Temas de Geometría (tarea)

Eduardo León (梁遠光)

Junio 2019

Problema 1. *Muestre que $\mathbb{CP}^1$ es isomorfo a la esfera S^2.*

Solución. Topológicamente, la esfera de Riemann $\mathbb{CP}^1$ es la compactificación de Alexandroff del plano $\mathbb{C}$, y la esfera usual S^2 es la compactificación de Alexandroff del plano $\mathbb{R}^2$. Por supuesto, los planos $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son homeomorfos. Puesto que la compactificación de Alexandroff es una construcción funtorial en la categoría topológica, las esferas $\mathbb{CP}^1$ y S^2 son homeomorfas.

Toda variedad topológica de dimensión real menor que 4 admite una única estructura diferenciable. Es consecucencia inmediata que las esferas $\mathbb{CP}^1$ y S^2 son difeomorfas. Sin embargo, en el siguiente problema, necesitaremos un difeomorfismo explícito. Por ello, y solamente por ello, construiremos un atlas de S^2 que puede ser identificado con el atlas estándar de $\mathbb{CP}^1$.

Sea $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ la base estándar de $\mathbb{R}^3$. La parametrización de S^2 en coordenadas esféricas es

$$\mathbf{p} = \cos\varphi \mathbf{q} + \sin\varphi \mathbf{k} \qquad \qquad \mathbf{q} = \cos\theta \mathbf{i} + \sin\theta \mathbf{j}$$

La proyección estereográfica desde el polo norte identifica cada punto $\mathbf{p} \in S^2$ distinto de $\mathbf{k}$ con el único punto $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ tal que $\mathbf{k}, \mathbf{p}, \mathbf{r}$ son colineales. Existe $h < 1$ tal que

$$\mathbf{p} = (1-h)\mathbf{r} + h\mathbf{k}$$

Puesto que $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ son linealmente independientes,

$$\mathbf{r} = r\mathbf{q} \implies \mathbf{p} = (1-h)r\mathbf{q} + h\mathbf{k}$$

Puesto que $\mathbf{k}, \mathbf{q}$ son perpendiculares, por el teorema de Pitágoras,

$$(1-h)^2 r^2 + h^2 = 1 \implies r^2 = \frac{1-h^2}{(1-h)^2} = \frac{1+h}{1-h} = \frac{2}{1-h} - 1$$
$$1 - h = \frac{2}{1+r^2} \implies h = 1 - \frac{2}{1+r^2} = \frac{r^2-1}{r^2+1}$$

Pensemos en $\mathbf{r}$ como el número complejo $z = re^{i\theta}$ e identifiquemos las parametrizaciones

$$\begin{aligned} f : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ z &\longmapsto [1 : z] \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} \tilde{f} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \\ \mathbf{r} &\longmapsto \mathbf{p} \end{aligned}$$

Nuestro objetivo es conseguir otra parametrización local de S^2 tal que podamos identificar

$$\begin{aligned} g : \mathbb{C} &\longrightarrow \mathbb{CP}^1 \\ z &\longmapsto [z : 1] \end{aligned} \qquad \qquad \begin{aligned} \tilde{g} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow S^2 \\ \mathbf{r} &\longmapsto \mathbf{p}' \end{aligned}$$

Por construcción, el cambio de coordenadas entre f y g es la inversa multiplicativa. Denotemos con un apóstrofe el efecto de sustituir z con $z' = z^{-1}$. Entonces,

$$r' = r^{-1}, \qquad \theta' = -\theta, \qquad \mathbf{q}' = \cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j}$$

La altura h se sustituye con su negativo, porque

$$h' = \frac{(r')^2 - 1}{(r')^2 + 1} = \frac{(rr')^2 - r^2}{(rr')^2 + r^2} = \frac{1 - r^2}{1 + r^2} = -h$$

El ancho $(1 - h)r$ se mantiene constante, porque

$$(1 - h')r' = (1 + h)r^{-1} = (1 - h)r$$

Sustituyendo en la expresión original,

$$\mathbf{p}' = (1 - h)r\mathbf{q}' - h\mathbf{k}$$

Problema 2.

1. *Muestre que la métrica de Fubini-Study en el abierto* $U_0 = \{[z_0 : z_1] \in \mathbb{CP}^1 \mid z_0 \neq 0\}$ *está dada por*

$$\omega_{\text{FS}} = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

2. *Calcule el área total de* $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *con respecto a* ω_{FS}*:*

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega_{\text{FS}} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx\, dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

3. *Muestre que* $\omega_{\text{FS}} = \frac{1}{4}\omega_{\text{std}}$*, donde* ω_{std} *es la forma de área estándar de* S^2*.*

Solución.

1. Por definición, los diferenciales coordenados holomorfo y antiholomorfo son

$$dz = dx + i\, dy \qquad\qquad d\bar{z} = dx - i\, dy$$

Por definición, la métrica de Fubini-Study es

$$\omega_{\text{FS}} = \tfrac{i}{2}\partial\bar{\partial}\log(1 + z\bar{z}) = \frac{\frac{i}{2}\, dz \wedge d\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2} = \frac{dx \wedge dy}{(1 + x^2 + y^2)^2}$$

2. Pasando a coordenadas polares,

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega_{\text{FS}} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{r\, dr\, d\theta}{(1 + r^2)^2} = \int_0^\infty \frac{2\pi r\, dr}{(1 + r^2)^2} = \left.\frac{-\pi}{1 + r^2}\right|_0^\infty = \pi$$

3. Diferenciando la parametrización del problema anterior,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_\theta &= \cos\varphi\mathbf{q}_\theta & \qquad \mathbf{q}_\theta &= -\sin\theta\mathbf{i} + \cos\theta\mathbf{j} \\ \mathbf{p}_\varphi &= \cos\varphi\mathbf{p}_h & \qquad \mathbf{p}_\varphi &= -\sin\varphi\mathbf{q} + \cos\varphi\mathbf{k} \end{aligned}$$

Por ende, la forma de área estándar es

$$\omega_{\text{std}} = d\theta \wedge dh, \qquad \|\mathbf{p}_\theta \times \mathbf{p}_h\| = \|\mathbf{q}_\theta \times \mathbf{p}_\varphi\| = \|\mathbf{p}\| = 1$$

Diferenciando la función altura del problema anterior,

$$h = 1 - \frac{2r}{1 + r^2} \implies dh = \frac{4r\, dr}{(1 + r^2)^2}$$

Sustituyendo en la expresión original,

$$\omega_{\text{FS}} = \frac{r\, d\theta \wedge dr}{(1 + r^2)^2} = \tfrac{1}{4}d\theta \wedge dh = \tfrac{1}{4}\omega_{std}$$

Problema 3. *Sea (M, J) una variedad casi compleja. Decimos que una métrica $g : TM \otimes_{\text{sym}} TM \to \mathbb{R}$ es hermitiana si satisface $g(X, Y) = g(JX, JY)$ para todo par de campos vectoriales $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$. Ésta es una condición de compatibilidad entre la estructura compleja y la estructura riemanniana.*

Muestre que toda métrica hermitiana se puede extender de manera $\mathbb{C}$-lineal a un único producto escalar hermitiano G sobre el fibrado complejificado $TM \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ de tal manera que

1. *$G(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{G(Z, W)}$, para todo $Z, W \in TM \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$.*
2. *$G(Z, \bar{Z}) \geq 0$ para todo $Z \in TM \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$, con igualdad si y sólo si $Z = 0$.*
3. *$G(Z, \bar{W}) = 0$, para todo $Z \in TM^{1,0}$ y $W \in TM^{0,1}$.*

Solución. La única extensión $\mathbb{C}$-lineal de la métrica es la extensión de escalares

$$G(X \otimes \lambda, Y \otimes \mu) = \lambda\mu g(X, Y)$$

La conjugación de campos complejos es inducida por la conjugación de escalares

$$\overline{X \otimes \lambda} = X \otimes \bar{\lambda}$$

Vale la pena aclarar que, en general, los elementos de $TM \otimes_\mathbb{R} \otimes\mathbb{C}$ no son tensores simples. Sin embargo, las dos definiciones anteriores se extienden fácilmente a los tensores de mayor rango por $\mathbb{R}$-linealidad.

Verifiquemos que se cumplen las tres propiedades solicitadas:

1. Si $Z = X \otimes \lambda$ y $W = Y \otimes \mu$ son tensores simples, entonces

$$G(\bar{Z}, \bar{W}) = G(X \otimes \bar{\lambda}, Y \otimes \bar{\mu}) = g(X, Y) \otimes \overline{\lambda\mu} = \overline{G(Z, W)}$$

Esta propiedad se extiende a los tensores de mayor rango por $\mathbb{R}$-linealidad.

2. Todo elemento $Z \in TM \otimes_\mathbb{R} \mathbb{C}$ tiene una representación canónica $Z = X \otimes 1 + Y \otimes i$. Entonces,

$$G(Z, \bar{Z}) = g(X, X) + ig(Y, X) - ig(X, Y) + g(Y, Y)$$

Los términos imaginarios se cancelan mutuamente, porque g es simétrica. Los términos reales son no negativos y cada uno se anula sólo cuando el correspondiente sumando de Z se anula, porque g es positiva definida.

3. La representación canónica de $Z \in TM^{1,0}$ es $Z = X \otimes 1 - JX \otimes i$. Análogamente, la representación canónica de $W \in TM^{0,1}$ es $W = Y \otimes 1 + JY \otimes i$. Entonces,

$$G(Z, \bar{W}) = g(X, Y) + ig(X, JY) + ig(JX, Y) - g(JX, JY)$$

Los términos reales se cancelan porque g es compatible con J. Además,

$$g(X, JY) = g(JX, J^2Y) = -g(JX, Y)$$

Por ende, los términos imaginarios de $G(Z, \bar{W})$ también se cancelan.

Problema 4. *Muestre que los grassmannianos complejos son variedades Kähler.*

Solución. En la tarea anterior, construimos un atlas gigantesco para el grassmanniano $G = \text{Gr}(k, \mathbb{C}^n)$. En esta tarea reutilizaremos dicho atlas. Recordemos sus propiedades más importantes:

- Para cada automorfismo lineal $\rho \in \text{GL}(n, \mathbb{C})$, la carta $\varphi : V_\rho \to \Sigma$ identifica un abierto denso $V_\rho \subset G$ con el espacio Σ de secciones lineales $\sigma : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ de la proyección $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ sobre las k primeras coordenadas, i.e., tales que $\mu \circ \sigma = \text{id}$.
- Toda sección $\sigma \in \Sigma$ está determinada por $\tilde{\sigma} = \nu \circ \sigma$, donde $\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-k}$ es la proyección sobre las coordenadas descartadas por μ.

- Sean $\rho, \rho' \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ y sea $\chi = \rho' \circ \rho^{-1}$. El cambio de coordenadas en $V_\rho \cap V_{\rho'}$ es

$$\varphi_{\rho'} = (\chi \circ \varphi_\rho) \circ (\mu \circ \chi \circ \varphi_\rho)^{-1}$$

- Las cartas inducidas por el subgrupo $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ son más que suficientes para cubrir G.

Sea $\rho \in \mathrm{U}(n)$ una referencia unitaria. Definamos el potencial de Kähler local $\psi_\rho : V_\rho \to \mathbb{R}$ como

$$\psi_\rho = \log\det(\varphi_\rho^\star \circ \varphi_\rho) = \log\det(\mathrm{id} + \tilde{\varphi}_\rho^\star \circ \tilde{\varphi}_\rho)$$

Sea $\rho' \in U(n)$ otra referencia unitaria y sea $\chi = \rho' \circ \rho^{-1}$. Puesto que χ también es unitario,

$$\psi_{\rho'} - \psi_\rho = -\log\det(\mu \circ \chi \circ \varphi_\rho) - \log\det(\mu \circ \chi \circ \varphi_\rho)^\star$$

Los términos en el miembro derecho son complejos conjugados cuya parte real está bien definida. En la suma, las partes imaginarias se cancelan y el resultado es un número real bien definido. Por otro lado, uno de los términos es holomorfo y el otro es antiholomorfo. Por ende, $i\partial\bar{\partial}$ anula a ambos y $\omega = i\partial\bar{\partial}\psi$ es una forma global bien definida.

Sólo falta verificar que $g(X, Y) = \omega(X, JY)$ sea positiva definida. Por la fórmula de Jacobi,

$$\det(\mathrm{id} + \tilde{\varphi}_\rho^\star \circ \tilde{\varphi}_\rho) = 1 + \mathrm{tr}(\tilde{\varphi}_\rho^\star \circ \tilde{\varphi}_\rho) + \dots$$

Entonces, en el punto $\pi \in V_\rho$ con coordenadas $\tilde{\varphi}_\rho(\pi) = 0$, la métrica se reduce a $g_\pi = \mathrm{tr}(d\tilde{\varphi}_\rho^\star \circ d\tilde{\varphi}_\rho)$, el producto interno de Frobenius sobre el espacio de aplicaciones lineales $\lambda : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{n-k}$. Por supuesto, para todo punto $\pi \in G$, existe una referencia $\rho \in \mathrm{U}(n)$ en la cual $\tilde{\varphi}_\rho(\pi) = 0$. Por ende, g es positiva definida en todo el grassmanniano G.