Capítulo 1

Semana 1

Ejercicio 1. *Sea* $x = (x_1, \ldots, x_n)$ *un punto arbitrario de* $\mathbb{R}^n$. *Demuestre que*

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Solución. Elevando el miembro derecho al cuadrado, tenemos

$$\left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right]^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + \sum_{i \neq j} |x_i||x_j|$$

La segunda sumatoria es no negativa. Por ende,

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \leq \left[\sum_{i=1}^{n} |x_i|\right]^2$$

Tomando raíces cuadradas, obtenemos el resultado buscado:

$$\|x\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

Ejercicio 2. *Sean* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *dos funciones continuas. Demuestre que*

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 \leq \int_a^b f(x)^2\, dx \cdot \int_a^b g(x)^2\, dx$$

y determine cuándo se da la igualdad.

Solución. Si f, g son funciones $\mathbb{R}$-linealmente dependientes, i.e., alguna de ellas es múltiplo constante de la otra, entonces es evidente que se da la igualdad

$$\left[\int_a^b f(x)\, g(x)\, dx\right]^2 = \int_a^b f(x)^2\, dx \cdot \int_a^b g(x)^2\, dx$$

Supongamos que f, g son linealmente independientes. Entonces $h = g - \lambda f$ no es idénticamente cero para ningún $\lambda \in \mathbb{R}$. Fijemos λ y tomemos un punto arbitrario de $[a, b]$ donde h no se anula. Por continuidad, existe un entorno de este punto donde h no se anula. Podemos suponer que este entorno es compacto, i.e., un subintervalo cerrado $[c, d] \subset [a, b]$. Sea $L > 0$ el valor mínimo de h^2 en $[c, d]$. Entonces,

$$p(\lambda) = \int_a^b h(x)^2\, dx \geq \int_c^d h(x)^2\, dx \geq L \cdot (d - c) > 0$$

Expandiendo la expresión de $p(\lambda)$, obtenemos el polinomio cuadrático

$$p(\lambda) = \int_a^b h(x)^2\,dx = \int_a^b g(x)^2\,dx - 2\lambda \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx + \lambda^2 \int_a^b f(x)^2\,dx$$

que toma valores positivos para todo $\lambda \in \mathbb{R}$. Por ende,

$$\left[\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 < \int_a^b f(x)^2\,dx \cdot \int_a^b g(x)^2\,dx$$

Ejercicio 3. *Sea $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ una transformación $\mathbb{R}$-lineal. Demuestre que las siguientes proposiciones son equivalentes:*

a) T preserva la norma, i.e., $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

b) T preserva el producto interno, i.e., $\langle T(x), T(y)\rangle = \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$.

c) T es invertible y T^{-1} preserva la norma.

Solución. Es suficiente demostrar que a) implica b) y c). Si T preserva la norma euclidiana, entonces

$$2\langle T(x), T(y)\rangle = \|T(x+y)\|^2 - \|T(x)\|^2 - \|T(y)\|^2 = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 = 2\langle x, y\rangle$$

Por ende, T también preserva el producto interno euclidiano. Además, el único vector de norma cero es el vector nulo, así que $\ker T = 0$. Entonces T es invertible y su inversa satisface

$$\|T^{-1}(x)\| = \|T \circ T^{-1}(x)\| = \|x\|$$

Ejercicio 4. *Sean X, Y subconjuntos arbitrarios de $\mathbb{R}^n$. Demuestre que*

a) $\operatorname{int}(X) \cap \operatorname{int}(Y) = \operatorname{int}(X \cap Y)$

b) $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y)$ *y determine si esta inclusión puede ser estricta.*

Solución. Sea $p \in \mathbb{R}^n$ un punto arbitrario.

a) Si $p \in \operatorname{int}(X) \cap \operatorname{int}(Y)$, entonces existen bolas B_X, B_Y centradas en p y contenidas en X, Y, respectivamente. Entonces $B_X \cap B_Y$ también es una bola centrada en p y está contenida en $X \cap Y$. Por ende, $p \in \operatorname{int}(X \cap Y)$.

Recíprocamente, si $p \in \operatorname{int}(X \cap Y)$, entonces existe una bola B centrada en p y contenida en $X \cap Y$. Esta misma bola también está contenida X, Y individualmente. Por ende, $p \in \operatorname{int}(X) \cap \operatorname{int}(Y)$.

b) Si $p \in \operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y)$, entonces existe una bola B centrada en p y contenida en X o contenida en Y. Esta misma bola también está contenida en $X \cup Y$. Por ende, $p \in \operatorname{int}(X \cup Y)$.

La inclusión $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) \subset \operatorname{int}(X \cup Y)$ puede ser o no ser estricta. Por ejemplo,

- Si $X = Y$, entonces $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) = \operatorname{int}(X) = \operatorname{int}(X \cup Y)$.
- Si $X = \mathbb{Q}$ e $Y = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$, entonces $\operatorname{int}(X) \cup \operatorname{int}(Y) = \varnothing$, pero $\operatorname{int}(X \cup Y) = \mathbb{R}$.

Ejercicio 5. *Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un subconjunto abierto. Demuestre que* $\operatorname{int}(\partial X) = \varnothing$. *Halle $\partial\mathbb{Q}$.*

Solución.

a) Supongamos por el absurdo que existe una bola B encajada en ∂X. Por un lado, el centro de B es adherente a X, así que B contiene puntos de X. Por otro lado, todo punto de B también es adherente a $\mathbb{R}^n - X$, así que B no contiene puntos interiores de X. Con ello, tendríamos puntos de X que no son interiores, lo cual contradice la hipótesis de que X es abierto. Por ende, la bola B no existe, i.e., ∂X tiene interior vacío.

b) Las bolas de $\mathbb{R}$ son los intervalos abiertos. Todo intervalo abierto tiene tanto puntos racionales como irracionales. Por ende, todo número real está en la frontera de $\mathbb{Q}$, i.e., $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.