Capítulo 8

Examen parcial

Ejercicio 1. *Sea* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *una función diferenciable y homogénea de grado* k*. Demuestre que*

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} = kf$$

Solución. Fijemos un punto $x \in \mathbb{R}^n$. Puesto que f es homogénea, tenemos

$$f(tx) = t^k f(x)$$

Diferenciando con respecto a t, tenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} f(tx) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx) = kt^{k-1} f(x)$$

La notación aquí es un poco confusa, así que daremos algo de explicación:

- $\dfrac{\partial}{\partial t} f(tx)$ es la derivada de la **expresión** $f(tx)$ con respecto a t.
- $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(tx)$ es la derivada de la **función** f con respecto a x_i, evaluada en tx.

En todo caso, evaluando el último resultado en $t = 1$, tenemos el resultado buscado:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) = k\, f(x)$$

Ejercicio 2. *Sea* $C \subset \mathbb{R}^2$ *la unión de los rayos* $y = mx$*, donde* $m \in \mathbb{N}$*,* $x \geq 0$*.*

a) *Calcule* $\operatorname{int}(C)$*.*

b) *Calcule* $\overline{C}$*.*

c) *Calcule* ∂C

d) *Determine si* C *es cerrado.*

Solución.

a) Demostraremos que ningún punto $p \in C$ es interior.

Si p es el origen, entonces toda bola centrada en p contiene puntos en los cuatro cuadrantes, pero C solamente contiene puntos en la clausura del primer cuadrante. Por lo tanto, el origen no es un punto interior de C.

Si p no es el origen, entonces p está en el semiplano abierto $x > 0$, así que y/x es continua en p. Toda bola centrada en p contiene algún punto en el cual y/x no es entero, pero C sólo contiene puntos en los cuales y/x es entero. Por lo tanto, p no es un punto interior de C.

b) Por supuesto, C está incluido en $\overline{C}$. En particular, el origen pertenece a $\overline{C}$. Entonces reformularemos la pregunta de la siguiente manera: ¿Qué puntos distintos del origen pertenecen a $\overline{C}$?

Sean $U \subset \mathbb{R}^2$ el complemento del origen y $\pi : U \to S^1$ la retracción $\varphi(p) = p/\|p\|$. Sea $p \in U$ el límite de una sucesión $p_k \in C$. Como $\mathbb{R}^2$ es Hausdorff, podemos descartar un prefijo finito de p_k y suponer que la sucesión p_k está contenida en $U \cap C$. Por continuidad, $q_k = \pi(p_k)$ converge a $q = \pi(p)$.

Tenemos dos posibilidades:

- Si $q \in \pi(U \cap C)$, entonces $p \in \pi^{-1} \circ \pi(U \cap C) = U \cap C$.
- Si $q \notin \pi(U \cap C)$, entonces $q = (0, 1)$, ya que $\pi(U \cap C)$ no tiene otros puntos de acumulación. Por ende, p está en el eje Y positivo.

Ahora consideremos específicamente la sucesión $p_n = (y/n, y)$, donde $y > 0$. Entonces $p = (0, y)$, así que el eje Y positivo está contenido en $\bar{C}$. Por lo tanto, $\overline{C}$ es la unión de C con el eje Y positivo.

c) En el ítem a) demostramos que $\operatorname{int}(C)$ es vacío. Entonces $\overline{\mathbb{R}^2 - C} = \mathbb{R}^2$. Por ende, $\partial C = \overline{C}$.

d) En el ítem b) demostramos que $\overline{C}$ es estrictamente más grande que C. Por ende, C no es cerrado.

Ejercicio 3. *Sea $A = [0, 1] \times [0, 1]$. Defina la función $f : A \to \mathbb{R}$ por*

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 1/2 \\ 1, & \text{si } x > 1/2 \end{cases}$$

Demuestre que f es integrable y halle $\displaystyle\int_A f$.

Solución. Puesto que f es una función acotada definida en un bloque (producto cartesiano de intervalos), sus integrales inferior y superior

$$\underline{\int_A} f = \sup_P \sum_{B \in P} \inf_{p \in B} f(p) \cdot V(B), \qquad \overline{\int_A} f = \inf_P \sum_{B \in P} \sup_{p \in B} f(p) \cdot V(B)$$

están bien definidas. Debemos demostrar que ambas son iguales y hallar su valor común. Puesto que f no depende de y, sólo necesitamos usar particiones en bloques a lo largo del eje X para calcular las integrales inferior y superior. Específicamente, usaremos la partición cuyos bloques son

$$B_1 = [0, a] \times [0, 1], \qquad B_2 = [a, 1] \times [0, 1]$$

Tomando $a = 1/2 + \varepsilon$, obtenemos la estimación

$$\underline{\int_A} f \geq \inf_{p \in B_1} f(p) \cdot V(B_1) + \inf_{p \in B_2} f(p) \cdot V(B_2) = 0 \cdot a + 1 \cdot (1 - a) = 1 - a = \frac{1}{2} - \varepsilon,$$

así que la integral inferior es por lo menos $1/2$. Tomando $a = 1/2$, obtenemos la estimación

$$\overline{\int_A} f \leq \sup_{p \in B_1} f(p) \cdot V(B_1) + \sup_{p \in B_2} f(p) \cdot V(B_2) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

así que la integral superior es a lo más $1/2$. Combinando estos resultados, tenemos

$$\overline{\int_A} f \leq \frac{1}{2} \leq \underline{\int_A},$$

así que las integrales inferior y superior son iguales a $1/2$. Por ende, f es integrable y

$$\int_A f = \underline{\int_A} f = \overline{\int_A} f = \frac{1}{2}$$

Ejercicio 4. *Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ una función diferenciable tal que $f(x/2) = f(x)/2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Demuestre que f es un funcional.*

Solución. Por lo pronto, $f(0) = 0$. Además, las derivadas direccionales de f en el origen son

$$\frac{\partial f}{\partial v}(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(tv) - f(0)}{t} = \lim_{n \to \infty} \frac{f(2^{-n} v)}{2^{-n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{-n} f(v)}{2^{-n}} = f(v)$$

Como f es diferenciable, la asignación $v \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial v}(0)$ es un funcional. Por ende, f es un funcional.

Ejercicio 5. *Se sabe que $(x, y) = (4, 3)$ es una solución de la ecuación*

$$G(x, y) = x^3 - 3xy + y^3 = 55$$

Estime un valor aproximado de y correspondiente a $x = 4.1$.

Solución. La función $G : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Sobre una curva de nivel de G, tenemos

$$dG = \frac{\partial G}{\partial x}\, dx + \frac{\partial G}{\partial y}\, dy = 0$$

Por supuesto, las derivadas parciales de G son

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 3y^2 - 3x$$

En particular, en el punto de referencia $(4, 3)$, tenemos

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 3 \cdot 4^2 - 3 \cdot 3 = 39, \qquad \frac{\partial G}{\partial y} = 3 \cdot 3^2 - 3 \cdot 4 = 15$$

Vemos que $G_y(4, 3) = 15$ es distinto de cero. Entonces, por el teorema de la función implícita, existe una función $f : I \to J$ entre dos intervalos $I =]4 - \delta, 4 + \delta[$ y $J =]3 - \varepsilon, 3 + \varepsilon[$ tal que

$$G(x, y) = 55 \iff y = f(x)$$

para todo par ordenado $(x, y) \in I \times J$.

Debemos justificar que el intervalo I se puede tomar de tal manera que $4.1 \in I$. Para ello, observemos que G_y se anula en la parábola $x = y^2$. El rectángulo $R = [3, 5] \times [2.5, 4]$ es una vecindad de $(4, 3)$ que no interseca a esta parábola, porque $2.5^2 = 6.25$ es mucho mayor que 5. Entonces G_y es positivo en todos los puntos de R, lo cual implica que G es estrictamente creciente a lo largo de todos los segmentos verticales contenidos en R. En particular, existe un único $y \in [2.5, 4]$ tal que $G(4.1, y) = 55$.

Por el teorema de la función implícita, aplicado en paquete a todos los puntos de R, se deduce que R está *foliado* por las gráficas de las funciones implícitas definidas por los tramos de las curvas de nivel de G que pasan por R.

Una vez subsanadas todas nuestras inquietudes conceptuales, procedemos a estimar y. La aproximación lineal de G cerca de $(x, y) = (4, 3)$ obtenida a partir de su diferencial es

$$dG = 39\, dx + 15\, dy = 0$$

Entonces la derivada de la función implícita f obtenida anteriormente, evaluada en $x = 4$, es

$$f'(4) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{(4,3)} = -\frac{G_x(4, 3)}{G_y(4, 3)} = -\frac{39}{15} = -2.6$$

Por lo tanto, la aproximación de y de primer orden es

$$f(4.1) \approx f(4) + (4.1 - 4) \cdot f'(4) = 3 + 0.1 \cdot (-2.6) = 3 - 0.26 = 2.74$$