3ra práctica calificada - pregunta 2

MAT 237 - Cálculo Numérico

1er semestre del 2018

Pregunta (Método de Relajación)**.** *Para resolver el sistema* $Ax = b$ *con* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$*, considere el* Método de Relajación: *Dado* $x^{(0)} = \left(x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)}\right)^T$ *para* $k = 0, 1, \ldots$ *calcule*

$$r_i^{(k)} = b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)}$$

$$x_i^{(k+1)} = (1-\omega)\, x_i^{(k)} + \omega\, \frac{r_i^{(k)}}{a_{ii}}$$

para $i = 1, \ldots, n$*, donde* ω *es un parámetro real.*

Encuentre la forma explícita de la matriz de iteración. Después, verifique que la condición $0 < \omega < 2$ *es necesaria para la convergencia de este método*

Solución. Se va a usar la notación de los libros de Quarteroni [1] y de Ciarlet [2]. Considere la siguiente partición $A = D - E - F$ donde

$$\begin{array}{rcl} (D)_{ij} & = & a_{ij}\delta_{ij} \qquad\qquad \text{(diagonal de } A\text{)} \\ (-E)_{ij} & = & a_{ij} \ \text{ si } i > j\,, \quad 0 \text{ en caso contrario} \\ (-F)_{ij} & = & a_{ij} \ \text{ si } i < j\,, \quad 0 \text{ en caso contrario} \end{array}$$

Así, una iteración del método de Relajación puede ser descrita de la siguiente manera

$$r^{(k)} = b + Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)}$$

$$x^{(k+1)} = (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1} r^{(k)}$$

Se supone que los elementos de la diagonal de A son no-nulos. Ahora, se sustituye $r^{(k)}$ en la expresión de $x^{(k+1)}$ para encontrar la matriz de iteración

$$\begin{array}{rcl} x^{(k+1)} & = & (1-\omega)\, x^{(k)} + \omega\, D^{-1}\left[b + Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)}\right] \\ \dfrac{D}{\omega} x^{(k+1)} & = & \dfrac{(1-\omega)}{\omega} Dx^{(k)} + b + Ex^{(k+1)} + Fx^{(k)} \\ \left[\dfrac{D}{\omega} - E\right] x^{(k+1)} & = & \left[\dfrac{(1-\omega)}{\omega} D + F\right] x^{(k)} + b \\ x^{(k+1)} & = & \left[\dfrac{D}{\omega} - E\right]^{-1} \left[\dfrac{(1-\omega)}{\omega} D + F\right] x^{(k)} + \left[\dfrac{D}{\omega} - E\right]^{-1} b \end{array}$$

La matriz de iteración $B(\omega)$ es la matriz que acompaña al vector $x^{(k)}$ en la última ecuación, es decir

$$B(\omega) = \left[\frac{D}{\omega} - E\right]^{-1} \left[\frac{(1-\omega)}{\omega} D + F\right]. \tag{1}$$

Queda demostrar que, si el método es convergente entonces $0 < \omega < 2$. Para ello se usa $\rho(B(\omega))$, el radio espectral de la matriz de iteración: Dado que el método es convergente, se sabe que $\rho(B(\omega)) < 1$; y por definición de radio espectral, se tiene que para cada $i = 1, \ldots, n$

$$|\lambda_i(B(\omega))| \leq \rho(B(\omega)) \tag{2}$$

donde los $\lambda_i(B(\omega))$ son los autovalores de la matriz de iteración. Por otro lado, recuerde que el determinante de una matriz coincide con el producto de los autovalores de la matriz. En este caso

$$\det(B(\omega)) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(B(\omega))$$

y por lo tanto, de la Ec. (2), se tiene que

$$|\det(B(\omega))| \leq \rho^n(B(\omega)). \tag{3}$$

Ahora, se calcula el determinante de la matriz de iteración (ver Ec. (1))

$$\det(B(\omega)) = \frac{\det\left(\dfrac{(1-\omega)}{\omega}D + F\right)}{\det\left(\dfrac{D}{\omega} - E\right)} = \frac{\dfrac{(1-\omega)^n}{\omega^n}\det(D)}{\dfrac{\det(D)}{\omega^n}} = (1-\omega)^n \tag{4}$$

usando el hecho de que las matrices $\frac{(1-\omega)}{\omega}D + F$ y $\dfrac{D}{\omega} - E$ son triangulares cuyos elementos en la diagonal son los elementos de $\frac{(1-\omega)}{\omega}D$ y de $\frac{D}{\omega}$, respectivamente. Entonces, la Ec. (3) queda

$$\begin{array}{lcl} |1-\omega|^n & \leq & \rho^n(B(\omega)) \quad \text{, es decir} \\ |1-\omega| & \leq & \rho(B(\omega)) \end{array}$$

Finalmente, por la convergencia del método, se tiene que $|1-\omega| < 1$, esto es, $0 < \omega < 2$. $\square$

Observación. *El método de Relajación presentado es una generalización del método de Gauss-Seidel (cuando $\omega = 1$ el método de Relajación coincide con Gauss-Seidel). Si este método iterativo es empleado con $\omega > 1$ o con $\omega < 1$, se le denomina método de Sobrerelajación o de Subrelajación, respectivamente. Una parte de la literatura (p.e. [1]) nombra al método de Relajación presentado como método SOR (successive over-relaxation method), sea con $\omega > 1$ o con $\omega < 1$.*

References

[1] Quarteroni A., Sacco R., and Saleri F. *Numerical Mathematics,* 2nd edition. Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2007.

[2] Ciarlet, P. G. *Introduction to Numerical Linear Algebra and Optimisation.* Cambridge University Press, Cambridge, 1989.

Prof. Juan Casavilca