PUCP

Facultad de Ciencias e Ingeniería

Balotario Práctica 1 - Investigación de Operaciones 2 - Periodo 2019-2

Prof. Abelardo Jordán Liza.

1. Problemas Capítulo 10 del texto de Hillier (2015) desde el problema 10.2.1 al problema 10.6.6.

2. Sea C un conjunto no vacío y convexo de $\mathbb{R}^n$ y f una función convexa en C, mientras que g es una función definida en un intervalo I de $\mathbb{R}$ de modo que g es convexa y creciente y $f(C) \subset I$. Pruebe que la función $g \circ f$ es convexa en C.

3. Sea C un conjunto y no vacío de $\mathbb{R}^n$ y $f : C \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe que f es convexa si, y solo si, para cada $x, y \in C$, la función $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $g(t) = f(tx + (1 - t)y)$, es convexa.

4. Sea C un conjunto convexo y $f : C \to \mathbb{R}$ una función. Pruebe que: f es convexa si, y solo si, el conjunto $Epi(f) := \{(x, \lambda) \in C \times \mathbb{R} : f(x) \leq \lambda\}$ es un conjunto convexo en $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$.

5. Sea I un conjunto de índices y C un conjunto convexo de $\mathbb{R}^n$. Para cada $i \in I$ la función $f_i : C \to \mathbb{R}$ es convexa y existe una función $h : C \to \mathbb{R}$ tal que $f_i(x) \leq h(x)$, $\forall x \in C$. Pruebe que la función $\sup\limits_i f_i : C \to \mathbb{R}$ definida por $x \mapsto \sup\limits_{i\in I} f_i(x)$, es convexa.
   Justifique que para $a_1, \cdots, a_m, b_1, \cdots, b_m$ vectores dados de $\mathbb{R}^n$, la función F definida por
   $$F(x) = \max_{i=1,m}\{\|x - a_i\| \ + \langle x, b_i\rangle\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$
   es convexa.

6. Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$, $f : I \to \mathbb{R}$ tres veces continuamente diferenciable en I, con $f'' > 0$. Considere la función ϕ definida en $I \times I$ por
   $$\phi(x, y) = f(x) - f(y) - f'(y)(x - y)$$
   y se denota a f'' por θ. Pruebe la equivalencia de las siguientes afirmaciones:
   (i) ϕ es convexa.
   (ii) $\theta(y) + \theta'(y)(y - x) \geq \dfrac{\theta^2(y)}{\theta(x)}, \qquad \forall (x, y) \in I \times I.$
   (iii) $\dfrac{1}{\theta}$ es cóncava en I.

7. Sean A, a, b constantes positivas tales que $a + b < 1$.Probar que la función F definida en $\mathbb{R}^2_{++}$ definida por $F(x_1, x_2) = Ax_1^a x_2^b$ es estrictamente cóncava. ¿La conclusión sigue válida si $a + b = 1$?

8. Sea U un conjunto convexo y abierto de $\mathbb{R}^n$. Se dice que la función $f : U \to]0, +\infty[$ es logaritmicamente convexa si lnf es convexa en U.
   Asumiendo que f es dos veces continuamente diferenciable en U, probar la equivalencia de las afirmaciones:
   (i) f es logaritmicamente convexa.
   (ii) $f(x)Hf(x) - \nabla f(x)(\nabla f(x))^t$ es positiva semidefinida para cada $x \in U$.

a.j. Lima, Septiembre del 2019.