Temas de Geometría (tarea)

Eduardo León (梁遠光)

Junio 2019

Problema 1. *Considere las imágenes de la esfera unitaria $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ vía las aplicaciones*

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \\ (x, a) &\longmapsto (x, 2ax) \end{aligned} \qquad \begin{aligned} G : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ (x, a) &\longmapsto (x, 2ax, 2a - \tfrac{4}{3}a^3) \end{aligned}$$

1. *Muestre que la restricción de F a S^n es una inmersión.*
2. *Muestre que $F(S^n)$ es un lagrangiano de $\mathbb{R}^{2n}$ con la forma simpléctica estándar ω.*
3. *Muestre que la restricción de G a S^n es un encaje.*
4. *Muestre que $G(S^n)$ es un legendriano de $\mathbb{R}^{2n+1}$ con la forma de contacto estándar η.*

Solución. Tengamos presente que, en la esfera,

$$\sum_i x_i^2 = 1 - a^2, \qquad \sum_i x_i \, dx_i = -a \, da$$

1. Aplicando $F^\star$ a la base estándar de $T^\star\mathbb{R}^{2n}$, tenemos

   $$F^\star dx_i = dx_i, \qquad F^\star dy_i = 2a \, dx_i + 2x_i \, da$$

   En los polos norte y sur, $F^\star dx_1 \dots F^\star dx_n$ generan $T^\star S^n$. En el resto de la esfera, por lo menos una coordenada x_i es distinta de cero. Entonces $F^\star dx_1 \dots F^\star dx_n, F^\star dy_i$ generan $T^\star\mathbb{R}^{n+1}$, que contiene a $T^\star S^n$. Puesto que la imagen de $F^\star$ a contiene a $T^\star S^n$, la restricción de F a S^n es una inmersión.

2. Aplicando $F^\star$ a la forma simpléctica estándar, tenemos

   $$F^\star\omega = \sum_i F^\star dx_i \wedge F^\star dy_i = \sum_i 2x_i \, dx_i \wedge da$$

   Restringiéndonos a la esfera, $F^\star\omega = -2a \, da^2 = 0$. Por ende, $F(S^n)$ es una subvariedad isotrópica de $\mathbb{R}^{2n}$. Puesto que $F(S^n)$ de dimensión n, es un lagrangiano de $\mathbb{R}^{2n}$.

3. Todo punto de $F(S^n)$ tiene exactamente una preimagen en S^n, excepto $F(0, \pm 1) = (0, 0)$, que tiene dos. La definición de G mantiene estos puntos separados: $G(0, \pm 1) = (0, 0, \pm\frac{2}{3})$. Por ende, G es una inmersión inyectiva propia, i.e., un encaje.

4. Aplicando $G^\star$ a los términos de la forma de contacto estándar, tenemos

   $$G^\star dz = (2 - 4a^2) \, da, \qquad G^\star(x_i \, dy_i) = 2ax_i \, dx_i + 2x_i^2 \, da$$

   Restringiéndonos a la esfera,

   $$\sum_i G^\star(x_i \, dy_i) = -2a^2 \, da + 2(1 - a^2) \, da = G^\star dz$$

   Entonces, $G^\star\eta = 0$. Por ende, $G(S^n)$ es una subvariedad isotrópica de $\mathbb{R}^{2n+1}$. Puesto que $G(S^n)$ es de dimensión n, es un legendriano de $\mathbb{R}^{2n+1}$.

Problema 2. *Sea M una variedad diferenciable y sea $\eta \in \Omega^1(M)$. Muestre que η es de contacto si y sólo si $\omega = d(r^2\eta)$ es una forma simpléctica sobre el cono $M \times \mathbb{R}^+$.*

Solución. Sea $\dim M = 2n+1$ y sea $s = r^{2n+2}$. Por el problema 7 de la parte 1 de la tarea,

$$\omega^{n+1} = (2r\,dr \wedge \eta + r^2\,d\eta)^{n+1} = ds \wedge \eta \wedge (d\eta)^n$$

Por definición, ω es exacta, por ende es cerrada. Entonces ω es una forma simpléctica si y sólo si ω^{n+1} es una forma de volumen, si y sólo si $\eta \wedge (d\eta)^n$ es no degenerada, si y sólo si η es una forma de contacto.

Problema 3. *Considere los grupos de Lie* $\mathrm{Sp}(2n)$, $\mathrm{O}(2n)$ *y* $\mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$. *Muestre que la intersección de dos cualesquiera de ellos es igual a* $\mathrm{U}(n)$.

Solución. Sea $J \in \mathrm{U}(n)$ la multiplicación por i. Dado un automorfismo $A \in \mathrm{GL}(2n,\mathbb{R})$ arbitrario,

- $A \in \mathrm{Sp}(2n)$ si y sólo si A preserva J como forma bilineal. Matricialmente, $A^T JA = J$.
- $A \in \mathrm{O}(2n)$ si y sólo si A preserva el producto interno euclidiano. Matricialmente, $A^T A = I$.
- $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ si y sólo si A preserva J como endomorfismo lineal. Matricialmente, $A^{-1}JA = J$.

Por álgebra matricial, puesto que A, J son invertibles, dos cualesquiera de estas condiciones implican la tercera. Cuando $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$, la transpuesta real A^T corresponde a la transpuesta conjugada $A^\dagger$. Por lo tanto, $A \in \mathrm{GL}(n,\mathbb{C}) \cap \mathrm{O}(2n)$ si y sólo si $A^\dagger A = I$, si y sólo si A es una matriz unitaria.

Problema 4. *Muestre que toda variedad casi compleja (M, J) es orientable.*

Solución. Pongamos una métrica riemanniana arbitraria g sobre M. La 2-forma $\omega \in \Omega^2(M)$

$$\omega(X,Y) = g(JX,Y) - g(JY,X)$$

es casi simpléctica, i.e., no degenerada, puesto que

$$\omega(X,JY) = g(X,Y) + g(JX,JY)$$

es una métrica riemanniana. Entonces la forma de volumen ω^n induce una orientación sobre M.

Problema 5. *Muestre que toda función holomorfa $f : M \to \mathbb{C}$ sobre una variedad compleja compacta M es localmente constante.*

Solución. Supongamos sin pérdida de generalidad que M es conexa. Puesto que M es compacta, $|f|$ toma un valor máximo en algún punto $p \in M$. Puesto que M no tiene borde, p es un punto interior de M. Por el principio del módulo máximo, f es constante en una vecindad $U \subset M$ de p.

Definamos $g : M \to \mathbb{C}$ por $g(x) = f(p)$. Tanto f como g son extensiones analíticas de $f|_U$ a M. Puesto que M es conexa, $f|_U$ no admite extensiones analíticas distintas. Por ende, $f = g$.

Problema 6. *Muestre que los grassmannianos complejos son variedades complejas.*

Solución. Sea U el espacio de monomorfismos lineales $\alpha : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ y sea $H_n = \mathrm{GL}(n,\mathbb{C})$ el grupo general lineal. El grassmanniano $G = \mathrm{Gr}(k,\mathbb{C}^n)$ es el espacio de k-planos en $\mathbb{C}^n$.

Por álgebra lineal, todo $\alpha \in U$ parametriza a un único $\pi \in G$, todo $\pi \in G$ es parametrizado por algún $\alpha \in U$, y dos $\alpha, \beta \in U$ parametrizan el mismo $\pi \in G$ si y sólo si existe $\psi \in H_k$ tal que $\beta = \alpha \circ \psi$. Por ende el grassmanniano G es el espacio de órbitas U/H_k de la acción natural de H_k sobre U.

Sean $\mu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^k$ la proyección sobre las k primeras coordenadas y $\nu : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^{n-k}$ la proyección sobre las $n-k$ coordenadas restantes. Sea Σ el espacio de secciones lineales $\sigma : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ de μ, vale decir, tales que $\mu \circ \sigma = \mathrm{id}$. Todo $\sigma \in \Sigma$ está determinado por $\nu \circ \sigma$. Por ende, Σ es isomorfo al espacio de aplicaciones lineales arbitrarias $\lambda : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^{n-k}$. Por ende, Σ es una variedad afín no singular.

Para todo $\rho \in H_n$, la vecindad $V_\rho \subset G$ está formada los $\pi \in G$ que tienen un representante $\alpha \in U$ para el cual $\mu \circ \rho \circ \alpha = \mathrm{id}$. Este representante es forzosamente único, pues si $\psi \in H_k$ satisface $\mu \circ \rho \circ \alpha \circ \psi = \mathrm{id}$, entonces $\psi = \mathrm{id}$. Definamos la carta $\varphi_\rho : V_\rho \to \Sigma$ por $\varphi_\rho(\pi) = \rho \circ \alpha$. Esta carta es una biyección, porque la preimagen de $\sigma \in \Sigma$ consta del único punto $\varphi_\rho^{-1}(\sigma) = [\rho^{-1} \circ \sigma]$.

Por álgebra lineal, para todo $\alpha \in U$, existe $\rho \in H_n$ tal que $\mu \circ \rho \circ \alpha = \mathrm{id}$. Por ende, H_n actúa de forma transitiva sobre G y las vecindades distinguidas V_ρ cubren G.

Sean $\rho, \rho' \in H_n$ y abreviemos $\chi = \rho' \circ \rho^{-1}$ por conveniencia. Existe una función $\psi : V_\rho \cap V_{\rho'} \to H_k$ que satisface la ecuación de cambio de coordenadas

$$\varphi_{\rho'}(\pi) = \rho' \circ \alpha' = \chi \circ \rho \circ \alpha \circ \psi(\pi) = \chi \circ \varphi_\rho(\pi) \circ \psi(\pi)$$

De hecho, se verifica inmediatamente que

$$\mathrm{id} = \mu \circ \varphi_{\rho'}(\pi) = \mu \circ \chi \circ \varphi_\rho(\pi) \circ \psi(\pi)$$

Sustituyendo en la ecuación anterior, tenemos

$$\varphi_{\rho'}(\pi) = \chi \circ \varphi_\rho(\pi) \circ [\mu \circ \chi \circ \varphi_\rho(\pi)]^{-1}$$

Las funciones de transición son algebraicas, por ende G es una variedad algebraica. Todas las cartas de este atlas son no singulares, por ende G es una variedad algebraica no singular.

Hasta este momento, el argumento ha sido puramente algebraico y funciona sobre cualquier cuerpo. El último paso require usar información específica acerca de $\mathbb{C}$.

Sea U el espacio de encajes isométricos lineales $\alpha : \mathbb{C}^k \to \mathbb{C}^n$ con respecto al producto interno estándar y sea $H_k = \mathrm{U}(k)$ el grupo unitario. El grassmanniano G es el espacio de órbitas U/H_k de la acción natural de H_k sobre U, por el mismo argumento que antes. Haciendo todos los ajustes necesarios en el mamotreto anterior, obtenemos un subatlas del atlas original, que forzosamente induce la misma topología. Puesto que U es Hausdorff y H_k es compacto, el cociente $G = U/H_k$ es Hausdorff. Puesto que U es segundo contable, el cociente $G = U/H_k$ lo es con mayor razón aún. Entonces G es una variedad compleja.