia:

$(x_1,\dots,x_{n+1}) \sim (y_1,\dots,y_{n+1})$ si y solo si $\exists\, \lambda \in K^*$ tq $(x_1,\dots,x_{n+1}) = \lambda(y_1,\dots,y_{n+1})$.

El cociente

$$\mathbb{P}^n_K = \frac{\mathbb{A}^{n+1}_K - \{(0,\dots,0)\}}{\sim}$$

, llamado el espacio proyectivo de dimensión n sobre K.

Un elemento de este cociente es una clase de equivalencia de un punto $(x_1,\dots,x_{n+1})$ (que es una recta en $\mathbb{A}^{n+1}_K$ que pasa por este punto y el origen pero sin el origen) y se denota:

$$[x_1:\dots:x_{n+1}] = [(x_1,\dots,x_{n+1})]$$

y $(x_1,\dots,x_{n+1})$ es llamado coordenadas homogeneas de $[x_1:\dots:x_{n+1}]$.

Si $x_1 \neq 0$ entonces

$$[1: x_2/x_1 : \dots : x_{n+1}/x_1] = [x_1 : x_2 : \dots : x_{n+1}] \quad (*)$$

Asi tenemos que

$$\mathbb{P}^n_K = \{ [x_1:\dots:x_{n+1}] \,/\, (x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{A}^{n+1}_K - \{(0,\dots,0)\} \}$$

y también

$$\mathbb{P}^n_K = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i \,, \quad U_i = \{ [x_1:\dots:x_{n+1}] \,/\, x_i \neq 0 \}$$

y tenemos de $(*)$

$$U_1 = \{ [1: y_1, \dots, y_n] \,/\, y_1,\dots,y_n \in K \}$$

que induce la identificación de U_1 con $\mathbb{A}^n$.

$$\begin{aligned} \mathbb{A}^n &\longrightarrow U_1 \\ (y_1,\dots,y_n) &\longrightarrow [1: y_1 : \dots : y_n] \end{aligned}$$

Analogamente se tiene identificaciones de los U_i con $\mathbb{A}^n$.

También observe que

$$\mathbb{P}^n_K = \{[x_1 : \dots : x_{n+1}] / x_{n+1} \neq 0\} \cup \{[x_1 : \dots : x_n : 0] / (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{A}^n - \{(0, \dots, 0)\}\}$$
$$\cong U_{n+1} \cup \mathbb{P}^{n-1}_K$$
$$\cong \mathbb{A}^n \cup \mathbb{P}^{n-1}_K.$$

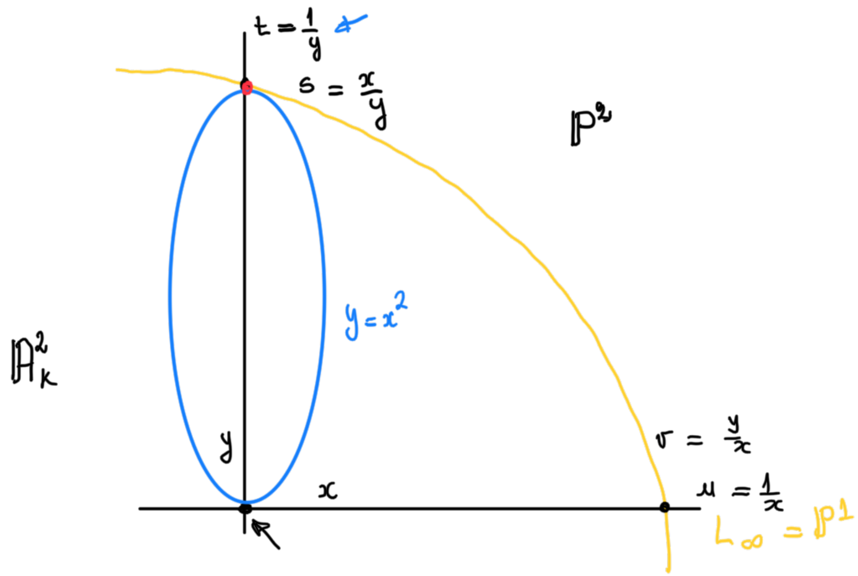
Si $K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

$$\pi : \mathbb{A}^{n+1}_K \longrightarrow \mathbb{P}^n_K$$
$$(x_1, \dots, x_{n+1}) \longrightarrow [x_1 : \dots : x_{n+1}]$$

En $\mathbb{P}^n_K$ tenemos una topologia inducida por la topologia de $\mathbb{A}^{n+1}_K$ tq π es continua. Como

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) / \|(x_1, \dots, x_{n+1})\| = 1\}$$

es compacta conexa y $\pi(S^n) = \mathbb{P}^n_K$ se tiene $\mathbb{P}^n_K$ es compacto conexo.



$$\underline{y = x^2} \longrightarrow \frac{1}{t} = \left(\frac{s}{t}\right)^2 \longrightarrow \boxed{t = s^2}$$

Una curva proyectiva en $\mathbb{P}^2$ está dada por los ceros de un polinomio homogeneo

$$C = \{ \underline{[X:Y:Z]} \in \mathbb{P}^2 / \underline{F(X,Y,Z)} = 0 \}$$

Dadas dos curvas proyectiva.

$$C_1 : F_1 = 0 \quad y \quad C_2 : F_2 = 0$$

sin componentes es comun. Sea $p \in C_1 \cap C_2$ y en cordenadas afines $p = (x,y)$, $f_1(x,y) = F_1(x,y,1)$ y $f_2(x,y) = F_2(X,Y,1)$. Tenemos el número de intersección de C_1 y C_2 en p

$$I_p(C_1, C_2) = \dim_K \frac{\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2_K)}{\langle f_1, f_2 \rangle \mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2_K)}$$

$\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2_K)$ anillo local en p en $K[X,Y,Z]$

$\langle f_1, f_2 \rangle$ ideal generado por f_1 y f_2

<u>Teorema de Bezout</u> Sean F y G dos curvas sin componentes comun de grado m y n respectivamente. El número de intercepción de F y G es $m.n$, esto es

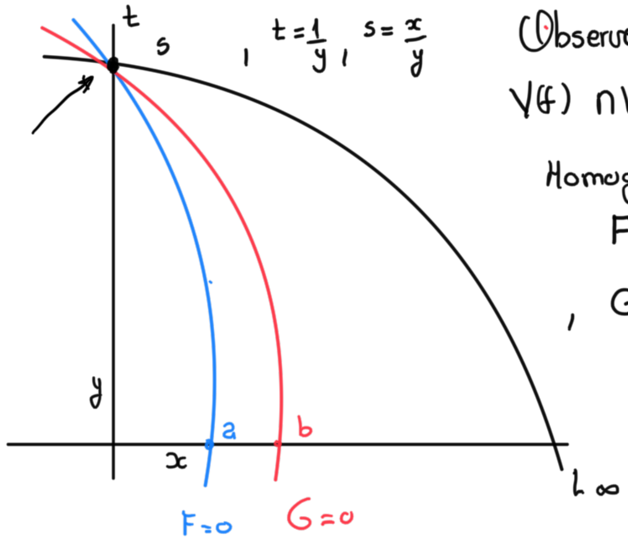
$$\sum_{p \in F \cap G} I_p(F, G) = m.n.$$

Ejemplo Considere dos rectas paralelas en el plano afín

Ejemplos Considere dos rectas paralelas en el plano afín

$$f = \underline{x-a}, \quad g = \underline{x-b}, \quad a, b \in K, \quad a \neq b$$

$t = \frac{1}{y}, \quad s = \frac{x}{y}$



Observe que

$V(f) \cap V(g) = \emptyset$

Homogenizamos.

$F = f^* = X - aZ$

$G = g^* = X - bZ$

$V(F) = \overline{V(f)}$

$V(G) = \overline{V(g)}$

$$\varphi_3(\mathbb{A}^2) = U_3 = \{[x : y : 1] \,/\, x, y \in K\}$$

$$U_2 = \{[s : 1 : t] \,/\, t, s \in K\}$$

$x = \frac{s}{t} \rightarrow V(F)$ en (s,t) está dado $\frac{s}{t} - a = 0 \leftrightarrow s - at = 0$

$\rightarrow V(G)$ en (s,t) " " $\frac{s}{t} - b = 0 \leftrightarrow s - bt = 0$

$$V(F) \cap V(G) = \{\underbrace{[0:1:0]}_{}\}, \quad [0:1:0] = \infty$$

Por el t de Bezout

$$\underbrace{\# V(F) \cap V(G)}_{\sum_{p \in \mathbb{P}} I_p(F,G)} = \text{grad}(F) \cdot \text{grad}(G) = 1.$$

$$= $$

Además

$$\underline{I_p(F,G)} = \begin{cases} 1 & p = \infty \\ 0 & p \neq \infty \end{cases} \quad (F \text{ y } G \text{ son transversales en } \infty)$$

Número de Milnor

Considere la foliación $\mathcal{F}$ en $\mathbb{P}^2$ generada por el campo en coordenadas afines

$$X = P(x,y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x,y)\frac{\partial}{\partial y}$$

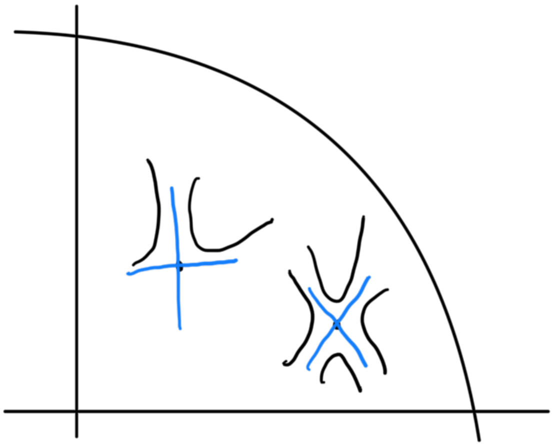
$p \in \mathbb{A}^2_k$

o

$$\omega = Q(x,y)\,dx - P(x,y)\,dy$$

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \dim_k \frac{\mathcal{O}_p(\mathbb{A}^2)}{\langle P,Q\rangle}$$

Número de Milnor.



donde

$P = P_0 + \dots + P_{d+1}$, P_j son polinomios homogeneos

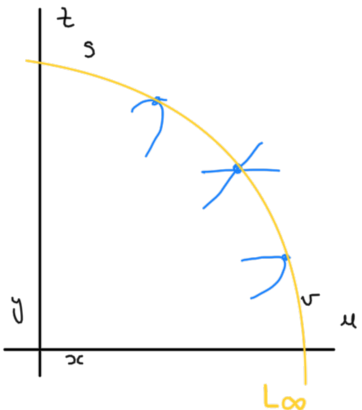
$Q = Q_0 + \dots + Q_{d+1}$, Q_j " " "

Supongamos que

$$(*) \quad xQ_{d+1}(x,y) - y\,P_{d+1}(x,y) = 0 \qquad (L_\infty \text{ es no invariante})$$

esto significa que $Q_{d+1} = y\,R(x,y)$ donde $R(x,y)$ es un polinomio de grado d

y $P_{d+1} = x\,R(x,y)$.



Sean $C_1 : P = 0$ y $C_2 : Q = 0$

$$\phi_1^*\omega = \left(Q_0 + \frac{1}{u}Q_1 + \dots + \frac{1}{u^{d+1}}Q_{d+1}\right)\left(-\frac{du}{u^2}\right)$$

$$-\left(P_0 + \frac{1}{u}P_1 + \dots + \frac{1}{u^{d+1}}P_{d+1}\right)\left(\frac{u\,dv - v\,du}{u^2}\right)$$

$$= -\frac{1}{u^{d+3}}\Big[\left((Q_0 - vP_0)u^{d+1} + \dots + (Q_{d+1} - vP_{d+1})\right)du +$$

$$u\left(P_0u^{d+1} + \dots + P_{d+1}\right)dv\Big]$$

$$\phi_1 : \begin{cases} x = \frac{1}{u} \\ y = \frac{v}{u} \end{cases}$$

$$-u^{d+2}\phi_1^*\omega \overset{(*)}{=} \left((Q_0 - vP_0)u^d + \dots + (Q_d - vP_d)\right)du +$$

$$\left(P_0u^{d+1} + \dots + P_{d+1}\right)dv$$

$$\operatorname{Sing}\mathcal{F} : \begin{cases} Q_d(1,v) - vP_d(1,v) = 0 \\ P_{d+1}(1,v) = R(1,v) = 0 \end{cases} \Bigg\} \text{ Que debe ser } \emptyset$$

$$\tan g(\mathcal{F}, L_\infty) : \; Q_d(1,v) - vP_d(1,v) \neq 0 \quad \Big\} \text{ son los ceros de } R.$$

$$P_{d+1}(1,v) = R(1,v) = 0$$

$$X_1 = \left(P_0 u^{d+1} + \cdots + P_{d+1}\right)\frac{\partial}{\partial u} - \left((Q_0 - vP_0)u^d + \cdots + (Q_d - vP_d)\right)\frac{\partial}{\partial v}$$

$$X_1(u) = P_0 u^{d+1} + \cdots + P_{d+1} .$$

Luego $\quad \operatorname{tang}(\mathcal{F}, L_\infty)\Big|_{L_\infty:[0:1:0]} = \operatorname{grad} P_{d+1}(1,v) = \operatorname{grad} R(1,v)$.

Veamos C_1 y C_2 en las coordenadas u, v

$$P_0 + \frac{1}{u}P_1 + \cdots + \frac{1}{u^{d+1}}P_{d+1}(1,v) = 0 \rightarrow u^{d+1}P_0 + \cdots + uP_d + P_{d+1}(1,v) = 0$$

$$u^{d+1}Q_0 + \cdots + uQ_d + Q_{d+1}(1,v) =$$

$$u^{d+1}Q_0 + u^d Q_1(1,v) + \cdots + uP$$

$$R(x,y) = c\prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i y)^{r_i}$$

$$R(1,v) = c\prod(1 - \alpha_i y)^{r_i}$$

$$Q(1,v) = d\, v \prod(1 - \alpha_i y)^{r_i}$$

Teorema (Teorema de Bezout para foliaciones)
Si $\mathcal{F}$ es una foliación en el espacio projectivo $\mathbb{P}^2$. Entonces tenemos

$$\sum_{P \in \mathbb{P}^2} \mu_P(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1 .$$

d es el grado de la foliación $\mathcal{F}$.

012574676 .