

PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
Escuela de Posgrado

ANÁLISIS REAL 1

Hoja de ejercicios No 4
2020-2

1. Dado $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ una camino diferenciable. Demuestre que la imagen de f esta contenida en una esfera S de radio r y centro P_0 si y solamente si existe un $t_0 \in [a, b]$ tal que $f(t_0) \in S$ y $\langle f'(t), f(t) - P_0 \rangle > 0$ en $[a, b]$
2. ¿Todo camino rectificable es integrable?
3. El proceso para construir la curva de Koch es el siguiente: Se toma el intervalo $[0, 1]$ en el eje X , se lo divide en tres partes iguales, se remplaza la parte central por dos intervalos de longitud $1/3$ cada uno de ellos y forman con el intervalo eliminado un triángulo equilátero. Luego, con los cuatro segmentos, se procede de la misma manera, lo que da lugar a 16 segmentos más pequeños en la segunda iteración. En cada paso se define una curva continua $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ de longitud $(4/3)^n$.
 - (a) Demuestre que $\{f_n\}$ converge a una función $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ continua no rectificable
 - (b) Demuestre que f no es diferenciable en ningún punto de $[a, b]$.
4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ abierto y conexo. Dados $x, y \in U$, defina la siguiente distancia,
$$d(x, y) = \inf\{L(f) : f \text{ es un camino continuo y rectificable contenido en } U \text{ que une } x \text{ con } y\}$$
 - (a) Demuestre que $d(x, y)$ coincide con el ínfimo de las longitudes de todos los caminos poligonales que unen x con y
 - (b) Si $x, y, z \in U$, demuestre que $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

San Miguel, 21 de setiembre del 2020