Sistema Formal L

Eduardo León (梁遠光)

Abril 2019

Capítulo 1

Defnciones básicas

Definición. El sistema formal L consta de

1. **Alfabeto:** Hay tres tipos de símbolos.
   - *Proposiciones atómicas:* $p_0, p_1, p_2 \dots$
   - *Conectores:* $\neg$ (negación) y $\rightarrow$ (implicación)
   - *Puntuación:* paréntesis de apertura y cierre
2. **Frases bien formadas:** Hay tres formas de construir frases bien formadas.
   - Toda proposición atómica p_i es una frase bien formada.
   - Si A es una frase bien formada, entonces $(\neg A)$ es una frase bien formada.
   - Si A, B son frases bien formadas, entonces $(A \rightarrow B)$ es una frase bien formada.

   Observación. En la práctica, escribir todos los paréntesis resulta engorroso. Por ende, omitiremos los paréntesis que no sean necesarios para entender la estructura sintáctica de una frase bien formada.
3. **Axiomas:** Hay tres esquemas de axiomas.
   - **L1:** $B \rightarrow (A \rightarrow B)$
   - **L2:** $(A \rightarrow (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C))$
   - **L3:** $(\neg B \rightarrow \neg A) \rightarrow (A \rightarrow B)$
4. **Reglas de deducción:** Sólo hay una regla de deducción.
   - *Modus ponens:* $A, A \rightarrow B \therefore B$.

Definición. Una *demostración* en L es una lista de frases bien formadas $A_1 \dots A_n$ tal que cada elemento A_i es un axioma o se deduce de dos elementos anteriores.

Definición. Un *teorema* de L es una frase bien formada B tal que existe una demostración $A_1 \dots A_n$ que concluye en $A_n = B$. Escribimos $\vdash_L B$.

Ejemplo. La frase bien formada $(p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)$ es un teorema de L.

1. $\vdash_L p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)$ (L1)
2. $\vdash_L (p_1 \rightarrow (p_2 \rightarrow p_1)) \rightarrow ((p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1))$ (L2)
3. $\vdash_L (p_1 \rightarrow p_2) \rightarrow (p_1 \rightarrow p_1)$ (MP en 1 y 2)

Definición. Un *contexto* es un conjunto de frases bien formadas, llamadas *premisas*.

Definición. Sea Γ un contexto. Una *deducción* de Γ es una lista de frases bien formadas $A_1 \dots A_n$ tales que cada elemento A_i es un axioma, un miembro de Γ, o se deduce de dos elementos anteriores.

Definición. Sea Γ un contexto. Una *consecuencia* de Γ es una frase bien formada B tal que existe una deducción $A_1 \dots A_n$ que concluye en $A_n = B$. Escribimos $\Gamma \vdash_L B$.

Observación. Un teorema es una consecuencia del conjunto vacío.

Ejemplo. Sea $\Gamma = \{A, B \to (A \to C)\}$. Entonces $\Gamma \vdash_L B \to C$.

1. $\Gamma \vdash_L A$ (premisa)
2. $\Gamma \vdash_L A \to (B \to A)$ (L1)
3. $\Gamma \vdash_L B \to A$ (MP en 1 y 2)
4. $\Gamma \vdash_L B \to (A \to C)$ (premisa)
5. $\Gamma \vdash_L (B \to (A \to C)) \to ((B \to A) \to (B \to C))$ (L2)
6. $\Gamma \vdash_L (A \to B) \to (A \to C)$ (MP en 4 y 5)
7. $\Gamma \vdash_L B \to C$ (MP en 3 y 6)

Ejercicio 1. Escriba demostraciones en L de las siguientes frases bien formadas.

(a) $(p_1 \to p_2) \to ((\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to p_1))$

Solución. Sean $A = p_1 \to p_2$ y $B = (\neg p_1 \to \neg p_2) \to (p_2 \to p_1)$.

1. $\vdash_L B$ (L3)
2. $\vdash_L B \to (A \to B)$ (L1)
3. $\vdash_L A \to B$ (MP en 1 y 2)

(b) $((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_2)) \to ((p_1 \to (p_2 \to p_3)) \to (p_1 \to p_3))$

Solución. Sean $A = p_1 \to (p_2 \to p_3)$, $B = p_1 \to p_2$ y $C = p_1 \to p_3$.

1. $\vdash_L A \to (B \to C)$ (L2)
2. $\vdash_L (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$ (L2)
3. $\vdash_L (A \to B) \to (A \to C)$ (MP en 1 y 2)

(c) $(p_1 \to (p_1 \to p_2)) \to (p_1 \to p_2)$

Solución. Sean

- $A = p_1 \to ((p_1 \to p_1) \to p_1)$
- $B = p_1 \to (p_1 \to p_1)$
- $C = p_1 \to (p_1 \to p_2)$
- $D = p_1 \to p_1$
- $E = p_1 \to p_2$

Deducimos

1. $\vdash_L B$ (L1)
2. $\vdash_L A$ (L1)
3. $\vdash_L A \to (B \to D)$ (L2)
4. $\vdash_L B \to D$ (MP en 2 y 3)

5. $\vdash_L D$ (MP en 1 y 4)
6. $\vdash_L D \to (C \to D)$ (L1)
7. $\vdash_L C \to D$ (MP en 5 y 6)
8. $\vdash_L C \to (D \to E)$ (L2)
9. $\vdash_L (C \to (D \to E)) \to ((C \to D) \to (C \to E))$ (L2)
10. $\vdash_L (C \to D) \to (C \to E)$ (MP en 8 y 9)
11. $\vdash_L C \to E$ (MP en 7 y 10)

(d) $p_1 \to (p_2 \to (p_1 \to p_2))$

Solución. Sea $A = p_2 \to (p_1 \to p_2)$.

1. $\vdash_L A$ (L1)
2. $\vdash_L A \to (p_1 \to A)$ (L1)
3. $\vdash_L p_1 \to A$ (MP en 1 y 2)

Ejercicio 2. Sean A, B, C frases bien formadas cualesquiera. Construya las siguientes deducciones:

(a) $\{\neg A\} \vdash_L A \to B$

Solución.

1. $\{\neg A\} \vdash_L \neg A$ (premisa)
2. $\{\neg A\} \vdash_L \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (L1)
3. $\{\neg A\} \vdash_L \neg B \to \neg A$ (MP en 1 y 2)
4. $\{\neg A\} \vdash_L (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (L3)
5. $\{\neg A\} \vdash_L A \to B$ (MP en 3 y 4)

(b) $\{\neg\neg A\} \vdash_L A$

Solución. Sea $X = \neg\neg A$.

1. $\{X\} \vdash_L X$ (premisa)
2. $\{X\} \vdash_L X \to (\neg\neg X \to X)$ (L1)
3. $\{X\} \vdash_L \neg\neg X \to X$ (MP en 1 y 2)
4. $\{X\} \vdash_L (\neg\neg X \to \neg\neg A) \to (\neg A \to \neg X)$ (L3)
5. $\{X\} \vdash_L \neg A \to \neg X$ (MP en 3 y 4)
6. $\{X\} \vdash_L (\neg A \to \neg X) \to (X \to A)$ (L3)
7. $\{X\} \vdash_L X \to A$ (MP en 5 y 6)
8. $\{X\} \vdash_L A$ (MP en 1 y 7)

(c) $\{A \to B, \neg(B \to C) \to \neg A\} \vdash_L A \to C$

Solución. Sean $X = A \to B$, $Y = B \to C$, $Z = A \to C$ y $\Gamma = \{X, \neg Y \to \neg A\}$.

1. $\Gamma \vdash_L X$ (premisa)
2. $\Gamma \vdash_L \neg Y \to \neg A$ (premisa)
3. $\Gamma \vdash_L (\neg Y \to \neg A) \to (A \to Y)$ (L3)
4. $\Gamma \vdash_L A \to Y$ (MP en 2 y 3)
5. $\Gamma \vdash_L (A \to Y) \to (X \to Z)$ (L2)
6. $\Gamma \vdash_L X \to Z$ (MP en 4 y 5)
7. $\Gamma \vdash_L Z$ (MP en 1 y 6)

(d) $\{A \to (B \to C)\} \vdash_L B \to (A \to C)$

Solución. Sean $X = B \to C$, $Y = A \to B$, $Z = A \to C$ y $\Gamma = \{A \to X\}$.

1. $\Gamma \vdash_L A \to X$ (premisa)
2. $\Gamma \vdash_L (A \to X) \to (Y \to Z)$ (L2)
3. $\Gamma \vdash_L Y \to Z$ (MP en 1 y 2)
4. $\Gamma \vdash_L (Y \to Z) \to (B \to (Y \to Z))$ (L1)
5. $\Gamma \vdash_L B \to (Y \to Z)$ (MP en 3 y 4)
6. $\Gamma \vdash_L (B \to (Y \to Z)) \to ((B \to Y) \to (B \to Z))$ (L2)
7. $\Gamma \vdash_L (B \to Y) \to (B \to Z)$ (MP en 5 y 6)
8. $\Gamma \vdash_L B \to Y$ (L1)
9. $\Gamma \vdash_L B \to Z$ (MP en 8 y 7)

Capítulo 2

Teorema de deducción

Motivación. Veamos algunas demostraciones en L. Sean A, B frases bien formadas cualesquiera.

Ejemplo. $\vdash_L A \to A$

1. $\vdash_L A \to (A \to A)$ (L1)
2. $\vdash_L A \to ((A \to A) \to A)$ (L1)
3. $\vdash_L (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (L2)
4. $\vdash_L (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (MP en 2 y 3)
5. $\vdash_L A \to A$ (MP en 1 y 4)

Ejemplo. $\vdash_L \neg A \to (A \to B)$

1. $\vdash_L (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (L3)
2. $\vdash_L ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)) \to (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B)))$ (L1)
3. $\vdash_L \neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))$ (MP en 1 y 2)
4. $\vdash_L (\neg A \to ((\neg B \to \neg A) \to (A \to B))) \to ((\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B)))$ (L2)
5. $\vdash_L (\neg A \to (\neg B \to \neg A)) \to (\neg A \to (A \to B))$ (MP en 3 y 4)
6. $\vdash_L \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (L1)
7. $\vdash_L \neg A \to (A \to B)$ (MP en 5 y 6)

Como podemos apreciar, demostrar teoremas en L directamente es bastante engorroso. Esto nos motiva a buscar maneras alternativas de determinar si una frase bien formada es teorema de L.

El siguiente teorema nos permite deducir una implicación $A \to B$ de forma indirecta, transformando el antecedente A en una premisa adicional de una deducción de B.

Proposición. *(Teorema de deducción) Si $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$, entonces $\Gamma \vdash_L A \to B$.*

Demostración. Por inducción estructural en la deducción de $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$:

- Si B es un axioma de L:
  1. $\Gamma \vdash_L B$ (axioma)
  2. $\Gamma \vdash_L B \to (A \to B)$ (L1)
  3. $\Gamma \vdash_L A \to B$ (MP en 1 y 2)

- Si $B \in \Gamma$:
  1. $\Gamma \vdash_L B$ (premisa)
  2. $\Gamma \vdash_L B \to (A \to B)$ (L1)
  3. $\Gamma \vdash_L A \to B$ (MP en 1 y 2)
- Si $B = A$:
  1. $\Gamma \vdash_L A \to (A \to A)$ (L1)
  2. $\Gamma \vdash_L A \to ((A \to A) \to A)$ (L1)
  3. $\Gamma \vdash_L (A \to ((A \to A) \to A)) \to ((A \to (A \to A)) \to (A \to A))$ (L2)
  4. $\Gamma \vdash_L (A \to (A \to A)) \to (A \to A)$ (MP en 2 y 3)
  5. $\Gamma \vdash_L A \to A$ (MP en 1 y 4)
- Si B se deduce usando modus ponens, existe una frase bien formada C tal que
  - $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L C$
  - $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L C \to B$

  Entonces
  1. $\Gamma \vdash_L A \to C$ (hipótesis inductiva)
  2. $\Gamma \vdash_L A \to (C \to B)$ (hipótesis inductiva)
  3. $\Gamma \vdash_L (A \to (C \to B)) \to ((A \to C) \to (A \to B))$ (L2)
  4. $\Gamma \vdash_L (A \to C) \to (A \to B)$ (MP en 2 y 3)
  5. $\Gamma \vdash_L A \to B$ (MP en 1 y 4)

Proposición. *(Conversa del teorema de deducción) Si $\Gamma \vdash_L A \to B$, entonces $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$.*

Demostración. Existe una deducción de $\Gamma \vdash_L A \to B$. Entonces

1. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L A$ (premisa)
2. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L A \to B$ (hipótesis)
3. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$ (MP en 1 y 2)

Corolario. *Sean A, B, C frases bien formadas, y sea $\Gamma = \{A \to B, B \to C\}$. Entonces $\Gamma \vdash_L A \to C$.*

Demostración.

1. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L A$ (premisa)
2. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L A \to B$ (premisa)
3. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B$ (MP en 1 y 2)
4. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L B \to C$ (premisa)
5. $\Gamma \cup \{A\} \vdash_L C$ (MP en 3 y 4)
6. $\Gamma \vdash_L A \to C$ (TD en 5)

Definición. Una regla de deducción R es *admisible* para L si, al agregarla a L, el sistema resultante no tiene teoremas nuevos.

Ejemplo. Por el corolario previo, el *silogismo hipotético* $A \to B, B \to C \therefore A \to C$ es una regla admisible.

Notación. Sea $P = A \to B$ una implicación. Denotaremos su contrapositiva $P^c = \neg B \to \neg A$.

Proposición. *(Teoremas auxiliares) Sean A, B frases bien formadas. Entonces*

(a) $\vdash_L \neg B \to (B \to A)$

Demostración.

1. $\{\neg B\} \vdash_L B \to A$ (ejercicio 2.a)
2. $\vdash_L \neg B \to (B \to A)$ (TD en 1)

(b) $\vdash_L (\neg A \to A) \to A$

Demostración. Sean $X = \neg A \to A$, $Y = A \to \neg X$ y $Z = X \to A$.

1. $\{X\} \vdash_L X$ (premisa)
2. $\{X\} \vdash_L \neg A \to Y$ (TA a)
3. $\{X\} \vdash_L (\neg A \to Y) \to (X \to Z^c)$ (L2)
4. $\{X\} \vdash_L X \to Z^c$ (MP en 2 y 3)
5. $\{X\} \vdash_L Z^c$ (MP en 1 y 4)
6. $\{X\} \vdash_L Z^c \to Z$ (L3)
7. $\{X\} \vdash_L Z$ (MP en 5 y 6)
8. $\{X\} \vdash_L A$ (MP en 1 y 7)
9. $\vdash_L X \to A$ (TD en 8)

Ejercicio 3. Sean A, B frases bien formadas cualesquiera. Usando el teorema de deducción, muestre que las siguientes frases bien formadas son teoremas de L.

(a) $A \to \neg\neg A$

Solución. Sea $X = A \to \neg\neg A$.

1. $\{\neg\neg\neg A\} \vdash_L \neg A$ (ejercicio 2.b)
2. $\vdash_L X^c$ (TD en 1)
3. $\vdash_L X^c \to X$ (L3)
4. $\vdash_L X$ (MP en 2 y 3)

(b) $(B \to A) \to (\neg A \to \neg B)$

Solución. Sea $X = B \to A$.

1. $\{X, \neg\neg B\} \vdash_L B$ (ejercicio 2.b)
2. $\{X, \neg\neg B\} \vdash_L X$ (premisa)
3. $\{X, \neg\neg B\} \vdash_L A$ (MP en 1 y 2)
4. $\{X, \neg\neg B\} \vdash_L A \to \neg\neg A$ (ejercicio 3.a)
5. $\{X, \neg\neg B\} \vdash_L \neg\neg A$ (MP en 3 y 4)
6. $\{X\} \vdash_L X^{cc}$ (TD en 5)
7. $\{X\} \vdash_L X^{cc} \to X^c$ (L3)
8. $\{X\} \vdash_L X^c$ (MP en 6 y 7)
9. $\vdash_L X \to X^c$ (TD en 8)

(c) $((A \to B) \to A) \to A$

Solución. Sea $X = (A \to B) \to A$.

1. $\{X, \neg A\} \vdash_L \neg A$ (premisa)
2. $\{X, \neg A\} \vdash_L \neg A \to (A \to B)$ (TA a)

3. $\{X, \neg A\} \vdash_L A \to B$ (MP en 1 y 2)
4. $\{X, \neg A\} \vdash_L X$ (premisa)
5. $\{X, \neg A\} \vdash_L A$ (MP en 3 y 4)
6. $\{X\} \vdash_L \neg A \to A$ (TD en 5)
7. $\{X\} \vdash_L (\neg A \to A) \to A$ (TA b)
8. $\{X\} \vdash_L A$ (MP en 6 y 7)
9. $\vdash_L X \to A$ (TD en 8)

(d) $\neg(A \to B) \to (B \to A)$

Solución. Sean $X = A \to B$, $Y = B \to X$ y $Z = B \to A$.

1. $\{\neg X\} \vdash_L \neg X$ (premisa)
2. $\{\neg X\} \vdash_L Y$ (L1)
3. $\{\neg X\} \vdash_L Y \to Y^c$ (ejercicio 3.b)
4. $\{\neg X\} \vdash_L Y^c$ (MP en 2 y 3)
5. $\{\neg X\} \vdash_L \neg B$ (MP en 1 y 4)
6. $\{\neg X\} \vdash_L \neg B \to Z$ (TA a)
7. $\{\neg X\} \vdash_L Z$ (MP en 5 y 6)
8. $\vdash_L \neg X \to Z$ (TD en 7)

Ejercicio 4. Sea L' el sistema formal que resulta de reemplazar el esquema de axiomas L3 por

- **L3':** $(\neg A \to \neg B) \to ((\neg A \to B) \to A)$

Luego

1. Muestre que toda instancia de L3' es teorema de L.
2. Muestre que toda instancia de L3 es teorema de L'.
3. Deduzca que una frase bien formada es teorema de L si y sólo si es teorema de L'.

Observación. La demostración del teorema de deducción no usa el esquema de axiomas L3. Por ende, este teorema es tan válido para L' como lo es para L.

Solución. Sean $X = B \to A$ e $Y = \neg A \to B$.

(a) $\vdash_L X^c \to (Y \to A)$

1. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L \neg A$ (premisa)
2. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L Y$ (premisa)
3. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L B$ (MP en 1 y 2)
4. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L X^c$ (premisa)
5. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L X^c \to X$ (L3)
6. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L X$ (MP en 4 y 5)
7. $\{X^c, Y, \neg A\} \vdash_L A$ (MP en 3 y 6)
8. $\{X^c, Y\} \vdash_L \neg A \to A$ (TD en 7)
9. $\{X^c, Y\} \vdash_L (\neg A \to A) \to A$ (TA b)
10. $\{X^c, Y\} \vdash_L A$ (MP en 8 y 9)
11. $\{X^c\} \vdash_L Y \to A$ (TD en 10)
12. $\vdash_L X^c \to (Y \to A)$ (TD en 11)

(b) $\vdash_{L'} X^c \to X$

1. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} B$ (premisa)
2. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} B \to Y$ (L1)
3. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} Y$ (MP en 1 y 2)
4. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} X^c$ (premisa)
5. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} X^c \to (Y \to A)$ (L3')
6. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} Y \to A$ (MP en 4 y 5)
7. $\{X^c, B\} \vdash_{L'} A$ (MP en 3 y 6)
8. $\{X^c\} \vdash_{L'} X$ (TD en 7)
9. $\vdash_{L'} X^c \to X$ (TD en 8)

(c) Sea T un teorema de L. Por inducción estructural en la demostración de T:

- Si T es un axioma de L, entonces es teorema de L', por la parte (b) de este ejercicio.
- Si T se deduce usando modus ponens, existe una frase bien formada A tal que
  - $\vdash_L A$
  - $\vdash_L A \to T$

  Entonces
  1. $\vdash_{L'} A$ (hipótesis inductiva)
  2. $\vdash_{L'} A \to T$ (hipótesis inductiva)
  3. $\vdash_{L'} T$ (MP en 1 y 2)

Conversamente, sea T un teorema de L'. Por inducción estructural en la demostración de T:

- Si T es un axioma de L', entonces es teorema de L, por la parte (a) de este ejercicio.
- Si T se deduce usando modus ponens, existe una frase bien formada A tal que
  - $\vdash_{L'} A$
  - $\vdash_{L'} A \to T$

  Entonces
  1. $\vdash_L A$ (hipótesis inductiva)
  2. $\vdash_L A \to T$ (hipótesis inductiva)
  3. $\vdash_L T$ (MP en 1 y 2)

Ejercicio 5. ¿Es la regla $B, A \to (B \to C) \therefore A \to C$ admisible para L? Justifique.

Solución. Sea R la nueva regla de deducción y sea A un teorema de $L + R$. Por inducción estructural en la demostración de T:

- Si T es un axioma de $L + R$, entonces es un axioma de L, por ende es un teorema de L.
- Si T se deduce usando modus ponens, existe una frase bien formada A tal que
  - $\vdash_{L+R} A$
  - $\vdash_{L+R} A \to T$

  Entonces
  1. $\vdash_L A$ (hipótesis inductiva)
  2. $\vdash_L A \to T$ (hipótesis inductiva)
  3. $\vdash_L T$ (MP en 1 y 2)

- Si $T = A \to C$ se deduce usando R, existe una frase bien formada B tal que
  - $\vdash_{L+R} B$
  - $\vdash_{L+R} A \to (B \to C)$

  Pongamos $X = A \to (B \to C)$. Entonces

  1. $\{X\} \vdash_L B$ (hipótesis inductiva)
  2. $\{X\} \vdash_L B \to T$ (ejercicio 2.d)
  3. $\{X\} \vdash_L T$ (MP en 1 y 2)
  4. $\vdash_L X \to T$ (TD en 3)
  5. $\vdash_L X$ (premisa)
  6. $\vdash_L T$ (MP en 5 y 4)

Por ende, todo teorema de $L + R$ es teorema de L, i.e., la regla R es admisible.

Capítulo 3

Teorema de solidez

Notación. Denotamos por $\mathscr{F}$ el conjunto de frases bien formadas de L.

Notación. Denotamos el conjunto de valores de verdad $\Omega = \{V, F\}$.

Definición. Una *valoración* en L es una función $v : \mathscr{F} \to \Omega$ tal que

- $v(A) \neq v(\neg A)$
- $v(A \to B) = F$ si y sólo si $v(A) = V$ y $v(B) = F$.

Observación. Una valoración es una asignación de valores de verdad para las proposiciones atómicas.

Definición. Una *tautología* es una frase bien formada A tal que $v(A) = V$ para toda valoración.

Proposición. *(Teorema de solidez) Todo teorema de L es una tautología.*

Demostración. Por inducción estructural en la demostración de $\vdash_L A$:

- Si A es un axioma de L, entonces es una tautología (ejercicio).
- Si A se deduce por modus ponens, existe una frase bien formada B tal que
  - $\vdash_L B$
  - $\vdash_L B \to A$

  Inductivamente, B y $B \to A$ son tautologías. Sea $v : \mathscr{F} \to \Omega$ una valoración cualquiera. Entonces se tiene $v(B) = v(B \to A) = V$, lo cual implica que $v(A) = V$.

Ejercicio 6. Pruebe que todo axioma de L es una tautología.

Solución. Construyamos las tablas de verdad de L1, L2 y L3.

A	B	$A \to B$	$\neg B \to \neg A$	L1	L3
V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	V	V
F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V

A	B	C	$A \to (B \to C)$	$(A \to B) \to (A \to C)$	L2
V	V	V	V	V	V
V	V	F	F	F	V
V	F	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V
F	F	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V

Sea P un axioma de L y sea $v : \mathscr{F} \to \Omega$ una valoración.

- Si $P = B \to (A \to B)$, los valores de $v(A)$ y $v(B)$ determinan una única fila en la primera tabla de verdad. La entrada en la columna L1 es el valor de $v(P)$.
- Si $P = (A \to (B \to C)) \to ((A \to B) \to (A \to C))$, los valores de $v(A)$, $v(B)$ y $v(C)$ determinan una única fila en la segunda tabla de verdad. La entrada en la columna L2 es el valor de $v(P)$.
- Si $P = (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$, los valores de $v(A)$ y $v(B)$ determinan una única fila en la primera tabla de verdad. La entrada en la columna L3 es el valor de $v(P)$.

En todos los casos, $v(P) = V$. Por lo tanto, P es una tautología.

Capítulo 4

Teorema de adecuación

Preliminares. Para probar la conversa del teorema de solidez, necesitamos definir algunos conceptos nuevos.

Definición. Una *extensión* de L es un sistema formal $L^\star$ obtenido aumentando o cambiando los axiomas de L de tal manera que los teoremas de L sigan siendo teoremas de $L^\star$.

Definición. Una extensión de L es *propia* si tiene teoremas nuevos que no son demostrables en L.

Definición. Una extensión de L es *consistente* si no existe ninguna frase bien formada A tal que tanto A como $\neg A$ son teoremas de la extensión.

Proposición. *El sistema formal L es consistente.*

Demostración. Sea A un teorema de L. Por el teorema de solidez, A es una tautología. Entonces $\neg A$ es una contradicción, por ende no es una tautología. Por el teorema de solidez, $\neg A$ no es un teorema de L. $\square$

Proposición. *Una extensión L es consistente si y sólo si existe una frase bien formada que no es teorema de la extensión.*

Demostración. Sea $L^\star$ la extensión en cuestión y sea A una frase bien formada arbitraria.

- Si L es consistente, o bien A o bien $\neg A$ no es teorema de $L^\star$.
- Si L no es consistente, existe una frase bien formada B tal que
  1. $\vdash_{L^\star} B$ (inconsistencia)
  2. $\vdash_{L^\star} \neg B$ (inconsistencia)
  3. $\vdash_{L^\star} \neg B \to (B \to A)$ (TA a)
  4. $\vdash_{L^\star} B \to A$ (MP en 2 y 3)
  5. $\vdash_{L^\star} A$ (MP en 1 y 4)

Proposición. *Sea $L^\star$ una extensión consistente de L y sea A una frase bien formada que no es teorema de $L^\star$. Entonces $L^{\star\star}$, la extensión obtenida añadiendo $\neg A$ como axioma, es consistente.*

Demostración. Supongamos por el absurdo que $L^{\star\star}$ no es consistente. Entonces

1. $\vdash_{L^{\star\star}} A$ (proposición anterior)
2. $\{\neg A\} \vdash_{L^\star} A$ (equivalente)
3. $\vdash_{L^\star} \neg A \to A$ (TD en 2)
4. $\vdash_{L^\star} (\neg A \to A) \to A$ (TA b)
5. $\vdash_{L^\star} A$ (MP en 3 y 4)

Definición. Una extensión de L es *completa* si, para cualquier frase bien formada, o bien A o bien $\neg A$ es teorema de la extensión.

Observaciones.

- El sistema formal L no es completo.
- Toda extensión inconsistente de L es trivialmente completa.
- Toda extensión no trivial de un sistema completo es inconsistente.

Proposición. *Sea $L^\star$ una extensión consistente de L. Entonces existe una extensión J de $L^\star$ que es tanto consistente como completa.*

Demostración. Sea A_n una enumeración cualquiera de las frases bien formadas de L. Sea J_n la cadena de extensiones de $L^\star$ definida inductivamente por

$$J_0 = L^\star, \qquad J_{n+1} = \begin{cases} J_n & \text{si } A_n \text{ es teorema de } J_n \\ J_n + (\neg A_n) & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Finalmente, sea J la extensión de $L^\star$ cuyos axiomas son las frases bien formadas que son axiomas de alguna extensión intermedia J_n.

Por hipótesis, $J_0 = L^\star$ es consistente. Usando la proposición anterior, si la extensión intermedia J_n es consistente, entonces la extensión intermedia siguiente J_{n+1} también lo es. Por el principio de inducción, todas las extensiones intermedias J_n son consistentes.

Sea T un teorema de J. Existe una extensión intermedia J_n que contiene todos los axiomas usados en alguna demostración de T. Para todo $k \geq n$, la extensión J_k es más fuerte que J_n, por ende T es teorema de J_k. Como J_k es consistente, $\neg T$ no es teorema de J_k. Para todo $k \leq n$, la extensión J_k es más débil que J_n, por ende $\neg T$ no es teorema de J_k. Entonces $\neg T$ no es teorema de J. Por ende J es consistente.

Sea A_n cualquier frase bien formada. Por construcción, o bien A_n o bien $\neg A_n$ es teorema de J_{n+1}, por ende teorema de J. Por ende J es completo. □

Proposición. *Sea $L^\star$ una extensión consistente de L. Entonces existe una valoración $v : \mathscr{F} \to \Omega$ tal que $v(A) = V$ para toda frase bien formada A que es teorema de $L^\star$.*

Demostración. Sea J una extensión consistente y completa de $L^\star$. Sea $v : \mathscr{F} \to \Omega$ la función dada por

$$v(A) = \begin{cases} V & \text{si } \vdash_J A \\ F & \text{si } \vdash_J \neg A \end{cases}$$

Sean A, B frases bien formadas cualesquiera.

- Puesto que J es consistente, $v(A)$ y $v(\neg A)$ no son simultáneamente verdaderos.
- Puesto que J es completa, $v(A)$ y $v(\neg A)$ no son simultáneamente falsos.
- Si $v(A) = v(A \to B) = V$:
  1. $\vdash_J A$ (definición de v)
  2. $\vdash_J A \to B$ (definición de v)
  3. $\vdash_J B$ (MP en 1 y 2)

  Entonces, por definición, $v(B) = V$.
- Si $v(A) = F$:
  1. $\vdash_J \neg A$ (definición de v)
  2. $\vdash_J \neg A \to (\neg B \to \neg A)$ (L1)

3. $\vdash_J \neg B \to \neg A$ (MP en 1 y 2)
4. $\vdash_J (\neg B \to \neg A) \to (A \to B)$ (L3)
5. $\vdash_J A \to B$ (MP en 3 y 4)

Entonces, por definición, $v(A \to B) = V$.

- Si $v(B) = V$:

1. $\vdash_J B$ (definición de v)
2. $\vdash_J A \to B$ (TD en 1)

Entonces, por definición, $v(A \to B) = V$.

Por ende v es una valoración.

Proposición. *(Teorema de adecuación) Sea A una tautología de L. Entonces $\vdash_L A$.*

Demostración. Supongamos que A no es teorema de L. Sea $L^\star$ la extensión formada agregando el axioma $\neg A$ al sistema L. Por la proposición anterior, existe una valoración $v : \mathscr{F} \to \Omega$ tal que $v(\neg A) = V$, por ende $v(A) = F$, por ende A no es una tautología. ☐

Proposición. *(Gödel) No se puede demostrar la consistencia lógica de ZFC.*

Demostración. No se dará en este momento. Conforme los sistemas formales se vuelven más complicados, resulta más y más difícil probar su consistencia. ☐

Proposición. *El sistema formal L es decidible, i.e., existe un método efectivo para decidir si una frase bien formada de L es un teorema.*

Demostración. El método consiste en construir la tabla de verdad de la frase bien formada en cuestión. Una frase bien formada es un teorema si y sólo si es una tautología si y sólo si su tabla de verdad así lo demuestra. ☐

Ejercicio 7. Sea A una frase bien formada. Pruebe que el conjunto de teoremas de $L + A$ es diferente del conjunto de teoremas de L si y sólo si A no es un teorema de L.

Notación. Sea $L^\star$ una extensión de L. Denotaremos por $\mathscr{T}_{L^\star}$ el conjunto de teoremas de $L^\star$.

Solución. Por construcción, $A \in \mathscr{T}_{L+A}$ y $\mathscr{T}_L \subset \mathscr{T}_{L+A}$.

- Si $A \notin \mathscr{T}_L$, entonces $\mathscr{T}_L \subset \mathscr{T}_{L+A}$ es una inclusión propia.
- Si $A \in \mathscr{T}_L$ y $B \in \mathscr{T}_{L+A}$, existen demostraciones $C_1 \dots C_m$ de A en L y $D_1 \dots D_n$ de B en $L + A$. La concatenación $C_1 \dots C_m, D_1 \dots D_n$ es una demostración de B en L. Por ende, $\mathscr{T}_L = \mathscr{T}_{L+A}$.

Ejercicio 8. Sea A la frase bien formada $((\neg p_1 \to p_2) \to (p_1 \to \neg p_2))$. Pruebe que la inclusión $\mathscr{T}_L \subset \mathscr{T}_{L+A}$ es propia. ¿Es $L + A$ una extensión consistente de L? Justifique.

Solución. Construyamos la tabla de verdad de A y $\neg A$.

p_1	p_2	A	$\neg A$
V	V	F	V
V	F	V	F
F	V	V	F
F	F	V	F

- Como A no es tautología, A no es un teorema de L, entonces $L + A$ es una extensión propia de L.
- Como $\neg A$ no es tautología, $\neg A$ no es teorema de L, entonces $L + (\neg\neg A)$ es consistente. Como todo teorema de $L + A$ es teorema de $L + (\neg\neg A)$, entonces $L + A$ es consistente.

Ejercicio 9. Pruebe que, si B es una contradicción, entonces B no puede ser teorema de ninguna extensión consistente de L.

Solución. Como B es una contradicción, $\neg B$ es una tautología, entonces $\neg B$ es teorema de L, entonces $\neg B$ es teorema de toda extensión de L. Si $L^\star$ es una extensión de L en la cual B también es teorema, entonces $L^\star$ es inconsistente.

Ejercicio 10. Sea $L^\star$ la extensión de L formada añadiendo un cuarto esquema de axiomas:

- **L4:** $(\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$

Pruebe que $L^\star$ es una extensión inconsistente.

Solución. Construyamos la tabla de verdad de L4.

A	B	L4
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	V

Sean A, B tautologías. La frase bien formada $P = (\neg A \to B) \to (A \to \neg B)$ es un axioma de $L^\star$. Sin embargo, como se puede ver en la primera fila de la tabla de verdad, P es una contradicción. Por ende $L^\star$ no es consistente.

Ejercicio 11. Sea J una extensión consistente y completa de L, y sea A una frase bien formada. Muestre que $J + A$ es consistente si y sólo si A es teorema de J.

Solución. O bien A o bien $\neg A$ es teorema de J, pero no las dos a la vez.

- Si A es teorema de J, entonces $J + A$ tiene los mismos teoremas que J, por ende es consistente.
- Si $\neg A$ es teorema de J, entonces $J + A$ es inconsistente por construcción.