Capítulo 6

Semana 7

Ejercicio 1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función tal que $f(tx) = |t|\, f(x)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que, si f es diferenciable en el origen, entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Solución. Fijemos $x \in \mathbb{R}^n$ y definamos $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ por $g(t) = tx$. Por construcción,

$$f \circ g(t) = f(tx) = |t|\, f(x)$$

es un múltiplo constante de la función valor absoluto. Pero g es diferenciable en $t = 0$ y, por hipótesis, f es diferenciable en $g(0) = 0$, así que, por la regla de la cadena, $f \circ g$ es diferenciable en $t = 0$. Como la función valor absoluto no es diferenciable en $t = 0$, la única manera de que $f \circ g$ sí lo sea es que $f(x) = 0$. Por lo tanto, f es idénticamente cero.

Ejercicio 2. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal y considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \langle T(x), x\rangle$. Determine $\nabla f(x)$.*

Solución. Sea $A = (a_{ij})$ la matriz que representa a T y sea $x = (x_1, \dots, x_n)$. Entonces,

$$f(x) = \sum_i (Ax)_i x_i = \sum_i \left[\sum_j a_{ij} x_j\right] x_i = \sum_{ij} a_{ij} x_i x_j$$

Diferenciando con respecto a x_k, tenemos

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = \sum_i a_{ik} x_i + \sum_j a_{kj} x_j = (A^t x)_k + (Ax)_k$$

Entonces $\nabla f(x) = Ax + A^t x = T(x) + S(x)$, donde aún está por verse qué es S.

Recordemos que A^t representa a la transformación $\mathbb{R}$-lineal dual $T^\star : (\mathbb{R}^n)^\star \to (\mathbb{R}^n)^\star$. Esto todavía no es completamente satisfactorio, porque, en general, no existe una identificación canónica entre un $\mathbb{R}$-espacio vectorial y su dual. Pero, en $\mathbb{R}^n$, el producto interno euclidiano induce un isomorfismo $\varphi : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^\star$ que se representa como la matriz identidad en las bases estándares correspondientes. Entonces S representa la transformación $\mathbb{R}$-lineal $\varphi^{-1} \circ T^\star \circ \varphi$. Finalmente, tenemos

$$\nabla f(x) = T(x) + \varphi^{-1} \circ T^\star \circ \varphi(x)$$

Ejercicio 3. *Demuestre que todo funcional $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es diferenciable y $df_x = f$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.*

Solución. Como f ya es un funcional, por $\mathbb{R}$-linealidad, tenemos

$$f(x + v) = f(x) + f(v)$$

para todo $x, v \in \mathbb{R}^n$. Esto significa que $df_x = f$ satisface

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(x + v) - f(x) - df_x(v)}{\|v\|} = \lim_{v \to 0} \frac{0}{\|v\|} = 0$$

Por lo tanto, f es su propia derivada de Fréchet en todo punto de $\mathbb{R}^n$.

Ejercicio 4. *Sea $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función dos veces diferenciable. Demuestre que*

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

si y sólo si existen funciones $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dos veces diferenciables tales que

$$g(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$$

Solución. La implicación de regreso es inmediata. Si φ, ψ tienen las propiedades requeridas, entonces

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \varphi''(x + y) + \psi''(x - y) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

La implicación de ida requiere una demostración más elaborada. Pongamos $z = x + y$, $w = x - y$. El cambio de coordenadas $(x, y) \mapsto (z, w)$ es un difeomorfismo de $\mathbb{R}^2$. Por la regla de la cadena,

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial w}, \qquad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial w}$$

Como g es dos veces diferenciable, sus derivadas direccionales son una vez diferenciables y sus derivadas mixtas son simétricas. Entonces,

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\partial}{\partial w}\left(2\,\frac{\partial g}{\partial z}\right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\right) \\ &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Esto significa que $\partial g/\partial z$ localmente sólo depende de z. Pero las rectas $z = z_0$ son subconjuntos conexos del dominio de h, así que $\partial g/\partial z = \varphi'(z)$ es una función diferenciable de z bien definida. (Para ver qué pasaría si las rectas $z = z_0$ intersecasen al dominio de h en un conjunto no conexo, véase la solución del ejercicio 1 de la semana 5.) Análogamente, $\partial g/\partial w = \psi'(w)$ es una función diferenciable de w bien definida. Entonces podemos escribir el diferencial dg como

$$dg = \frac{\partial g}{\partial z}\, dz + \frac{\partial g}{\partial w}\, dw = \varphi'(z)\, dz + \psi'(w)\, dw$$

Eligiendo antiderivadas de φ', ψ' inteligentemente, tenemos

$$g(x, y) = \varphi(z) + \psi(w) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$$

Puesto que φ', ψ' son diferenciables, φ, ψ son dos veces diferenciables.

Ejercicio 5. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y sea $f : U \to \mathbb{R}$ una función diferenciable. Suponga que existe una constante $c > 0$ tal que f satisface la condición de Lipschitz*

$$|f(x) - f(y)| \le c\,\|x - y\|$$

para todo $x, y \in U$. Demuestre que $\|df_x\| \le c$, para todo $x \in U$. (La norma de una transformación $\mathbb{R}$-lineal $T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ es el máximo valor de $\|T(x)\|$ para cualquier punto $x \in \mathbb{R}^m$ tal que $\|x\| = 1$.)

Solución. Sea $x \in U$ un punto arbitrario. Puesto que f es diferenciable en x, las derivadas direccionales de f en x se pueden reconstruir utilizando la aplicación diferencial df_x. Esto es,

$$df_x(v) = \frac{\partial f}{\partial v}(x) = \lim_{t \to 0} \frac{f(x + tv) - f(x)}{t}$$

Puesto que la función valor absoluto es continua, tenemos

$$|df_x(v)| = \lim_{t \to 0} \left| \frac{f(x + tv) - f(x)}{t} \right| \le \lim_{t \to 0} \frac{c\,\|x + tv - x\|}{|t|} = c\,\|v\|$$

En particular, tomando $\|v\| = 1$, tenemos $\|df_x\| \le c$.