Capítulo 4

Semana 4

Ejercicio 1. *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un camino diferenciable. Demuestre que la imagen de f está contenida en una esfera $S = S_r(p)$ si y sólo si existe existe un instante $t_0 \in [a, b]$ tal que $f(t_0) \in S$ y el vector velocidad $f'(t)$ siempre es perpendicular al vector radial $f(t) - p$.*

Solución.

- Si la imagen de f está contenida en S, entonces $f'(t)$ siempre está en el plano tangente $T_{f(t)}S$. Esto implica que $f'(t)$ es perpendicular al vector radical $f(t) - p$.
- Consideremos la función $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = \|x - p\|^2$. Los vectores radiales que emanan de p generan el campo gradiente de g, así que cualquier curva diferenciable perpendicular a ellos está confinada a un conjunto de nivel de g. Por supuesto, los conjuntos de nivel de g son el punto p y las esferas centradas en p.

  (Si no queremos utilizar de manera implícita la métrica euclidiana, entonces tenemos que utilizar dg en vez de ∇g, pero el argumento es esencialmente el mismo.)

Ejercicio 2. *¿Todo camino rectificable es integrable?*

Solución. Verdadero. Estructuraremos la demostración por ítems.

a) Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ un camino arbitrario. Dada una partición P de $[a, b]$, denotemos

$$v(f, P) = \sum_{k=1}^{m} \|f(t_k) - f(t_{k-1})\|$$

Sean $f_1, \dots, f_n$ las componentes de f. Tenemos las cotas mutuas

$$\max_i v(f_i, P) \leq v(f, P) \leq \sum_i v(f_i, P)$$

Tomando supremos, tenemos las cotas mutuas

$$\max_i L(f_i) \leq L(f) \leq \sum_i L(f_i)$$

Entonces f es rectificable si y sólo si $f_1, \dots, f_n$ lo son.

b) Dada una partición P, consideremos la suma de Riemann

$$s(f, P) = \sum_{k=1}^{m} f(t_k^\star) \cdot \Delta t_k$$

Las sumas de Riemann de f y de sus componentes están relacionadas por

$$s(f,P) = \Big(s(f_1,P),\dots,s(f_n,P)\Big)$$

Tomando límites cuando $\|P\| \to 0$, tenemos

$$\int_a^b f(t)\,dt = \left(\int_a^b f_1(t)\,dt,\dots,\int_a^b f_n(t)\,dt\right)$$

Entonces f es Riemann-integrable si y sólo si $f_1,\dots,f_n$ lo son.

c) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ un camino rectificable. Para cada instante $t\in[a,b]$, sea $g(t)$ la longitud del tramo de f parametrizado por $[a,t]$. Por construcción, g es una función creciente y continua. Además, para todo $t \le t'$, tenemos la cota superior

$$f(t') - f(t) \le |f(t') - f(t)| \le g(t') - g(t)$$

Esto implica que la diferencia $h = g - f$ también es una función creciente y continua.

d) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función creciente y sea P una partición de $[a,b]$. Entonces,

$$\overline{s}(f,P) - \underline{s}(f,P) = \sum_{k=1}^{m} f(t_i)\cdot\Delta t_i - \sum_{k=1}^{m} f(t_{i-1})\cdot\Delta t_i \le [f(b)-f(a)]\cdot\|P\|$$

La discrepancia entre las sumas superior e inferior de Darboux puede hacerse tan pequeña como uno desee refinando P. Por lo tanto, f es integrable.

e) Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}^n$ un camino rectificable. Cada componente f_i es rectificable, por ende de la forma $f_i = g_i - h_i$, donde g_i,h_i son funciones crecientes. Por el ítem anterior, g_i,h_i son integrables, así que su diferencia f_i también lo es. Por ende, f es integrable.

Ejercicio 3. *Consideremos la sucesión de caminos $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}^2$ definida mediante el siguiente proceso recursivo. El término inicial f_0 es el intervalo $[0,1]$ del eje X, considerado como un único tramo recorrido con velocidad constante. Dado f_n, el siguiente término f_{n+1} se construye dividiendo cada tramo de f_n en tres partes iguales y reemplazando la parte central con otros dos tramos que forman con la parte eliminada un triángulo equilátero. Los dos nuevos tramos se recorren el doble de rápido que el tramo eliminado.*

La curva de Koch se define como el límite uniforme de la sucesión f_n. Demuestre que

a) La curva de Koch está bien definida

b) La curva de Koch no es rectificable.

c) La curva de Koch no es diferenciable en ninguno de sus puntos.

Solución. Será conveniente revisar la teoría de funciones sobre espacios métricos.

- Sean K un espacio compacto, M un espacio métrico completo y C el espacio de funciones continuas $f:K\to M$, equipado con la siguiente función distancia

  $$d(f,g) = \max_{x\in K} d(f(x),g(x))$$

  Sea f_n una sucesión de Cauchy en C. Para todo $x\in K$, tenemos la cota

  $$d(f_m(x),f_n(x)) \le d(f_m,f_n)$$

  Entonces $f_n(x)$ es una sucesión de Cauchy y converge a algún punto $f(x)\in M$. Por lo tanto, hemos construido una función $f:K\to M$. Nos falta verificar que f es continua.

- Puesto que f_n es de Cauchy, dado un margen de error $\varepsilon > 0$, existe un instante $k \in \mathbb{N}$ en la sucesión desde el cual $d(f_m, f_n) < \varepsilon/3$. Puesto que d es continua, para todo $x \in K$, tenemos

$$d(f_k(x), f(x)) \leq \varepsilon/3$$

Puesto que f_k es continua, todo punto $x_0 \in K$ admite una vecindad $U \subset K$ en la cual

$$d(f_k(x), f_k(x_0)) < \varepsilon/3$$

Combinando estas dos piezas de información,

$$d(f(x), f(x_0)) \leq d(f(x), f_k(x)) + d(f_k(x), f_k(x_0)) + d(f_k(x_0), f(x_0)) < \varepsilon$$

Entonces f es continua y f_n converge a f. Por ende, C es un espacio métrico completo.

Ahora estamos listos para resolver el ejercicio.

a) Por construcción, cada par d términos consecutivos de f_n satisface

$$\|f_{n+1} - f_n\|_\infty < 3^{-n}$$

Entonces, a partir del instante $k \in \mathbb{N}$, tenemos la cota superior

$$\|f_m - f_n\| < \sum_{i=k}^{\infty} 3^{-i} = \frac{3^{-k}}{1 - 1/3}$$

Esta cota puede hacerse arbitrariamente pequeña. Entonces f_n es una sucesión de Cauchy y, puesto que el espacio de funciones continuas $f : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ es completo, f_n es uniformemente convergente a una función continua f, que es precisamente la curva de Koch.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$, la curva f_n es una aproximación poligonal a f. Entonces,

$$L(f) \geq \sup_{n \in \mathbb{N}} L(f_n) = \sup_{n \in \mathbb{N}} (4/3)^n = \infty$$

Por lo tanto, f no es una curva rectificable.

c) Sea $t \in [0,1]$ un punto arbitrario. Para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande, existe algún tramo de f_n que contiene a t, pero no está centrado en t. Sean $a, d \in [0,1]$ los extremos del tramo que están más cerca y más lejos de t, respectivamente. Sean $b = \frac{2}{3}(2a + d)$ y $c = \frac{1}{2}(a + d)$. Definamos

$$A = f(a), \qquad B = f(b), \qquad C = f(c), \qquad D = f(d), \qquad T = f(t)$$

Por construcción, T está en el triángulo ABC. Entonces,

$$30^\circ = \angle CAB = \angle CAD \leq \angle CTD < \lim_{t \to c} \angle CTD = 90^\circ$$

Las pendientes de las rectas secantes CT y DT son

$$v_n = \frac{C - T}{c - t}, \qquad\qquad w_n = \frac{D - T}{d - t}$$

Si f fuese diferenciable en t, entonces las sucesiones v_n, w_n convergerían al valor de $f'(t)$. Pero estas sucesiones siempre forman un ángulo entre 30° y 90°, así que sus límites también forman un ángulo entre 30° y 90°. Ningún vector puede formar un ángulo distinto de cero consigo mismo, así que $f'(t)$ no está bien definido, i.e., f no es diferenciable en t.

Ejercicio 4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Sea R la familia de caminos rectificables en U. Para cada par de puntos $p, q \in U$, sea $R_{p,q} \subset R$ la subfamilia de caminos que empiezan en p y terminan en q. La función distancia $d : U \times U \to \mathbb{R}$ inducida por R se define como*

$$d(x,y) = \text{ínf}\, L(R_{x,y}) = \text{ínf}\{L(f) : f \in R_{x,y}\}$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) La subfamilia $P \subset R$ de caminos poligonales induce la misma función distancia sobre U.

b) La función distancia d es una métrica sobre U.

Solución.

a) La distancias inducidas se definen como ínfimos de longitudes de caminos tomados de una familia de caminos aceptables. En principio, P nos ofrece menos caminos aceptables que R, así que P debería inducir una distancia más larga que R. Sin embargo, demostraremos que, para todo camino $f \in R$, existe otro camino $g \in P$ entre los mismos extremos que es más corto que f.

Sea $f \in R$ un camino arbitrario. Puesto que la imagen de f es compacta, podemos cubrir f con una cantidad finita de bolas contenidas en U. Puesto que la imagen de f es conexa, podemos ordenar las bolas de tal manera que

- La primera bola contenga el punto inicial de f.
- La última bola contenga el punto final de f.
- Cada intersección de bolas consecutivas contenga algún punto de f.

Sea $g \in P$ el camino poligonal que pasa por los puntos marcados en las bolas. Por construcción, cada tramo de g está totalmente contenido en una de las bolas, así que g está contenido en U. Además, g es una aproximación poligonal a f, así que g no es más largo que f.

En conclusión, P induce la misma función distancia que R.

b) Verificaremos los axiomas para un espacio métrico.

- Sea $c_x : [0,1] \to U$ el camino constante en $x \in U$. Entonces,
$$d(x,x) = L(c_x) = 0$$
- Sea $s_{x,y} : [0,1] \to \mathbb{R}^n$ el camino en línea recta desde x hasta y. Entonces,
$$d(x,y) \geq L(s_{x,y}) = \|x - y\|$$
- Para todo camino $f \in R_{x,y}$, la reversa $\bar{f} \in R_{y,x}$ tiene la misma longitud. Entonces,
$$d(x,y) = \text{ínf}\, L(R_{x,y}) = \text{ínf}\, L(R_{y,x}) = d(y,x)$$
- Dados tres puntos $x, y, z \in U$ y un margen de error $\varepsilon > 0$, podemos encontrar
  - Un camino $f \in R_{x,y}$ tal que $L(f) < d(x,y) + \varepsilon$.
  - Un camino $g \in R_{y,z}$ tal que $L(g) < d(y,z) + \varepsilon$.

  Consideremos el camino $h \in R_{x,z}$ definido por
$$h(t) = \begin{cases} f(2t), & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ g(2t-1), & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$
  Entonces la distancia entre x, z está acotada superiormente por
$$d(x,z) \leq L(h) = L(f) + L(g) < d(x,y) + d(y,z) + 2\varepsilon$$
  Finalmente, puesto que ε es arbitrario, tenemos el resultado buscado:
$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$