

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ

ESCUELA DE POSGRADO



Enumeración de Singularidades de Foliaciones Holomorfas por Curvas

**TESIS PARA LA OBTENCIÓN DEL GRADO ACADÉMICO DE MAESTRO EN
MATEMÁTICAS QUE PRESENTA**

Eduardo José León Chávarri

ASESOR

Percy Braulio Fernández Sánchez

Lima, Julio de 2023

Informe de Similitud


Yo, Percy Braulio Fernández Sánchez, docente de la Escuela de Posgrado de la Pontificia Universidad Católica del Perú, asesor del trabajo de tesis titulado

Enumeración de singularidades de foliaciones holomorfas por curvas

del autor Eduardo José León Chávarri,
dejo constancia de lo siguiente:

- El mencionado documento tiene un índice de puntuación de similitud de 5%, con ninguna referencia individual que supere el 1%. Así lo consigna el reporte de similitud emitido por el software *Turnitin* el 23/10/2023.
- He revisado con detalle dicho reporte y la Tesis y no se advierte indicios de plagio.
- Las citas a otros autores y sus respectivas referencias cumplen con las pautas académicas.

Lugar y fecha: Lima, 24 de octubre del 2023

Apellidos y nombres del asesor: Fernández Sánchez, Percy Braulio	
DNI: 21859700	Firma 
ORCID: 0000-0002-9404-9184	

Resumen

Una *foliación holomorfa singular por curvas* es una estructura geométrica definida sobre una variedad compleja, cuyo prototipo local es la familia de curvas integrales de un campo vectorial holomorfo. Los ceros de estos campos locales, denominados *puntos singulares* de la foliación, son especiales tanto desde un punto de vista topológico como analítico, ya que la curva integral que pasa por un punto singular es simplemente el punto singular mismo. En este trabajo, contaremos los puntos singulares de una foliación por curvas de una variedad compleja compacta.

Pese a la naturaleza geométrica de nuestro problema, la principal herramienta que usaremos para resolverlo es la topología algebraica. Más precisamente, construiremos las *clases de Chern* $c_i(E)$ de un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ y las interpretaremos como *obstrucciones* a que existan una o varias secciones linealmente independientes de E . Aplicando esta interpretación a una variedad compleja compacta M y un fibrado tangente torcido $E = TM \otimes L$, obtendremos el número de puntos singulares de una foliación definida por una sección holomorfa de E .

Índice general

Introducción	1
1. Foliaciones holomorfas regulares	3
1.1. Definiciones básicas	3
1.2. El fibrado tangente de una foliación regular	4
2. Foliaciones por curvas	9
2.1. Definiciones básicas	9
2.2. El número de Milnor	11
2.3. Cálculo del número de Milnor	13
3. Clasificación de fibrados vectoriales	16
3.1. Definiciones básicas	16
3.2. Invarianza por homotopías	17
3.3. El espacio clasificador	20
3.4. Estructuras geométricas adicionales	24
4. Clases de Chern	25
4.1. Definiciones básicas	25
4.2. El principio del rompimiento	26
4.3. Las clases de Chern universales	28
4.4. Cálculo de las clases de Chern	31
5. Secciones linealmente independientes	33
5.1. Definiciones básicas	33
5.2. El cociclo de obstrucción	35
5.3. La primera obstrucción	42
6. El grupo de Picard topológico	45
6.1. Definiciones básicas	45
6.2. Homotopías huecas rellenables	48
6.3. Reconstruyendo la estructura de grupo	49

7. Enumeración de singularidades	51
7.1. Definiciones básicas	51
7.2. Teorema de Darboux	52
7.3. Conclusiones	54

Índice de figuras

5.1. La proyección $\pi : S^{2q+1} \rightarrow S^{2q+1} \vee S^{2q+1}$	41
--	----

Introducción

En geometría diferencial, una *foliación holomorfa regular* de una variedad compleja M es una partición de M en subvariedades inmersas $L_\alpha \subset M$ cuya unión de fibrados tangentes

$$E = \bigcup_{\alpha} TL_{\alpha}$$

es un subfibrado vectorial holomorfo de TM . El prototipo local de una foliación holomorfa es la partición del dominio de una sumersión holomorfa $f : M \rightarrow N$ en las componentes conexas de los conjuntos de nivel $f^{-1}(p)$ para cada $p \in N$. Sin embargo, en general, la estructura global de una foliación holomorfa es mucho más complicada que este prototipo local.

Dada una variedad compleja M , existen obstrucciones tanto topológicas como analíticas a la existencia de foliaciones holomorfas regulares de M , que se pueden detectar usando herramientas algebraicas tales como la cohomología de haces. Para este fin, uno primero define una clase más general de *foliaciones holomorfas singulares*, que permiten la existencia de un conjunto singular “pequeño” fuera del cual la foliación es regular. Luego, uno asume dada una foliación singular de M y mide el “tamaño mínimo” que su conjunto singular está obligado a tener.

Este trabajo está dividido en siete capítulos. El capítulo 1, de naturaleza preparatoria, tiene por objetivo motivar la idea de estudiar una foliación holomorfa a través de su fibrado tangente. Para ello, definimos las foliaciones holomorfas regulares y demostramos el *teorema de Frobenius*, que caracteriza los subfibrados vectoriales holomorfos de TM que son fibrados tangentes de una foliación holomorfa regular de M .

En el capítulo 2, definimos los verdaderos objetos geométricos de interés de este trabajo: las foliaciones holomorfas singulares *por curvas*, que son generadas por una sección holomorfa de un fibrado tangente torcido $TM \otimes L$, cuyos ceros forman el conjunto singular de la foliación. Luego estudiamos los problemas de encoger el conjunto singular de una foliación por curvas y enumerar correctamente los puntos singulares de dicha foliación. Para esto último, definimos el *número de Milnor* de un punto singular aislado, una invariante topológica asociada al comportamiento local de la foliación en dicho punto singular.

A partir de este punto, cambiamos súbitamente de enfoque, dejando la geometría compleja y concentrándonos en la topología algebraica. En el capítulo 3, clasificamos los fibrados vectoriales complejos sobre espacios paracompactos. Para tal fin, construimos un *fibrado vectorial universal* $E_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ tal que todo fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ de rango n es isomorfo de manera esencialmente única a un fibrado pullback $f^* \circ E_n(\mathbb{C}^\infty)$, con $f : M \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$.

En el capítulo 4, construimos las *clases de Chern* $c_i(E)$ de un fibrado complejo $E \rightarrow M$, que proporcionan información “numérica” relativamente fácil de calcular acerca de E . La propiedad más sorprendente de las clases de Chern es que dichas clases están completamente determinadas por tres axiomas muy fáciles de enunciar algebraicamente, a tal punto que resulta difícil de creer que estas clases tengan algún contenido geométrico útil.

En el capítulo 5, damos una interpretación geométrica a las clases de Chern $c_i(E)$. Para ello, asumiremos que el espacio base M del fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ es un complejo celular y construiremos k secciones linealmente independientes $M \rightarrow E$ sobre los esqueletos de M hasta encontrar una *primera obstrucción* expresable como una clase de cohomología, que resultará ser $c_{q+1}(E)$, donde $n = k + q$ es el rango de E .

En el capítulo 6, utilizamos técnicas similares a las del capítulo 5 para demostrar que, si M es un complejo celular, entonces el grupo de cohomología $H^2(M)$ es isomorfo al grupo de fibrados lineales $L \rightarrow M$, con la operación del producto tensorial.

Finalmente, en el capítulo 7 retornamos a las foliaciones holomorfas y demostramos que, si M es una variedad compleja compacta de dimensión n , entonces toda foliación por curvas de M con puntos singulares aislados, generada por una sección holomorfa de $TM \otimes L$, tiene

$$\int_M c_n(TM \otimes L)$$

puntos singulares, contados con multiplicidad. (Aquí, el integrando denota una forma diferencial cerrada arbitraria que representa a la clase de cohomología $c_n(TM \otimes L)$.) A modo de aplicación, demostraremos el *teorema de Darboux* sobre el número de puntos singulares de una foliación por curvas de grado $d \in \mathbb{N}$ del espacio proyectivo \mathbb{P}^n .

Capítulo 1

Foliaciones holomorfas regulares

1.1. Definiciones básicas

Sea M una variedad compleja. Una **foliación holomorfa** \mathcal{F} de M es una partición de M en subvariedades conexas inyectivamente inmersas en M , llamadas las **hojas** de \mathcal{F} . Diremos que \mathcal{F} es una **foliación regular** de dimensión k si, localmente, es isomorfa a la partición del polidisco unitario $\Delta^n \subset \mathbb{C}^n$ en la colección de polidiscos $\Delta^k \times \{z\}$, $z \in \Delta^{n-k}$, en un sentido que haremos preciso a continuación.

Una **carta distinguida** de rango k es un biholomorfismo $\varphi : U \rightarrow \Delta^k \times \Delta^{n-k}$ definido en un subconjunto abierto $U \subset M$. Las **placas** de φ son las preimágenes $\varphi(\Delta^k \times \{z\})$, $z \in \Delta^{n-k}$. Esta carta se dice **compatible** con \mathcal{F} si, para cada hoja $L \in \mathcal{F}$, la intersección $U \cap L$ es la unión de una cantidad numerable de placas de φ . Entonces \mathcal{F} es una foliación regular de dimensión k si y solamente si M admite un atlas holomorfo de cartas distinguidas compatibles con \mathcal{F} .

Ejemplo 1.1 (Foliación por curvas integrales). Dado un campo vectorial holomorfo X sobre M sin singularidades, las curvas integrales de X son una foliación regular de M de dimensión 1. En este caso, el teorema del flujo tubular nos da las cartas distinguidas de esta foliación.

Observación. La existencia de un campo vectorial holomorfo no nulo es una restricción no trivial sobre M . Por ejemplo, si M es una superficie de Riemann compacta de género $g \geq 2$, entonces su grupo de automorfismos es finito¹, por ende no existen campos no nulos sobre M .

Ejemplo 1.2 (Una foliación muy mal comportada). Sea \mathbb{C}^2 el plano afín complejo, foliado de la siguiente manera. Una hoja es la gráfica de una función entera $y = f(x)$. Las demás hojas son las rectas verticales $x = c$, menos el punto $(c, f(c))$.

Asignemos a cada punto $p \in \mathbb{C}^2$ la recta $L_p \subset \mathbb{C}^2$ tangente a la hoja que pasa por p . En una foliación bien comportada, se espera que L_p dependa “continuamente” de p . Pero, si p varía a lo largo de la recta $x = c$, entonces la pendiente de L_p varía abruptamente en el punto $(c, f(c))$.

Observación. Esta foliación no es de interés geométrico intrínseco, pero nos ayudará a encontrar una topología apropiada para el grassmanniano en la sección 3.3.

¹De orden a lo más $84(g-1)$, por el teorema de los automorfismos de Hurwitz.

Ejemplo 1.3 (Flujo lineal sobre un toro). El campo vectorial holomorfo

$$X = a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + a_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

es invariante por traslaciones de \mathbb{C}^2 . Entonces X desciende al grupo cociente

$$G = \frac{\mathbb{C}^n}{\mathbb{Z}[i]^n} \cong \left(\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \right)^{2n}$$

y sus curvas integrales son las clases laterales del subgrupo uniparamétrico

$$H = \frac{\Gamma}{\Gamma \cap \mathbb{Z}[i]^2} \subset G,$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C}^n$ es la recta compleja generada por $v = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^n$.

Si las partes reales e imaginarias de a_1, \dots, a_n son racionalmente independientes, entonces la imagen de la recta *real* generada por v es densa² en G . Por ende, H también es denso en G . En particular, si φ es una carta foliada de G , entonces H contiene infinitas placas de φ .

La definición de foliación holomorfa que tenemos hasta el momento requiere que conozcamos de antemano las hojas de \mathcal{F} . Este requerimiento es demasiado oneroso, porque, en general, una foliación tiene una cantidad no numerable de hojas y no es posible hallar una única ecuación que las describa a todas. En la siguiente sección, buscaremos maneras de reconstruir una foliación a partir de información más concisa que la colección de todas sus hojas.

1.2. El fibrado tangente de una foliación regular

Toda foliación holomorfa regular \mathcal{F} sobre una variedad compleja M determina un subfibrado vectorial holomorfo $T\mathcal{F} \subset TM$, llamado el **fibrado tangente** de \mathcal{F} , cuya fibra $T_p\mathcal{F}$ sobre cada punto $p \in M$ es el espacio tangente de la única hoja de \mathcal{F} que pasa por p . Para verificar que

$$T\mathcal{F} = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times T_p\mathcal{F}$$

satisface la condición de trivialidad local, basta consultar el modelo local

$$T\mathcal{F}_{n,k} = \bigsqcup_{p \in \Delta^n} \{p\} \times T_p\mathcal{F}_{n,k} \cong \Delta^n \times \mathbb{C}^k,$$

donde $\mathcal{F}_{n,k}$ es la foliación de Δ^n por polidiscos $\Delta_z \cong \Delta^k$ para cada $z \in \Delta^{n-k}$.

La construcción de $T\mathcal{F}$ es útil para estudiar una foliación \mathcal{F} previamente dada, pero no nos sirve para generar nuevas foliaciones sobre M . Lo realmente interesante sería usar un subfibrado vectorial holomorfo $E \subset TM$ (construido de la manera usual, i.e., especificando bases locales de secciones) para construir foliaciones cuyo fibrado tangente es E .

²Este resultado se conoce como el teorema de la densidad de Kronecker.

Antes de continuar, fijaremos terminología. Una **variedad integral** de E es una subvariedad inyectivamente inmersa $L \subset M$ cuyo fibrado tangente es $TL = E|_L$. Si la unión de las variedades integrales de E es todo M , entonces E se dice **integrable**. Una carta distinguida (U, φ) de M es **compatible** con E si todas las placas de φ son variedades integrales de E . Si M admite un atlas distinguidas compatibles con E , entonces E se dice **completamente integrable**. Finalmente, E se dice **involutivo** si, dadas dos secciones locales X, Y de E , el corchete de Lie $[X, Y]$ también es una sección local de E .

Notemos que E es (completamente) integrable si genera foliaciones (regulares) locales en una cobertura abierta de M . Intuitivamente, E es involutivo si genera “foliaciones infinitesimales” en los tallos del haz estructural de M , pensados como “vecindades infinitesimales” de M .

Teorema 1.4 (Teorema local de Frobenius). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) E es completamente integrable.
- b) E es integrable.
- c) E es involutivo.

Prueba. a) \implies b) Si E es completamente integrable, entonces M es la unión de las placas de las cartas distinguidas compatibles con E . Por ende, E es integrable.

b) \implies c) Si E es integrable, entonces las secciones de E son los campos vectoriales sobre M que son tangentes a todas las variedades integrales de E . Como el corchete de Lie preserva esta tangencia, entonces E es involutivo.

c) \implies a) Como el problema es de carácter local, supondremos que $M \subset \mathbb{C}^n$ es una vecindad del origen y *encogeremos implícitamente* esta vecindad cada vez que utilicemos una construcción local³, e.g., el teorema de la función inversa.

Agrupemos las coordenadas de \mathbb{C}^n en dos bloques \mathbb{C}^k y \mathbb{C}^{n-k} , de tal manera que los campos coordenados de \mathbb{C}^{n-k} generen un complemento de E en TM . Sea $\iota : E \rightarrow TM$ la inclusión y sea $\pi : TM \rightarrow F$ la proyección canónica al subfibrado generado por los campos coordenados de \mathbb{C}^k . Por construcción, $\pi \circ \iota : E \rightarrow F$ es un isomorfismo de fibrados vectoriales que respeta el corchete de Lie. Como F tiene una base local de campos que conmutan (los campos coordenados de \mathbb{C}^k), entonces E también tiene una base local de campos X_1, \dots, X_k que conmutan.

Sea $\Phi_i^{t_i} : M \rightarrow M$ el flujo de X_i . Notemos que $\Phi^t = \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \Phi_k^{t_k}$ localmente no depende del orden en que componemos los flujos $\Phi_i^{t_i}$. Para cada punto $p \in M$, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t_i} \Phi^t(p) = \frac{\partial}{\partial t_i} \left(\Phi_i^{t_i} \circ \Phi_1^{t_1} \circ \dots \circ \widehat{\Phi_i^{t_i}} \circ \dots \circ \Phi_k^{t_k}(p) \right) = X_i \circ \Phi^t(p),$$

así que cada órbita $t \mapsto \Phi^t(p)$ es una variedad integral de E . Por construcción, el plano $y = 0$ es transversal a E , así que $(t, z) \mapsto \Phi^t(0, z)$ es una reparametrización local de M . La inversa de esta reparametrización es una carta distinguida compatible con E . Por lo tanto, E es completamente integrable. \square

³Formalmente, estamos trabajando con *gérmenes* de funciones y campos holomorfos en p , no con funciones y campos holomorfos de verdad.

Hasta el momento, todo lo que sabemos es que la involutividad de E nos brinda suficientes cartas distinguidas compatibles con E para *intentar* construir las hojas de una foliación pegando variedades integrales de E . Ahora tenemos que demostrar es que este intento de pegado siempre tendrá éxito.

Empezamos demostrando la ausencia de obstrucciones locales al pegado:

Proposición 1.5. *La intersección de una variedad integral de E y una carta distinguida (U, φ) compatible con E tiene una cantidad numerable de componentes conexas. Cada componente está abiertamente encajada en una única placa de φ .*

Prueba. Sea L una variedad integral de E . La intersección $U \cap L$ es abierta en L , porque U es abierto en M y la inmersión $L \hookrightarrow M$ es una función continua. Además, $U \cap L$ tiene una cantidad numerable de componentes conexas, porque L es segundo enumerable.

Cada componente conexa C de $U \cap L$ es una variedad integral de $E|_U$. Pero $E|_U$ es el fibrado tangente de la foliación por placas de φ , así que C está encajada en una placa P . Este encaje es abierto, porque C y P son de la misma dimensión. \square

Proposición 1.6. *Supongamos que E es integrable. Si L_1 y L_2 son variedades integrales de E , entonces $L = L_1 \cap L_2$ es abierto en cada L_i . Además, las inclusiones $L \hookrightarrow L_i$ inducen la misma estructura compleja sobre L que la inclusión $L \hookrightarrow M$.*

Prueba. Sea (U, φ) una carta distinguida compatible con E . Consideremos $C = C_1 \cap C_2$, donde cada C_i es una componente conexa de $U \cap L_i$. Si C es no vacío, entonces C_1, C_2 están encajados abiertamente en la misma placa P de φ . Así, C está abiertamente encajado en P . Por tanto, C está abiertamente encajado en cada L_i .

Las distintas elecciones de la carta (U, φ) y de las componentes conexas C_1, C_2 generan una cobertura de L por abiertos comunes de L_1, L_2 . Entonces L es abierto en cada L_i . Notemos que cada inclusión $\lambda_i : L \hookrightarrow L_i$ induce sobre L la misma estructura compleja que la restricción a L de la inclusión $\mu_i : L_i \hookrightarrow M$. Pero $\mu_i|_L$ es igual a la inclusión directa $\mu : L \hookrightarrow M$, ya que ambas se representan localmente como el encaje de una placa en una carta distinguida compatible con E . Por ende, tanto λ_i como μ inducen la misma estructura compleja sobre L . \square

Entonces siempre podemos pegar variedades integrales localmente:

Corolario 1.7. *Supongamos que E es integrable. Si Λ es una familia numerable de variedades integrales de E , entonces $\mathcal{L} = \bigcup \Lambda$ también es una variedad integral de E .*

Prueba. Por la proposición anterior, la intersección $L'' = L \cap L'$ de cada par $L, L' \in \Lambda$ tiene una única estructura compleja compatible con los encajes $L'' \hookrightarrow L$, $L'' \hookrightarrow L'$ y la inmersión $L'' \hookrightarrow M$. Entonces \mathcal{L} es una variedad compleja bien definida y la inclusión $\mathcal{L} \hookrightarrow M$ es una inmersión cuya restricción a cada $L \in \Lambda$ es la inmersión original $L \hookrightarrow M$. Como el fibrado tangente de $L \in \Lambda$ es $E|_L$, el fibrado tangente de \mathcal{L} es $E|_{\mathcal{L}}$. Por lo tanto, \mathcal{L} es una variedad integral de E . \square

Las hojas de una foliación \mathcal{F} son variedades integrales *conexas* de $T\mathcal{F}$. Como una unión de variedades integrales conexas de E no tiene por qué ser también conexa⁴, debemos tomar ciertas precauciones antes de pegar variedades integrales. Diremos que las variedades integrales conexas L_1, \dots, L_r forman un **camino** desde L_1 hasta L_r si las intersecciones $L_i \cap L_{i+1}$ son no vacías. Si existe un camino desde L hasta L' , diremos que L' es **alcanzable** desde L .

Asumiendo que E es integrable, las variedades integrales de E forman una base de una nueva topología sobre M , llamada la **topología de las hojas** de E , pues sus componentes conexas se denominan las **hojas** de E . Notemos que, si L es una variedad integral conexa de E , entonces L también es conexa en la topología de las hojas. En este caso, denotaremos por $[L]$ la única hoja que contiene a L .

Proposición 1.8. *Supongamos que E es integrable. Si L es una variedad integral conexa de E , entonces las siguientes descripciones definen el mismo conjunto:*

- a) *La unión de las variedades integrales conexas de E que contienen a L .*
- b) *La unión de las variedades integrales conexas de E que intersecan a L .*
- c) *La unión de las variedades integrales conexas de E alcanzables desde L .*
- d) *La hoja $[L]$ de E que contiene a L .*

Prueba. Las inclusiones a) \subset b) \subset c) \subset d) son obvias. Notemos que, si L' es alcanzable desde L , digamos, mediante el camino L_1, \dots, L_r , entonces existe una variedad integral conexa de E que contiene tanto a L como a L' , a saber, $L_1 \cup \dots \cup L_r$. Esto demuestra que c) \subset a), pero también demuestra que c) es simultáneamente abierto y cerrado en la topología de las hojas, i.e., es una unión de hojas. Por construcción, L está contenida en c). Por lo tanto, d) \subset c). \square

Estamos listos para demostrar el resultado principal de esta sección:

Teorema 1.9. *Si E es integrable, entonces las hojas de E son variedades integrales de E .*

Prueba. Por construcción, las hojas de E son localmente homeomorfas a \mathbb{C}^k , donde k es el rango de E como fibrado vectorial holomorfo. Además, las hojas satisfacen la propiedad de Hausdorff, pues la continuidad de las inmersiones $L \hookrightarrow M$ implica que las inclusiones $[L] \hookrightarrow M$ también son continuas.

Fijemos una cobertura numerable de M por cartas distinguidas (U_j, φ_j) compatibles con E y llamemos *placas relevantes* a las placas de todos los φ_j . Notemos que, dada una variedad integral conexa L de E , sólo existe una cantidad numerable de caminos de placas relevantes cuya primera placa interseca a L . Pero toda placa relevante contenida en $[L]$ es accesible desde L mediante un camino de placas relevantes. Entonces $[L]$ es la unión de una cantidad numerable de tales placas relevantes. Por supuesto, las placas relevantes son variedades integrales de E , así que $[L]$ también es una variedad integral de E . \square

⁴Adoptaremos la convención de que un espacio topológico es conexo si tiene una única componente conexa. En particular, el espacio topológico vacío *no* es conexo.

Corolario 1.10 (Teorema global de Frobenius). *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) E es integrable.
- b) E es el fibrado tangente de una foliación regular de M .
- c) E es el fibrado tangente de una única foliación regular de M .

Prueba. Las implicaciones $c) \implies b) \implies a)$ son obvias. Si E es integrable, entonces la familia de hojas de E es la única foliación regular cuyo fibrado tangente es E , es decir, $a) \implies c)$. \square

Corolario 1.11. *Existe una correspondencia biunívoca entre las foliaciones regulares por curvas (i.e., de dimensión 1) y los subfibrados lineales de TM .*

Prueba. Todo subfibrado lineal de TM es trivialmente involutivo. \square

Capítulo 2

Foliaciones por curvas

2.1. Definiciones básicas

Por el teorema global de Frobenius, construir una foliación holomorfa regular por curvas (i.e., de dimensión 1) de una variedad compleja M es tan fácil o tan difícil como hallar un subfibrado lineal $L \subset TM$. El isomorfismo canónico $L \otimes L^\vee \cong \mathcal{O}_M$ identifica la inclusión $L \hookrightarrow TM$ con una sección global sin ceros de $TM \otimes L^\vee$. Por lo tanto, toda foliación regular por curvas de M está determinada por una sección global sin ceros de un fibrado tangente torcido¹ $TM \otimes L$.

Existen variedades complejas cuyos fibrados tangentes no poseen subfibrados lineales y, por lo tanto, no admiten foliaciones regulares por curvas. No obstante, queremos foliar tales variedades usando una sección de un fibrado tangente torcido $TM \otimes L$ para generar las hojas, ya que esto sigue siendo más conveniente que construir las hojas a mano. Sacrificando lo único que estamos dispuestos a sacrificar, llegamos a la siguiente definición.

Una foliación \mathcal{F} de M se denomina una **foliación singular por curvas** si sus hojas son las curvas integrales maximales de una sección global de un fibrado tangente torcido $TM \otimes L$ cuyos ceros forman un subconjunto analítico $\text{Sing}(\mathcal{F}) \subset M$ de codimensión ≥ 1 , llamado el **conjunto singular** de \mathcal{F} . Los puntos de $\text{Sing}(\mathcal{F})$ se denominan **puntos singulares** de \mathcal{F} .

Ejemplo 2.1. El conjunto vacío \emptyset es un subconjunto analítico de cualquier variedad M , porque es el conjunto de ceros de la función constante 1. Por convención, si M es no vacía, entonces \emptyset es de codimensión ∞ , que ciertamente es ≥ 1 . Por lo tanto, toda foliación regular por curvas de M también es una foliación singular por curvas de M .

Observación. Según nuestra definición de foliación, las hojas de \mathcal{F} son todas las curvas integrales de σ , incluyendo las degeneradas, i.e., los puntos singulares. Sin embargo, en la literatura, es más común llamar “hojas de \mathcal{F} ” sólo a las curvas integrales que son curvas de verdad. Por ejemplo, [SM01, p. 96] define \mathcal{F} como una foliación regular por curvas sobre $M \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$.

¹Por torcer un fibrado vectorial $E \rightarrow M$, nos referimos a reemplazar E con $E \otimes L$, donde $L \rightarrow M$ es un fibrado lineal de nuestra elección. Una sección de $E \otimes L$ es localmente indistinguible de una sección del fibrado original E , pero la manera como se pegan globalmente las secciones difiere por el cociclo que determina a L .

Ejemplo 2.2. Sea \mathcal{F} es una foliación regular por curvas, definida por los campos locales X_j , y sea H una hipersuperficie de M , definida por las ecuaciones locales $h_j = 0$. Entonces los campos locales $h_j X_j$ definen una foliación \mathcal{F}_H cuyo conjunto singular es H y cuyas hojas de dimensión 1 son las diferencias $L \setminus H$, donde L es una hoja de \mathcal{F} no contenida en H .

La foliación del ejemplo anterior es “artificialmente singular”, en el sentido de que se obtuvo agregando un conjunto singular a una foliación regular. Por supuesto, este tipo de singularidades no es muy interesante. Más bien, lo digno de averiguar es qué tanto podemos encoger el conjunto singular de una foliación por curvas dada, sin alterar las hojas existentes de dimensión 1.

Proposición 2.3. *Si \mathcal{F} es una foliación singular por curvas, entonces existe una única foliación singular por curvas \mathcal{F}' cuyo conjunto singular es de codimensión ≥ 2 que contiene a las hojas de dimensión 1 de \mathcal{F} .*

Prueba. Por el teorema de preparación de Weierstrass, para cada punto $p \in M$, el anillo $\mathcal{O}_{M,p}$ de gérmenes de funciones holomorfas es un dominio noetheriano [Ebe07, pp. 70-71] de factorización única [Ebe07, pp. 72-73]. Entonces, los campos locales que definen a \mathcal{F} se factorizan de manera esencialmente única como $h_j X_j$, donde $S_j = \text{Sing}(X_j)$ es de codimensión ≥ 2 .

A priori, la función de transición g_{jk} entre los campos X_j, X_k sólo es meromorfa, pues podría tener polos en la hipersuperficie local $h_j^{-1}(0)$. Sin embargo, g_{jk} se extiende de manera continua y, por ende, holomorfa [GR09, pp. 19-20] al complemento de S_j . Entonces, el teorema de Hartogs garantiza que g_{jk} es holomorfa en S_j también.

Por construcción, las funciones g_{jk} determinan un fibrado lineal $L \rightarrow M$ (salvo isomorfismo), los campos X_j determinan una sección global de $TM \otimes L$ y, por ende, una foliación singular por curvas \mathcal{F}' tal que $\text{Sing}(\mathcal{F}') = \bigcup_j S_j$. Esta unión se puede asumir localmente finita, porque M es paracompacto. Entonces $\text{Sing}(\mathcal{F}')$ es de codimensión ≥ 2 . Si $C \in \mathcal{F}$ es una hoja de dimensión 1, entonces las funciones $h_j|_C$ son invertibles, así que $X_j|_C$ es tangente a C . Por lo tanto, C es una hoja de \mathcal{F}' . \square

La proposición anterior nos dice que las singularidades de codimensión 1 de una foliación por curvas \mathcal{F} son removibles si torcemos el fibrado tangente TM de una manera adecuada, pero las singularidades de codimensión ≥ 2 son obstrucciones no removibles a que \mathcal{F} sea regular. Por lo tanto, siempre podemos asumir que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ es de codimensión ≥ 2 .

Argumentaremos heurísticamente que una foliación por curvas general “no debería” tener un conjunto singular demasiado grande. Supongamos que fuese posible construir una sección global general σ de $TM \otimes L$ pegando secciones locales generales. Cada sección local es la gráfica de una función general $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ cuyo conjunto de ceros es de dimensión 0. Entonces la foliación por curvas generada por σ tiene un conjunto singular de dimensión 0.

Por supuesto, una sección global de $TM \otimes L$ no se puede construir pegando secciones locales totalmente arbitrarias. Y, en efecto, existen variedades complejas que no admiten foliaciones por curvas cuyo conjunto singular es de dimensión 0. Sin embargo, en este trabajo, sólo estudiaremos aquellas foliaciones por curvas cuyo conjunto singular es de dimensión 0.

2.2. El número de Milnor

Dada una foliación singular por curvas \mathcal{F} de una variedad M , el **número de Milnor** $\mu_p(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} en un punto $p \in M$ es una invariante que, en cierto sentido, cuenta el número de veces que p está repetido como punto singular de \mathcal{F} . Más precisamente, si σ es la sección de $TM \otimes L$ que genera las hojas de \mathcal{F} , entonces $\mu_p(\mathcal{F})$ es la multiplicidad de σ en p .

La noción de multiplicidad es local, así que trabajaremos con una representación $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ de σ en una vecindad coordenada $U \subset M$ centrada en p . Si p es un cero aislado de f , entonces [Mil68, p. 59] define la **multiplicidad** $\mu_p(f)$ de f en p como el grado topológico de

$$g : \partial D_\varepsilon \longrightarrow S^{2n-1}, \quad g(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|},$$

donde $D_\varepsilon \subset U$ es un disco pequeño centrado en p .

Para justificar el término “multiplicidad”, [Mil68, pp. 111-114] demuestra que $\mu_p(f)$ satisface propiedades análogas a las de la multiplicidad de un cero de un polinomio.

Lema 2.4. *Todo cero simple de f es de multiplicidad 1.*

Prueba. Si la matriz $J = f'(p)$ es invertible, entonces, por el teorema de Taylor,

$$\|f(z) - J(z - p)\| < \|J(z - p)\|$$

en un disco pequeño $D_\varepsilon \subset U$ centrado en p . Entonces, la homotopía

$$h_t(z) = (1 - t) \cdot f(z) + t \cdot J(z - p)$$

interpola entre $f(z)$ y $J(z - p)$ mediante funciones que no se anulan en $D_\varepsilon \setminus \{p\}$. Como $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ es conexo, existe un camino de isomorfismos lineales J_t desde $J_0 = J$ hasta $J_1 = \mathrm{id}$. Por lo tanto, $\mu_p(f)$ es el grado topológico de

$$g : \partial D_\varepsilon \longrightarrow S^{2n-1}, \quad g(z) = \frac{z - p}{\|z - p\|},$$

que, por supuesto, es 1. □

Lema 2.5. *Si $D_\varepsilon \subset U$ es un disco tal que f no se anula en ∂D_ε , entonces el grado de*

$$g : \partial D_\varepsilon \longrightarrow S^{2n-1}, \quad g(z) = \frac{f(z)}{\|f(z)\|}$$

es el número de ceros de f en D_ε , contados con multiplicidad.

Prueba. Por hipótesis, el conjunto K de ceros de f en D_ε no se acumula en ∂D_ε . Entonces K es compacto y, por el principio del módulo máximo [GR09, pp. 105-106], K es finito.

Sean p_1, \dots, p_r todos los puntos de K . Si tomamos una esfera pequeña $S_i \subset D_\varepsilon$ centrada en cada p_i , entonces ∂D_ε es homólogo en $\overline{D_\varepsilon} \setminus K$ a la suma $S_1 + \dots + S_r$. Por ende,

$$\deg(g) = \mu_{p_1}(f) + \dots + \mu_{p_r}(f)$$

es el número de ceros de f en D_ε , contados con multiplicidad. □

Lema 2.6. Si $D_\varepsilon \subset U$ es una vecindad pequeña de un único cero p de f , entonces, para casi todo $q \in \mathbb{C}^n$ suficientemente cercano al origen, la fibra $f^{-1}(q)$ contiene $\mu_p(f)$ puntos de D_ε . En particular, $\mu_p(f) \geq 0$.

Prueba. Por el teorema de Sard, casi todo $q \in \mathbb{C}^n$ es un valor regular de f . Si $q \in \mathbb{C}^n$ es un valor regular de f suficientemente cercano al origen, entonces la homotopía

$$h_t(z) = f(z) - t \cdot q$$

interpola entre $f(z)$ y $g(z) = f(z) - q$ mediante funciones que no se anulan en ∂D_ε . Si p_1, \dots, p_r son los ceros de g contenidos en D_ε , entonces

$$\mu_p(f) = \mu_{p_1}(g) + \dots + \mu_{p_r}(g) = 1 + \dots + 1 = r$$

y, en particular, $\mu_p(f)$ es no negativo. □

Teorema 2.7. Todo cero aislado de f es de multiplicidad positiva.

Prueba. El grupo lineal $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ es denso en el espacio de matrices $\mathbb{C}^{n \times n}$. Para casi toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ suficientemente cercana a la matriz cero, la función

$$g(z) = f(z) - A(z - p)$$

tiene un cero simple en el origen y la homotopía

$$h_t(z) = f(z) - t \cdot A(z - p)$$

interpola entre $f(z)$ y $g(z)$ mediante funciones que no se anulan en la frontera ∂D_ε de un disco pequeño $D_\varepsilon \subset U$ centrado en p . Si p_1, \dots, p_r son los demás ceros de g en D_ε , entonces

$$\mu_p(f) = \mu_p(g) + \mu_{p_1}(g) + \dots + \mu_{p_r}(g) \geq 1 + 0 + \dots + 0 = 1$$

es un número positivo. □

Consideremos ahora el efecto de aplicar una función de transición holomorfa $\tau : U \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ al representante local f de σ . Asumiendo sin pérdida de generalidad que U es contractible, τ es homotópica a la función constante

$$\iota : U \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C}), \quad \iota(z) = \text{id} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

y, por ende, $\tau \cdot f$ es homotópica a f mediante funciones que sólo se anulan en los ceros de f . En particular, si p es un cero aislado de f , entonces $\tau \cdot f$ es homotópica a f mediante funciones que no se anulan en $D_\varepsilon \setminus \{p\}$, donde $D_\varepsilon \subset U$ es un disco pequeño centrado en p . Por ende,

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(\sigma) = \mu_p(f)$$

está bien definido y es independiente de σ o de f .

2.3. Cálculo del número de Milnor

La definición de multiplicidad dada en la sección anterior tiene una interpretación geométrica convincente, pero no es conveniente para hacer cálculos. En geometría algebraica, se utiliza otra definición de multiplicidad, cuya forma general es complicada [Ful84, p. 120, def. 7.1], pero, en el caso que nos interesa, admite una descripción simple [Ful84, p. 123, ej. 7.1.10].

Consideremos una función holomorfa $f : U \rightarrow \mathbb{C}^n$ definida en un abierto $U \subset \mathbb{C}^n$, como en la sección anterior. La **multiplicidad** $m_p(f)$ en un cero $p \in U$ de f es la longitud del $\mathcal{O}_{U,p}$ -módulo $\mathcal{O}_{U,p}/\mathfrak{q}$, donde \mathfrak{q} es el ideal de $\mathcal{O}_{U,p}$ generado por la imagen del ideal maximal de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ bajo el homomorfismo de \mathbb{C} -álgebras $f^* : \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0} \rightarrow \mathcal{O}_{U,p}$ inducido por f .

Teorema 2.8. *Si $p \in U$ es un cero aislado de f , entonces $m_p(f) = \mu_p(f)$.*

Prueba. Por el teorema de los ceros de Rückert [Ebe07, pp. 78-80], el ideal \mathfrak{q} es primario para el ideal maximal \mathfrak{m} de $\mathcal{O}_{U,p}$. En particular, \mathfrak{q} contiene a alguna potencia \mathfrak{m}^{k+1} . Entonces,

$$m_p(f) = \ell(\mathcal{O}_{U,p}/\mathfrak{q}) \leq \ell(\mathcal{O}_{U,p}/\mathfrak{m}^{k+1}) = \binom{n+k}{k}$$

es una cantidad finita y $\mathcal{O}_{U,p}/\mathfrak{q}$ es un anillo artiniiano. Por el teorema de planitud milagrosa de Hironaka [Mat89, p. 179, teo. 23.1], $\mathcal{O}_{U,p}$ es un $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ -módulo libre de rango $m_p(f)$.

Sean y_1, \dots, y_n las coordenadas de \mathbb{C}^n . Por construcción, las imágenes $f_i = f^*(y_i)$ generan \mathfrak{q} , así que f_1, \dots, f_n es un sistema de parámetros de $\mathcal{O}_{U,p}$. Por [AM69, p. 123, cor. 11.21], f_1, \dots, f_n son \mathbb{C} -algebraicamente independientes. Entonces f^* es inyectivo y podemos identificar $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$ con su imagen en $\mathcal{O}_{U,p}$. En particular, $\mathcal{O}_{U,p}$ es una extensión íntegra de $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}$.

Sean x_1, \dots, x_n coordenadas de U en las cuales $p = (a_1, \dots, a_n)$. Sea $A_j = \mathcal{O}_{\mathbb{C}^n,0}[x_1, \dots, x_j]$ y sea K_j el cuerpo de fracciones de A_j . Por construcción, cada coordenada x_j es algebraica sobre K_{j-1} y su polinomio minimal $g_j \in K_{j-1}[T]$ es de grado $d_j = [K_j : K_{j-1}]$.

Geoméricamente, el anillo A_n describe una vecindad X_n de $(p, 0)$ en la gráfica de $y = f(x)$ y los demás anillos A_j describen la imagen X_j de esta vecindad bajo la proyección que descarta las coordenadas x_{j+1}, \dots, x_n . En particular, la inclusión canónica $A_{j-1} \hookrightarrow A_j$ describe el morfismo $\pi_j : X_j \rightarrow X_{j-1}$ que descarta la siguiente coordenada x_j .

Abreviemos $p_j = (a_1, \dots, a_j)$. Para casi todo punto $q \in X_{j-1}$ cercano a $(p_{j-1}, 0)$, el polinomio $g_j(q) \in \mathbb{C}[T]$ está bien definido y tiene d_j raíces distintas. Por el lema de Hensel [Ebe07, p. 73], se deduce [Ebe07, p. 101, prop. 2.43] que estas raíces son cercanas a a_j . Entonces la fibra general de π_j consta de d_j puntos cercanos a $\pi_j^{-1}(p_{j-1}, 0) = (p_j, 0)$. Por ende, la fibra general de

$$\pi = \pi_1 \circ \dots \circ \pi_n : X_n \subset f(U) \rightarrow X_0 \subset \mathbb{C}^n$$

consta de $d_1 \cdots d_n = m_p(f)$ puntos cercanos a $(p, 0)$. Pero π es morfismo de gérmenes analíticos determinado por la proyección a \mathbb{C}^n desde la gráfica de f , así que, para casi todo $q \in \mathbb{C}^n$ cercano al origen, la fibra $f^{-1}(q)$ contiene $m_p(f)$ puntos cercanos a p . Por ende, $m_p(f) = \mu_p(f)$. \square

A modo de ejemplo, usaremos el número de Milnor para contar los puntos singulares de una foliación por curvas \mathcal{F} del plano proyectivo \mathbb{P}^2 . El **grado** de \mathcal{F} , denotado $\deg(\mathcal{F})$, se define como el número de puntos² en que una recta general de \mathbb{P}^2 es tangente a las hojas de \mathcal{F} .

Teorema 2.9 (Teorema de Bézout para foliaciones). *\mathcal{F} tiene exactamente*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^n} \mu_p(\mathcal{F}) = 1 + \deg(\mathcal{F}) + \deg(\mathcal{F})^2$$

puntos singulares, contados con multiplicidad. En particular, no existen foliaciones regulares por curvas de \mathbb{P}^2 .

Prueba. Por el teorema de Serre (GAGA), el fibrado lineal $L \rightarrow M$ y la sección de $TM \otimes L$ que definen a \mathcal{F} son algebraicos. Entonces, \mathcal{F} está definida en la parte afín $[x : y : z] = [u : v : 1]$ por un campo vectorial polinomial

$$X = P(u, v) \frac{\partial}{\partial u} + Q(u, v) \frac{\partial}{\partial v}$$

o, equivalentemente, por la 1-forma polinomial

$$\omega = Q(u, v) du - P(u, v) dv$$

o, equivalentemente, cualquier múltiplo escalar

$$\sigma = z^{n+2}\omega = z^{n+1}Q dx - z^{n+1}P dy - z^n(xQ - yP) dz,$$

visto como una sección de $T^*\mathbb{P}^2 \otimes L'$ para algún fibrado lineal $L' \rightarrow \mathbb{P}^2$.

Tras un cambio de coordenadas de \mathbb{P}^2 , podemos asumir que la recta en el infinito $L_\infty : z = 0$ no contiene hojas de \mathcal{F} . En particular, como L_∞ no es una hoja, existe algún $n \in \mathbb{Z}$ tal que σ es holomorfa en L_∞ y no se anula idénticamente en TL_∞ . Analizando los términos

$$z^{n+1}Q dx - z^{n+1}P dy,$$

deducimos que z^{n+1} tiene el grado preciso para anular los polos de P, Q en L_∞ . Por ende, $n + 1$ debe ser el mayor de los grados de P, Q . Analizando el término restante

$$-z^n(xQ - yP) dz$$

deducimos que $xQ - yP$ tiene a lo más un polo de orden n en L_∞ . Si denotamos por P_j, Q_j las partes homogéneas de P, Q de grado j , entonces $xQ_{n+1}(x, y) = yP_{n+1}(x, y)$, así que

$$R = \frac{P_{n+1}(x, y)}{x} = \frac{Q_{n+1}(x, y)}{y}$$

es un polinomio homogéneo bien definido, no nulo y de grado n .

²La definición de grado de una foliación de \mathbb{P}^2 es análoga a la de grado de una curva $C \subset \mathbb{P}^2$, i.e., el número de puntos en que una recta general de \mathbb{P}^2 interseca a C .

Por otra parte, como L_∞ no contiene puntos singulares de \mathcal{F} , la restricción

$$\sigma|_{L_\infty} = xRdx - yRdy - \left(xQ_n(x, y) - yP_n(x, y) \right) dz$$

no se anula en ningún punto de L_∞ . En los puntos $[x : y : 0]$ donde R se anula, $\sigma|_{L_\infty}$ se reduce a un múltiplo no nulo de dz . Éstos son precisamente los puntos donde L_∞ es tangente a \mathcal{F} . Por lo tanto, \mathcal{F} es de grado $\deg(\mathcal{F}) = \deg(R) = n$.

Finalmente, los puntos singulares de \mathcal{F} son los ceros comunes de P, Q en el abierto afín con coordenadas u, v . Las clausuras proyectivas de las curvas P, Q también se intersecan en los ceros de R , pero estos puntos no son singularidades de \mathcal{F} . Entonces, \mathcal{F} tiene

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^n} \mu_p(\mathcal{F}) = \deg(P) \cdot \deg(Q) - \deg(R) = 1 + \deg(\mathcal{F}) + \deg(\mathcal{F})^2$$

puntos singulares, contados con multiplicidad. □

Capítulo 3

Clasificación de fibrados vectoriales

3.1. Definiciones básicas

En el capítulo anterior, hemos definido una clase de foliaciones \mathcal{F} sobre M generadas por una sección de un fibrado vectorial holomorfo $E \rightarrow M$, cuyos ceros son el lugar donde las hojas de \mathcal{F} tienen menor dimensión que la esperada. Desde nuestro punto de vista, esta degeneración de las hojas es un “defecto” de \mathcal{F} y el objetivo es encontrar y cuantificar estos defectos.

Como veremos en el capítulo 5, los posibles lugares de los ceros de una sección $M \rightarrow E$ están determinados por la clase de isomorfismo de E . Anticipando este resultado, en este capítulo y el siguiente construiremos las herramientas algebraicas necesarias para estudiar la estructura de un fibrado vectorial, haciendo particular énfasis en la estructura *topológica*.

Dado un espacio topológico M , consideremos el semianillo $\text{Vect}(M)$ cuyos elementos son los fibrados vectoriales complejos $E \rightarrow M$, salvo isomorfismo, y cuyas operaciones son

$$n = [M \times \mathbb{C}^n], \quad [E] + [F] = [E \oplus F], \quad [E] \cdot [F] = [E \otimes F].$$

El grupo de unidades multiplicativas $\text{Pic}(M) = \text{Vect}(M)^\times$ también se conoce como el **grupo de Picard topológico** de M y está conformado por los fibrados lineales.

Toda función continua $f : N \rightarrow M$ induce el homomorfismo de semianillos

$$f^* : \text{Vect}(M) \longrightarrow \text{Vect}(N), \quad f^*([E]) = [f^*E],$$

donde $f^*E \rightarrow N$ es el **fibrado pullback**, cuyo espacio total es

$$f^*(E) \cong N \times_M E \cong \bigsqcup_{q \in N} \{q\} \times E_{f(q)} \cong \left\{ (q, x) \in N \times E : x \in E_{f(q)} \right\}.$$

Para toda composición de funciones continuas

$$M_0 \xrightarrow{f_1} M_1 \xrightarrow{f_2} M_2 \longrightarrow \dots \longrightarrow M_{n-1} \xrightarrow{f_n} M_n,$$

se cumple $(f_n \circ \dots \circ f_1)^* = f_1^* \circ \dots \circ f_n^*$. En particular, $\text{id}^* = \text{id}$. Por tanto, Vect es un **funtor contravariante** de la categoría de espacios topológicos a la categoría de semianillos.

3.2. Invarianza por homotopías

Intuitivamente, un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ es una función continua que asigna un espacio vectorial complejo E_p a cada punto $p \in M$. Entonces un fibrado vectorial $E \rightarrow M \times I$ se puede ver como una **homotopía de fibrados** $E_t \rightarrow M$, donde E_t se identifica con la restricción de E a la sección horizontal $M \times \{t\}$, identificada con M de la manera obvia.

En esta sección, demostraremos que, bajo una hipótesis “razonable” sobre la topología de M , que ciertamente es válida cuando M es una variedad diferenciable (el caso que más nos interesa), toda homotopía de fibrados $E_t \rightarrow M$ induce un isomorfismo de fibrados $E_0 \cong E_1$. Pero, antes de ello, daremos un ejemplo de una homotopía de fibrados que *no* induce un isomorfismo entre sus extremos¹.

Ejemplo 3.1. Sea M la unión de una familia numerable de copias de I , denotadas $I_n = [0, 1_n]$, cocientada por la relación de equivalencia que identifica a 0 en todas las copias. Decretemos que un subconjunto $U \subset M$ es abierto si se cumplen las siguientes condiciones:

- a) Cada intersección $U \cap I_n$ es abierta en la topología usual de I_n .
- b) Si $0 \in U$, entonces $]0, 1_n[\subset U$ para una cantidad cofinita de índices $n \in \mathbb{N}$.

Consideremos ahora la cobertura de M por los abiertos

$$U_n =]0, 1_n], \quad V = \bigcup_n]0, 1_n[.$$

Para cada $U_n \cap V =]0, 1_n[$, definamos la homotopía de funciones de transición

$$g_{n,t} :]0, 1_n[\longrightarrow \mathrm{GL}_1(\mathbb{C}) = \mathbb{C}^\times, \quad g_{n,t}(x) = (1 - x)^t.$$

Esta información determina una homotopía de fibrados lineales $L_t \rightarrow M$.

Por construcción, L_0 es el fibrado trivial, ya que sus funciones de transición son todas 1. Sin embargo, L_1 no es trivial, por la siguiente razón. Si $f : V \rightarrow \mathbb{C}$ es una función continua, entonces la preimagen de un disco centrado en $f(0)$ es una vecindad de 0 en M . Entonces f es acotada en una cantidad cofinita de intervalos $]0, 1_n[$ y, para los índices correspondientes $n \in \mathbb{N}$, se tiene

$$\lim_{x \rightarrow 1_n} g_{n,1}(x) \cdot f(x) = \lim_{x \rightarrow 1_n} (1 - x) \cdot f(x) = 0.$$

Por lo tanto, toda sección global $M \rightarrow L_1$ se anula en una cantidad cofinita de puntos 1_n .

Para evitar situaciones como la del ejemplo anterior, en adelante solamente trabajaremos con fibrados vectoriales complejos sobre espacios topológicos **paracompactos**. (Recordemos que un espacio M es paracompacto si toda cobertura abierta \mathcal{U} de M admite una partición de la unidad continua subordinada a \mathcal{U} .) La ventaja técnica de usar espacios paracompactos radica en que las **propiedades locales** de una cobertura abierta arbitraria se pueden transferir a una cobertura abierta numerable y localmente finita.

¹Adaptado de <https://mathoverflow.net/a/306809>.

Lema 3.2. *Dada una cobertura abierta Γ de un espacio topológico paracompacto M , existe otra cobertura abierta numerable $\{U_n\}$ tal que cada componente conexa de cada U_n está contenida en algún elemento de Γ .*

Prueba. Tomemos una partición de la unidad Φ subordinada a Γ y definamos

$$U_S = \left\{ p \in M : \varphi(p) > \varphi'(p) \text{ para todo } \varphi \in S, \varphi' \notin S \right\}$$

para cada subconjunto finito no vacío $S \subset \Phi$. Por construcción,

- U_S está localmente definido por una cantidad finita de desigualdades,
- U_S está contenido en cualquier elemento de Γ que contenga al soporte de algún $\varphi \in S$,
- cada punto $p \in M$ está contenido en V_{S_p} , donde S_p es el conjunto finito de funciones de Φ que no se anulan en p .

Entonces $\{U_S\}$ es un refinamiento abierto de Γ . Además, si $S, T \subset \Phi$ son subconjuntos finitos de la misma cardinalidad $n \in \mathbb{Z}^+$, pero distintos, entonces U_S, U_T son disjuntos. Por lo tanto, cada componente conexa de la unión disjunta

$$U_n = \bigsqcup_{|S|=n} U_S$$

también está contenida en algún elemento de Γ . □

Lema 3.3. *Dada una cobertura abierta enumerable $\{U_n\}$ de un espacio paracompacto M , existe una partición de la unidad $\{\rho_n\}$ de M tal que cada $\rho_n : M \rightarrow I$ está soportado en U_n .*

Prueba. Tomemos una partición de la unidad Φ subordinada a $\{U_n\}$ y definamos

$$\sigma_n = \sum \left\{ \varphi \in \Phi : \text{Supp}(\varphi) \subset U_j \text{ para algún } j < n \right\}$$

para cada número natural $n \in \mathbb{N}$. Entonces, las diferencias $\rho_n = \sigma_{n+1} - \sigma_n$ forman una partición de la unidad $\{\rho_n\}$ de M tal que cada ρ_n está soportado en U_n . □

Teorema 3.4. *Dada una homotopía de fibrados $E_t \rightarrow M$ sobre un espacio paracompacto M , la clase de isomorfismo $[E_t]$ no depende del parámetro $t \in I$.*

Prueba. Notemos que $E_{ct} \rightarrow M$ es una homotopía de fibrados entre E_0 y E_c , para todo instante intermedio $c \in I$. Entonces es suficiente demostrar que $[E_0] = [E_1]$.

Diremos que un abierto $U \subset M$ es E -distinguido si la restricción $E|_{U \times I}$ es trivial. Para hallar una vecindad E -distinguida U_p de $p \in M$, basta cubrir la franja vertical $\{p\} \times I$ con un número finito de abiertos básicos $U_j \times I_j$ tales que $E|_{U_j \times I_j}$ es trivial y luego tomar $U_p = \bigcap_j U_j$. Una vez que M admite una cobertura abierta E -distinguida, por los dos lemas anteriores, podemos hallar una cobertura E -distinguida numerable $\{V_n\}$ y una partición de la unidad $\{\rho_n\}$ de M tales que cada función $\rho_n : M \rightarrow I$ está soportada en el respectivo abierto V_n .

Sea $M_n \subset M \times I$ la gráfica de $\sigma_n = \rho_1 + \cdots + \rho_n$, pensada como una copia isomorfa de M , y sea $F = f^*(E)$ el pullback de E bajo la función $f : M \times I \rightarrow M \times I$ definida por

$$f(p, t) = \begin{cases} (p, \sigma_n(p)), & \text{si } t \leq \sigma_n(p) \\ (p, t), & \text{si } \sigma_n(p) \leq t \leq \sigma_{n+1}(p), \\ (p, \sigma_{n+1}(p)), & \text{si } \sigma_{n+1}(p) \leq t. \end{cases}$$

Por construcción,

- $F_t \rightarrow M$ es una homotopía de fibrados desde $F_0 = E|_{M_n}$ hasta $F_1 = E|_{M_{n+1}}$.
- V_n es un abierto F -distinguido, i.e., $F|_{V_n \times I}$ es trivial.

Entonces F induce un isomorfismo local $g_n : F_0|_{V_n} \rightarrow F_1|_{V_n}$. Notemos que

- g_n es la identidad fuera del soporte de ρ_n .
- g_n se extiende a un isomorfismo global $E|_{M_n} \rightarrow E|_{M_{n+1}}$.

Notemos que todo punto de M posee una vecindad $W \subset M$ tal que

- La sucesión $\rho_n|_W$ es eventualmente la función constante 0.
- La sucesión $\sigma_n|_W$ es eventualmente la función constante 1.
- La sucesión $g_n|_W$ es eventualmente el isomorfismo identidad de $E_1|_W$.

Entonces, poniendo $h_n = g_n \circ \cdots \circ g_1$, la función límite

$$h : E_0 \longrightarrow E_1, \quad h(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} h_n(x)$$

está bien definida, es continua y es un isomorfismo de fibrados vectoriales. □

Corolario 3.5. Sean $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial complejo y N un espacio paracompacto. Dada una función continua $f : N \rightarrow M$, la clase de isomorfismo $[f^*E] \in \text{Vect}(N)$ depende únicamente de la clase de homotopía de f .

Prueba. Dada una homotopía ordinaria $h_t : N \rightarrow M$, que parte de $h_0 = f$, el pullback $h_t^*(E)$ es una homotopía de fibrados vectoriales sobre N . Por el teorema anterior,

$$[h_t^*(E)] = [h_0^*(E)] = [f^*E],$$

independientemente del valor del parámetro $t \in I$. □

Corolario 3.6. Sea $f : M \rightarrow N$ una equivalencia homotópica entre dos espacios paracompactos. Entonces $f^* : \text{Vect}(N) \rightarrow \text{Vect}(M)$ es un isomorfismo de semianillos.

Prueba. Sea $g : N \rightarrow M$ una inversa homotópica de f . Por el corolario anterior,

$$f^* \circ g^* = (g \circ f)^* = \text{id}, \quad g^* \circ f^* = (f \circ g)^* = \text{id}.$$

Entonces f^* es un isomorfismo de semianillos. □

3.3. El espacio clasificador

Un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ es un paquete de espacios vectoriales abstractos $\{E_p\}$ indizados por los puntos $p \in M$. Para facilitar la manipulación de E , utilizaremos encajes simultáneos de todos los espacios E_p en un mismo \mathbb{C} -espacio vectorial. Denotemos por \mathbb{C}^n un \mathbb{C} -espacio vectorial de dimensión finita ($n \in \mathbb{N}$) o enumerable ($n = \infty$), con la topología celular². Diremos que un **anclaje** de E en \mathbb{C}^n es una función continua $f : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ cuya restricción a cada fibra E_p es un monomorfismo \mathbb{C} -lineal.

Proposición 3.7. *Todo fibrado vectorial complejo $\pi : E \rightarrow M$ sobre un espacio paracompacto M admite un anclaje $f : E \rightarrow \mathbb{C}^\infty$.*

Prueba. Por los lemas de la sección anterior, M admite

- una cobertura abierta numerable $\{U_n\}$ tal que cada $E|_{U_n}$ es trivial,
- una partición de la unidad $\{\rho_n\}$ tal que cada ρ_n está soportado en el respectivo U_n .

Por definición, la trivialización de $E|_{U_n}$ nos otorga un anclaje $g_n : E|_{U_n} \rightarrow \mathbb{C}^k$. Extendamos g_n a todo E usando $f_n(x) = \rho_n(\pi(x)) \cdot g_n(x)$. Entonces,

$$f(x) = (f_0(x), f_1(x), f_2(x), \dots)$$

es un anclaje de todo E en $(\mathbb{C}^k)^\infty \cong \mathbb{C}^\infty$. □

Dado un anclaje $f : E \rightarrow \mathbb{C}^n$, es fácil generar muchos otros anclajes $E \rightarrow \mathbb{C}^n$ que, en esencia, son otras presentaciones de f . Por ejemplo, $T \circ f$, donde $T : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ es un operador \mathbb{C} -lineal inyectivo. Para eliminar la distinción formal entre anclajes “esencialmente iguales”, diremos que dos anclajes $E \rightarrow \mathbb{C}^n$ son **homotópicos** si están unidos por una **homotopía de anclajes**, i.e., una homotopía ordinaria $h_t : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ que, en cada instante $t \in I$, es un anclaje.

Proposición 3.8. *Todo par de anclajes $f, g : E \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ es homotópico.*

Prueba. Definamos los operadores \mathbb{C} -lineales $A, B : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ por

$$A(x_0, x_1, \dots) = (x_0, 0, x_1, 0, \dots), \quad B(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, 0, x_1, \dots).$$

Utilizando la notación $[p, q]_t = (1 - t) \cdot p + t \cdot q$, definamos la homotopía de anclajes

$$h_t = \begin{cases} [f, Af]_{3t}, & \text{si } 3t \in [0, 1], \\ [Af, Bg]_{3t-1}, & \text{si } 3t \in [1, 2], \\ [Bg, g]_{3t-2}, & \text{si } 3t \in [2, 3]. \end{cases}$$

Los extremos de h son $h_0 = f$ y $h_1 = g$. Por ende, f y g son homotópicos. □

²El espacio \mathbb{C}^∞ es el límite directo del sistema de inclusiones $\mathbb{C}^0 \rightarrow \mathbb{C}^1 \rightarrow \mathbb{C}^2 \rightarrow \dots$, cada una de las cuales es una aplicación celular.

A continuación, construiremos un espacio $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, llamado el **grassmanniano de k -planos** en \mathbb{C}^n , cuyos puntos se identifican de manera natural con los \mathbb{C} -subespacios vectoriales de \mathbb{C}^n de dimensión k . De esta manera, si $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial de rango k , entonces un anclaje $f : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ determinará una **función clasificadora**

$$\tilde{f} : M \longrightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n), \quad \tilde{f}(p) = f(E_p)$$

y, recíprocamente, \tilde{f} nos permitirá reconstruir un fibrado vectorial isomorfo a E .

Notemos que, a nivel de conjuntos, no hay mucho que definir: ciertamente el conjunto de los k -planos en \mathbb{C}^n está bien definido. Lo realmente interesante (y no trivial) es hallar una topología apropiada para $\text{Gr}_k(\mathbb{C})$, que formalice la idea intuitiva de que dos k -planos son cercanos si sus “pendientes” o “inclinaciones” son cercanas.

Ejemplo 3.9. Definamos $g : \mathbb{C}^2 \rightarrow \text{Gr}_1(\mathbb{C}^2)$ por

$$g(p) = \begin{cases} X, & \text{si } p \in X, \\ Y, & \text{si } p \notin X, \end{cases}$$

donde X, Y son los ejes coordenados de \mathbb{C}^2 . Esta asignación de rectas proviene de la foliación del ejemplo 1.2 (usando $f(x) = 0$), que *no* posee un fibrado tangente.

Por supuesto, el problema con g es que la pendiente de $g(p)$ cambia abruptamente cuando p varía a lo largo de un camino que cruza el eje X . Si g fuese continua, entonces

$$\{X, Y\} = g(\mathbb{C}^2) = g(\overline{\mathbb{C}^2 \setminus X}) \subset \overline{g(\mathbb{C}^2 \setminus X)} = \overline{\{Y\}}.$$

Pero $\text{Gr}_1(\mathbb{C}^2) = \mathbb{P}^1$ es la esfera de Riemann, que es Hausdorff, así que $\overline{\{Y\}} = \{Y\}$.

El grassmanniano $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ se construye como el espacio de órbitas de la acción de $\text{GL}_k(\mathbb{C})$ sobre el **espacio de Stiefel** $V_k(\mathbb{C}^n)$, cuyos puntos son las k -tuplas linealmente independientes en el producto cartesiano $\mathbb{C}^{n \times k} = \mathbb{C}^n \times \cdots \times \mathbb{C}^n$. A nivel de conjuntos, esto funciona porque

- Un punto de $\mathbb{C}^{n \times k}$ está en $V_k(\mathbb{C}^n)$ si y sólo si es base de algún k -plano en \mathbb{C}^n .
- Dos puntos de $V_k(\mathbb{C}^n)$ son bases del mismo k -plano si y sólo si están relacionados por una matriz de cambio de base en $\text{GL}_k(\mathbb{C})$.

Identifiquemos los elementos de $\mathbb{C}^{n \times k}$ con matrices $n \times k$. (Para $n = \infty$, estas matrices deben tener una cantidad finita de entradas no nulas.) Si denotamos por Φ el conjunto de los menores $k \times k$, pensados como funciones $\varphi : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{k \times k}$, entonces

$$V_k(\mathbb{C}^n) = \bigcup_{\varphi \in \Phi} U_\varphi, \quad U_\varphi = \varphi^{-1} \circ \text{GL}_k(\mathbb{C})$$

es una unión de abiertos de $\mathbb{C}^{n \times k}$. Por ende, $V_k(\mathbb{C}^n)$ es abierto en $\mathbb{C}^{n \times k}$. Daremos a $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ la topología cociente, i.e., decretamos que la proyección canónica $\pi : V_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es continua y abierta.

Para cada menor $\varphi \in \Phi$, denotemos por $\varphi^\perp : \mathbb{C}^{n \times k} \rightarrow \mathbb{C}^{(n-k) \times k}$ la proyección que descarta las entradas de φ y retiene todas las demás. El homeomorfismo $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ -equivariante

$$T_\varphi : U_\varphi \longrightarrow \mathbb{C}^{(n-k) \times k} \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}^n), \quad T_\varphi(x) = \left(\varphi^\perp(x) \cdot \varphi(x)^{-1}, \varphi(x) \right)$$

es una trivialización local de la acción por derecha $V_k(\mathbb{C}^n) \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}) \rightarrow V_k(\mathbb{C}^n)$. Entonces,

- El **fibrado de Stiefel** $\pi : V_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es un $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ -fibrado principal.
- El grassmanniano $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ admite una cobertura por abiertos $\tilde{U}_\varphi = \pi(U_\varphi)$ homeomorfos al espacio vectorial $\mathbb{C}^{(n-k) \times k}$, en los cuales el fibrado de Stiefel es trivial.

Proposición 3.10. *Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango k . Dado un anclaje $f : E \rightarrow \mathbb{C}^n$, la función clasificadora $\tilde{f} : M \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es continua.*

Prueba. Dada una base local v_1, \dots, v_k de E en un abierto $U \subset M$, la restricción

$$\tilde{f}|_U : U \longrightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n), \quad \tilde{f}(p) = \pi(f \circ v_1(p), \dots, f \circ v_k(p))$$

es una función continua. Como las trivializaciones de E cubren M , entonces \tilde{f} es continua. □

Corolario 3.11. *Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango k . Dada una homotopía de anclajes $h_t : E \rightarrow \mathbb{C}^n$, la familia de funciones clasificadoras $\tilde{h}_t : M \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es una homotopía.*

Prueba. Pensemos en h_t como un único anclaje $h : E \times I \rightarrow \mathbb{C}^n$ del fibrado $E \times I \rightarrow M \times I$. Por la proposición anterior, la función clasificadora $\tilde{h} : M \times I \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es continua. Entonces \tilde{h}_t es una homotopía en el sentido ordinario. □

El **fibrado tautológico** sobre $\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ se define como el producto balanceado

$$E_k(\mathbb{C}^n) = V_k(\mathbb{C}^n) \times^{\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k = \frac{V_k(\mathbb{C}^n) \times \mathbb{C}^k}{\left\langle (x \cdot g, z) \sim (x, g \cdot z) : g \in \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}) \right\rangle}$$

con la proyección canónica sobre el grassmanniano

$$E_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) = V_k(\mathbb{C}^n) \times^{\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})} \{\mathrm{pt}\}$$

que descarta la coordenada vectorial.

Teorema 3.12. *El fibrado tautológico $E_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es un fibrado vectorial de rango k con un anclaje canónico $\tau : E_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$ clasificado por la función identidad $\tilde{\tau} = \mathrm{id}$.*

Prueba. Sea $U \subset \mathrm{Gr}(\mathbb{C}^n)$ un abierto en el cual $V_k(\mathbb{C}^n)$ es trivial. Entonces,

$$E_k(\mathbb{C}^n) \Big|_U = V_k(\mathbb{C}^n) \Big|_U \times^{\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k \cong \left(U \times \mathrm{GL}_k(\mathbb{C}) \right) \times^{\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})} \mathbb{C}^k \cong U \times \mathbb{C}^k$$

es una trivialización local de $E_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ como fibrado topológico con fibra \mathbb{C}^k .

Como el grupo lineal $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ actúa de manera trivial en el factor U y por transformaciones lineales en el factor \mathbb{C}^k , toda función de transición $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ -equivariante de $E_k(\mathbb{C}^n)$ definida en U necesariamente es de la forma

$$U \times \mathbb{C}^k \longrightarrow U \times \mathbb{C}^k, \quad (x, v) \longmapsto (x, g(x) \cdot v),$$

donde $g : U \rightarrow \mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ es una función continua. Por lo tanto, $E_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es un fibrado vectorial de rango k .

Finalmente, el anclaje tautológico de $E_k(\mathbb{C}^n)$ en \mathbb{C}^n está definido por

$$\tau : E_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \tau(v, z) = v \cdot z,$$

donde $v \in V_k(\mathbb{C}^n)$ es una matriz $n \times k$ cuyas columnas son base de un k -plano $\pi(v) \in \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ y $z \in \mathbb{C}^k$ es un vector de coordenadas en esta base. La función clasificadora de τ es

$$\tilde{\tau} : \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n), \quad \tilde{\tau} \circ \pi(v) = \pi(v),$$

es decir, la función identidad. □

Lema 3.13. *Todo anclaje $f : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ de un fibrado vectorial $p : E \rightarrow M$ de rango k induce un isomorfismo de fibrados $\psi : E \rightarrow F$, donde F es el fibrado pullback*

$$F = \tilde{f}^* \circ E_k(\mathbb{C}^n) = M \times_{\mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)} V_k(\mathbb{C}^n) \times^{\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})} \times \mathbb{C}^k$$

a lo largo de la función clasificadora $\tilde{f} : M \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$. Además, $f = \tilde{f}^* \tau \circ \psi$, donde

$$\tilde{f}^* \tau : F \longrightarrow \mathbb{C}^n, \quad \tilde{f}^* \tau(p, v, z) = v \cdot z$$

es el anclaje de F inducido por el anclaje canónico $\tau : E_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \mathbb{C}^n$.

Prueba. A saber, $\psi(x) = (p(x), v, z)$, donde $f(x) = v \cdot z$. □

Teorema 3.14 (Clasificación de fibrados vectoriales). *Dado un espacio paracompacto M , existe una correspondencia biyectiva canónica entre*

- a) Las clases de isomorfismo de fibrados vectoriales $E \rightarrow M$ de rango k .
- b) Las clases de homotopía de funciones $\tilde{f} : M \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)$.

Prueba. Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango k . Entonces,

- Por 3.7 y 3.13, E admite una función clasificadora $\tilde{f} : M \rightarrow \mathrm{Gr}_k(\mathbb{C}^\infty)$.
- Por 3.8 y 3.11, E determina la clase de homotopía de \tilde{f} .
- Por 3.5, la clase de homotopía de \tilde{f} determina la clase de isomorfismo de E .

Esto establece la correspondencia solicitada. □

3.4. Estructuras geométricas adicionales

Para $n \in \mathbb{N}$, el grassmanniano $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ es una variedad algebraica compleja compacta y los fibrados de Stiefel $V_k(\mathbb{C}^n)$ y tautológico $E_k(\mathbb{C}^n)$ sobre $\text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ también son algebraicos. Dado un morfismo de variedades diferenciables, analíticas o algebraicas $\tilde{f} : M \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$, los pullbacks de $V_k(\mathbb{C}^n)$ y $E_k(\mathbb{C}^n)$ bajo \tilde{f} también pertenecen a la categoría de espacios correspondiente.

Ahora supongamos que $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial diferenciable, holomorfo o algebraico dado y consideremos el problema de recuperar la estructura correspondiente del espacio total E usando una función clasificadora $\tilde{f} : M \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$. Por lo pronto, la dimensión topológica de M es finita, así que existe un anclaje continuo $f : E \rightarrow \mathbb{C}^n$ con $n \in \mathbb{N}$. En realidad, la pregunta es si podemos conseguir que este anclaje sea diferenciable, analítico o algebraico, de tal manera que E sea isomorfo a $\tilde{f}^* \circ E_k(\mathbb{C}^n)$ en la categoría correspondiente.

En el caso diferenciable, la respuesta es afirmativa. La clave radica en que cualquier función continua $\tilde{f} : M \rightarrow \text{Gr}_k(\mathbb{C}^n)$ admite una aproximación diferenciable esencialmente única o, siendo más precisos, única salvo homotopía diferenciable. Por ende, E admite esencialmente una única estructura diferenciable compatible con la estructura de fibrado vectorial topológico.

En el caso holomorfo o algebraico, las cosas no son tan simples. Un fibrado vectorial complejo sobre una variedad compleja puede admitir muchas estructuras holomorfas no equivalentes, pero también puede no admitir ninguna estructura holomorfa [Huy05, pp. 66-67].

Ejemplo 3.15. Sean P, Q dos puntos de una curva elíptica M . El fibrado lineal $\mathcal{O}_M(P - Q)$ es topológicamente trivial. Sin embargo, como fibrado vectorial holomorfo, no es trivial, porque no posee secciones globales holomorfas no nulas.

Más aún, existen fibrados vectoriales holomorfos que no admiten anclajes holomorfos.

Ejemplo 3.16. El fibrado canónico $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^n$ es generado por $n + 1$ secciones holomorfas que corresponden a las coordenadas homogéneas de \mathbb{P}^n . Si existiese un anclaje holomorfo $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{C}^m$ para algún $m \in \mathbb{N}$, entonces cada coordenada homogénea de \mathbb{P}^n induciría una función holomorfa no constante $\mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{C}^m$, lo cual contradice el principio del máximo del análisis complejo.

Por lo tanto, la clasificación de fibrados vectoriales topológicos o diferenciables es apenas una aproximación muy cruda a la clasificación de fibrados vectoriales holomorfos sobre una variedad compleja. No obstante, para nuestros fines, esta aproximación será suficiente.

Capítulo 4

Clases de Chern

4.1. Definiciones básicas

Por el teorema de clasificación del capítulo anterior, la estructura de un fibrado vectorial de rango n sobre un espacio topológico paracompacto M está plasmada *sin pérdida de información* en una función clasificadora $f : M \rightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$. Sin embargo, en general, esta función es difícil de construir y aún más difícil de usar, al menos para resolver el tipo de problemas geométricos que motiva nuestro estudio de los fibrados vectoriales.

Dado que no necesitamos toda la información contenida en una función clasificadora, estamos interesados en hallar un objeto más simple que rescate la información más esencial de un fibrado vectorial $E \rightarrow M$. En este capítulo, construiremos una sucesión de clases de cohomología

$$c_i(E) \in H^{2i}(M),$$

llamadas las **clases de Chern** de $E \rightarrow M$, que describen el homomorfismo de anillos

$$f^* : H^* \circ \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty) \longrightarrow H^*(M)$$

inducido por una función clasificadora $f : M \rightarrow \mathrm{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ de E . La suma formal

$$c(E) = c_0(E) + c_1(E) + c_2(E) + \dots$$

también se denomina la **clase total de Chern** de E .

Las clases de Chern están completamente determinadas por tres axiomas:

Axioma 4.1 (Naturalidad). $c(F) = f^* \circ c(E)$, para todo fibrado pullback $F \cong f^*(E)$.

Axioma 4.2 (Fórmula de Whitney). $c(E) = c(F) \smile c(E/F)$, para todo subfibrado $F \subset E$.

Axioma 4.3 (Normalización). $c \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) = 1 - \xi$, donde ξ es el generador¹ de $H^*(\mathbb{P}^\infty)$.

¹El isomorfismo canónico $H^*(\mathbb{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}[\xi]$ se calcula construyendo el espacio proyectivo $\mathbb{P}^\infty = \mathrm{Gr}_1(\mathbb{C}^\infty)$ como el límite directo del sistema de inclusiones $\mathbb{P}^0 \rightarrow \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^2 \rightarrow \dots$, con la topología celular.

Las clases de Chern de un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ se pueden construir de varias formas. En este capítulo, usaremos el método que requiere menos esfuerzo, que consiste en usar los axiomas para constreñir los valores posibles de $c_i(E)$ hasta que sólo quede una opción.

Proposición 4.4. *Las clases de Chern $c_i(E)$ de un fibrado vectorial complejo arbitrario $E \rightarrow M$ de rango n están determinadas por las **clases de Chern universales***

$$c_i^n = c_i \circ E_n(\mathbb{C}^\infty) \in H^* \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$$

asociadas al fibrado tautológico $E_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$.

Prueba. Por el axioma de naturalidad, la i -ésima clase de Chern de E es

$$c_i(E) = c_i \circ f^* \circ E_n(\mathbb{C}^\infty) = f^*(c_i^n),$$

donde $f : M \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ es cualquier función clasificadora de E . □

Por consistencia con la notación para la clase total $c(E)$, escribiremos

$$c^n = c_0^n + c_1^n + c_2^n + \cdots = c \circ E_n(\mathbb{C}^\infty).$$

Notemos que el axioma de normalización especifica directamente el valor de c^1 . Para calcular las clases c^n en general, usaremos el concepto de **rompimiento** definido en la siguiente sección.

4.2. El principio del rompimiento

Romper un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ consiste en reemplazar a E con el pullback f^*E bajo una función continua $f : N \rightarrow M$ escogida de tal manera que

- $f^* : H^*(M) \rightarrow H^*(N)$ sea un homomorfismo de anillos inyectivo.
- f^*E contenga una bandera de fibrados $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_r = f^*E$.

El propósito de romper E es calcular $c(E)$ en dos pasos:

- Usar la bandera $\{F_j\}$ y la fórmula de Whitney para calcular

$$f^* \circ c(E) = c(F_r/F_0) = c(F_1/F_0) \smile \cdots \smile c(F_r/F_{r-1}).$$

- Hallar el único elemento $c(E) \in H^*(M)$ cuyo pullback es $f^* \circ c(E)$.

En adelante, diremos que

- f **rompe totalmente** a E , si f^*E contiene una bandera completa de fibrados.
- f **rompe parcialmente** a E , si f^*E contiene un subfibrado lineal.
- f **no rompe** a E , si f^*E sólo contiene la bandera trivial $0 \subset f^*E$.

El **principio del rompimiento** (en inglés: *splitting principle*) afirma que, para todo fibrado vectorial $E \rightarrow M$, existe una función continua $f : N \rightarrow M$ que rompe totalmente a E . Nuestra principal herramienta para construir rompimientos sistemáticamente es el siguiente teorema, que enunciamos sin demostración.

Teorema 4.5 (Leray-Hirsch). *Sean $\pi : E \rightarrow M$ un fibrado topológico, $\iota : F \rightarrow E$ la inclusión de una fibra y A un anillo conmutativo tales que*

- *Cada $H^n(F; A)$ es un módulo libre de dimensión finita.*
- *Existen clases $c_j \in H^{n_j}(E; A)$ tales que $\{\iota^*(c_j)\}$ es una base de $H^*(F; A)$.*

Entonces, el homomorfismo de $H^(M; A)$ -módulos graduados*

$$H^*(M; A) \otimes_A H^*(F; A) \longrightarrow H^*(E; A), \quad b \otimes \iota^*(c_j) \longmapsto \pi^*(b) \smile c_j$$

es un isomorfismo.

Prueba. Ver [Hat02, pp. 432-434]. □

Lema 4.6. *Todo fibrado vectorial de rango positivo admite un rompimiento parcial.*

Prueba. Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango $n + 1$ y sean

- $\pi : \mathbb{P}(E) \rightarrow M$, la proyectivización de E .
- $\alpha : \mathbb{P}(E) \rightarrow \mathbb{P}^\infty$, la proyectivización de un anclaje $E \rightarrow \mathbb{C}^\infty$.
- $\iota : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}(E)$, la inclusión de la fibra típica de π .

Notemos que

- El pullback de la inclusión $\alpha \circ \iota : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ es el homomorfismo cociente

$$\iota^* \circ \alpha^* : H^*(\mathbb{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}[\xi] \longrightarrow H^*(\mathbb{P}^n) \cong \frac{\mathbb{Z}[\xi]}{\langle \xi^{n+1} \rangle}.$$

- Las clases $1, \iota^* \circ \alpha^*(\xi), \dots, \iota^* \circ \alpha^*(\xi^n)$ forman la base estándar de $H^*(\mathbb{P}^n)$.

Entonces, por el teorema de Leray-Hirsch,

- Las clases $1, \alpha^*(\xi), \dots, \alpha^*(\xi^n)$ forman una $H^*(M)$ -base de $H^* \circ \mathbb{P}(E)$.
- El homomorfismo de anillos $\pi^* : H^*(M) \rightarrow H^* \circ \mathbb{P}(E)$ es inyectivo.

Finalmente, por construcción,

- $\alpha(\ell)$ es una recta contenida en la imagen anclada de $E_{\pi(\ell)}$ en \mathbb{P}^∞ .
- α clasifica a un subfibrado lineal de π^*E .

Por ende, π rompe parcialmente a E . □

Lema 4.7 (Principio del rompimiento). *Todo fibrado vectorial admite un rompimiento total.*

Prueba. Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial de rango positivo. (Si E es de rango 0, entonces no hay nada que demostrar.) Notemos que

- Por el lema anterior, existe una función f que rompe parcialmente a E .
- Por definición de rompimiento parcial, existe un subfibrado lineal L de $F = f^*E$.
- Por inducción en el rango, existe una función g que rompe totalmente a $Q = F/L$.
- Por definición de rompimiento total, existe una bandera completa

$$0 = \frac{F_1}{F_1} \subset \frac{F_2}{F_1} \subset \cdots \subset \frac{F_n}{F_1} = g^*Q,$$

donde $F_1 = g^*L$ y $F_n = g^*F$.

- Por construcción, $0 = F_0 \subset F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_n = g^*F$ es una bandera completa.

Entonces, g rompe totalmente a F . Por ende, $f \circ g$ rompe totalmente a E . □

4.3. Las clases de Chern universales

La única estrategia viable para hallar las clases de Chern universales c_i^n es romper el fibrado tautológico $E_n(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ en una bandera completa

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E_n(\mathbb{C}^\infty) \longrightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$$

cuyos cocientes lineales $L_j = F_j/F_{j-1}$ son fáciles de clasificar. Sin embargo, aún no conocemos el anillo de cohomología de $\text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$, lo cual nos obliga a usar métodos indirectos para demostrar que un rompimiento putativo de $E_n(\mathbb{C}^\infty)$ es, en efecto, un rompimiento.

En cualquier caso, sabemos que existen muchos rompimientos de $E_n(\mathbb{C}^\infty)$ y aún no tenemos razones sólidas para escoger uno en particular. A fin de escoger el rompimiento más conveniente, analizaremos toda la información que se puede extraer de una bandera completa.

Proposición 4.8. *Sea $E \rightarrow M$ un fibrado vectorial que contiene una bandera completa*

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E \longrightarrow M$$

con cocientes lineales $L_j = F_j/F_{j-1}$. Entonces $E \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n$.

Prueba. Tomemos un anclaje arbitrario $E \rightarrow \mathbb{C}^\infty$. El producto interno estándar de \mathbb{C}^∞ induce un producto interno sobre cada fibra anclada $E_p \subset \mathbb{C}^\infty$ que depende continuamente de $p \in M$. Así, cada L_j es isomorfo al complemento ortogonal de F_{j-1} en F_j . Inductivamente, tenemos

$$F_j \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_j.$$

Tomando $j = n$, tenemos el resultado buscado. □

La proposición anterior nos dice que clasificar la bandera completa $\{F_j\}$ equivale a clasificar sus cocientes lineales $\{L_j\}$, que pueden ser escogidos arbitrariamente. Por ello, diremos que una función $f : M \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n$ es una **función clasificadora** de $\{F_j\}$ si cada componente $f_j : M \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ es una función clasificadora del respectivo cociente lineal L_j .

Proposición 4.9. *Existe una correspondencia biyectiva canónica entre*

- a) Las clases de isomorfismo de banderas completas $0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E \rightarrow M$.
- b) Las clases de homotopía de funciones $f : M \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n$.

Prueba. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- Las funciones $f, g : M \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n$ clasifican a banderas isomorfas.
- Para cada $j = 1, \dots, n$, las componentes f_j, g_j clasifican a cocientes lineales isomorfos.
- Para cada $j = 1, \dots, n$, las componentes f_j, g_j son homotópicas.
- Las funciones f, g son homotópicas.

Esto establece la correspondencia solicitada. □

La **bandera tautológica** se define como la bandera completa sobre $(\mathbb{P}^\infty)^n$ clasificada por la función identidad $\text{id} : (\mathbb{P}^\infty)^n \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n$. Los cocientes lineales de esta bandera se pueden ver como “copias independientes” del fibrado tautológico de líneas $E_1(\mathbb{C}^\infty)$, ya que cada uno es clasificado por una de las proyecciones canónicas

$$\pi_j : (\mathbb{P}^\infty)^n \longrightarrow \mathbb{P}^\infty, \quad \pi_j(x_1, \dots, x_n) = x_j.$$

Entonces, el fibrado total de esta bandera es la n -ésima potencia cartesiana

$$E_1(\mathbb{C}^\infty)^n = \bigoplus_j \left(\pi_j \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \longrightarrow (\mathbb{P}^\infty)^n.$$

Sea $h : (\mathbb{P}^\infty)^n \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ una función clasificadora de $E_1(\mathbb{C}^\infty)^n$.

Lema 4.10. *La función h rompe totalmente al fibrado tautológico $E_n(\mathbb{C}^\infty)$.*

Prueba. Tomemos un rompimiento total arbitrario de $E_n(\mathbb{C}^\infty)$, digamos,

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = E \longrightarrow M.$$

Notemos que, si f es una función clasificadora de la bandera $\{F_j\}$, entonces $h \circ f$ es una función clasificadora del fibrado total $E \rightarrow M$. Como $h \circ f$ rompe a $E_n(\mathbb{C}^\infty)$, el pullback

$$(h \circ f)^* = f^* \circ h^* : H^* \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty) \longrightarrow H^*(M)$$

es un homomorfismo de anillos inyectivo. Esto implica que h^* es inyectivo. Por lo tanto, h rompe totalmente a $E_n(\mathbb{C}^\infty)$. □

La bandera tautológica, aparte de ser canónica por mérito propio, también tiene propiedades algebraicas muy convenientes. La primera de ellas es que el anillo de cohomología de su espacio base $M = (\mathbb{P}^\infty)^n$ es fácil de calcular. Por la fórmula de Künneth [Hat02, p. 216], tenemos

$$H^*(M) \cong H^*(\mathbb{P}^\infty) \otimes \cdots \otimes H^*(\mathbb{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_n],$$

donde ξ_1, \dots, ξ_n son los generadores canónicos de cada copia de $H^*(\mathbb{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}[\xi]$.

La segunda propiedad clave es el espacio base M tiene una acción natural de S_n que permuta las copias de \mathbb{P}^∞ . Analizando el efecto de esta acción sobre la bandera tautológica, obtendremos suficiente información para calcular $H^* \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ y las clases universales c_i^n .

Teorema 4.11 (Clases de Chern universales).

a) $H^* \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ es isomorfo al anillo de polinomios simétricos

$$H^*(M)^{S_n} \cong \mathbb{Z}[\xi_1, \dots, \xi_n]^{S_n} = \mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n],$$

donde σ_j es el j -ésimo polinomio simétrico elemental en ξ_1, \dots, ξ_n .

b) $c_0^n = 1$ es la identidad multiplicativa de $H^* \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$.

c) c_1^n, \dots, c_n^n generan libremente a $H^* \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$.

d) $c_i^n = 0$, para todo $i > n$.

Prueba. La acción de S_n permuta los cocientes lineales de la bandera tautológica. Sin embargo, esto no tiene efecto sobre el fibrado total $E_1(\mathbb{C}^\infty)^n$. Entonces, h es homotópica a $h \circ g$ para toda permutación $g \in S_n$. Por lo tanto, h^* es S_n -invariante y su imagen está contenida en el anillo de polinomios simétricos $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.

Por otra parte, usando la fórmula de Whitney, tenemos

$$h^*(c^n) = (1 - \xi_1) \smile \cdots \smile (1 - \xi_n) = 1 - \sigma_1 + \sigma_2 - \sigma_3 + \cdots + (-1)^n \sigma_n.$$

Tomando la parte homogénea de grado $2i$, tenemos

$$h^*(c_i^n) = (-1)^i \sigma_i.$$

Entonces, por el teorema fundamental de los polinomios simétricos [CLO15, pp. 347-348],

a) La imagen de h^* es todo el anillo de polinomios simétricos $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.

b) $h^*(c_0^n) = 1$ es la identidad multiplicativa de $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.

c) $h^*(c_1^n), \dots, h^*(c_n^n)$ generan libremente a $\mathbb{Z}[\sigma_1, \dots, \sigma_n]$.

d) $h^*(c_i^n) = 0$, para todo $i > n$.

Como h^* es inyectivo, tenemos el resultado buscado. □

4.4. Cálculo de las clases de Chern

Cuando resolvemos problemas geométricos, a menudo ocurre que los fibrados vectoriales con que trabajamos están relacionados mediante operaciones compatibles con el pullback, tales como la suma directa y el producto tensorial. Esta relación topológica entre fibrados se traduce en una relación algebraica entre sus clases de Chern. La fórmula de Whitney

$$c_k(E \oplus F) = \sum_{i+j=k} c_i(E) \smile c_j(F)$$

es un ejemplo de este fenómeno. En esta sección, daremos otros ejemplos similares.

Como punto de partida, supongamos dados dos fibrados lineales $L_1, L_2 \rightarrow M$ y calculemos la clase $c_1(L_1 \otimes L_2)$ como función de $c_1(L_1)$ y $c_1(L_2)$. De manera análoga a la sección anterior, sea $f : M \rightarrow (\mathbb{P}^\infty)^2$ una función cuyas componentes f_1, f_2 clasifican a L_1, L_2 . Entonces,

$$L_1 \otimes L_2 \cong \left(f_1^* \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \otimes \left(f_2^* \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \cong f^* \circ T_{1,1}(\mathbb{C}^\infty),$$

donde $T_{1,1}(\mathbb{C}^\infty)$ denota el **producto tensorial tautológico**

$$T_{1,1}(\mathbb{C}^\infty) = \left(\pi_1^* \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \otimes \left(\pi_2^* \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \longrightarrow (\mathbb{P}^\infty)^2.$$

Sea $h : (\mathbb{P}^\infty)^2 \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ una función clasificadora de $T_{1,1}(\mathbb{C}^\infty)$.

Proposición 4.12. *La primera clase de Chern del producto tensorial $L_1 \otimes L_2$ es*

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = c_1(L_1) + c_1(L_2).$$

Es decir, $c_1 : \text{Pic}(M) \rightarrow H^2(M)$ es un homomorfismo de grupos abelianos.

Prueba. Consideremos el ramillete $\mathbb{P}^\infty \vee \mathbb{P}^\infty$ como un subcomplejo celular de $X = (\mathbb{P}^\infty)^2$. Dado que \mathbb{P}^∞ sólo tiene células de dimensión par, tenemos un isomorfismo de grupos

$$\varphi : H^2(X) \longrightarrow H^2(\mathbb{P}^\infty) \times H^2(\mathbb{P}^\infty), \quad \varphi(\alpha) = \left(\iota_1^*(\alpha), \iota_2^*(\alpha) \right)$$

donde $\iota_j : \mathbb{P}^\infty \rightarrow X$ es la inclusión de cada copia de \mathbb{P}^∞ en el ramillete. Notemos que

$$\iota_j^* \circ T_{1,1}(\mathbb{C}^\infty) \cong \left(\iota_j^* \circ \pi_1^* \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \otimes \left(\iota_j^* \circ \pi_2^* \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) \right) \cong E_1(\mathbb{C}^\infty),$$

pues uno de los factores es $E_1(\mathbb{C}^\infty)$ y el otro es trivial. Esto implica que

$$h^*(c_1^1) = \varphi^{-1}(c_1^1, c_1^1) = \varphi^{-1}(c_1^1, 0) + \varphi^{-1}(0, c_1^1) = \pi_1^*(c_1^1) + \pi_2^*(c_1^1).$$

Por lo tanto, la primera clase de Chern de $L_1 \otimes L_2$ es

$$c_1(L_1 \otimes L_2) = f^* \circ h^*(c_1^1) = f_1^*(c_1^1) + f_2^*(c_1^1) = c_1(L_1) + c_1(L_2),$$

que es el resultado buscado. □

Ahora supongamos dado un fibrado vectorial $E \rightarrow M$ de rango arbitrario n y calculemos las clases de Chern de un fibrado torcido $E \otimes L$ y el fibrado dual E^\vee . Notemos que, por el principio del rompimiento, no hay pérdida de generalidad en asumir que E es de la forma

$$E \cong L_1 \oplus \cdots \oplus L_n.$$

Entonces, para calcular las clases de Chern de

$$E \otimes L \cong (L_1 \oplus \cdots \oplus L_n) \otimes L \cong (L_1 \otimes L) \oplus \cdots \oplus (L_n \otimes L),$$

$$E^\vee \cong (L_1 \oplus \cdots \oplus L_n)^\vee \cong L_1^\vee \oplus \cdots \oplus L_n^\vee,$$

basta usar n veces la proposición anterior.

Proposición 4.13. *Las clases de Chern del fibrado torcido $E \otimes L$ son*

$$c_k(E \otimes L) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} c_i(E) \smile c_1(L)^{k-i}.$$

Prueba. Por la fórmula de Whitney, la clase total de $E \otimes L$ es

$$c(E \otimes L) = \sum_{i=0}^n c_i(E) \smile (1 + c_1(L))^{n-i}.$$

Por el teorema binomial, tenemos

$$(1 + c_1(L))^{n-i} = \sum_{j=0}^{n-i} \binom{n-i}{j} c_1(L)^j.$$

Reemplazando $(1 + c_1(L))^{n-i}$ con su parte homogénea de grado $2k - 2i$, tenemos

$$c_k(E \otimes L) = \sum_{i=0}^k \binom{n-i}{k-i} c_i(E) \smile c_1(L)^{k-i},$$

que es el resultado buscado. □

Proposición 4.14. *Las clases de Chern del fibrado dual E^\vee son*

$$c_i(E^\vee) = (-1)^i c_i(E).$$

Prueba. Como L_j^\vee es el elemento inverso de L_j en $\text{Pic}(M)$, tenemos

$$c_1(L_j^\vee) = -c_1(L_j).$$

Entonces, la i -ésima clase de Chern de E^\vee es

$$c_i(E^\vee) = (-1)^i c_i(E),$$

que es el resultado buscado. □

Capítulo 5

Secciones linealmente independientes

5.1. Definiciones básicas

La definición de las clases de Chern $c_i(E)$ dada en el capítulo anterior puede dar la impresión de que estas clases son sólo un juego algebraico cuya única virtud es que es fácil de jugar. Hasta este momento, lo más cercano que tenemos a una interpretación de las clases de Chern $c_i(E)$ es que, si $E \rightarrow M$ es un fibrado vectorial complejo de rango n , entonces la clase total $c(E)$ describe de manera S_n -invariante los cocientes lineales F_j/F_{j-1} de una bandera completa

$$0 = F_0 \subset F_1 \subset \cdots \subset F_n = f^*E,$$

donde $f : N \rightarrow M$ es una función que rompe totalmente a E .

En este capítulo, daremos una interpretación geométrica *útil* a las clases de Chern. Para ello, supondremos dado un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ de rango $n = k + q$ sobre un **complejo celular**¹ M e intentaremos construir k secciones globales $M \rightarrow E$ linealmente independientes en cada punto $p \in M$. Esto equivale a construir una única sección del **fibrado de marcos**

$$V_k(E) = \bigsqcup_{p \in M} \{p\} \times V_k(E_p),$$

cuya fibra típica es el espacio de Stiefel $V_k(\mathbb{C}^n)$. Nuestro objetivo no es dar una mera respuesta binaria, i.e., decir si existen las k secciones solicitadas, sino *cuantificar* las razones por las cuales tales secciones existen o no existen.

Pensemos en una sección global de $V_k(E)$ como el límite de una sucesión de secciones

$$\sigma^j : M^j \longrightarrow V^j = V_k(E) \Big|_{M^j}$$

definidas sobre los esqueletos de M . Esta sucesión se construye inductivamente, asumiendo dada una sección de V^j y extendiéndola a una sección de V^{j+1} . Puesto que $M^{j+1} \setminus M^j$ es una unión topológicamente disjunta de $(j+1)$ -células, en principio, la extensión de σ^j a cada $(j+1)$ -célula se puede construir de manera independiente.

¹Todo complejo celular es paracompacto [Hat03, pp. 36-37].

Fijemos una $(j+1)$ -célula $e_\alpha \subset M$ y consideremos su **función característica**

$$\Phi_\alpha : (D^{j+1}, S^j) \longrightarrow (M^{j+1}, M^j).$$

Para extender σ^j sobre e_α , debemos cerrar el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} S^j & & \\ \downarrow & \searrow f_\alpha & \\ D^{j+1} & \dashrightarrow & V_k(\mathbb{C}^n), \end{array}$$

donde f_α es una representación coordenada de la sección pullback

$$\varphi_\alpha^*(\sigma^j) : S^j \longrightarrow \varphi_\alpha^* \circ V_k(E) \cong S^j \times V_k(\mathbb{C}^n)$$

a lo largo de la restricción $\varphi_\alpha = \Phi_\alpha|_{S^j}$. Entonces, la condición necesaria y suficiente para que el problema de extensión tenga solución es que f_α es nulhomotópica.

Teorema 5.1. *Para todo $k \geq 1$, el espacio de Stiefel $V_k(\mathbb{C}^n)$ es $2q$ -conexo y su primer grupo de homotopía no trivial $\pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n)$ es canónicamente isomorfo a \mathbb{Z} . Por lo tanto, tiene sentido escribir $\pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n)$ sin mencionar un punto de referencia en $V_k(\mathbb{C}^n)$.*

Prueba. Fijemos q , abreviemos $V_k = V_k(\mathbb{C}^{k+q})$ y consideremos el fibrado

$$V_k \xrightarrow{i} V_{k+1} \longrightarrow V_1(\mathbb{C}^{n+1}) \simeq S^{2n+1}.$$

La sucesión exacta larga de grupos de homotopía de este fibrado es

$$\dots \longrightarrow \pi_j(V_k) \xrightarrow{i_j} \pi_j(V_{k+1}) \longrightarrow \pi_j(S^{2n+1}) \xrightarrow{\partial_j} \pi_{j-1}(V_k) \longrightarrow \dots$$

Como la esfera S^{2n+1} es $2n$ -conexa, i_j es un isomorfismo para todo $j < 2n$. Este isomorfismo es canónico, porque la acción local de $\mathrm{GL}_k(\mathbb{C})$ respeta la orientación de la fibra típica V_k . Entonces, por inducción en k , tenemos isomorfismos canónicos

$$\pi_j \circ V_k(\mathbb{C}^n) = \pi_j(V_k) \cong \pi_j(V_1) \cong \pi_j(S^{2q+1}) \cong \begin{cases} 0, & \text{si } j \leq 2q, \\ \mathbb{Z}, & \text{si } j = 2q + 1, \end{cases}$$

donde hemos usado la orientación de V_1 inducida por la inclusión en \mathbb{C}^{q+1} . \square

Observación. En general, dados un grupo de Lie G y un subgrupo de Lie cerrado y conexo H , el espacio homogéneo G/H es **simple**, i.e., su grupo fundamental $\pi_1(G/H)$ es abeliano y actúa de manera trivial sobre *todos* los grupos de homotopía $\pi_j(G/H)$ [Ste99, p. 89]. Esto implica que los grupos $\pi_j(G/H)$ están bien definidos, salvo un isomorfismo canónico, sin mencionar un punto de referencia en G/H .

Corolario 5.2. *Todo fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ de rango $n = k + q$ posee k secciones linealmente independientes sobre el $(2q + 1)$ -esqueleto de M .*

Prueba. Dichas secciones se construyen célula por célula cerrando diagramas

$$\begin{array}{ccc} S^j & & \\ \downarrow & \searrow f_\alpha & \\ D^{j+1} & \dashrightarrow & V_k(\mathbb{C}^n), \end{array}$$

con $j \leq 2q$. Puesto que $V_k(\mathbb{C}^n)$ es $2q$ -conexo, en cada uno de estos problemas de extensión, f_α es nulhomotópica y, por ende, el problema tiene solución. \square

5.2. El cociclo de obstrucción

Los primeros problemas de extensión no triviales que aparecen en la construcción iterativa de una sección $M \rightarrow V_k(E)$ ocurren cuando intentamos extender una sección parcial

$$\sigma : M^{2q+1} \longrightarrow V^{2q+1}$$

al siguiente esqueleto M^{2q+2} . El **cociclo de obstrucción** de σ es la cocadena celular

$$c(\sigma) : C_{2q+2}(M) \longrightarrow \pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n)$$

que asigna a cada $(2q + 2)$ -célula $e_\alpha \subset M$ la clase de homotopía

$$c(\sigma)(e_\alpha) = [f_\alpha] \in \pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n),$$

donde f_α es la función define el problema de extensión

$$\begin{array}{ccc} S^{2q+1} & & \\ \downarrow & \searrow f_\alpha & \\ D^{2q+2} & \dashrightarrow & V_k(\mathbb{C}^n), \end{array}$$

asociado a e_α . Enseguida demostraremos que $c(\sigma)$ es un cociclo.

Observación. Estrictamente hablando, $c(\sigma)$ es una sección parcial

$$c(\sigma) : M^{2q+2} \setminus M^{2q+1} \longrightarrow \Pi|_{M^{2q+2} \setminus M^{2q+1}}$$

del fibrado de grupos abelianos discretos $\Pi \rightarrow M$ cuya fibra sobre $p \in M$ es

$$\Pi_p = \pi_{2q+1} \circ V_k(E_p).$$

Sin embargo, por el teorema 5.1, este fibrado es canónicamente isomorfo a $M \times \mathbb{Z}$. Por lo tanto, $c(\sigma)$ se identifica con una cocadena celular ordinaria con coeficientes en \mathbb{Z} .

Si $u \in C_{2q+2}(M)$ es una cadena soportada en una única componente conexa de M , entonces podemos evaluar $c(\sigma)(u)$ asumiendo que las demás componentes conexas de M no existen. Esto implica que el homomorfismo de Hurewicz relativo [Hat02, p. 371]

$$h_{2q+2} : \pi_{2q+2}(M^{2q+2}, M^{2q+1}) \longrightarrow H_{2q+2}(M^{2q+2}, M^{2q+1})$$

es sobreyectivo. En particular, existe una función

$$\Phi : (D^{2q+2}, S^{2q+1}) \longrightarrow (M^{2q+2}, M^{2q+1})$$

que representa a u . Entonces, podemos calcular

$$c(\sigma)(u) = [f] \in \pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^\infty)$$

usando la función f que define el problema de extensión

$$\begin{array}{ccc} S^{2q+1} & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ D^{2q+2} & \dashrightarrow & V_k(\mathbb{C}^n), \end{array}$$

asociado al fibrado pullback² $\Phi^* \circ V_k(E) \cong S^{2q+2} \times V_k(\mathbb{C}^n)$.

Proposición 5.3. *El cociclo de obstrucción $c(\sigma)$ es, en efecto, un cociclo celular.*

Prueba. Sea $u \in C_{2q+3}(M)$ la cadena celular representada por

$$\Phi : (D^{2q+3}, S^{2q+2}, s_0) \longrightarrow (M^{2q+3}, M^{2q+2}, p_0).$$

Usando la acción del grupoide fundamental $\pi_1(M^{2q+2})$, movamos el punto base p_0 a M^{2q+1} . La frontera ∂u está representada por la restricción $\varphi = \Phi|_{S^{2q+2}}$, reinterpretada como

$$\Psi : (D^{2q+2}, S^{2q+1}, s_0) \longrightarrow (M^{2q+2}, M^{2q+1}, p_0),$$

con la salvedad de que, en realidad, $\psi = \Psi|_{S^{2q+1}}$ es la función constante cuyo valor es p_0 . Por lo tanto, la sección pullback $\psi^*(\sigma)$ es, en esencia, la gráfica de una función constante

$$f : S^{2q+1} \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n),$$

cuya clase de homotopía es el elemento neutro de $\pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n)$. Entonces,

$$c(\sigma) \circ \partial(u) = [f] = 0.$$

Por lo tanto, $c(\sigma) \circ \partial$ es idénticamente cero, i.e., $c(\sigma)$ es un cociclo celular. □

²La sutileza radica en que este método para calcular $c(\sigma)(u)$ es válido, pese a que una solución del “problema pullback” sobre D^{2q+2} no determina una solución al problema de extensión original sobre el soporte de u .

Supongamos dada una función celular $f : N \rightarrow M$ cuyo dominio N es otro complejo celular arbitrario. La restricción $f|_{N^{2q+2}}$ se puede reinterpretar como

$$f : (N^{2q+2}, N^{2q+1}) \longrightarrow (M^{2q+2}, M^{2q+1}).$$

Entonces, existe una sección pullback bien definida

$$f^*(\sigma) : N^{2q+1} \longrightarrow f^*V^{2q+1} = \left(f^* \circ V_k(E)\right)^{2q+1}.$$

La naturalidad del homomorfismo de Hurewicz nos permite calcular $c \circ f^*(\sigma)$ fácilmente.

Proposición 5.4 (Naturalidad). *El cociclo de obstrucción de $f^*(\sigma)$ es*

$$c \circ f^*(\sigma) = f^* \circ c(\sigma).$$

Prueba. Sea $u \in C_{2q+2}(N)$ la cadena celular representada por

$$\Phi : (D^{2q+2}, S^{2q+1}) \longrightarrow (N^{2q+2}, N^{2q+1}).$$

Como el homomorfismo de Hurewicz es natural,

$$\begin{array}{ccc} \pi_{2q+2}(N^{2q+2}, N^{2q+1}) & \xrightarrow{f_*} & \pi_{2q+2}(M^{2q+2}, M^{2q+1}) \\ \downarrow h_{2q+2} & & \downarrow h_{2q+2} \\ H_{2q+2}(N^{2q+2}, N^{2q+1}) & \xrightarrow{f_*} & H_{2q+2}(M^{2q+2}, M^{2q+1}), \end{array}$$

el pushforward $f_*(u) \in C_{2q+2}(M)$ está representado por

$$f_*(\Phi) = f \circ \Phi : (D^{2q+2}, S^{2q+1}) \longrightarrow (M^{2q+2}, M^{2q+1}).$$

Entonces, tanto $c \circ f^*(\sigma)(u) = [g]$ como $c(\sigma) \circ f_*(u) = [g]$ son la clase de homotopía de la misma función g que define el problema de extensión

$$\begin{array}{ccc} S^{2q+1} & & \\ \downarrow & \searrow g & \\ D^{2q+2} & \dashrightarrow & V_k(\mathbb{C}^n), \end{array}$$

asociado al fibrado pullback $\Phi^* \circ f^* \circ V_k(E)$. Por lo tanto,

$$c \circ f^*(\sigma) = c(\sigma) \circ f_* = f^* \circ c(\sigma).$$

Es decir, el cociclo de obstrucción es natural con respecto a los pullbacks celulares. □

En la demostración del teorema 5.1, vimos que la inclusión i de la fibra típica de

$$V_k(\mathbb{C}^n) \xrightarrow{i} V_{k+j}(\mathbb{C}^{n+j}) \xrightarrow{p} V_j(\mathbb{C}^{n+j})$$

induce un isomorfismo canónico de grupos de homotopía

$$i_* : \pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n) \longrightarrow \pi_{2q+1} \circ V_{k+j}(\mathbb{C}^{n+j}).$$

Esta inclusión se puede globalizar. Si denotamos por $E \oplus \mathbb{C}^j$ la suma directa de E con el fibrado trivial $M \times \mathbb{C}^j$, entonces tenemos un morfismo de fibrados

$$i : V_k(E) \longrightarrow V_{k+j}(E \oplus \mathbb{C}^j), \quad i_p(\sigma) = (\sigma, \eta),$$

donde $\eta \in V_j(\mathbb{C}^j)$ es la base estándar de \mathbb{C}^j . Entonces, existe una sección pushforward

$$i_*(\sigma) = i \circ \sigma : M_{2q+1} \longrightarrow V_{k+j}(E \oplus \mathbb{C}^j) \Big|_{M^{2q+1}}$$

bien definida. La naturalidad de i nos permite calcular $c \circ i_*(\sigma)$ fácilmente.

Proposición 5.5 (Estabilidad). *El cociclo de obstrucción de $i_*(\sigma)$ es*

$$c \circ i_*(\sigma) = i_* \circ c(\sigma).$$

Prueba. Sea $u \in C_{2q+2}(M)$ la cadena celular representada por

$$\Phi : (D^{2q+2}, S^{2q+1}) \longrightarrow (M^{2q+2}, M^{2q+1}).$$

Notemos que el pullback Φ^* y el pushforward i_* actúan por separado sobre el espacio base M y sobre la fibra típica $V_k(\mathbb{C}^n)$, respectivamente, de $V_k(E)$. Estas acciones conmutan:

$$\Phi^* \circ i_* \circ V_k(E) = i_* \circ \Phi^* \circ V_k(E).$$

Entonces, tanto $c \circ i_*(\sigma)(u) = [f]$ como $i_* \circ c(\sigma)(u) = [f]$ son la clase de homotopía de la misma función f que define el problema de extensión

$$\begin{array}{ccc} S^{2q+1} & & \\ \downarrow & \searrow f & \\ D^{2q+2} & \dashrightarrow & V_{k+1}(\mathbb{C}^{n+1}), \end{array}$$

asociado al fibrado pullback-pushforward $\Phi^* \circ i_* \circ V_k(E)$. Por lo tanto,

$$c \circ i_*(\sigma) = i_* \circ c(\sigma).$$

Es decir, el cociclo de obstrucción es natural con respecto al pushforward i_* . □

Ahora supongamos dadas dos secciones parciales $\sigma_0, \sigma_1 : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$ y consideremos el problema de construir una homotopía entre ellas. Dicha homotopía, *si existe*, es, en esencia, una única sección parcial de $V_k(E) \times I$ sobre el **cilindro sólido** $M^{2q+1} \times I$. Sin embargo, en general, la construcción de la homotopía solicitada se estancará sobre el **cilindro hueco**

$$M^\square = (M \times I)^{2q+1} = (M^{2q+1} \times \{0, 1\}) \cup (M^{2q} \times I).$$

Diremos que una **homotopía hueca**³ entre σ_0 y σ_1 es una sección

$$\rho : M^\square \longrightarrow V^\square = (V_k(E) \times I) \Big|_{M^\square}$$

cuya restricción a cada tapa $M^{2q+1} \times \{i\}$ de M^\square coincide con $\sigma_i \times \{i\}$. La cocadena

$$d(\rho) : C_{2q+1}(M) \longrightarrow \pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n), \quad d(\rho)(e_\alpha) = c(\rho)(e_\alpha \times I)$$

se denomina la **cocadena de diferencia** de ρ .

Lema 5.6. *La diferencia $c(\sigma_0) - c(\sigma_1)$ es igual a la cofrontera de la cocadena de diferencia $d(\rho)$ de cualquier homotopía hueca $\rho : M^\square \rightarrow V^\square$ entre σ_0 y σ_1 . Por lo tanto, la clase de cohomología celular de $c(\sigma)$ no depende de la elección de σ .*

Prueba. Sea $\rho : M^\square \rightarrow V^\square$ una homotopía hueca entre σ_0 y σ_1 . Por construcción,

$$c(\rho)(e_\alpha) = \begin{cases} c(\sigma_i)(e_\beta), & \text{si } e_\alpha = e_\beta \times \{i\}, \\ d(\rho)(e_\beta), & \text{si } e_\alpha = e_\beta \times I, \end{cases}$$

y $c(\rho)$ se extiende por linealidad a todo el grupo de cadenas

$$C_{2q+2}(M \times I) \cong (C_{2q+2}(M) \otimes C_0(I)) \oplus (C_{2q+1}(M) \otimes C_1(I)).$$

Si denotamos por $\bar{0}$, $\bar{1}$ e \bar{I} las cocadenas indicadoras de las células de I , entonces

$$c(\rho) = c(\sigma_0) \times \bar{0} + c(\sigma_1) \times \bar{1} + d(\rho) \times \bar{I}.$$

Tomando cofronteras en la ecuación anterior, tenemos

$$c(\sigma_0) \times \bar{I} - c(\sigma_1) \times \bar{I} = \delta d(\rho) \times \bar{I}.$$

Como la asignación $C^\bullet(M) \rightarrow C^\bullet(M \times I)$, $\alpha \mapsto \alpha \times \bar{I}$ es inyectiva, tenemos

$$c(\sigma_0) - c(\sigma_1) = \delta d(\rho).$$

Por lo tanto, $c(\sigma_0)$ y $c(\sigma_1)$ pertenecen a la misma clase de cohomología. □

³Enfatizamos que una homotopía hueca *no* es una homotopía en el sentido usual de la palabra. [Ste99, p. 171] llama a ρ una “sección asociada” a σ_0 y σ_1 , pero el término “homotopía hueca” describe de manera más elocuente por qué nos interesan las secciones de V^\square .

Teorema 5.7. *Dadas una sección de referencia $\sigma : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$ y una cocadena arbitraria $d \in C^{2q+1}(M)$, existe una homotopía hueca $\rho : M^\square \rightarrow V^\square$ que comienza en σ , tal que $d(\rho) = d$. Por lo tanto, $c(\sigma) - \delta d$ es el cociclo de obstrucción de otra sección de V^{2q+1} .*

Prueba. La construcción de ρ sobre las caras verticales $M^{2q} \times I$ del cilindro hueco M^\square se puede realizar de manera arbitraria. En cambio, la construcción sobre la tapa superior $M^{2q+1} \times \{1\}$ se debe realizar con cuidado, a fin de obtener el valor deseado $d(\rho) = d$.

Tomemos una $(2q+1)$ -célula $e_\alpha \subset M$ y denotemos por

$$\Phi_\alpha : (D^{2q+1}, S^{2q}) \longrightarrow (M^{2q+1}, M^{2q})$$

su función característica. Entonces, la célula $e_\alpha \times \{1\}$ está adjuntada a M^\square mediante

$$\tilde{\Phi}_\alpha : (D^\square, D^\sqcup) \longrightarrow (M^\square, M^\sqcup),$$

donde M^\sqcup denota el **cilindro destapado**

$$M^\sqcup = (M^{2q} \times I) \cup (M^{2q+1} \times \{0\})$$

y (D^\square, D^\sqcup) son los cilindros hueco y destapado, respectivamente, sobre D^{2q+1} .

Nuestro objetivo es cerrar un diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{array}{ccc} D^\sqcup & & \\ \downarrow & \searrow & \\ D^\square & \xrightarrow{\quad f_\alpha \quad} & V_k(\mathbb{C}^n) \end{array}$$

de tal manera que, tras identificar $D^\square \cong S^{2q+1}$, la clase de homotopía de

$$f_\alpha : S^{2q+1} \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n)$$

sea el valor especificado $[f_\alpha] = d(e_\alpha)$. Para ello, identificaremos D^\sqcup con la región de S^{2q+1} al sur del trópico de Capricornio y definiremos f_α como una composición

$$S^{2q+1} \xrightarrow{\quad \pi \quad} S^{2q+1} \vee S^{2q+1} \xrightarrow{\quad \phi \quad} V_k(\mathbb{C}^n),$$

donde π es la función que colapsa el trópico de Cáncer en un punto (ver figura 5.1).

Denotemos por S^+ y S^- las esferas norte y sur, respectivamente, del ramillete $S^{2q+1} \vee S^{2q+1}$. Entonces, ϕ se construye pegando dos funciones continuas

$$\phi_+ : S^+ \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n), \quad \phi_- : S^- \longrightarrow V_k(\mathbb{C}^n)$$

tales que $\phi_+(p_0) = \phi_-(p_0)$, donde $p_0 \in S^+ \cap S^-$ es el punto común de ambas esferas, i.e., el polo norte de S^- y el polo sur de S^+ .

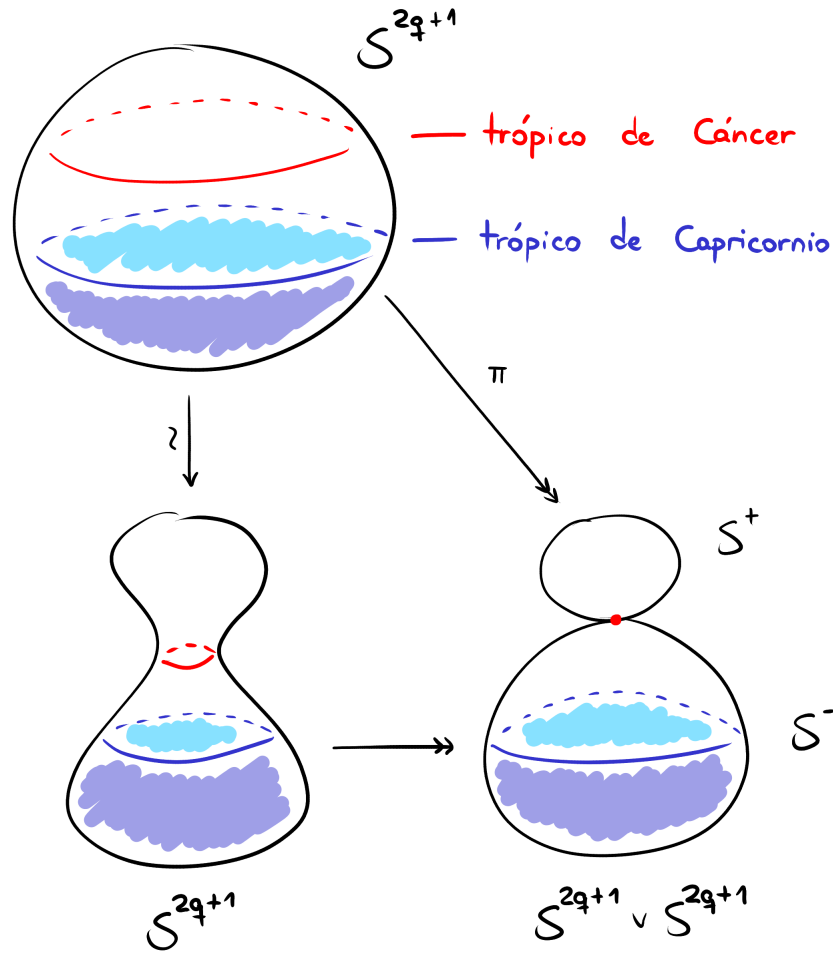


Figura 5.1: La proyección $\pi : S^{2q+1} \rightarrow S^{2q+1} \vee S^{2q+1}$.

Por hipótesis, ϕ_- ya está definida sobre $D^- = \pi(D^{\sqcup})$. Para cerrar el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 D^- & & \\
 \downarrow & \searrow \tilde{\phi}_- & \\
 S^- & \xrightarrow{\phi_-} & V_k(\mathbb{C}^n),
 \end{array}$$

identifiquemos D^- con el hemisferio sur de S^- y definamos $\phi_- = \tilde{\phi}_- \circ \beta$, donde $\beta : S^- \rightarrow D^-$ es la función que refleja el hemisferio norte de S^- a través del plano ecuatorial. Entonces,

$$[\phi_-] = [\tilde{\phi}_-] \circ [\beta] \overset{0}{=} 0$$

es el elemento neutro de $\pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n)$.

Tomemos ahora un representante arbitrario $\psi : S^+ \rightarrow V_k(\mathbb{C}^n)$ de la clase $d(e_\alpha)$. Usando un cambio de base $g \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, identifiquemos $g \circ \psi(p_0) = \phi_-(p_0)$, de tal manera que $\phi_+ = g \circ \psi$ y ϕ_- se puedan pegar. Puesto que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ es conexo, tenemos

$$[f_\alpha] = [\phi \circ \pi] = [\phi_+ \vee \phi_-] = [\phi_+] + [\phi_-] = [g \circ \psi] = [g] \cdot [\psi] = d(e_\alpha).$$

Por lo tanto, ρ es la homotopía hueca solicitada y la diferencia

$$c(\sigma) - \delta d(\rho) = c(\sigma) - \delta d$$

es el cociclo de obstrucción de la sección de V^{2q+1} definida sobre $M^{2q+1} \times \{1\}$. \square

5.3. La primera obstrucción

La **primera obstrucción** a la existencia de secciones globales de $V_k(E)$ o, por brevedad, la primera obstrucción de $V_k(E)$, se define como la clase de cohomología celular

$$c \circ V_k(E) = [c(\sigma)] \in H^{2q+2}(M)$$

del cociclo de obstrucción $c(\sigma)$ de cualquier sección $\sigma : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$. Por los resultados de la sección anterior, la primera obstrucción $c \circ V_k(E)$ tiene las siguientes propiedades.

Proposición 5.8 (Naturalidad). *Dada una función continua $f : N \rightarrow M$ cuyo dominio es otro complejo celular N , la primera obstrucción del fibrado pullback $f^* \circ V_k(E)$ es*

$$c \circ f^* \circ V_k(E) = f^* \circ c \circ V_k(E) \in H^{2q+2}(N).$$

Prueba. Reemplacemos a f con una aproximación celular [Hat02, p. 349]. Por la proposición 5.4, dada una sección arbitraria $\sigma : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$, tenemos

$$c \circ f^* \circ V_k(E) = [c \circ f^*(\sigma)] = [f^* \circ c(\sigma)] = f^*([c(\sigma)]) = f^* \circ c \circ V_k(E).$$

Por lo tanto, la primera obstrucción es natural con respecto a los pullbacks. \square

Proposición 5.9 (Estabilidad). *La primera obstrucción de $V_{k+j}(E \oplus \mathbb{C}^j)$ es*

$$c \circ V_{k+j}(E \oplus \mathbb{C}^j) = c \circ V_k(E).$$

Prueba. Sea $\sigma : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$ una sección arbitraria. Por la proposición 5.5,

$$c \circ V_{k+j}(E \oplus \mathbb{C}^j) = [c \circ i_*(\sigma)] = [i_* \circ c(\sigma)] = i_*([c(\sigma)]) = i_* \circ c \circ V_k(E) = c \circ V_k(E),$$

donde, en el último paso, hemos usado el hecho de que el isomorfismo canónico

$$i_* : \pi_{2q+1} \circ V_k(\mathbb{C}^n) \rightarrow \pi_{2q+1} \circ V_{k+j}(\mathbb{C}^{n+j})$$

se representa por el automorfismo identidad de \mathbb{Z} . Por lo tanto, la primera obstrucción es estable con respecto a la adición de sumandos directos triviales. \square

Teorema 5.10. *La condición $c \circ V_k(E) = 0$ es necesaria y suficiente para que exista una sección de $V_k(E)$ sobre el $(2q+2)$ -esqueleto de M .*

Prueba. Dada una sección parcial $\tau : M^{2q+2} \rightarrow V^{2q+2}$, la restricción $\sigma = \tau|_{M^{2q+1}}$ es extendible a una sección de V^{2q+2} , a saber, τ . Entonces, $c \circ V_k(E) = [c(\sigma)] = [0] = 0$.

Recíprocamente, si $c \circ V_k(E) = 0$, entonces el cociclo de obstrucción $c(\sigma)$ de cualquier sección parcial $\sigma : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$ es una cofrontera. Por el teorema 5.7, mediante una homotopía hueca $\rho : M^\square \rightarrow V^\square$ que comienza en σ , podemos obtener otra sección $\tilde{\sigma} : M^{2q+1} \rightarrow V^{2q+1}$ cuyo cociclo de obstrucción es $c(\tilde{\sigma}) = 0$. Entonces, $\tilde{\sigma}$ se extiende a una sección de V^{2q+2} . \square

Las propiedades de la primera obstrucción $c \circ V_k(E)$ antes demostradas son sospechosamente parecidas a uno de los axiomas de las clases de Chern (naturalidad) y a una de sus consecuencias inmediatas (estabilidad). A continuación, demostraremos que esto no es coincidencia: la primera obstrucción $c \circ V_k(E)$ es precisamente la $(q+1)$ -ésima clase de Chern $c_{q+1}(E)$.

Proposición 5.11. *La primera obstrucción universal⁴*

$$c_{k,q} = c \circ V_k \circ E_n(\mathbb{C}^\infty) \in H^{2q+2} \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$$

determina el valor de $c \circ V_k(E)$ para cualquier fibrado vectorial $E \rightarrow M$ de rango n cuyo espacio base M es un complejo celular.

Prueba. Análoga a la proposición 4.4. \square

Proposición 5.12. *La primera obstrucción universal es de la forma*

$$c_{k,q} = \lambda_{q+1} c_{q+1}^n,$$

donde $\lambda_{q+1} \in \mathbb{Z}$ es una constante que sólo depende de q .

Prueba. Sea $f : \text{Gr}_q(\mathbb{C}^\infty) \rightarrow \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ una función clasificadora de $E = E_q(\mathbb{C}^\infty) \oplus \mathbb{C}^k$. Dado que $V_k(E)$ posee una sección global inducida por la base estándar de \mathbb{C}^k , tenemos

$$c_{k,q} \in \ker(f^*) = \langle c_{q+1}^n \rangle.$$

Como $c_{k,q}$ y c_{q+1}^n son del mismo grado, existe una constante entera $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que

$$c_{k,q} = \lambda c_{q+1}^n.$$

Notemos que, en principio, la constante λ depende tanto de k como de q . Sin embargo, dado que la primera obstrucción es estable, tenemos

$$c_{1,q} = c_{2,q} = \cdots = c_{k,q} = \lambda c_{q+1}^n.$$

Por lo tanto, $\lambda = \lambda_{q+1}$ sólo depende de q . \square

⁴El grassmanniano $\text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty)$ tiene una descomposición celular canónica en *células de Schubert*.

Teorema 5.13. *La primera obstrucción universal es*

$$c_{k,q} = c_{q+1}^n \in H^{2q+2} \circ \text{Gr}_n(\mathbb{C}^\infty).$$

Por ende, la $(q+1)$ -ésima clase de Chern $c_{q+1}(E)$ es la primera obstrucción a la existencia de k secciones de $E \rightarrow M$ linealmente independientes sobre cada punto $p \in M$.

Prueba. A partir de la sucesión exacta de Euler [Huy05, pp. 93-94]

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)^{n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \longrightarrow 0,$$

deducimos lo siguiente:

- Todo campo vectorial holomorfo global sobre \mathbb{P}^n es de la forma

$$X = f_0 \frac{\partial}{\partial x_0} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial x_n},$$

donde $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)$ son formas lineales.

- El operador lineal $f = (f_0, \dots, f_n)$ que representa a X está bien definido salvo un múltiplo constante del operador identidad.

Notemos que f tiene las siguientes propiedades:

- $[v] \in \mathbb{P}^n$ es una singularidad de $X \iff v$ es un autovector de f .
- $[v] \in \mathbb{P}^n$ es una singularidad aislada de $X \iff \langle v \rangle$ es un autoespacio de f .
- $[v] \in \mathbb{P}^n$ es una singularidad simple de $X \iff \langle v \rangle$ es un autoespacio generalizado de f .

En particular, si X un campo holomorfo general sobre \mathbb{P}^n , entonces

- X tiene $n+1$ singularidades simples p_0, \dots, p_n .
- Dada una descomposición celular de \mathbb{P}^n con una $2n$ -célula distinguida e_i centrada en cada punto singular p_i , el cociclo de obstrucción de X es

$$c(X)(e_\alpha) = \begin{cases} 1, & \text{para } e_\alpha = e_0, \dots, e_n, \\ 0, & \text{para cualquier otra } 2n\text{-célula.} \end{cases}$$

- La primera obstrucción a la existencia de un campo global sin ceros sobre \mathbb{P}^n es

$$c \circ V_1(T\mathbb{P}^n) = [c(X)] = (n+1)\xi^n = c_n(T\mathbb{P}^n),$$

donde $\xi \in H^2(\mathbb{P}^n)$ es la clase del hiperplano.

Esto sólo es posible si $\lambda_n = 1$, lo cual implica el resultado buscado. □

Capítulo 6

El grupo de Picard topológico

6.1. Definiciones básicas

Recordemos que, según el teorema de clasificación del capítulo 3, el objeto que directamente corresponde a un fibrado lineal $L \rightarrow M$ no es una única función clasificadora $M \rightarrow \mathbb{P}^\infty$, sino una *clase de homotopía* de tales funciones. Desafortunadamente, las clases de homotopía son objetos abstractos que sólo se pueden manipular indirectamente a través de representantes y, en general, no es fácil determinar si dos funciones pertenecen a la misma clase de homotopía.

En este capítulo, construiremos una representación más concreta de las clases de homotopía de funciones $M \rightarrow \mathbb{P}^\infty$. Para ello, asumiremos que M es un complejo celular y adaptaremos las herramientas algebraicas del capítulo anterior al problema de construir una homotopía entre dos funciones dadas $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{P}^\infty$. En particular, encontraremos una **primera obstrucción** a la existencia de tal homotopía, que resultará ser la **única obstrucción**, pues, como demostraremos a continuación, el espacio proyectivo \mathbb{P}^∞ tiene un único grupo de homotopía no trivial.

Proposición 6.1. *El espacio de Stiefel $V_1(\mathbb{C}^\infty)$ es contractible.*

Prueba. Definamos las funciones $A, B : \mathbb{C}^\infty \rightarrow \mathbb{C}^\infty$ por

$$A(x_0, x_1, \dots) = (0, x_0, x_1, \dots), \quad B(x_0, x_1, \dots) = (1, 0, 0, \dots).$$

Usando la notación $[p, q]_t$ de la proposición 3.8, definamos la contracción

$$h_t = \begin{cases} [\text{id}, A]_{2t}, & \text{si } 2t \in [0, 1], \\ [A, B]_{2t-1}, & \text{si } 2t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Notemos que, si $x \in \mathbb{C}^\infty$ es un vector no nulo, entonces la curva

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{C}^\infty, \quad \gamma(t) = h_t(x)$$

no pasa por el vector nulo. Por ende, $h_t \mid V_1(\mathbb{C}^\infty)$ es una contracción de $V_1(\mathbb{C}^\infty)$. □

Observación. De hecho, *todos* los espacios de Stiefel $V_n(\mathbb{C}^\infty)$ son contractibles.

Proposición 6.2. *El único grupo de homotopía no trivial de \mathbb{P}^∞ es $\pi_2(\mathbb{P}^\infty) \cong \mathbb{Z}$.*

Prueba. Como $V_1(\mathbb{C}^\infty)$ es contractible, la sucesión exacta larga del fibrado

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^\times \longrightarrow V_1(\mathbb{C}^\infty) \longrightarrow \mathbb{P}^\infty \longrightarrow 0$$

se rompe en los siguientes tramos:

$$\pi_k \circ V_1(\mathbb{C}^\infty) \xrightarrow{0} \pi_k(\mathbb{P}^\infty) \longrightarrow \pi_{k-1}(\mathbb{C}^\times) \longrightarrow \pi_{k-1} \circ V_1(\mathbb{C}^\infty) \xrightarrow{0}$$

Entonces, los grupos de homotopía de \mathbb{P}^∞ son

$$\pi_k(\mathbb{P}^\infty) = \pi_{k-1}(\mathbb{C}^\times) = \begin{cases} \mathbb{Z}, & \text{si } k = 2, \\ 0, & \text{si } k \neq 2, \end{cases}$$

como se quería demostrar. \square

Dadas dos funciones $f_0, f_1 : M \rightarrow \mathbb{P}^\infty$, en general no existe una homotopía entre f_0 y f_1 . Sin embargo, como hemos visto en el capítulo anterior, siempre podemos construir una **homotopía hueca**, i.e., una función $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ definida sobre el **cilindro hueco**

$$M^\square = (M \times \{0, 1\}) \cup (M^1 \times I),$$

tal que cada restricción $h|_{M \times \{i\}}$ coincide con $f_i \times \{i\}$. El **cociclo de diferencia**

$$d(h) : C_2(M) \longrightarrow \pi_2(\mathbb{P}^\infty)$$

asigna a cada 2-célula $e_\alpha \subset M$ la obstrucción a extender h sobre $e_\alpha \times I$.

Proposición 6.3. *El cociclo de diferencia $d(h)$ es, en efecto, un cociclo celular.*

Prueba. La obstrucción a extender h sobre $M^2 \times I$ es el cociclo celular

$$c(h) = d(h) \times \bar{I} \in C^3(M \times I).$$

Tomando cofronteras en la ecuación anterior, tenemos

$$\delta c(h) = \delta d(h) \times \bar{I} = 0.$$

Como la asignación $C^\bullet(M) \rightarrow C^\bullet(M \times I)$, $\alpha \mapsto \alpha \times \bar{I}$ es inyectiva, entonces $\delta d(h) = 0$. \square

Proposición 6.4. *El cociclo de diferencia $d(h)$ se anula si y sólo si h se puede extender a una homotopía ordinaria (no hueca) entre f_0 y f_1 .*

Prueba. Por definición, $d(h) = 0$ si y sólo si h se puede extender sobre $M^2 \times I$. Pero, si h ya está definida sobre $M^2 \times I$, entonces no hay más obstrucciones a extender h sobre el resto de $M \times I$, porque todos los grupos de homotopía superiores $\pi_j(\mathbb{P}^\infty)$, con $j \geq 3$, son triviales. \square

Lema 6.5. *Dadas una función de referencia $f : M \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ y un cociclo celular $d \in C^2(M)$, existe una homotopía hueca $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ que comienza en f , tal que $d(h) = d$.*

Prueba. Por el argumento del teorema 5.7, existe una homotopía hueca

$$h : (M^2)^\square = (M \times I)^2 \longrightarrow \mathbb{P}^\infty$$

que comienza en $f|_{M^2}$, tal que $d(h) = d$. La obstrucción a extender h sobre $(M \times I)^3$ es

$$c(h) = \cancel{c(f)} \times \bar{0} + c(f') \times \bar{1} + d \times \bar{I},$$

donde $f' : M^2 \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ es el extremo final de h . Tomando cofronteras, tenemos

$$c(f') \times \bar{I} = 0,$$

lo cual implica que $c(f') = 0$. Entonces, h se puede extender a una homotopía hueca $M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ que comienza en f , tal que $d(h) = d$. \square

Si $h_1, \dots, h_n : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ son homotopías huecas tales que, para cada $i \geq 2$, h_i empieza en el extremo final de h_{i-1} , entonces la **concatenación** $\tilde{h} = h_1 \star \dots \star h_n : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ se define por

$$\tilde{h}(x, t) = \begin{cases} h_1(x, nt), & \text{si } nt \in [0, 1], \\ h_2(x, nt - 1), & \text{si } nt \in [1, 2], \\ \dots & \dots \\ h_n(x, nt - n + 1), & \text{si } nt \in [n - 1, n]. \end{cases}$$

Por otro lado, la **reversa** de una homotopía hueca $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ se define por

$$h^{-1} : M^\square \longrightarrow \mathbb{P}^\infty, \quad h^{-1}(x, t) = h(x, 1 - t).$$

Proposición 6.6. *Los cociclos de diferencia de una concatenación y una reversa son*

$$d(h_1 \star \dots \star h_n) = d(h_1) + \dots + d(h_n), \quad d(h^{-1}) = -d(h).$$

Prueba. Esto se deduce de la definición de las operaciones del grupo $\pi_2(\mathbb{P}^\infty)$. \square

Notemos que, si $g : N \rightarrow M$ es una función celular, entonces g determina una función celular entre los respectivos cilindros huecos $g^\square : N^\square \rightarrow M^\square$. Diremos que el **pullback** de h bajo g es la composición $g^*(h) = h \circ g^\square$.

Proposición 6.7 (Naturalidad). *El cociclo de diferencia de $g^*(h)$ es*

$$d \circ g^*(h) = g^* \circ d(h).$$

Prueba. Análoga a la proposición 5.4. \square

6.2. Homotopías huecas rellenables

Dos homotopías (¡no huecas!) $g_0, g_1 : M \times I \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ forman un **relleno** entre dos homotopías huecas $h_0, h_1 : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ si

- g_0 comienza en el extremo inicial de h_0 y termina en el extremo inicial de h_1 .
- g_1 comienza en el extremo final de h_0 y termina en el extremo final de h_1 .

Por otro lado, una homotopía hueca de homotopías huecas $H : M^{\square\square} \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ se dice **rellenable** si existe una **cocadena de relleno** $r(H) \in C^1(M)$ tal que

$$d(H) = r(H) \times \bar{I} \in C^2(M^\square).$$

Esto equivale a decir que H se puede extender sobre las caras verticales

$$M^\parallel = M \times \{0, 1\} \times I.$$

Tal extensión se denomina un **relleno** de H .

Proposición 6.8. *Sean $h_0, h_1 : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ dos homotopías huecas. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

- a) *Existe un relleno $g_0, g_1 : M \times I \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ entre h_0 y h_1 .*
- b) *Existe una homotopía hueca rellenable $H : M^{\square\square} \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ entre h_0 y h_1 .*

Prueba. a) \implies b) Definamos H , relleno incluido, por

$$H(x, s, t) = \begin{cases} h_t(x, s), & \text{si } (x, s, t) \in M^\square \times \{0, 1\}, \\ g_s(x, t), & \text{si } (x, s, t) \in M^\parallel. \end{cases}$$

b) \implies a) Consideremos a H ya rellenada, i.e., extendida sobre M^\parallel . Entonces,

$$g_0, g_1 : M \times I \longrightarrow \mathbb{P}^\infty, \quad g_i(x, t) = H(x, i, t).$$

forman un relleno entre h_0, h_1 . □

Lema 6.9. *Sean $h_0, h_1 : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ dos homotopías huecas que satisfacen las condiciones de la proposición anterior. Entonces, la diferencia $d(h_1) - d(h_0)$ es igual a la cofrontera de la cocadena de relleno $r(H)$ de cualquier homotopía hueca rellenable $H : M^{\square\square} \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ entre h_0 y h_1 . Por lo tanto, la clase de cohomología de $d(h)$ sólo depende de las clases de homotopía de f_0 y f_1 .*

Prueba. Sea $H : M^{\square\square} \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ una homotopía hueca rellenable entre h_0, h_1 . Repitiendo el cálculo del lema 5.6, llegamos a la ecuación

$$\underbrace{\delta r(H) \times \bar{I}}_{\delta d(H)} = \underbrace{d(h_1) \times \bar{I}}_{c(h_1)} - \underbrace{d(h_0) \times \bar{I}}_{c(h_0)}.$$

Como la asignación $C^\bullet(M) \rightarrow C^\bullet(M \times I)$, $\alpha \mapsto \alpha \times \bar{I}$ es inyectiva, tenemos

$$\delta r(H) = d(h_1) - d(h_0).$$

Por lo tanto, $d(h_0)$ y $d(h_1)$ pertenecen a la misma clase de cohomología. \square

Lema 6.10. *Dadas una homotopía hueca $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ y una cocadena $r \in C^1(M)$, existe una homotopía hueca rellenable $H : M^{\square\square} \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ que comienza en h , tal que $r(H) = r$. Por lo tanto, $d(h) + \delta r$ es el cociclo de diferencia de otra homotopía hueca entre los extremos de h .*

Prueba. La homotopía hueca H se construye usando el lema 6.5. Sea $h' : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ el extremo final de H y sea $g_0, g_1 : M \times I \rightarrow \mathbb{P}^\infty$, el relleno entre h, h' inducido por H . Entonces,

$$\tilde{h} = g_0 \star h' \star g_1^{-1} : M^\square \longrightarrow \mathbb{P}^\infty$$

tiene los mismos extremos que h , pero su cociclo de diferencia es

$$d(\tilde{h}) = \cancel{d(g_0)} + d(h') - \cancel{d(g_1)} = d(h) + \delta r(H) = d(h) + \delta r,$$

donde cada $d(g_i)$ se anula porque g_i es una homotopía no hueca. \square

6.3. Reconstruyendo la estructura de grupo

Consideremos a $\text{Pic}(M)$ como el *conjunto* de fibrados lineales $L \rightarrow M$ salvo isomorfismo, i.e., ignorando su estructura de grupo. Definamos la acción de grupo

$$H^2(M) \times \text{Pic}(M) \longrightarrow \text{Pic}(M), \quad [d] \cdot [L_0] = [L_1]$$

de la siguiente manera. Por el lema 6.5, existe una homotopía hueca $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ que comienza en una función clasificadora de L_0 , tal que $d(h) = d$. Sea $L_1 \rightarrow M$ el fibrado lineal clasificado por el extremo final de h .

Proposición 6.11. *La acción de $H^2(M)$ sobre $\text{Pic}(M)$ está bien definida.*

Prueba. Supongamos que, eligiendo otra homotopía hueca $h' : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$, deducimos que

$$[d] \cdot [L_0] = [L_2].$$

Como los extremos iniciales de h, h' clasifican al mismo fibrado lineal $L_0 \rightarrow M$, dichos extremos iniciales están unidos por una homotopía ordinaria $g : M \times I \rightarrow \mathbb{P}^\infty$. Entonces,

$$\tilde{h} = h^{-1} \star g \star h' : M^\square \longrightarrow \mathbb{P}^\infty$$

es una homotopía hueca entre los extremos finales de h, h' tal que

$$d(\tilde{h}) = -d(h) + \cancel{d(g)} + d(h')$$

es una cofrontera. Por el lema 6.10, los extremos finales de h, h' son homotópicos. Entonces, los fibrados lineales $L_1, L_2 \rightarrow M$ clasificados por dichos extremos finales son isomorfos. \square

Proposición 6.12. *La acción de $H^2(M)$ sobre $\text{Pic}(M)$ es libre y transitiva.*

Prueba. Por el lema 6.9, si $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ es una homotopía hueca cuyos extremos clasifican a un mismo fibrado lineal $L \rightarrow M$, entonces $d(h)$ es una cofrontera. Es decir, $[d] \cdot [L] = [L]$ implica que $[d] = 0$. Entonces, la acción de $H^2(M)$ sobre $\text{Pic}(M)$ es libre.

Por otro lado, para todo par de fibrados lineales $L_0, L_1 \rightarrow M$, siempre existe una homotopía hueca $h : M^\square \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ entre una función clasificadora de L_0 y una función clasificadora de L_1 . Así, $[d(h)] \cdot [L_0] = [L_1]$. Entonces, la acción de $H^2(M)$ sobre $\text{Pic}(M)$ es transitiva. \square

Por los resultados anteriores, tenemos una biyección bien definida

$$\gamma : \text{Pic}(M) \longrightarrow H^2(M)$$

que asigna a cada fibrado lineal $L \rightarrow M$ la única clase de cohomología

$$\gamma(L) \in H^2(M)$$

tal que $\gamma(L) \cdot [L]$ es el fibrado trivial $M \times \mathbb{C} \rightarrow M$.

Proposición 6.13 (Naturalidad). *Dadas una función continua $f : N \rightarrow M$ cuyo dominio es un complejo celular N y un fibrado lineal $L \rightarrow M$, se tiene*

$$\gamma \circ f^*(L) = f^* \circ \gamma(L).$$

Prueba. Análoga a la proposición 5.8. \square

Proposición 6.14. *La aplicación $\gamma : \text{Pic}(M) \rightarrow H^2(M)$ asociada a M está determinada por la aplicación $\gamma : \text{Pic}(\mathbb{P}^\infty) \rightarrow H^2(\mathbb{P}^\infty)$ asociada al espacio proyectivo \mathbb{P}^∞ .*

Prueba. Análoga a las proposiciones 4.4 y 5.11. \square

Teorema 6.15. *La aplicación $c_1 : \text{Pic}(M) \rightarrow H^2(M)$ es un isomorfismo de grupos abelianos.*

Prueba. Como c_1^1 es un generador de $H^2(\mathbb{P}^\infty)$, existe una constante $\lambda \in \mathbb{Z}$ tal que

$$\gamma \circ E_1(\mathbb{C}^\infty) = \lambda c_1^1.$$

Esta constante debe ser $\lambda = \pm 1$, para que γ sea una biyección. Entonces, tenemos

$$c_1 : \text{Pic}(M) \longrightarrow H^2(M), \quad c_1(L) = \lambda \gamma(L)$$

Por lo tanto, c_1 es un isomorfismo de grupos abelianos. \square

Observación. De hecho, con algo de cuidado, es posible demostrar que $\lambda = 1$.

Capítulo 7

Enumeración de singularidades

7.1. Definiciones básicas

Tras una larga excursión por la topología algebraica, en este capítulo final regresaremos a las foliaciones holomorfas. Supongamos dadas una variedad compleja M y una foliación singular por curvas \mathcal{F} de M cuyo conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ es discreto. Consideremos el problema de contar los puntos singulares de \mathcal{F} con multiplicidad, i.e., de calcular la suma

$$\# \text{Sing}(\mathcal{F}) = \sum_{p \in M} \mu_p(\mathcal{F})$$

usando el método más eficiente posible.

Por supuesto, si conocemos la sección σ del fibrado tangente torcido $TM \otimes L$ que genera las hojas de \mathcal{F} , entonces el teorema 2.8 nos permite usar una representación local

$$\sigma = f_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

centrada en cada punto singular $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ para calcular el número de Milnor

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathbb{C}\{z_1, \dots, z_n\}}{\langle f_1, \dots, f_n \rangle}.$$

En cambio, si sólo conocemos el fibrado torcido $TM \otimes L$, mas no la sección σ , es posible que no tengamos suficiente información para contar los puntos singulares de \mathcal{F} .

Ejemplo 7.1. Sea M el plano complejo \mathbb{C}^2 y sea L el fibrado trivial \mathcal{O}_M . Entonces, una sección de $TM \otimes L$ es un campo vectorial holomorfo global sobre \mathbb{C}^2 . Los campos

$$X_0 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_1 = x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}$$

tienen cero y un puntos singulares, respectivamente. Por lo tanto, la elección de L no determina cuántas singularidades tiene una foliación generada por una sección de $TM \otimes L$.

Para evitar la situación del ejemplo anterior, en adelante asumiremos que M es una variedad compleja *compacta* de dimensión n . La **aplicación grado**¹ de M se define como

$$\int_M : H^{2n}(M) \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad \int_M \omega = [M] \frown \omega,$$

donde $[M] \in H_{2n}(M)$ es la **clase fundamental** inducida por la orientación canónica de M como variedad compleja.

Proposición 7.2. *La foliación \mathcal{F} tiene exactamente*

$$\# \text{Sing}(\mathcal{F}) = \int_M c_n(TM \otimes L)$$

puntos singulares, contados con multiplicidad.

Prueba. Tomemos una descomposición celular de M con una $2n$ -célula distinguida e_i centrada en cada punto singular $p_i \in \text{Sing}(\mathcal{F})$. Entonces, el cociclo de obstrucción de σ es

$$c(\sigma)(e_\alpha) = \begin{cases} \mu_{p_i}(\mathcal{F}), & \text{para } e_\alpha = e_i, \\ 0, & \text{para cualquier otra } 2n\text{-célula.} \end{cases}$$

Por lo tanto, \mathcal{F} tiene exactamente

$$\# \text{Sing}(\mathcal{F}) = \sum_i \mu_{p_i}(\mathcal{F}) = \sum_\alpha c(\sigma)(e_\alpha) = \int_M c_n(TM \otimes L)$$

puntos singulares, contados con multiplicidad. □

7.2. Teorema de Darboux

Cuando la variedad foliada M es el espacio proyectivo \mathbb{P}^n , existe un criterio geométrico para identificar el fibrado lineal $L \rightarrow \mathbb{P}^n$ usado para construir la foliación \mathcal{F} como sección del fibrado tangente torcido $T\mathbb{P}^n \otimes L$. Daremos este criterio a continuación.

Sea $H \subset \mathbb{P}^n$ un hiperplano en posición general. Es decir, H es no \mathcal{F} -invariante y no contiene ningún punto singular de \mathcal{F} . El **conjunto de tangencias**

$$\text{Tang}(H, \mathcal{F}) = \{p \in H : T_p \mathcal{F} \subset T_p H\},$$

es algebraico y tiene una estructura de subesquema de H , posiblemente no reducido, cuyo grado no depende de la elección de H . El **grado** de la foliación \mathcal{F} se define como

$$\deg(\mathcal{F}) = \deg \circ \text{Tang}(H, \mathcal{F}).$$

Si $\text{Tang}(H, \mathcal{F})$ es genéricamente vacío, entonces definimos $\deg(\mathcal{F}) = 0$.

¹La notación $\int_M \omega$ está motivada por el hecho de que $\int_M \omega$ se puede calcular integrando una $2n$ -forma C^∞ que representa a ω como clase de cohomología de De Rham.

Antes de ver cómo $\deg(\mathcal{F})$ determina el fibrado lineal L , recapitulemos algunos hechos sobre los fibrados lineales holomorfos sobre \mathbb{P}^n . Por el teorema de Serre (GAGA), L es un fibrado lineal algebraico. Por [Har77, p. 145, cor. 6.17], existe un único entero $d \in \mathbb{Z}$ tal que

$$L \cong \mathcal{O}(d) \cong \mathcal{O}(1)^{\otimes d},$$

donde $\mathcal{O}(1) \rightarrow \mathbb{P}^\infty$ es el dual del fibrado tautológico. Nuestro objetivo es hallar d .

Lema 7.3. *El fibrado lineal $L \rightarrow \mathbb{P}^n$ es isomorfo a $\mathcal{O}(d-1)$, con $d = \deg(\mathcal{F})$.*

Prueba. Sea $\sigma : \mathbb{P}^n \rightarrow T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1)$ la sección holomorfa que genera a \mathcal{F} , donde $d \in \mathbb{Z}$ es un entero a priori arbitrario. A partir de la sucesión de Euler torcida

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)^{n+1} \longrightarrow T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d-1) \longrightarrow 0,$$

deducimos lo siguiente:

- σ tiene una representación coordenada de la forma

$$\sigma = f_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + f_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

donde $f_0, \dots, f_n \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$ son formas de grado d . Por ende, $d \geq 0$.

- σ se anula en los puntos donde su representación es paralela al campo radial

$$\rho = z_0 \frac{\partial}{\partial z_0} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n},$$

así que la representación coordenada de σ se puede escoger de tal manera que la variable z_0 no aparezca en f_0 .

Con ello, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $H : z_0 = 0$ es un hiperplano no \mathcal{F} -invariante.
- f_0 es un polinomio homogéneo no nulo en las variables z_1, \dots, z_n .

Entonces, el esquema de tangencias de H con \mathcal{F} es

$$\text{Tang}(H, \mathcal{F}) = \{[0 : a_1 : \cdots : a_n] : f_0(a_1, \dots, a_n) = 0\}.$$

Por lo tanto, el grado de la foliación \mathcal{F} es

$$\deg(\mathcal{F}) = \deg \circ \text{Tang}(H, \mathcal{F}) = \deg(f_0) = d,$$

que es el resultado buscado. □

Observación. Si considerásemos al lugar de las tangencias $\text{Tang}(H, \mathcal{F})$ como conjunto algebraico, ignorando la estructura de esquema, entonces $\deg \circ \text{Tang}(H, \mathcal{F})$ dependería de la elección de H y, por lo tanto, no sería una invariante intrínseca de la foliación \mathcal{F} .

Teorema 7.4 (Darboux). *La foliación \mathcal{F} tiene exactamente*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^n} \mu_p(\mathcal{F}) = 1 + \deg(\mathcal{F}) + \deg(\mathcal{F})^2 + \cdots + \deg(\mathcal{F})^n$$

puntos singulares, contados con multiplicidad. En particular, no existen foliaciones regulares por curvas de \mathbb{P}^n .

Prueba. Sea $d = \deg(\mathcal{F})$. Asumiremos que $d \neq 1$, pues una foliación de grado 1 es generada por un campo holomorfo global sobre \mathbb{P}^n , cuyo número de puntos singulares ya fue calculado cuando demostramos el teorema 5.13.

Las clases de Chern de $T\mathbb{P}^n$ y $\mathcal{O}(d-1)$ son

$$c_i(T\mathbb{P}^n) = \binom{n+1}{i} \xi^i, \quad c_1 \circ \mathcal{O}(d-1) = (d-1) \xi,$$

Entonces, la sección de $E = T\mathbb{P}^n \otimes \mathcal{O}(d-1)$ que genera a \mathcal{F} tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}^n} c_n(E) &= \sum_{i=0}^n \binom{n+1}{i} (d-1)^{n-i} \\ &= \frac{1}{1-d} \left[1 - \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (d-1)^{n-i+1} \right] \\ &= \frac{1-d^{n+1}}{1-d} \\ &= 1 + d + d^2 + \cdots + d^n \end{aligned}$$

puntos singulares, contados con multiplicidad. □

7.3. Conclusiones

En este trabajo, hemos usado las clases de Chern para hallar el número de singularidades de una foliación holomorfa singular por curvas \mathcal{F} tres una variedad compleja compacta M . Para ello, hemos demostrado cuatro hechos importantes:

- a) Que la definición geométrica de foliación holomorfa (en términos de cartas distinguidas) se puede reexpresar en términos de secciones de un fibrado tangente torcido $TM \otimes L$.
- b) Que el número de Milnor $\mu_p(\mathcal{F})$ es la noción natural de multiplicidad de un punto singular $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$, por razones tanto topológicas como analíticas.
- c) Que las clases de Chern $c_i(E)$ de un fibrado vectorial complejo $E \rightarrow M$ son obstrucciones a la existencia de secciones continuas linealmente independientes $M \rightarrow E$.
- d) Que las clases de Chern $c_i(E)$ son relativamente fáciles de calcular, sobre todo cuando E se relaciona con otros fibrados vectoriales mediante operaciones tales como la suma directa, el producto tensorial y el pullback.

Una limitación de la manera como hemos usado las clases de Chern es que, hasta ahora, sólo hemos enumerado las singularidades de \mathcal{F} cuando $\text{Sing}(\mathcal{F})$ es un conjunto discreto. Si $\text{Sing}(\mathcal{F})$ es de dimensión positiva, entonces necesitamos apelar al concepto algebro-geométrico de **exceso de intersección**, que, no obstante, trasciende el alcance de este trabajo. El lector puede encontrar más información sobre este tema en [Ful84, cap. 9, pp. 153-174].

Bibliografía

- [AM69] M. F. Atiyah e I. G. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley Publishing Co., Reading, Mass.-London-Don Mills, Ont., 1969, págs. ix+128.
- [CLO15] David A. Cox, John Little y Donal O’Shea. *Ideals, varieties, and algorithms*. Fourth. Undergraduate Texts in Mathematics. An introduction to computational algebraic geometry and commutative algebra. Springer, Cham, 2015, págs. xvi+646. ISBN: 978-3-319-16720-6. DOI: 10.1007/978-3-319-16721-3. URL: <https://doi-org.ezproxybib.pucp.edu.pe/10.1007/978-3-319-16721-3>.
- [Ebe07] Wolfgang Ebeling. *Functions of several complex variables and their singularities*. Vol. 83. Graduate Studies in Mathematics. Translated from the 2001 German original by Philip G. Spain. American Mathematical Society, Providence, RI, 2007, págs. xviii+312. ISBN: 0-8218-3319-7. DOI: 10.1090/gsm/083. URL: <https://doi-org.ezproxybib.pucp.edu.pe/10.1090/gsm/083>.
- [Ful84] William Fulton. *Intersection theory*. Vol. 2. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete (3) [Results in Mathematics and Related Areas (3)]. Springer-Verlag, Berlin, 1984, págs. xi+470. ISBN: 3-540-12176-5. DOI: 10.1007/978-3-662-02421-8. URL: <https://doi-org.ezproxybib.pucp.edu.pe/10.1007/978-3-662-02421-8>.
- [GR09] Robert C. Gunning y Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex variables*. Reprint of the 1965 original. AMS Chelsea Publishing, Providence, RI, 2009, págs. xiv+318. ISBN: 978-0-8218-2165-7. DOI: 10.1090/chel/368. URL: <https://doi-org.ezproxybib.pucp.edu.pe/10.1090/chel/368>.
- [Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry*. Graduate Texts in Mathematics, No. 52. Springer-Verlag, New York-Heidelberg, 1977, págs. xvi+496. ISBN: 0-387-90244-9.
- [Hat02] Allen Hatcher. *Algebraic topology*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002, págs. xii+544. ISBN: 0-521-79160-X.
- [Hat03] Allen Hatcher. *Vector Bundles and K-Theory*. <https://pi.math.cornell.edu/~hatcher/>. 2003.
- [Huy05] Daniel Huybrechts. *Complex geometry*. Universitext. An introduction. Springer-Verlag, Berlin, 2005, págs. xii+309. ISBN: 3-540-21290-6.

- [Mat89] Hideyuki Matsumura. *Commutative ring theory*. Second. Vol. 8. Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Translated from the Japanese by M. Reid. Cambridge University Press, Cambridge, 1989, págs. xiv+320. ISBN: 0-521-36764-6.
- [Mil68] John Milnor. *Singular points of complex hypersurfaces*. Annals of Mathematics Studies, No. 61. Princeton University Press, Princeton, N.J.; University of Tokyo Press, Tokyo, 1968, págs. iii+122.
- [SM01] Marcio G. Soares y Rogério S. Mol. *Índices de campos holomorfos e aplicações*. Publicações Matemáticas do IMPA. [IMPA Mathematical Publications]. 23o Colóquio Brasileiro de Matemática. [23rd Brazilian Mathematics Colloquium]. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2001, págs. viii+197. ISBN: 85-244-0177-X.
- [Ste99] Norman Steenrod. *The topology of fibre bundles*. Princeton Landmarks in Mathematics. Reprint of the 1957 edition, Princeton Paperbacks. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1999, págs. viii+229. ISBN: 0-691-00548-6.