Capítulo 11

Semana 14

Ejercicio 1. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una involución de clase C^k y sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k cuya imagen bajo f está contenida en M. Demuestre que $f \mid M$ es un difeomorfismo de M.*

Solución. Es suficiente demostrar que $f \mid M$ es una involución de clase C^k:

- A nivel de conjuntos, tenemos $M = f^2(M) \subset f(M) \subset M$. Entonces $f(M) = M$. Por lo tanto, $f \mid M$ también es una involución.
- A nivel diferenciable, si φ es una parametrización local de M centrada en un punto $p \in M$, entonces $f \circ \varphi$ es una parametrización local de M centrada en $f(p)$. Usando estas parametrizaciones, $f \mid M$ se representa localmente como la función identidad. Por lo tanto, $f \mid M$ es de clase C^k.

Ejercicio 2. *Sea $k \geq 1$ un entero positivo.*

a) Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m. Demuestre que el fibrado tangente

$$TM = \{(p, v) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : p \in M, v \in T_pM\}$$

es una superficie de clase C^{k-1} y dimensión $2m$.

b) Sea $f : M \to N$ una función de clase C^k entre dos superficies de clase C^k. Demuestre que

$$Tf(p, v) = (f(p), df_p(v))$$

es una función de clase C^{k-1} entre los respectivos fibrados tangentes.

Solución.

a) Dado un punto $p \in M$, el conjunto $\{p\} \times T_pM$ se conoce como la fibra de TM sobre p. Como TM es la unión de todas sus fibras, nuestra tarea es parametrizar una vecindad de cada fibra.

Partamos de una parametrización local arbitraria

$$\Phi : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

de M de clase C^k, centrada en $p \in M$, definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^m$.

Sea $q \in U$ la coordenada local de p según Φ. La derivada de la parametrización

$$\Phi'(q) : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

es una transformación lineal inyectiva. Entonces la matriz que representa a $\Phi'(q)$ contiene un menor invertible de orden $m \times m$, correspondiente a m coordenadas distinguidas de $\mathbb{R}^n$.

Escribamos los puntos de $\mathbb{R}^n$ como pares (x, y), donde $x \in \mathbb{R}^m$ contiene las coordenadas distinguidas e $y \in \mathbb{R}^{n-m}$ contiene las coordenadas restantes. En particular, nuestra parametrización es

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))$$

Por construcción, $\varphi_1'(q)$ es el menor invertible de $\Phi'(q)$ antes mencionado. Entonces el teorema de la función inversa nos permite encoger U de tal manera que φ_1 sea un difeomorfismo.

Sea $V = \varphi(U)$. Consideremos la reparametrización $\Psi : V \to \mathbb{R}^n$ definida por

$$\Psi(x) = \Phi \circ \varphi_1^{-1}(x) = (x, \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x))$$

Por construcción, Ψ es de clase C^k y parametriza la gráfica de $\psi(x) = \varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}(x)$, que en adelante llamaremos W. El principal mérito de Ψ es que su inversa admite una descripción muy simple:

$$\Psi^{-1} = \pi \mid W,$$

donde $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es la proyección que descarta la coordenada en $\mathbb{R}^{n-m}$.

Demostraremos que la función $T\Psi : V \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ definida por

$$T\Psi(x, v) = \Big(\Psi(x), \Psi'(x) \cdot v\Big) = \Big(x, \psi(x), v, \psi'(x) \cdot v\Big)$$

es una parametrización local de TM de clase C^{k-1}, centrada en la fibra sobre p:

- Por construcción, $T\Psi$ es una función inyectiva de clase C^{k-1}.
- La imagen de $T\Psi$ es un subconjunto abierto de TM:

$$T\Psi(V \times \mathbb{R}^m) = TM \cap (W \times \mathbb{R}^n) = TW$$

- La inversa de $T\Psi$ es una función continua:

$$(T\Psi)^{-1} = T(\Psi^{-1}) = T(\pi \mid W) = T\pi \mid TW$$

- Si $k \geq 2$, entonces la derivada de $T\Psi$ es siguiente la matriz en bloques:

$$(T\Psi)'(x, v) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ y'(x) & 0 \\ 0 & I \\ y''(x) \cdot v & y'(x) \end{bmatrix}$$

  Tomando el primer y el tercer bloque de filas, tenemos el menor invertible

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

  Por ende, $(T\Psi)'(x, v)$ es una transformación lineal inyectiva para todo $(x, v) \in V \times \mathbb{R}^m$.

b) Sea $g : U \to V$ la representación local de f en las coordenadas locales

$$\Phi : U \subset \mathbb{R}^m \longrightarrow M \subset \mathbb{R}^s, \qquad \Psi : V \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow N \subset \mathbb{R}^t,$$

de clase C^k.

Las parametrizaciones inducidas por Φ, Ψ sobre los fibrados tangentes son

$$T\Phi(x, v) = \Big(\Phi(x), \Phi'(x) \cdot v\Big), \qquad T\Psi(y, w) = \Big(\Psi(y), \Psi'(y) \cdot w\Big)$$

Por la regla de la cadena, T es un funtor covariante. Esto significa que la representación local de Tf en las parametrizaciones inducidas es simplemente

$$Tf \circ T\Phi = T\Psi \circ Tg$$

Puesto que f es de clase C^k, su representación local g también es de clase C^k. Entonces,

$$Tg(x, v) = \Big(g(x), g'(x) \cdot v\Big)$$

es una función de clase C^{k-1}. Por lo tanto, Tf es una función de clase C^{k-1}.

Ejercicio 3. *Sea $M \subset \mathbb{R}^n$ una superficie de clase C^k y dimensión m.*

a) Demuestre que la proyección canónica $\pi : TM \to M$ es una sumersión de clase C^{k-1}.

b) Demuestre que el fibrado tangente TM es localmente trivial.

Solución.

a) Sea $\Phi : U \to \mathbb{R}^n$ una parametrización local de M de clase C^k. Entonces,

$$T\Phi(x, v) = \Big(\Phi(x), \Phi'(x) \cdot v\Big)$$

es una parametrización local de TM de clase C^{k-1}.

La representación de π en estas coordenadas es particularmente simple:

$$\pi \circ T\Phi(x, v) = \pi\Big(\Phi(x), \Phi'(x) \cdot v\Big) = \Phi(x) = \Phi \circ \pi_1(x, v)$$

Puesto que las coordenadas locales bajo consideración son de clase C^{k-1} y la representación de π es una sumersión de clase C^{k-1} (de hecho, C^∞), deducimos que π es una sumersión de clase C^{k-1}.

b) Sea $\Phi : U \to \mathbb{R}^m$ una parametrización local de M de clase C^k. Por definición (o por decreto, si M es vista como una variedad abstracta), Φ es un difeomorfismo entre U y su imagen $V \subset M$.

Consideremos la función $\Phi : V \times \mathbb{R}^m \to TV$ definida por

$$\Psi\Big(\Phi(x), v\Big) = T\Phi(x, v) = \Big(\Phi(x), \Phi'(x) \cdot v\Big)$$

Por construcción, Ψ es un difeomorfismo de clase C^{k-1} que conmuta con las proyecciones:

$$\pi \circ \Psi\Big(\Phi(x), v\Big) = \Phi(x) = \pi_1\Big(\Phi(x), \Phi'(x) \cdot v\Big)$$

Entonces Ψ es una trivialización local de TM.