Capítulo 9

Semana 11

Ejercicio 1. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *una función diferenciable que fija el origen. Demuestre que, si* 1 *no es valor propio del diferencial* $df_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, entonces el origen es un punto fijo aislado de* f*.*

Solución. Puesto que 1 no es autovalor de df_0, la transformación lineal $df_0 - \mathrm{id}$ es invertible. Por lo tanto, existe una constante $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple

$$\|x - df_0(x)\| \geq 2\varepsilon \cdot \|x\|$$

Asimismo, puesto que f es diferenciable en el origen, tenemos

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - \cancel{f(0)} - df_0(x)}{\|x\|} = 0$$

En particular, existe una vecindad $U \subset \mathbb{R}^n$ del origen en la cual

$$\|f(x) - df_0(x)\| \leq \varepsilon \cdot \|x\|$$

Combinando estos resultados, tenemos

$$\|x - f(x)\| \geq \|x - df_0(x)\| - \|f(x) - df_0(x)\| \geq \varepsilon \cdot \|x\|$$

Por lo tanto, el origen es el único punto fijo de f contenido en U.

Ejercicio 2. *Determine los puntos más cercanos al origen en el elipsoide*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Solución. Sea $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ el automorfismo lineal (y, por ende, difeomorfismo) que contrae los ejes x, y, z por los factores a, b, c, respectivamente. Debemos hallar los puntos mínimos de

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$

en la superficie regular compacta $S \subset \mathbb{R}^3$ definida por $f \circ \varphi(p) = 1$. Dado $p \in S$, son equivalentes:

- p es un punto crítico de $f \mid S$.
- df_p se anula en T_pS.
- ∇f_p es paralelo a $\nabla(f \circ \varphi)_p$.
- p es paralelo a $\varphi^2(p)$.
- p es un vector propio de φ^{-2}.

En este caso, $f(p) = \lambda^2$, donde $\lambda^2 \in \{a^2, b^2, c^2\}$ es el valor propio correspondiente. Por lo tanto, los puntos mínimos de $f \mid S$ forman la intersección de S con el espacio propio $E \subset \mathbb{R}^3$ del valor propio más pequeño $\lambda^2 = \text{mín}(a^2, b^2, c^2)$ de g^{-2}. Dependiendo de la multiplicidad de λ^2, tenemos tres posibilidades:

- E es un eje coordenado y $S \cap E$ son dos puntos equidistantes del origen.
- E es un plano coordenado y $S \cap E$ es un círculo centrado en el origen.
- E es todo el espacio $\mathbb{R}^3$ y $S \cap E = S$ es una esfera centrada en el origen.

Ejercicio 3. *Determine los puntos críticos de la función $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida por $f(x, y) = \langle x, y \rangle$, restricta a la esfera unitaria en $\mathbb{R}^{2n} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.*

Solución. La esfera unitaria $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ es compacta, regular y está definida por

$$g(x, y) = \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1$$

Dado un punto $p \in S$, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $p = (x, y)$ es un punto crítico de $f \mid S$.
- df_p se anula en T_pS.
- ∇f_p es paralelo a ∇g_p.
- (y, x) es paralelo a (x, y).
- $y = \pm x$

Entonces los puntos críticos de $f \mid S$ forman las esferas unitarias en los n-planos $y = x$, $y = -x$.

Ejercicio 4. *Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto y sean $f, g : U \to \mathbb{R}^n$ funciones diferenciables en $p \in U$ tales que $f(p) = g(p)$. Demuestre que $f'(p) = g'(p)$ si y sólo si*

$$\lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - g(p + v)}{\|v\|}$$

Solución. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f'(p) = g'(p)$
- $\|df_p(v) - dg_p(v)\| \leq \varepsilon \cdot \|v\|$ para todo $\varepsilon > 0$.
- Se cumple que

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - f(p) - df_p(v)}{\|v\|} - \lim_{v \to 0} \frac{g(p + v) - g(p) - dg_p(v)}{\|v\|} \\ &= \lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - g(p + v)}{\|v\|} - \cancel{\lim_{v \to 0} \frac{df_p(v) - dg_p(v)}{\|v\|}} \\ &= \lim_{v \to 0} \frac{f(p + v) - g(p + v)}{\|v\|} \end{aligned}$$