Capítulo 5

Semana 5

Ejercicio 1. *Sea $U \subset \mathbb{R}^2$ un abierto conexo y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función tal que $\partial f/\partial y = 0$ en todo U. ¿Se puede concluir que f no depende de y?*

Solución. Falso. Tomemos el plano $\mathbb{R}^2$, pensado como una hoja de papel. Tracemos una raya en el eje X no negativo y cortémosla con una tijera. Entonces, en el papel cortado $U = \mathbb{R}^2 - X$, el primer cuadrante y el cuarto cuadrante son "tiras" que se pueden levantar de manera independiente. Formalmente, para levantar sólo el primer cuadrante, definimos la función $f : U \to \mathbb{R}$ por

$$f(x, y) = \begin{cases} e^{-1/x}, & \text{si } x, y > 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

Esta función es continua, incluso de clase C^∞ y satisface $\partial f/\partial y = 0$, porque *localmente* no depende de y. Sin embargo, para todo $a > 0$, la recta vertical $x = a$ pasa por puntos donde f toma valores distintos. Por explicitud, tomemos $f(a, 1) = e^{-1/a}$ y $f(a, -1) = 0$. Entonces, *globalmente*, el valor de f no depende sólo de la variable x, i.e., sí depende de y.

Ejercicio 2. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ un camino de clase C^3, parametrizado por su longitud de arco, cuya curvatura nunca se anula. Demuestre que, si su torsión es idénticamente cero, entonces f es una curva plana.*

Solución. Puesto que f es de clase C^3, existe una base de Frenet en $f(s)$ para cada instante $s \in I$. Puesto que la torsión de f es idénticamente cero, el vector binormal $\mathbf{B}$ es constante. Consideremos el valor de $\mathbf{B}$ como el gradiente de la función potencial $g(\mathbf{p}) = \mathbf{B} \cdot \mathbf{p}$ definida sobre $\mathbb{R}^3$. Por construcción de la base de Frenet, el vector tangente $f' = \mathbf{T}$ siempre es perpendicular a $\mathbf{B}$, así que el camino f está confinado a una superficie de nivel de g, que es un plano.

Ejercicio 3. *Sea $f : I \to \mathbb{R}^3$ un camino de clase C^3, parametrizado por su longitud de arco, cuya curvatura nunca se anula. Demuestre que, si el vector posición $f(s)$ es múltiplo escalar del vector normal $f''(s)$ en todo momento $s \in I$, entonces f es una curva plana.*

Solución. Por hipótesis, existe un escalar $t = t(s)$ tal que $f'' = tf$. Entonces,

$$\det(f', f'', f''') = \det(f', tf, (tf)') = \det(f', tf, t'f + tf') = 0$$

Entonces f tiene torsión cero. Por el ejercicio anterior, f es una curva plana.

Ejercicio 4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función que se maximiza en $a \in U$. Demuestre que cualquier derivada parcial de f en a, si existe, es cero.*

Solución. Las derivadas parciales de f en a, cuando existen, son límites de la forma

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$$

El numerador dentro del límite nunca es positivo. Luego, si los límites laterales existen, tenemos

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t} \leq 0 \leq \lim_{t\to 0^-} \frac{f(a+tv)-f(a)}{t}$$

Por ende, la única forma de que el límite bilateral exista es que éste sea igual a cero.

Ejercicio 5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto conexo y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función cuyas derivadas parciales son idénticamente nulas en todo U. Demuestre que f es constante.*

Solución. Puesto que las derivadas parciales de f son funciones continuas, f es una función continuamente diferenciable. Entonces, por el teorema fundamental de las integrales de línea,

$$f \circ \gamma(1) - f \circ \gamma(0) = \int_\gamma df = \int_\gamma \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n = 0$$

donde $\gamma : I \subset U$ es un camino diferenciable por tramos arbitrario. Puesto que γ es arbitrario, sus extremos son puntos arbitrarios de U, así que f es constante.