Pontificia Universidad Católica del Perú.

Escuela de Posgrado: Maestría en Matemáticas

Temas de Geometría (MAT 747)

Tarea 2: parte 1

Primer Semestre 2019

Indicaciones Generales:
Fecha de Entrega: 12 de julio, 2019.

Problema 1. Muestre que $\mathbb{CP}^1$ es isomorfo a la esfera S^2.

Problema 2.

a) Muestre que en $\mathbb{CP}^1$, la forma Fubini-Study en $U_0 = \{[z_0, z_1] \in \mathbb{CP}^1 | z_0 \neq 0\}$, está dada por

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2},$$

donde $\frac{z_1}{z_0} = z = x + iy$.

b) Calcule el área total de $\mathbb{CP}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ con respecto a ω_{FS}:

$$\int_{\mathbb{CP}^1} \omega_{\mathrm{FS}} = \int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx \wedge dy}{(x^2 + y^2 + 1)^2}.$$

c) Sobre S^2 existe una forma de área estándar $\omega_{\text{ std}}$ inducida al considerar la esfera en $\mathbb{R}^3$: en coordenadas cilíndricas (θ, h) sobre S^2 excluyendo los polos ($0 \leq \theta < 2\pi$ and $-1 \leq h \leq 1$), tenemos $\omega_{\mathrm{std}} = d\theta \wedge dh$. Muestre que

$$\omega_{\mathrm{FS}} = \frac{1}{4} \omega_{\mathrm{std}}.$$

Problema 3. (**Métricas de Kähler: definición tradicional**.)

Sea (M, J) una variedad casi compleja, y sea g una métrica riemanniana sobre ella. Decimos que g es una métrica hermitiana si se cumple

(i) $g(v, w) = g(Jv, Jw)$ para campos vectoriales v, w en M,

Esta es una condición de compatibilidad natural entre la estructura casi compleja y la estructura riemanniana.

Muestre que dada una métrica hermitiana g podemos extender esta de manera $\mathbb{C}$-lineal a un único *producto escalar hermitiano* sobre el fibrado complexificado $TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ satisfaciendo

(i) $g(\bar{Z}, \bar{W}) = \overline{g(Z, W)}$, para todo $Z, W \in (TM \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C})$.

(ii) $g(Z, \bar{Z}) > 0$ para todo $Z \neq 0$.

(iii) $g(Z, \bar{W}) = 0$ para $Z \in (T^{(1,0)}M)$ y $W \in (T^{(0,1)}M)$.

Localmente, en una carta coordenada compleja $(U, z_1, \ldots z_m)$, podemos escribir este producto escalar g extendido como

$$g = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \otimes d\bar{z}_\beta. \tag{1}$$

Observemos que a partir de (i), se sigue que $g_{\alpha\bar{\beta}}$ satisface $g_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{g_{\beta\bar{\alpha}}}$ y por tanto $g_{\alpha\bar{\beta}}$ refiere a una matriz hermitiana $n \times n$.

Si g es hermitiana, definimos una 2-forma ω sobre M llamada la *forma hermitiana* de g:

(i) $\omega(v, w) = g(Jv, w)$ para campos vectoriales v, w en M,

Observemos que de estas condiciones, es evidente que ω es una 2-forma real y actúa sobre elementos mixtos, esto es, ω es una $(1,1)$-forma.

Podemos expresar ω (extendida de manera $\mathbb{C}$-lineal) como la suma

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta} dz_\alpha \wedge dz_\beta + \sum_{\alpha,\beta} B_{\bar{\alpha},\bar{\beta}} d\bar{z}_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta + \sum_{\alpha,\beta} C_{\alpha,\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta.$$

No es difícil ver $\omega(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial z_\beta}) = \omega(\frac{\partial}{\partial \bar{z}_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}) = 0$. Por otro lado
$\omega(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta}) = g(J\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta})$. Pero esta última expresión es igual a $ig(\frac{\partial}{\partial z_\alpha}, \frac{\partial}{\partial \bar{z}_\beta})$. Así obtenemos

$$\omega = i \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} g_{\alpha\bar{\beta}} dz_\alpha \wedge d\bar{z}_\beta. \tag{2}$$

Es interesante ver que uno puede reconstruir la métrica g de ω usando la ecuación $g(v, w) = \omega(v, Jw)$. Decimos que una $(1,1)$-forma ω es *positiva* si $\omega(v, Jv) > 0$ para todo campo vectorial no nulo v. Se sigue fácilmente que si ω es una $(1,1)$-forma en una variedad compleja, entonces ω es una forma hermitiana de una métrica hermitiana si y solo si ω es positiva.

Definición. Sea M una variedad compleja y g una métrica hermitiana en M, con forma hermitiana ω. Decimos que g es una métrica de Kähler si $d\omega = 0$. En este caso llamamos a ω la *forma de Kähler*.

Problema 4. Muestre que el grassmanniano complejo es una variedad Kähler. (sugiero ver el argumento dado en el libro de Kobayashi y Nomizu: Foundations of Differential Geometry, Vol2. página 160, ejemplo 6.4)

San Miguel, 28 de mayo, 2019.