1ra práctica calificada, parte B, MAT 237 CÁLCULO NUMÉRICO

PREGUNTA 1b:

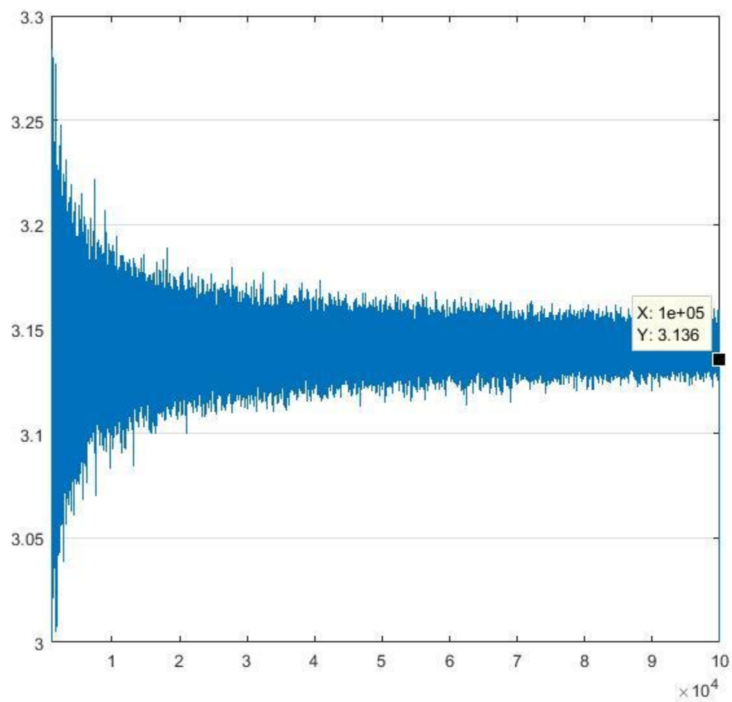

Figura 1. Zn versus n

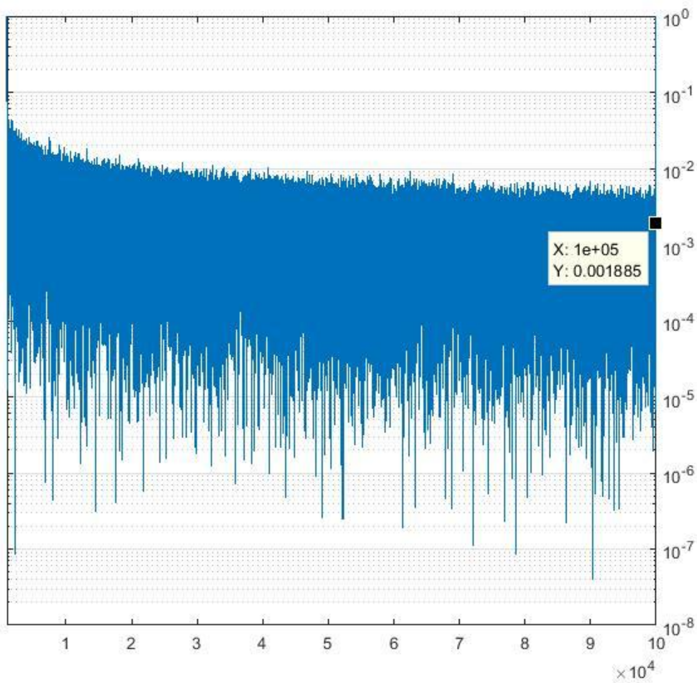

Figura 2. Error relativo versus n

De la Figura 2 se observa que el menor error relativo que se consigue es aprox. 4x10^(-8), cuando n es aprox. 90 000. Sin embargo debemos notar que, debido a la aleatoriedad, este mínimo error relativo es un valor fortuito. Los errores relativos son oscilantes desde que se inicia el cálculo (n=1000, 1001, 1002, …); cuando n es aproximadamente 10^5, el error relativo oscila entre 5x10^(-5) y 5x10^(-3). La oscilación es causada principalmente por:

1. Para cada n, el valor de m (cantidad de pares que se localizan dentro del círculo unitario) es aleatorio (lo "decide" la máquina).
2. El programa es hecho de tal modo que para cada n, se generan n pares y son nuevos, es decir, no guardan relación con los pares generados para n-1. Otro tipo de algoritmo podría, para cada n, aprovechar los n-1 pares calculados hasta entonces y simplemente aumentar 1 par más.

Como se menciona arriba, el menor error relativo es aprox. 4x10^(-8). Este error corresponde a Zn = 3,14159252865932 que tiene 7 cifras exactas y es el valor más preciso, esto es, es el más próximo a PI. Esto ocurre para n=90 372. Pero, como se mencionó, al incrementar n, se realiza un nuevo "sorteo", se genera un nuevo conjunto de pares ordenados. Esos nuevos sorteos continúan: se observan, de la Tabla 1, valores de Zn con apenas 2 o 3 cifras significativas y otro caso fortuito, donde Zn tiene 5 cifras exactas (n=99 992).

n	Zn	Error relativo
99985	3,14607191078662	1,43E-03
99986	3,14600044006161	1,40E-03
99987	3,14764919439527	1,93E-03
99988	3,13469616353963	2,20E-03
99989	3,14674614207563	1,64E-03
99990	3,13559355935594	1,91E-03
99991	3,15352381714354	3,80E-03
99992	3,14157132570606	6,79E-06
99993	3,13685958017061	1,51E-03
99994	3,14054843290597	3,32E-04
99995	3,13207660383019	3,03E-03
99996	3,14060562422497	3,14E-04
99997	3,14353430602918	6,18E-04
99998	3,14458289165783	9,52E-04
99999	3,13567135671357	1,88E-03
	PI=3.14159265358979	

Tabla 1.

El máximo valor de n que se consideró fue de 10^5. El cálculo demoró aprox. un minuto y 30 segundos. Para los propósitos de este trabajo, se cree que es un tiempo prudente. Es por eso que no se consideró un n mayor.

Si consideramos al error relativo (Figura 2) como una onda senoidal (seno), se observa que los "picos" máximos (máximos locales) del error relativo tienden a decrecer: el cálculo comienza con "picos" de aprox. 5x10^(-2) y termina con "picos" 10 veces menores (aprox. 5x10^(-3)). Es decir, la sucesión está convergiendo. Esta convergencia también se nota en la Figura 1: si consideramos también a Zn como una onda seno, notamos que la amplitud decrece ocasionando que, al final del cálculo, los Zn tomen valores entre 3,13 y 3,16 aprox. (ver también Tabla 1). De hecho, se espera que en el "infinito" los Zn converjan a su valor esperado (o valor medio): PI.

CONSEJO: si no se conoce el valor del límite de una sucesión (como suele suceder), observe los datos disponibles de manera gráfica para ver si hay una aparente convergencia, y si ésta es suave u oscilatoria (de acuerdo a una precisión deseada). En ese sentido, también es aconsejable observar, mediante tablas, la cantidad de cifras que se repiten y dar como valor límite el valor promedio de los datos. En este problema, por ejemplo, hay una aparente convergencia (Figura 1) y al final del cálculo los datos varían entre 3,13 y 3,16 (Figura 1 y Tabla 1). Si esta variación no es satisfactoria para dar una estimativa del valor del límite, entonces se podría considerar tomar el valor promedio de los últimos 10 000 datos (ver Figura 1) y este número sería el valor estimado del límite de la sucesión.

PREGUNTA 2:

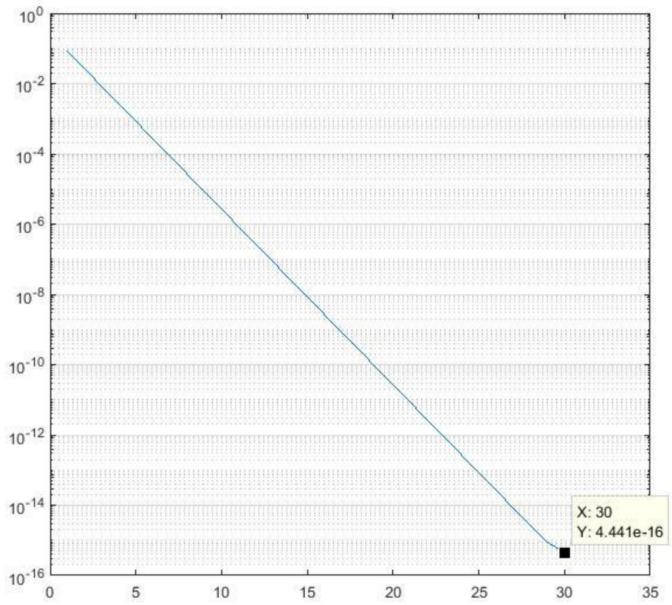

Figura 3. Residual versus k

k	x_k	r_k=f(x_k)
28	4,258371473336454E-04	2,665E-15
29	3,223200477291181E-04	8,882E-16
30	2,427481866917572E-04	4,441E-16
31	1,496109185256184E-04	0
32	1,496109185256184E-04	0

Tabla 2

Al parar el cálculo cuando el residual r es menor a 10^(-20), se obtiene un valor x_k= 1,496x10^(-4) con k=31 (ver Tabla 2). De hecho, el valor del residual en k=31 es cero: es decir el MATLAB calcula r_31 = f (x_31) = 0.

Al parar el cálculo cuando la diferencia |x_(k) – x_(k-1)| es menor a 10^(-20), se obtiene un valor x_k= 1,496x10^(-4) con k=32 (ver Tabla 2). De hecho, la diferencia con x_31 es el cero del MATLAB (todas las cifras significativas son las mismas) porque:

$$x_{32} = x_{31} - \frac{f(x_{31})}{f'(x_{31})}$$

y porque f(x_31) = 0, como se menciona en el párrafo anterior.

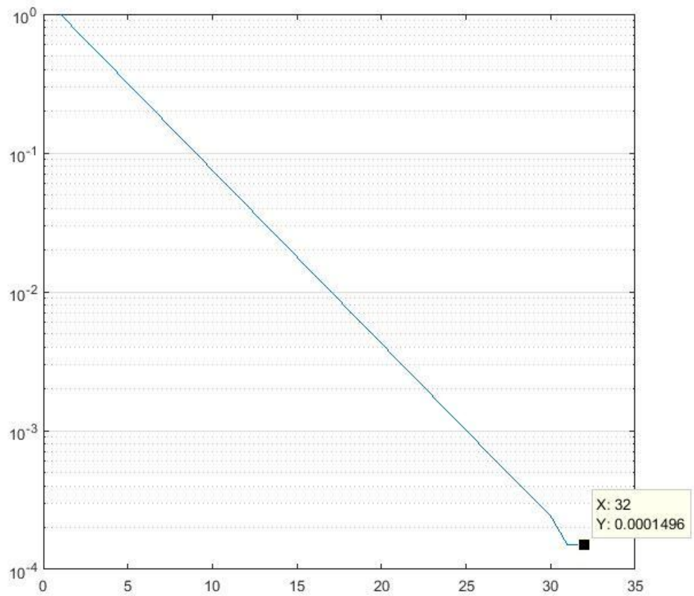

Figura 4. xk versus k

k	x_k	e_(k+1)/e_(k)	e_(k+1)/[e_(k)]^2
25	1,00346269640191E-03	7,50E-01	5,60E+02
26	7,52943286620357E-04	7,50E-01	7,48E+02
27	5,65678581910112E-04	7,51E-01	9,98E+02
28	4,25837147333645E-04	7,53E-01	1,33E+03
29	3,22320047729118E-04	7,57E-01	1,78E+03
30	2,42748186691757E-04	7,53E-01	2,34E+03
31	1,49610918525618E-04	6,16E-01	2,54E+03
32	1,49610918525618E-04	1,00E+00	6,68E+03

Tabla 3

Vale mencionar que el programa usa como valor de partida a x_1 = 1,0. Además el valor exacto de la solución del problema es cero. Pero, el programa da como solución a x_k= 1,496x10^(-4), donde el valor de la función es el cero del MATLAB. Esta discrepancia se debe a que f ‘ es casi nula alrededor del cero (y f ′′ también) lo que genera una convergencia lineal, no cuadrática (ver Tabla 3 donde el cociente e_(k+1)/e_(k) toma un valor de 0,75). En relación a casos como este, donde |f ′ (x)|<<1, el libro "Scientific Computing with MATLAB and Octave" (pag. 50) advierte que el tener un residual próximo a cero (f(x*) aprox cero) no implica que x* esté próximo a la solución verdadera.

PREGUNTA 3:

Considerando que f(r) es

$$f(r) = 1000\,\frac{1+r}{r}\left[(1+r)^5 - 1\right] - 6000$$

Y que los valores iniciales son r1=0,05 y r2=0,07 se obtienen los siguientes resultados:

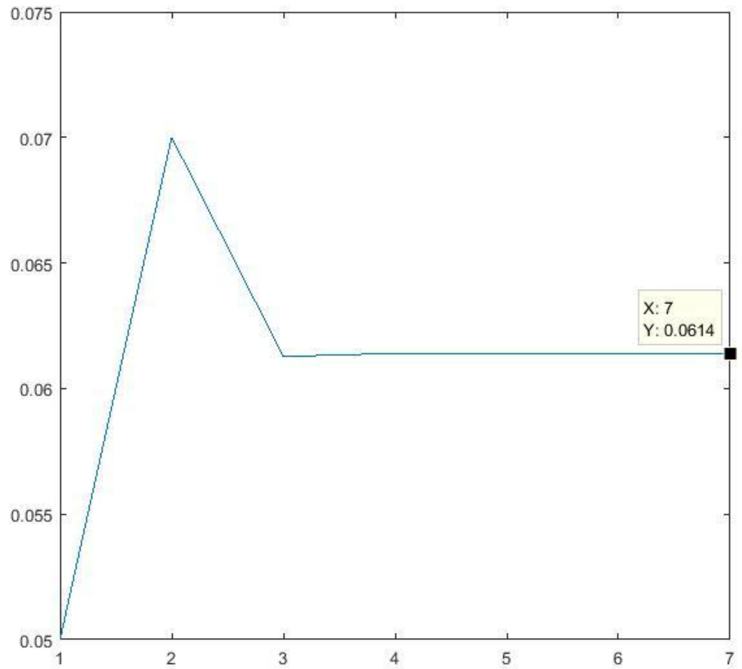

Figura 5. rk versus k

k	rk	ek	(e_(k+1))/(e_(k))^p
1	0,0500000000000000	1,140E-02	
2	0,0700000000000000	8,598E-03	11,9735
3	0,0612748793593686	1,275E-04	0,2805
4	0,0614009943114506	1,417E-06	2,8358
5	0,0614024117713058	2,348E-10	0,6821
6	0,0614024115365255	2,012E-16	0,7661
7	0,0614024115365253	-	-

Tabla 4

La solución es r7 (ver Tabla 4) pues la diferencia con r6 es menor a 10^(-10).

La Tabla 4 también muestra que la convergencia es más que lineal (basta observar que el orden de magnitud de los errores e_k no cae con la misma tasa). En la Tabla 4 sí se calcula el cociente (e_(k+1))/(e_(k))^p, con $p = (1+\sqrt{5})/2 \approx 1{,}6$. Y se observa que, aunque no se tienen suficientes datos, este cociente permanece constante al final del cálculo (valores de 0,68 y 0,77) y por lo tanto la convergencia tendría orden p.

OBSERVACIÓN: Se podrían tomar otros valores de partida r1 y r2 e intentar recalcular el orden de convergencia.