Lenguajes de Primer Orden

Eduardo León (梁遠光)

Abril-Mayo 2019

Capítulo 1

Definiciones básicas

Definición. Un *lenguaje de primer orden* $\mathscr{L}$ consta de

1. **Alfabeto:** Hay seis tipos de símbolos.
   - *Variables:* $x_0, x_1, x_2 \dots$
   - *Constantes:* todas o algunas de $a_0, a_1, a_2 \dots$
   - *Funciones:* todas o algunas de $f_0^1, f_1^1 \dots f_0^2, f_1^2 \dots f_0^3, f_1^3 \dots$
   - *Predicados:* todas o algunas de $A_0^1, A_1^1 \dots A_0^2, A_1^2 \dots A_0^3, A_1^3 \dots$
   - *Conectores:* $\neg$ (negación) y $\rightarrow$ (implicación)
   - *Cuantificadores:* $\forall$ (cuantificador universal)
   - *Puntuación:* paréntesis de apertura y cierre, comas
2. **Términos:** Hay tres formas de construir términos.
   - Toda variable x_i es un término.
   - Toda constante a_i es un término.
   - Si f_i^n es una función y $t_1 \dots t_n$ son términos, entonces $f_i^n(t_1 \dots t_n)$ es un término.
3. **Frases bien formadas:** Hay cuatro formas de construir frases bien formadas.
   - Si A_i^n es un predicado y $t_1 \dots t_n$ son términos, entonces $A_i^n(t_1 \dots t_n)$ es una frase bien formada.
   - Si A es una frase bien formada, entonces $(\neg A)$ es una frase bien formada.
   - Si A, B son frases bien formadas, entonces $(A \rightarrow B)$ es una frase bien formada.
   - Si x_i es una variable y A es una frase bien formada, entonces $(\forall x_i)A$ es una frase bien formada.
4. **Abreviaciones:** (Azúcar sintáctico)
   - Si A, B son frases bien formadas, entonces $A \wedge B = \neg(A \rightarrow \neg B)$.
   - Si A, B son frases bien formadas, entonces $A \vee B = \neg A \rightarrow B$.
   - Si x_i es una variable y A es una frase bien formada, entonces $(\exists x_i)A = \neg(\forall x_i)(\neg A)$.

Definición. Sea A una frase bien formada y sea $(\forall x_i)B$ una subfrase de A. Decimos que

- La subfrase B es el *ámbito* de $(\forall x_i)$ en A.
- Las ocurrencias de x_i en $(\forall x_i)B$ son *restringidas* en A.
- Las ocurrencias no restringidas de x_i en A son *libres* en A.
- Las ocurrencias de x_i libres en B son *capturadas* por $(\forall x_i)$ en A.

Motivación. Nuestro objetivo a largo plazo es construir un sistema deductivo basado en el lenguaje $\mathscr{L}$ y demostrar metateoremas análogos a los que demostramos para L. Sin embargo, aún no estamos listos para enunciar los axiomas y las reglas de deducción de este sistema.

En el sistema deductivo que queremos construir, la operación sintáctica más fundamental será sustituir todas las ocurrencias libres de una variable x_i en una frase A con un término t. En principio, nada impide que hagamos tales sustituciones indiscriminadamente. Sin embargo, para que estas sustituciones tengan el sigificado que queremos, necesitamos que se cumpla la siguiente condición.

Definición. El término t es *libre* para x_i en la frase A si x_i no ocurre [libre en A] dentro del ámbito de un cuantificador $(\forall x_j)$, donde x_j es una variable que ocurre en t.

Observación. Esta definición es lingüísticamente un desastre. Expresemos la definición como un algoritmo para facilitar su comprensión.

Algoritmo.

1. Identificar las variables x_j que ocurren en t.
2. Para cada x_j, identificar las ocurrencias de $(\forall x_j)$ en A.
3. Para cada $(\forall x_j)$, identificar las ocurrencias de x_i en el ámbito de $(\forall x_j)$.
4. t es libre para x_i en A si y sólo si ninguna ocurrencia identificada de x_i es libre en A.

Observación. Toda variable es libre para sí misma en cualquier frase.

Ejercicio 4. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden sin funciones. Describa los términos de $\mathscr{L}$.

Solución. Los términos de $\mathscr{L}$ son las variables y las constantes.

Ejercicio 5. Sea $\mathscr{L}$ un lenguaje de primer orden con símbolos f_1^1, A_i^n. Describa los términos de $\mathscr{L}$.

Solución. Un término de $\mathscr{L}$ es la aplicación de f_1^1 un número natural de veces a alguna variable x_i.

Ejercicio 6. ¿Cuáles de las siguientes son frases bien formadas?

(a) $A_1^2(f_1^1(x_1), x_1)$
Solución. Sí.

(b) $f_1^3(x_1, x_3, x_4)$
Solución. No, es un término.

(c) $A_1^1(x_2) \to A_1^3(x_3, a_1)$
Solución. No, A_1^3 debe tomar 3 argumentos.

(d) $\neg(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$
Solución. Sí.

(e) $(\forall x_2)\, A_1^1(x_1) \to \neg A_1^1(x_2)$
Solución. Sí.

(f) $A_1^3(f_2^3(x_1, x_2, x_3))$
Solución. No, A_1^3 debe tomar 3 argumentos.

(g) $\neg A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_2)$
Solución. Sí.

(h) $(\forall x_1)\, A_1^3(a_1, a_2, f_1^1(a_3))$
Solución. Sí.

Ejercicio 7. ¿Cuáles ocurrencias de x_1 en las siguientes frases son libres y cuáles son restringidas?

(a) $(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, a_1)$
Solución. La única ocurrencia es libre.

(b) $A_1^1(x_3) \to \neg(\forall x_1)(\forall x_2)\, A_1^3(x_1, x_2, a_1)$
Solución. La única ocurrencia es restringida.

(c) $(\forall x_1)\, A_1^1(x_1) \to (\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2)$
Solución. Las ocurr. en el antecedente son restringidas. La ocurr. en el consecuente es libre.

(d) $(\forall x_2)\, A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to (\forall x_1)\, A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2))$
Solución. Las ocurr. en el antecedente son libres. Las ocurr. en el consecuente son restringidas.

Notación. Sean t, s dos términos y sea A una frase bien formada.

- Denotaremos por $t[x_i \mapsto s]$ el resultado de sustituir las ocurrencias de x_i en t con s.
- Denotaremos por $A[x_i \mapsto s]$ el resultado de sustituir las ocurrencias *libres* de x_i en A con s.

Ejercicio 8. Sea A una frase bien formada y sea x_j una variable que no ocurre libre en A. Pruebe que, si x_j es libre para x_i en A, entonces x_i es libre para x_j en $A[x_i \mapsto x_j]$.

Solución. Abreviaremos $[x_i \mapsto x_j]$ como un apóstrofe. Por inducción estructural en A:

- Si $A = A_i^n(t_1 \dots t_n)$:
  - $A' = A_i^n(t_1' \dots t_n')$ no contiene cuantificadores.
  - Cualquier término es libre para cualquier variable en A'.
- Si $A = \neg B$:
  - x_j no ocurre libre en B.
  - x_j es libre para x_i en B.
  - x_i es libre para x_j en B', por hipótesis inductiva.
  - x_i es libre para x_j en $A' = \neg B'$.
- Si $A = B \to C$:
  - x_j no ocurre libre ni en B ni en C.
  - x_j es libre para x_i tanto en B como en C.
  - x_i es libre para x_j tanto en B' como en C', por hipótesis inductiva.
  - x_i es libre para x_j en $A' = B' \to C'$.
- Si $A = (\forall x_i)B$:
  - x_i no ocurre en B libre en A, por la presencia de $(\forall x_i)$.
  - x_j no ocurre en B libre en A, por hipótesis.
  - Cualquier término es libre para x_j en $A' = A$.
- Si $A = (\forall x_j)B$ con $j \neq i$:
  - x_i no ocurre en B libre en A, porque x_j es libre para x_i en A.
  - x_j no ocurre en B libre en A, por la presencia de $(\forall x_j)$.
  - Cualquier término es libre para x_j en $A' = A$.

- Si $A = (\forall x_k)B$, con $k \neq i, j$:
  - x_j no ocurre libre en B, porque $k \neq j$.
  - x_j es libre para x_i en B, porque $k \neq i$.
  - x_i es libre para x_j en B', por hipótesis inductiva.
  - x_i es libre para x_j en $A' = (\forall x_k)B'$, porque $k \neq i, j$.

Ejercicio 9. En cada caso, sea A la frase dada y sea $t = f_1^2(x_1, x_3)$. Escriba la frase $A[x_1 \mapsto t]$ y decida si el término t es libre para x_1 en A.

(a) $A = (\forall x_2)\, A_1^2(x_2, f_1^2(x_1, x_2)) \to A_1^1(x_1)$

Solución.

- $A' = (\forall x_2)\, A_1^2(x_2, f_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)) \to A_1^1(f_1^2(x_1, x_3))$
- t es libre para x_1 en A, porque no hay cuantificadores $(\forall x_3)$ en A.

(b) $A = (\forall x_1)(\forall x_3)\,(A_1^1(x_3) \to A_1^1(x_1))$

Solución.

- $A' = A$, porque x_1 no aparece libre en A.
- t es libre para x_1 en A, porque x_1 no aparece libre en A.

(c) $A = (\forall x_2)\, A_1^1(f_1^1(x_2)) \to (\forall x_3)\, A_1^3(x_1, x_2, x_3)$

Solución.

- $A' = (\forall x_2)\, A_1^1(f_1^1(x_2)) \to (\forall x_3)\, A_1^3(f_1^2(x_1, x_3), x_2, x_3)$
- t no es libre para x_1 en A, porque x_1 aparece libre en A en el ámbito de $(\forall x_3)$.

(d) $A = (\forall x_2)\,(A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to (\forall x_3)\, A_2^2(x_3, f_2^2(x_1, x_2)))$

Solución.

- $A' = (\forall x_2)\,(A_1^2(f_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2), x_1) \to (\forall x_3)\, A_2^2(x_3, f_2^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)))$
- t no es libre para x_1 en A, porque x_1 aparece libre en A en el ámbito de $(\forall x_3)$.

Capítulo 2

Interpretaciones

Definición. Una *interpretación* I de $\mathscr{L}$ consta de

1. Un conjunto no vacío D_I, llamado el *dominio* de I.
2. Un elemento $\bar{a}_i \in D_I$, para cada constante a_i de $\mathscr{L}$.
3. Una función $\bar{f}_i^n : D_I^n \to D_I$, para cada símbolo de función f_i^n de $\mathscr{L}$.
4. Una relación $\bar{A}_i^n \subset D_I^n$, para cada símbolo de predicado A_i^n de $\mathscr{L}$.

Observaciones.

- En un lenguaje de primer orden, las variables x_i son interpretadas como elementos de D_I.
- En un lenguaje de *segundo* orden, existe un segundo tipo de variables p_i^n que son interpretadas como relaciones $R \subset D_I^n$.

Ejemplo. Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de primer orden que contiene los símbolos a_1, f_1^1, f_1^2, f_2^3, A_1^2. Investiguemos los posibles significados de la frase bien formada $A = (\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\, A_1^2(f_1^2(x_1, x_3), x_2)$.

Sea N la interpretación de $\mathscr{L}$ en el dominio $D_N = \mathbb{N}$ en la cual $\bar{a}_1$ es cero, $\bar{f}_1^1$ es la función sucesor, $\bar{f}_1^2$ es la adición, $\bar{f}_2^2$ es la multiplicación y $\bar{A}_1^2$ es la relación de igualdad. La frase A es falsa en N.

Seas N' la interpretación de $\mathscr{L}$ obtenida a partir de N, redefiniendo $\bar{A}_1^2$ como la relación "mayor que". La frase A es verdadera en N, pues, tomando $x_3 = x_2 + 1$, garantizamos que $x_1 + x_3 > x_2$.

Observaciones.

- Los términos y frases bien formadas de $\mathscr{L}$ carecen de significado intrínseco.
- Una interpretación de $\mathscr{L}$ *da significado* a los términos y frases bien formadas de $\mathscr{L}$.
- Una misma frase puede ser verdadera en una interpretación y falsa en otra interpretación.

Ejemplo. El principio del buen ordenamiento dice que

> "Todo conjunto no vacío de números naturales tiene un elemento mínimo."

Cabe preguntarse si el principio del buen ordenamiento se puede expresar en un lenguaje formal con la interpretación N' del ejemplo anterior. Esto depende del lenguaje:

- El principio del buen ordenamiento no se puede expresar en $\mathscr{L}$.
- El principio del buen ordenamiento se puede expresar como la frase de segundo orden

$$(\forall p_1^1)\,[(\exists x_1)\, p_1^1(x_1) \to (\exists x_1)\,[p_1^1(x_1) \wedge (\forall x_2)\,[p_1^1(x_2) \to A_2^2(f_1^1(x_2), x_1)]]]$$

Ejercicio 11. Sea $\mathscr{L}$ el lenguaje de primer orden con símbolos a_1, f_1^2, A_2^2. Sea A la frase bien formada

$$(\forall x_1)(\forall x_2)\,(A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), a_1) \to A_2^2(x_1, x_2))$$

Considere la interpretación I de $\mathscr{L}$ en el dominio $D_I = \mathbb{Z}$ en la cual $\bar{a}_1$ es cero, $\bar{f}_1^2$ es la sustracción, $\bar{A}_2^2$ es la relación "menor que". Escriba el significado de A en I. ¿Es este significado verdadero o falso? Exhiba otra interpretación de $\mathscr{L}$ en la cual el significado de A tiene el valor de verdad opuesto.

Solución. El significado de A en I es "para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, si $x_1 - x_2 < 0$, entonces $x_1 < x_2$", y es cierto. Si invertimos el orden de los argumentos de $\bar{f}_1^2$, entonces el significado de A es falso.

Ejercicio 12. ¿Existe alguna interpretación en la cual la frase bien formada $(\forall x_1)\,(A_1^1(x_1) \to A_1^1(f_1^1(x_1)))$ tenga un significado falso? Justifique.

Solución. Sí, considere la interpretación Ω en el dominio $D_\Omega = \{V, F\}$ en la cual $\bar{A}_1^1(p) = p$ y $\bar{f}_1^1(p) = \neg p$.

Capítulo 3

Valoraciones y satisfacción

Notación. Denotaremos por $\mathscr{T}$ el conjunto de términos de $\mathscr{L}$.

Definición. Una *valoración* en una interpretación I es una función $v : \mathscr{T} \to D_I$ tal que

- $v(a_i) = \bar{a}_i$, para toda constante a_i de $\mathscr{L}$.
- $v(f_i^n(t_1 \dots t_n)) = \bar{f}_i^n(v_1 \dots v_n)$ con $v_k = v(t_k)$, para toda función f_i^n de $\mathscr{L}$.

Observaciones. Supongamos que queremos construir una valoración $v : \mathscr{T} \to D_I$.

- Los valores de $v(x_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ pueden ser escogidos arbitrariamente.
- Los valores de $v(x_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ determinan completamente la valoración v.

Definición. Dos valoraciones $v, w : \mathscr{T} \to D_I$ son *i-equivalentes* si $v(x_j) = w(x_j)$ para todo $j \neq i$.

Notación. Sea $v : \mathscr{T} \to D_I$ una valoración y sea $b \in D_I$ un elemento cualquiera.

- Denotaremos por $[v]_i$ la clase de i-equivalencia de v.
- Denotaremos por $v_b \in [v]_i$ la valoración i-equivalente tal que $v_b(x_i) = b$.

Observación. Todo $w \in [v]_i$ es de la forma $v_b \in [v]_i$. Específicamente, tomemos $b = w(x_i)$.

Definición. Sea $v : \mathscr{T} \to D_I$ una valoración. Por inducción estructural en las frases de $\mathscr{L}$:

- Decimos que v *satisface* $A_i^n(t_1 \dots t_n)$, si $\bar{A}_i^n(v_1 \dots v_n)$ con $v_k = v(x_k)$.
- Decimos que v *satisface* $\neg A$, si v no satisface A.
- Decimos que v *satisface* $A \to B$, si v no satisface A o sí satisface B.
- Decimos que v *satisface* $(\forall x_i)A$, si todo $w \in [v]_i$ satisface A.

Observaciones. Nuestro objetivo es definir que significan las frases de $\mathscr{L}$ en una valoración específica v, es decir, una vez que hemos decidido que cada variable x_i significa $v(x_i)$.

- El primer ítem de esta definición simplemente exige que la noción de satisfacción sea consistente con la interpretación que estamos dando a $\mathscr{L}$.
- Los dos siguientes ítems son análogos a la definición de valoración en L. En particular, si fijamos una frase bien formada A, o bien v satisface A o bien v satisface $\neg A$.
- El último ítem requiere mayor explicación. Nuestra intención es que $(\forall x_i)A$ signifique “para todo x_i, se cumple A”. En otras palabras, sin importar cómo (re)definamos el valor de x_i, el significado de A debe ser cierto. Éste es precisamente el efecto de considerar si todo $w \in [v]_i$ satisface A.

Ejercicio 14. En la interpretación N dada en el capítulo anterior, encuentre valoraciones que satisfacen y no satisfacen cada una de las siguientes frases bien formadas.

Observación. Recordemos que $D_N = \mathbb{N}$ y los símbolos se interpretan de la siguiente manera: $\bar{a}_1$ es cero, $\bar{f}_1^2$ es la adición, $\bar{f}_2^2$ es la multiplicación y $\bar{A}_1^2$ es la relación de igualdad.

(a) $A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_1^2(x_2, x_3))$

Solución. La valoración $v(x_i) = 0$ satisface esta frase y la valoración $v(x_i) = 1$ no la satisface.

(b) $A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$

Solución. La valoración $v(x_i) = 0$ satisface esta frase y la valoración $v(x_i) = 1$ no la satisface.

(c) $\neg A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), f_2^2(x_2, x_3))$

Solución. La valoración $v(x_i) = i$ satisface esta frase y la valoración $v(x_i) = 0$ no la satisface.

(d) $(\forall x_1)\, A_1^2(f_2^2(x_1, x_2), x_3)$

Solución. La valoración $v(x_i) = 0$ satisface esta frase y la valoración $v(x_i) = 1$ no la satisface.

(e) $(\forall x_1)\, A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1) \to A_1^2(x_1, x_2)$

Solución. El antecedente es falso en N, por ende la implicación es verdadera en N.

Ejercicio 15. En la interpretación I dada en el capítulo anterior, encuentre valoraciones que satisfacen y no satisfacen cada una de las siguientes frases bien formadas.

Observación. Recordemos que $D_I = \mathbb{Z}$ y los símbolos se interpretan de la siguiente manera: $\bar{a}_1$ es cero, $\bar{f}_1^2$ es la sustracción y $\bar{A}_2^2$ es la relación "menor que".

(a) $A_2^2(x_1, a_1)$

Solución. La valoración $v(x_i) = -1$ ssatisface esta frase y la valoración $v(x_i) = 1$ no la satisface.

(b) $A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1) \to A_2^2(a_1, f_1^2(x_1, x_2))$

Solución. La valoración $v(x_i) = -i$ satisface esta frase y la valoración $v(x_i) = i$ no la satisface.

(c) $\neg A_2^2(x_1, f_1^2(x_1, f_1^2(x_1, x_2)))$

Solución. La valoración $v(x_i) = -i$ satisface la frase y la valoración $v(x_i) = i$ no la satisface.

(d) $(\forall x_1)\, A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$

Solución. Esta frase es falsa en I.

(e) $(\forall x_1)\, A_2^2(f_1^2(x_1, a_1), x_1) \to A_2^2(x_1, x_2)$

Solución. El antecedente es falso en I, por ende la implicación es verdadera en I.

Capítulo 4

Lema de sustitución

Preliminares. En este capítulo demostraremos dos proposiciones de la siguiente forma:

> Sean A, A' frases bien formadas "parecidas" y sean $v, v' : \mathscr{T} \to D_I$ valoraciones "análogas" con respecto a las variables libres en A, A'. Entonces v satisface A si y sólo si v' satisface A'.

Sabemos por experiencia que una proposición de este tipo se demuestra por inducción estructural en la frase A. Sin embargo, podemos tener dificultades si no escogemos la hipótesis inductiva con cuidado. Para ilustrar la situación con un ejemplo, supongamos que nuestra hipótesis inductiva es

> Sean B, B' subfrases "parecidas" de A, A', respectivamente. Además, supongamos que v, v' son "análogas" respecto a las variables libres en B, B'. Entonces v sat. B si y sólo v' sat. B.

Esta hipótesis inductiva es suficiente para demostrar los casos $A = \neg B$ y $A = B \to C$. Sin embargo, no es suficiente para demostrar el caso $A = (\forall x_i)B$. El problema es que v satisface A si y sólo si todo $w \in [v]_i$ satisface B, más las versiones primadas. Nuestra hipótesis inductiva no dice nada sobre w, w'.

La hipótesis inductiva correcta es

> Sean B, B' subfrases "parecidas" de A, A', respectivamente. Sean $w, w' : \mathscr{T} \to D_I$ valoraciones "análogas" respecto a las variables libres en B, B'. Entonces w sat. B si y sólo si w' sat. B.

Incluso si tenemos la hipótesis inductiva correcta, podemos tener problemas si no sabemos utilizarla de la forma correcta. El problema es que, aunque x_i no ocurre libre en $A = (\forall x_i)B$, puede ocurrir libre en B. No podemos esperar que dos valoraciones arbitrarias $w \in [v]_i$ y $w' \in [v']_i$ sean "análogas" respecto a x_i.

Para superar este obstáculo, debemos tomar las valoraciones $v_b \in [v]_i$ y $v'_b \in [v']_i$ correspondientes a un mismo elemento $b \in D_I$. Entonces v_b, v'_b son "análogas" respecto a x_i, más las variables que ocurren libres en A, A'. Por supuesto, éstas son todas las variables que pueden ocurrir libres en B, B'.

Motivación. Una vez fijada una interpretación, es de esperar que el significado de un término o una frase bien formada sólo dependa de las variables que ocurren (libres) en él.

Definición. Dos valoraciones $v, w : \mathscr{T} \to D_I$ *coinciden* en la variable x_i si $v(x_i) = w(x_i)$.

Proposición. *(Lema de coincidencia) Si dos valoraciones $v, w : \mathscr{T} \to D_I$ coinciden en...*

- *Las variables que ocurren en un término t, entonces $v(t) = w(t)$.*
- *Las variables que ocurren libres en una frase A, entonces v sat. A si y sólo si w sat. A.*

Demostración. Por inducción estructural en el término t:

- Si $t = x_i$:
    - $v(x_i) = w(x_i)$, por hipótesis de este lema.

- Si $t = a_i$:
  - $v(a_i) = w(a_i) = \bar{a}_i$, por definición de valoración.
- Si $t = f_i^n(t_1 \ldots t_n)$:
  - $v(t_k) = w(t_k) = v_k$ para cada $k = 1 \ldots n$, por hipótesis inductiva.
  - $v(t) = w(t) = \bar{f}_i^n(v_1 \ldots v_k)$, por definición de valoración.

Demostración. Por inducción estructural en la frase A:

- Si $A = A_i^n(t_1 \ldots t_n)$:
  - $v(t_k) = w(t_k) = v_k$ para cada $k = 1 \ldots n$, por hipótesis inductiva.
  - v satisface $A \iff w$ satisface $A \iff \bar{A}_i^n(v_1 \ldots v_k)$ se cumple.
- Si $A = \neg B$:
  - v satisface $B \iff w$ satisface B, por hipótesis inductiva.
  - v satisface $A \iff w$ satisface A.
- Si $A = B \to C$:
  - v satisface $B \iff w$ satisface B, por hipótesis inductiva.
  - v satisface $C \iff w$ satisface C, por hipótesis inductiva.
  - v satisface $A \iff w$ satisface A.
- Si $A = (\forall x_i)B$:
  - v_b satisface $B \iff w_b$ satisface B, para todo $b \in D_I$, por hipótesis inductiva.
  - v satisface $A \iff w$ satisface A.

Motivación. En un sistema deductivo formal, como el que pretendemos construir sobre la sintaxis de $\mathscr{L}$, las variables existen para ser sustituidas con otros términos. Naturalmente, cuando sustituimos $[x_i \mapsto t]$, la intención es que el nuevo significado de x_i sea igual al significado antiguo de t. En este caso decimos que la operación de sustitución es *bien comportada.*

Recordemos que nuestra definición de "t es libre para x_i en A" es "lingüísticamente un desastre". ¿Por que nos hemos autoflagelado con esta monstruosidad? La respuesta, justificada en el siguiente lema, es que la condición "t es libre para x_i en A" garantiza que la sustitución $A[x_i \mapsto t]$ sea bien comportada.

Proposición. *(Lema de sustitución) Sean s un término, $v : \mathscr{T}_I \to D_I$ una valoración cualquiera, $w \in [v]_i$ tal que $w(x_i) = v(s)$, y denotemos la sustitución $[x_i \mapsto s]$ por un apóstrofe.*

- *Si t es cualquier término, entonces $w(t) = v(t')$.*
- *Si s es libre para x_i en una frase A, entonces w satisface A si y sólo si v satisface A'.*

Demostración. Por inducción estructural en el término t:

- Si $t = x_i$:
  - $w(x_i) = v(s)$, por hipótesis de este lema.
- Si $t = x_j$ con $j \neq i$:
  - $w(x_j) = v(x_j)$, por i-equivalencia.
- Si $t = a_j$:
  - $w(a_j) = v(a_j) = \bar{a}_j$, por definición de valoración.

- Si $t = f_i^n(t_1 \dots t_n)$:
  - $w(t_k) = v(t'_k) = v_k$ para $k = 1 \dots n$, por hipótesis inductiva.
  - $w(t) = v(t') = \bar{f}_i^n(v_1 \dots v_n)$, por definición de valoración.

Demostración. Por inducción estructural en la frase A:

- Si $A = A_i^n(t_1 \dots t_n)$:
  - $w(t_k) = v(t'_k) = v_k$ para $k = 1 \dots n$, por hipótesis inductiva.
  - w satisface $A \iff v$ satisface $A' \iff \bar{A}_i^n(v_1 \dots v_n)$ se cumple.
- Si $A = \neg B$:
  - w satisface $B \iff v$ satisface B', por hipótesis inductiva.
  - w satisface $A \iff v$ satisface A'.
- Si $A = B \to C$:
  - w satisface $B \iff v$ satisface B', por hipótesis inductiva.
  - w satisface $C \iff v$ satisface C', por hipótesis inductiva.
  - w satisface $A \iff v$ satisface A'.
- Si $A = (\forall x_i)B$:
  - $A' = A$, porque x_i no aparece libre en A.
  - $w_b = v_b \in [w]_i = [v]_i$, porque $w \in [v]_i$.
  - v_b satisface $B \iff v_b$ satisface B, para todo $b \in D_I$, trivialmente.
  - w satisface $A \iff v$ satisface A.
- Si $A = (\forall x_j)B$ con $j \neq i$:
  - $A' = (\forall x_j)B'$, porque $(\forall x_j)$ no captura las ocurrencias de x_i libres en B.
  - $w_b \in [w]_j$ y $v_b \in [w]_j$ son i-equivalentes.
  - t es libre para x_i en A, por ende tenemos dos posibilidades:
    - Si x_i no ocurre libre en B:
      - $B' = B$, porque x_i no ocurre libre en B.
      - w_b satisface $B \iff v_b$ satisface B, por el lema de coincidencia.
    - Si x_j no ocurre en t:
      - $w_b(x_i) = w(x_i)$, por j-equivalencia.
      - $w(x_i) = v(t)$, por hipótesis de este lema.
      - $v(t) = v_b(t)$, por el lema de coincidencia.
      - w_b satisface $B \iff v_b$ satisface B', por hipótesis inductiva.
  - w_b satisface $B \iff v_b$ satisface B', para todo $b \in D_I$, en ambos casos.
  - w satisface $A \iff v$ satisface A'.

Reflexión. El lema de sustitución es, de lejos, el resultado técnicamente más difícil que hemos visto hasta este momento. Para siquiera enunciarlo, hemos definido el concepto aparentemente artificial de "t es libre para x_i en A". Para demostrarlo, hemos reexaminado cómo se formula y utiliza una hipótesis inductiva.

Sin embargo, no podemos dejar de enfatizar la importancia del lema de sustitución. Sin este lema, una sustitución es una mera manipulación sintáctica sin sentido. Es sólo en virtud de este lema que se justifica nuestra intención de utilizar la operación de sustitución como ingrediente fundamental de la definición del cálculo de predicados de primer orden.

Si usted ha comprendido a cabilidad la demostración del lema de deducción, ¡enhorabuena! Relájese y disfrute la cosecha de resultados triviales en los dos últimos capítulos.

Ejercicio 23. Sea A una frase bien formada y sea t un término que es libre para x_i en A. Muestre que, si $v : \mathscr{T} \to D_I$ es una valoración tal que $v(x_i) = v(t)$, entonces v satisface A si y sólo si satisface $A[x_i \mapsto t]$.

Solución. Es un caso particular del lema de sustitución para $w = v$.

Capítulo 5

Veracidad

Preliminares. En este capítulo, sean A, B frases bien formadas y sea I una interpretación de $\mathscr{L}$.

Definición.

- Decimos que A es *verdadera* en I si toda valoración en I satisface A.
- Decimos que A es *falsa* en I si ninguna valoración en I satisface A.

Observaciones.

- A puede no ser ni verdadera ni falsa en I.
- A no puede ser simultáneamente verdadera y falsa en I.
- A es falsa en $I \iff \neg A$ es verdadera en I.
- $A \to B$ es falsa en $I \iff A$ es verdadera y B es falsa en I.

Notación. Escribiremos $I \vDash$ para decir que A es verdadera en I.

Observación. No debemos confundir

- $\Gamma \vdash A$, un enunciado sobre la *demostrabilidad* de A.
- $I \vDash A$, un enunciado sobre la *veracidad* de A.

Proposición. *Si $I \vDash A$ e $I \vDash A \to B$, entonces $I \vDash B$.*

Demostración. Sea $v : \mathscr{T} \to D_I$ una valoración en I. Entonces v satisface tanto A como $A \to B$. Por ende v satisface B. Generalizando la valoración, B es verdadera en I. $\square$

Proposición. *Para toda variable x_i, tenemos $I \vDash A$ si y sólo si $I \vDash (\forall x_i)A$.*

Demostración. Sea $\mathscr{V}$ el conjunto de todas las valoraciones en I. Notemos que $[v]_i \subset \mathscr{V}$, para todo $v \in \mathscr{V}$. Por ende, si todo $v \in \mathscr{V}$ satisface A, entonces todo $v \in \mathscr{V}$ satisface $(\forall x_i)A$.

Conversamente, si $v \in \mathscr{V}$ satisface $(\forall x_i)A$, entonces todo $w \in [v]_i$ satisface A. En particular, $v \in [v]_i$ de manera tautológica. Por ende, v también satisface A. $\square$

Corolario. *Sean $y_1 \dots y_n$ variables de $\mathscr{L}$. Entonces $I \vDash A$ si y sólo si $I \vDash (\forall y_1) \dots (\forall y_n)A$.*

Demostración. Aplicar la proposición anterior n veces. $\square$

Proposición. *Una valoración $v : \mathscr{T} \to D_I$ satisface $(\exists x_i)A$ si y sólo si existe $w \in [v]_i$ que satisface A.*

Demostración. Por una cadena de silogismos: v satisface $(\exists x_i)A$, si y sólo si v no satisface $(\forall x_i)(\neg A)$, si y sólo si no todo $w \in [v]_i$ satisface $\neg A$, si y sólo si algún $w \in [v]_i$ satisface A. $\square$

Definición. Decimos que A es *cerrada* si ninguna variable ocurre libre en A.

Proposición. *Si A es cerrada, entonces o bien $I \vDash A$ o bien $I \vDash \neg A$.*

Demostración. Todo par de valoraciones $v, w : \mathscr{T} \to D_I$ coincide en las variables libres de A, i.e., ninguna. Por el lema de coincidencia, v satisface A si y sólo si w satisface A. $\square$

Ejercicio 16. ¿Cuales de las siguientes frases cerradas son verdaderas o falsas en la intepretación N dada en el capítulo 2?

Observación. Recordemos que $D_N = \mathbb{N}$ y los símbolos se interpretan de la siguiente manera: $\bar{a}_1$ es cero, $\bar{f}_1^2$ es la adición, $\bar{f}_2^2$ es la multiplicación y $\bar{A}_1^2$ es la relación de igualdad.

(a) $(\forall x_1)\, A_1^2(f_2^2(x_1, a_1), x_1)$

Solución. Para todo $x_1 \in \mathbb{N}$, son iguales $0x_1$ y x_1. Falso.

(b) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, [A_1^2(f_1^2(x_1, a_1), x_2) \to A_1^2(f_1^2(x_2, a_1), x_1)]$

Solución. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, si $x_1 + 0 = x_2$ entonces $x_2 + 0 = x_1$. Verdadero.

(c) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\exists x_3)\, A_1^2(f_1^2(x_1, x_2), x_3)$

Solución. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{N}$, existe $x_3 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 + x_2 = x_3$. Verdadero.

(d) $(\exists x_1)\, A_1^2(f_1^2(x_1, x_1), f_2^2(x_1, x_1))$

Solución. Existe $x_1 \in \mathbb{N}$ tal que $2x_1 = x_1^2$. Verdadero.

Ejercicio 17. ¿Cuales de las siguientes frases cerradas son verdaderas o falsas en la intepretación I dada en el capítulo 2?

Observación. Recordemos que $D_I = \mathbb{Z}$ y los símbolos se interpretan de la siguiente manera: $\bar{a}_1$ es cero, $\bar{f}_1^2$ es la sustracción y $\bar{A}_2^2$ es la relación "menor que".

(a) $(\forall x_1)\, A_2^2(f_1^2(a_1, x_1), a_1)$

Solución. Para todo $x_1 \in \mathbb{Z}$, la diferencia $0 - x_1$ es menor que 0. Falso.

(b) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, \neg A_2^2(f_1^2(x_1, x_2), x_1)$

Solución. Para todo $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$, la diferencia $x_1 - x_2$ es no menor que x_1. Falso

(c) $(\forall x_1)(\forall x_2)(\forall x_3)\, [A_2^2(x_1, x_2) \to A_2^2(f_1^2(x_1, x_3), f_1^2(x_2, x_3))]$

Solución. Para todo $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{Z}$, si $x_1 < x_2$ entonces $x_1 - x_3 < x_2 - x_3$. Verdadero.

(d) $(\forall x_1)(\exists x_2)\, A_2^2(x_1, f_1^2(f_1(x_1, x_2), x_2))$

Solución. Para todo $x_1 \in \mathbb{N}$, existe $x_2 \in \mathbb{N}$ tal que $x_1 < (x_1 - x_2) - x_2$. Verdadero.

Ejercicio 18. Pruebe que $A \to B$ es falsa en I si y sólo si A es verdadera y B es falsa en I.

Solución. Por una cadena de silogismos: $A \to B$ es falsa en I, si y sólo si ninguna valoración en I satisface $A \to B$, si y sólo si toda valoración en I satisface A pero ninguna satisface B, si y sólo si A es verdadera y B es falsa en I.

Capítulo 6

Tautologías y validez lógica

Notación. Denotaremos por L y $\mathscr{L}$ sus propios conjuntos de frases bien formadas.

Definición. Una *sustitución de frases* es una función $\sigma : L \to \mathscr{L}$ tal que

- $\sigma(\neg A) = \neg\sigma(A)$
- $\sigma(A \to B) = \sigma(A) \to \sigma(B)$

Observaciones. Supongamos que queremos construir una sustitución de frases $\sigma : L \to \mathscr{L}$.

- Las frases $\sigma(p_i)$ para cada $i \in \mathbb{N}$ pueden ser escogidas arbitrariamente.
- Las frases $\sigma(p_i)$ para todo $i \in \mathbb{N}$ determinan completamente la sustitución σ.

Definición. Sea A una frase bien formada de L y sea $\sigma : L \to \mathscr{L}$ una sustitución de frases.

- Decimos que $\sigma(A)$ es una *instancia de sustitución* de A.
- Decimos que $\sigma(A)$ es una *tautología* de $\mathscr{L}$ si A es una tautología de L.

Proposición. *Toda tautología de $\mathscr{L}$ es verdadera en cualquier interpretación I de $\mathscr{L}$.*

Demostración. Sea $\sigma : L \to \mathscr{L}$ una sustitución de frases y sea $v : \mathscr{T} \to D_I$ una valoración en I. Definamos la función $w : L \to \{V, F\}$ por la regla de correspondencia

$$w(A) = \begin{cases} V & \text{si } v \text{ satisface } \sigma(A) \\ F & \text{si } v \text{ no satisface } \sigma(A) \end{cases}$$

Por construcción, w es una valoración en L. Si A es una tautología de L, entonces $w(A) = V$, por ende v satisface $\sigma(A)$. Generalizando las valoraciones, $\sigma(A)$ es verdadera en I. □

Definición.

- Decimos que una frase es *lógicamente válida* si es verdadera en cualquier interpretación.
- Decimos que una frase es una *contradicción* si es falsa en cualquier interpretación.

Observaciones.

- Toda tautología de $\mathscr{L}$ es lógicamente válida.
- Si A y $A \to B$ son lógicamente válidas, entonces B también lo es.
- Si A es lógicamente válida, entonces $(\forall x_i)A$ también lo es.
- Si queremos demostrar que una frase A *no* es lógicamente válida, necesitamos ingenio para construir una interpretación I y una valoración $v : \mathscr{T} \to D_I$ que no satisface A.

Ejercicio 19. Muestre que cada una de las siguientes frases es lógicamente válida.

Observación. Fijemos una interpretación arbitraria I.

(a) $(\exists x_1)(\forall x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \to (\forall x_2)(\exists x_1)\, A_1^2(x_1, x_2)$

Solución. Abreviemos $E = (\exists x_1)$, $F = (\forall x_2)$ y $A = A_1^2(x_1, x_2)$ por conveniencia.

Supongamos que $v : \mathscr{T} \to D_I$ satisface EFA. Existe $v' \in [v]_1$ que satisface FA. Sea $w \in [v]_2$ arbitraria y sea $w' \in [w]_1$ el único con $w'(x_1) = v'(x_1)$. Por el lema de coincidencia, w' satisface FA, por ende w' satisface A, por ende w satisface EA, por ende v satisface FEA.

(b) $(\forall x_1)\, A_1^1(x_1) \to ((\forall x_1)\, A_2^1(x_1) \to (\forall x_2)\, A_1^1(x_2))$

Solución. Abreviemos $F_i = (\forall x_i)$ y $A_i = A_1^1(x_i)$ por conveniencia.

Supongamos que $v : \mathscr{T} \to D_I$ satisface $F_1 A_1$. Todo $v_b \in [v]_1$ satisface A_1. Por el lema de sustitución, todo $v_b \in [v]_2$ satisface A_2. Por ende v satisface $F_2 A_2$.

(c) $(\forall x_1)(A \to B) \to ((\forall x_1)A \to (\forall x_1)B)$

Solución. Abreviemos $F = (\forall x_1)$ y $C = A \to B$ por conveniencia.

Supongamos que $v : \mathscr{T} \to D_I$ satisface FC y FA. Todo $w \in [v]_1$ satisface C y A, por ende también B. Por ende v satisface FB.

(d) $(\forall x_1)(\forall x_2)A \to (\forall x_2)(\forall x_1)A$

Solución. Dada una valoración $v : \mathscr{T} \to D_I$, sea $[v]_{ij}$ la unión de las clases $[w]_i$ con $w \in [v]_j$. Entonces todo $w \in [v]_{ij}$ está determinado por los valores de $w(x_i)$ y $w(x_j)$. Por ende $[v]_{ij} = [v]_{ji}$. Finalmente, v satisface $(\forall x_1)(\forall x_2)A$, si y sólo si todo $w \in [v]_{12}$ satisface A, si y sólo si v satisface $(\forall x_2)(\forall x_1)A$.

Ejercicio 20. Dé un ejemplo de una frase bien formada lógicamente válida que no es cerrada.

Solución. Cualquier tautología no cerrada de $\mathscr{L}$, por ejemplo $A_1^1(x_1) \to A_1^1(x_1)$.

Ejercicio 21. Muestre que, si el término t es libre para x_i en A, entonces la frase $A[x_i \mapsto t] \to (\exists x_i)\, A$ es lógicamente válida.

Solución. Sea v una valoración que satisface $A[x_i \mapsto t]$ y sea $b = v(t)$. Por el lema de sustitución, $v_b \in [v]_i$ satisface A. Por ende v satisface $(\exists x_i)A$.

Ejercicio 22. Muestre que ninguna de las siguientes frases bien formadas es lógicamente válida.

Observación. En todos los casos, el dominio debe tener al menos dos elementos.

(a) $(\forall x_1)(\exists x_2)\, A_1^2(x_1, x_2) \to (\exists x_2)(\forall x_1)\, A_1^2(x_1, x_2)$

Solución. Sea $\bar{A}_1^2$ la relación de igualdad.

(b) $(\forall x_1)(\forall x_2)\, [A_1^2(x_1, x_2) \to A_1^2(x_2, x_1)]$

Solución. Sea $\bar{A}_1^2$ una relación de orden total.

(c) $(\forall x_1)\, [\neg A_1^1(x_1) \to \neg A_1^1(a_1)]$

Solución. Sea $\bar{A}_1^1(x)$ verdadero si y sólo si $x = \bar{a}_1$.

(d) $(\forall x_1)\, A_1^2(x_1, x_1) \to (\exists x_2)(\forall x_1)\, A_1^2(x_1, x_2)$

Solución. Sea $\bar{A}_1^2$ la relación de igualdad.