# INVESTIGACIÓN DE OPERACIONES 2

## Problemas de redes

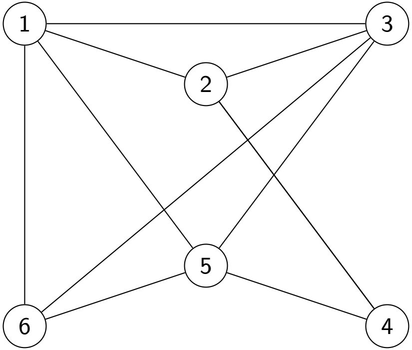

A. Jordán L.

ajordan@pucp.edu.pe


Septiembre 2019

# El problema del arbol de expansión mínima

Mientras que para el problema de ruta óptima, los arcos elegidos deben proporcionar un camino entre el nodo origen y el nodo destino, para el problema que ahora se trata, la propiedad requerida es que los arcos elegidos deben ser tales que deben construir un camino cada par de los nodos de la red. Considere el grafo $G(V, E)$ con $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $E = \{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (3, 5), (3, 6), (4, 2), (5, 1), (5, 4), (6, 1), (6, 5)\}$



El problema del arbol de expansión mínima se puede describir como:

- Se dan las potenciales conecciones( los nodos están dados).
- Se insertan arcos para satisfacer los requerimientos.
- EL requerimiento va con la minimización de la longitud(costo) total de los arcos que conectan los nodos.

NOTA: Si la red tiene $n$ nodos, la solución óptima debe tener $n-1$ arcos.

El problema del arbol de expansión mínima se puede describir como:

- Se dan las potenciales conecciones( los nodos están dados).
- Se insertan arcos para satisfacer los requerimientos.
- EL requerimiento va con la minimización de la longitud(costo) total de los arcos que conectan los nodos.

NOTA: Si la red tiene $n$ nodos, la solución óptima debe tener $n-1$ arcos.Aplicaciones:

- Diseño de red de telecomunicaciones.
- Diseño de una red de líneas de transmisión de corriente de alto voltaje.

# Algoritmo para resolver el problema

Si se inicia a evaluar desde un punto arbitrario de la red, la solución óptima no cambia.

## Algoritmo para resolver el problema

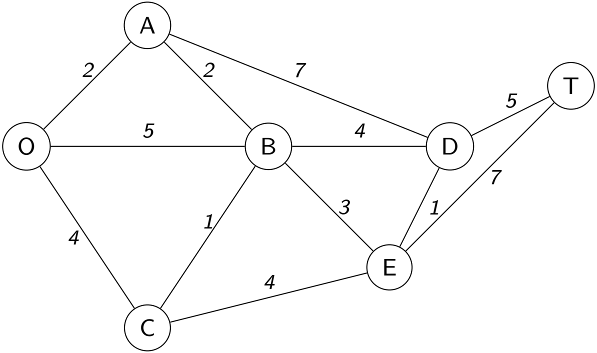
Si se inicia a evaluar desde un punto arbitrario de la red, la solución óptima no cambia.
Procedimiento:
1. Elegir un nodo arbitrario de la red y conectarlo al nodo distinto más cercano( o más barato).

## Algoritmo para resolver el problema

Si se inicia a evaluar desde un punto arbitrario de la red, la solución óptima no cambia.
Procedimiento:
1. Elegir un nodo arbitrario de la red y conectarlo al nodo distinto más cercano( o más barato).
2. Identificar el noodo no conectado que está más cerca (o más barato) a un nodo no conectado. 3. Repetir este proceso hasta que todos los nodos se encuentren conectados.

## Ejemplo

*Se indica la distancia entre las 7 estaciones O, A, B, C, D , E, T de un parque. ¿ Cuál es la ruta de mínima distancia que permite conectar todas las estaciones?*



Comenzamos en el nodo $O$, el nodo más cercano a $O$ es $A$. Conectar el nodo $A$ al nodo $O$.
Luego buscamos el nodo no conectado más cercano al nodo $A$ o al nodo $O$.
Resulta $B$ en este caso al nodo $A$. Conectamos $B$ al nodo $A$.
Enseguida buscamos el nodo no conectado, más cercano al nodo $O$, $A$ o $B$. En este caso, ersulta $C$ (más cerca a $B$) y conectamos $C$ a $B$.
Posteriormente, el nodo no conectado más cercano al nodo $O$, $A$, $B$ o $C$, es $E$(más cercano a $B$) y conectamos $E$ a $B$.
Luego conectamos $D$ a $E$.
Finalmente el único nodo no conectado es $T$ y es más cercano a $D$ y conectamos $T$ a $D$.

Comenzamos en el nodo $O$, el nodo más cercano a $O$ es $A$. Conectar el nodo $A$ al nodo $O$.
Luego buscamos el nodo no conectado más cercano al nodo $A$ o al nodo $O$. Resulta $B$ en este caso al nodo $A$. Conectamos $B$ al nodo $A$.
Enseguida buscamos el nodo no conectado, más cercano al nodo $O$, $A$ o $B$. En este caso, ersulta $C$ (más cerca a $B$) y conectamos $C$ a $B$.
Posteriormente, el nodo no conectado más cercano al nodo $O$, $A$, $B$ o $C$, es $E$(más cercano a $B$) y conectamos $E$ a $B$.
Luego conectamos $D$ a $E$.
Finalmente el único nodo no conectado es $T$ y es más cercano a $D$ y conectamos $T$ a $D$.
La distancia más corta para cubrir toda la red es : $2 + 2 + 1+3+1+5 = 14$.

# El problema de flujo máximo

Descripción del problema:

# El problema de flujo máximo

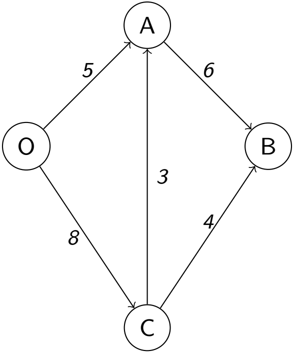
Descripción del problema:
1. La red tiene un nodo de inicio (fuente) de donde nace el flujo y un nodo destino (nodo terminal) donde termina el flujo.
2.Los otros nodos son de transbordo, es decir en éstos llega y sale el flujo( algunos pueden quedar inactivos).
3. EL flujo que circula en un arco solamente lo hace en la dirección indicada por la orientación de dicho arco, donde la máxima cantidad de este fujo está dada por la capacidad del arco.
4.El objetivo es maximizar la cantidad de flujo desde la fuente al destino. esta cantidad se mide de dos maneras equivalentes, a saber, la cantidad que sale de la fuente o la que llega al nodo terminal.

# El problema de flujo máximo

Descripción del problema:
1. La red tiene un nodo de inicio (fuente) de donde nace el flujo y un nodo destino (nodo terminal) donde termina el flujo.
2.Los otros nodos son de transbordo, es decir en éstos llega y sale el flujo( algunos pueden quedar inactivos).
3. EL flujo que circula en un arco solamente lo hace en la dirección indicada por la orientación de dicho arco, donde la máxima cantidad de este fujo está dada por la capacidad del arco.
4.El objetivo es maximizar la cantidad de flujo desde la fuente al destino. esta cantidad se mide de dos maneras equivalentes, a saber, la cantidad que sale de la fuente o la que llega al nodo terminal.
Entre el origen y el destino existe una cantidad determinada de nodos interconectados entre sí a través de arcos, cada uno de estos arcos tiene una capacidad máxima que puede transportar entre los nodos que conecta, la cual puede variar de un arco a otro. Esto quiere decir, que cada arco solo podrá soportar un flujo menor o igual a su capacidad, de tal manera que, si un flujo mayor quiere discurrir a través de un arco, solo una parte de dicho flujo (de valor igual a la capacidad de ese arco) viajará a través de él, y el resto deberá ir por otro arco que salga del mismo nodo, de no haber otro arco, entonces el flujo se verá reducido.

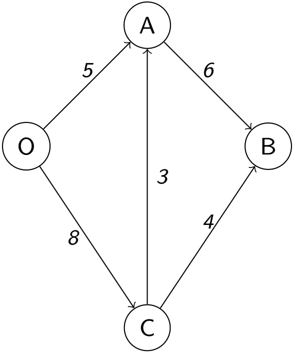
# Ejemplo

Se dan los iguientes nodos acompañados de las capacidades de flujo de cada arco de la red. El nodo $O$ es el origen del flujo y el nodo $B$ es el destino del flujo.



## Ejemplo

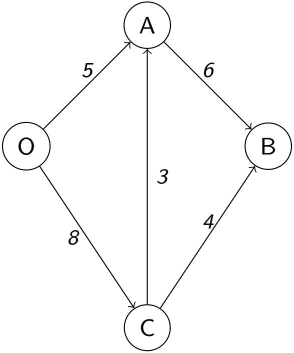
Se dan los iguientes nodos acompañados de las capacidades de flujo de cada arco de la red. El nodo $O$ es el origen del flujo y el nodo $B$ es el destino del flujo.




Note que por $O$ podemos ingresar un flujo de 10 unid., de éstas, 3 unid. van por el arco OA y siguen por el arco AB; las 7 unid. restantes van por el arco OC, de éstas 3 van por AC y siguen por AB, mientras que las 4 restantes van por CB, de este modo se garantizan que las 10 unidades llegan a su destino.

## Ejemplo

Se dan los iguientes nodos acompañados de las capacidades de flujo de cada arco de la red. El nodo $O$ es el origen del flujo y el nodo $B$ es el destino del flujo.




Note que por $O$ podemos ingresar un flujo de 10 unid., de éstas, 3 unid. van por el arco OA y siguen por el arco AB; las 7 unid. restantes van por el arco OC, de éstas 3 van por AC y siguen por AB, mientras que las 4 restantes van por CB, de este modo se garantizan que las 10 unidades llegan a su destino.
¿ Es posible que puedan circular más de 10 unidades? ¿Cuál es el flujo máximo?

# El problema de flujo máximo como un problema de programación lineal

Dada la red descrita por $G = (V, E)$, por decir $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ con 1 el nodo de origen y $n$ el nodo de destino del flujo; $E$ es el conjunto de arcos dirigidos.

# El problema de flujo máximo como un problema de programación lineal

Dada la red descrita por $G = (V, E)$, por decir $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ con 1 el nodo de origen y $n$ el nodo de destino del flujo; $E$ es el conjunto de arcos dirigidos. Sea $x_{ij}$ la cantidad de flujo que circula por el arco $(i, j) \in E$ con capacidad $C_{ij}$, lo que da lugar a $x_{ij} \in [0, C_{ij}]$.

# El problema de flujo máximo como un problema de programación lineal

Dada la red descrita por $G = (V, E)$, por decir $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ con 1 el nodo de origen y $n$ el nodo de destino del flujo; $E$ es el conjunto de arcos dirigidos. Sea $x_{ij}$ la cantidad de flujo que circula por el arco $(i, j) \in E$ con capacidad $C_{ij}$, lo que da lugar a $x_{ij} \in [0, C_{ij}]$.
Por la condición de equilibrio en los nodos intermedios:

$$\sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{k:(j,k)\in E} x_{jk} \text{ para } j \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$$

# El problema de flujo máximo como un problema de programación lineal

Dada la red descrita por $G = (V, E)$, por decir $V = \{1, 2, \cdots, n\}$ con 1 el nodo de origen y $n$ el nodo de destino del flujo; $E$ es el conjunto de arcos dirigidos.
Sea $x_{ij}$ la cantidad de flujo que circula por el arco $(i, j) \in E$ con capacidad $C_{ij}$, lo que da lugar a $x_{ij} \in [0, C_{ij}]$.
Por la condición de equilibrio en los nodos intermedios:

$$\sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{k:(j,k)\in E} x_{jk} \text{ para } j \in \{2, 3, \cdots, n-1\}$$

Problema:

$$\begin{aligned} & \text{máx} && \sum_{j:(1,j)\in E} x_{1j} \\ & s.a. \sum_{i:(i,j)\in E} x_{ij} = \sum_{k:(j,k)\in E} x_{jk} && j \in \{2, 3, \cdots, n-1\} \\ & 0 \leq x_{ij} \leq C_{ij}, \forall (i, j) \in E \end{aligned}$$

Existe un algoritmo que resuelve el problema de flujo máximo, es el MÃ©todo de $Ford - Fulkerson$.