PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
Escuela de Posgrado

ANÁLISIS REAL 1

Hoja de ejercicios No 6
2020-2

1. Sea $f : R^n \to R$ una función tal que $f(t\mathbf{x}) = |t|f(\mathbf{x})$ para $\mathbf{x} \in R^n$ y $t \in R$. Si f es diferenciable en el origen demuestre que $f(\mathbf{x}) = 0$ para todo $\mathbf{x} \in R^n$.

2. Dada una transformación lineal $T : R^n \to R^n$, defina la función $f : R^n \to R$ dada por $f(\mathbf{x}) =< T\mathbf{x}, \mathbf{x} >$. Determine $gradf(\mathbf{x})$

3. Demuestre que todo todo funcional $f : R^n \to R$ es diferenciable y $df(\mathbf{x})(v) = f(v)$, para cualquier $\mathbf{x}, v \in R^n$.

4. Sea $g : R^2 \to R$ una función dos veces diferenciable. g es solución de

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}$$

si y solamente si existen dos funciones $\varphi : R \to R$, $\psi : R \to R$, dos veces diferenciable tales que

$$g(x, y) = \varphi(x + y) + \psi(x - y)$$

5. Sea $U \subset R^n$. Si la función difernciable $f : U \to R$ cumple con la condición de Lipschitz $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| \leq c\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$, demuestre que

$$|df(x)v| \leq c\|v\|$$

San Miguel, 12 de octubre del 2020