Capítulo 10

Semana 13

Preliminares. Sea $f : U \to \mathbb{R}^m$ una función de clase C^1 definida en un abierto $U \subset \mathbb{R}^n$.

Ejercicio 1. *Demuestre que, si f es una inmersión, entonces f es localmente inyectiva.*

Solución. Fijemos un punto $p \in U$. Por hipótesis, el diferencial df_p es inyectivo. Separemos las coordenadas de $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{m-n}$ de tal manera que, en la matriz

$$\left[df_p\right] = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix},$$

se destaque un menor invertible A de orden $n \times n$. Consideremos la función auxiliar $F : U \times \mathbb{R}^{m-n} \to \mathbb{R}^m$ definida por $F(x, y) = F(x, y) + (0, y)$. Por construcción F es de clase C^1 y la matriz

$$\left[dF_{(p,0)}\right] = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & I \end{bmatrix}$$

es invertible. Así, por el teorema de la función inversa, existe una vecindad V de $(p, 0)$ tal que $F \mid V$ es un encaje abierto diferenciable. Con ello, $f(x) = F(x, 0)$ es inyectiva en la vecindad de p formada intersecando V con el plano $y = 0$.

Ejercicio 2. *Demuestre que, si f es una sumersión, entonces f es una función abierta.*

Solución. Fijemos un punto $p \in U$. Por hipótesis, el diferencial df_p es sobreyectivo. Separemos las coordenadas de $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$ de tal manera que, en la matriz

$$\left[df_p\right] = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix},$$

se destaque un menor invertible A de orden $m \times m$. Consideremos la función auxiliar $F : U \to \mathbb{R}^n$ definida por $F(x, y) = (f(x, y), y)$. Por construcción, F es de clase C^1 y la matriz

$$\left[dF_p\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

es invertible. Luego, por el teorema de la función inversa, existe una vecindad V de p tal que $F \mid V$ es un encaje abierto diferenciable. La proyección canónica $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ es una función globalmente abierta, por construcción de la topología producto sobre $\mathbb{R}^n$. Con ello, $f = \pi \circ F$ es una función abierta en p.

Ejercicio 3. *Demuestre que, si f es inyectiva, entonces $n \leq m$.*

Solución. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto en el cual df_p alcanza su rango máximo k. Separemos las coordenadas en el dominio $\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{n-k}$ y en el codominio $\mathbb{R}^m \cong \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{m-k}$ de tal manera que, en la matriz

$$\left[df\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

se destaque un menor A de orden $k \times k$ que es invertible en p. Encojamos U de tal manera que $A(x, y)$ sea invertible para todo $(x, y) \in U$. Entonces df tiene rango constante k.

Utilizando la separación de coordenadas anterior, escribamos $f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$. Observemos que f_1 es una sumersión de clase C^1. Al igual que en el ejercicio anterior, consideremos la función auxiliar $F_1 : U \to \mathbb{R}^n$ definida por $F_1(x, y) = (f_1(x, y), y)$. Por construcción, F_1 es de clase C^1 y la matriz

$$\left[dF_1\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix},$$

es invertible. Encojamos U de tal manera que F_1 sea un difeomorfismo sobre su imagen.

Consideremos la composición $g = f \circ F_1^{-1}$. Por la regla de la cadena,

$$\left[dg\right] = \left[df\right] \left[dF_1^{-1}\right] = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ C' & D' \end{bmatrix}$$

tiene rango constante k, así que la entrada inferior derecha D' es idénticamente cero. Encojamos U de tal manera que g no dependa de y. Con ello, f es inyectiva si y sólo si g es inyectiva, si y sólo si $n = k$. Esto último solamente es posible si $n \leq m$.

Ejercicio 4. *Demuestre que, si f es sobreyectiva, entonces $n \geq m$.*

Solución. En este ejercicio, a diferencia de los tres anteriores, la diferenciabilidad continua de f no se usa de manera esencial. Todo lo que nos interesa es que f sea localmente Lipschitz, i.e., existe una cobertura abierta $\{U_\alpha\}$ de U tal que las restricciones $f \mid U_\alpha$ son Lipschitz. Sin pérdida de generalidad, $\{U_\alpha\}$ es una cobertura numerable y cada U_α es acotado.

Recordemos que un conjunto $X \subset \mathbb{R}^m$ se dice de medida nula si, para todo $\varepsilon > 0$, existe una cobertura numerable de X por bolas cuyo volumen total no excede ε. Demostraremos que, si $n < m$, entonces $f(U)$ tiene medida nula. Puesto que toda unión numerable de conjuntos de medida nula también tiene medida nula, basta demostrar que cada $f(U_\alpha)$ tiene medida nula. Equivalentemente, podemos suponer sin pérdida de generalidad que f es globalmente Lipschitz y U es acotado.

Ante todo, una función Lipschitz es uniformemente continua. Puesto que el radio y el volumen de una bola están relacionados por una función monótona, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para toda bola $B \subset \mathbb{R}^n$ de volumen δ, la imagen $f(B \cap U)$ está encajada en una bola $B' \subset \mathbb{R}^m$ de volumen ε. Usando la constante de Lipschitz de f y los volúmenes de las bolas unitarias en $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$, obtenemos $\varepsilon^{1/m} = L\delta^{1/n}$, donde $L > 0$ es una constante independiente de ε y δ.

(Hasta este momento, nuestro análisis ha sido independiente de las normas de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$. Desde ahora, utilizaremos específicamente la norma del máximo, cuyas bolas son los cubos. La ventaja técnica de usar cubos es que es fácil refinar un cubrimiento por cubos sin incrementar su volumen total.)

Dividamos B en $N = 2^n$ subcubos $B_1, \dots, B_N$ de volumen δ/N. Entonces cada imagen $f(B_i \cap U)$ está encajada en un cubo $B_i' \subset \mathbb{R}^m$ de volumen ε/M, donde $M = 2^m$. Por construcción, los cubos $B_1', \dots, B_N'$ forman una cobertura de $f(B \cap U)$ cuyo volumen total es $\varepsilon\lambda$, donde $\lambda = N/M$. Luego,

- Para $n \geq m$, tenemos $\lambda \geq 1$. Entonces la nueva cobertura de $f(B \cap U)$ no es mucho más útil que la cobertura original, al menos si nuestro objetivo es estimar el volumen de $f(B \cap U)$.

- Para $n < m$, tenemos $\lambda < 1$. Usando el procedimiento arriba descrito de manera recursiva, podemos construir coberturas de $f(B \cap U)$ cuyo volumen total $\varepsilon\lambda^k$ es arbitrariamente pequeño. Por lo tanto, $f(B \cap U)$ es un subconjunto de medida nula de $\mathbb{R}^m$.

Puesto que U es acotado, existe un cubo $B \subset \mathbb{R}^n$ que lo contiene. Utilizando este cubo como semilla, demos cuerda al procedimiento anterior. Con ello, mostramos que $f(B \cap U) = f(U)$ es un subconjunto de medida nula de $\mathbb{R}^m$. Finalmente, puesto que $\mathbb{R}^m$ no es un subconjunto de medida nula de sí mismo, $f(U)$ debe ser un subconjunto propio de $\mathbb{R}^m$, i.e., f no es sobreyectiva.