PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DEL PERÚ
ESCUELA DE POSGRADO

SUPERFICIES DE RIEMANN

Semestre académico 2020-1

Tarea 3

1. Sea X una superficie de Riemann. Dado $x \in X$ denotamos por $T_x X$ el espacio tangente a X en el punto x. Pruebe que $T\,X = \bigcup T_x X$ es un fibrado vectorial real *diferenciable* de dimensión dos. Este fibrado se llama el *fibrado tangente de X*.

2. Sea X una superficie de Riemann. Dado $x \in X$, denotamos por $T_x^* X$ el espacio cotangente a X en el punto x. Muestre que $T^* X = \bigcup_{x \in X} T_x^* X$ es en efecto un fibrado vectorial real *diferenciable* de dimension dos. Este fibrado vectorial se denomina el *fibrado cotangente de X*.

3. Sea X una superficie de Riemann. Sea α una 1-forma. Muestre que α es una sección diferenciable (suave) del fibrado cotangente $T^* X$.

4. Sea X una superficie de Riemann. Sea V un campo vectorial en X. Muestre que V se puede considerar como una sección diferenciable del fibrado tangente TX.

5. Sea $\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ el espacio de formas diferenciales (suaves) en $\mathbb{R}^n$. Sea d el operador derivada exterior. Muestre lo siguiente:

   (a) Si τ y w son formas diferenciales en $\mathbb{R}^n$ de grado p y q respectivamente, entonces $d(\tau \wedge w) = d\tau \wedge w + (-1)^p\, \tau \wedge dw$

   (b) $d^2 = d \circ d = 0$

6. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Muestre que toda k-forma exacta (en U) es cerrada (en U).

7. Sea U un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^n$ y denotemos por $H^k_{dR}(U)$, el k-ésimo grupo de cohomología de *de Rham* de U.

   (a) Muestre que $H^k_{dR}(U)$ es un espacio vectorial real.

   (b) Muestre que la dimensión del espacio vectorial $H^0_{dR}(U)$ es igual al número de componentes conexas de U.

   (c) Muestre que $H^k_{dR}(U)$ cuantifica la obstrucción para que una k-forma cerrada sea exacta. Esto es, muestre que $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ si y sólo si toda k-forma cerrada en U es exacta.

8. El lema de Poincaré afirma lo siguiente

$$H^k_{dR}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad k = 0 \\ 0 & \text{si} \quad k \neq 0 \end{cases}$$

   Pruebe, explícitamente, el lema de Poincaré para los casos $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4$.

9. Sean P, Q dos puntos distintos de $\mathbb{R}^2$. Muestre lo siguiente:

$$H^k(\mathbb{R}^2 \setminus \{P, Q\}) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad k = 0 \\ \mathbb{R}^2 & \text{si} \quad k = 1 \\ 0 & \text{si} \quad k \geq 2. \end{cases}$$

Halle, además, formas cerradas explícitas cuyas clases en cohomología representan las bases de estos espacios vectoriales.

¿Cómo podría generalizar su argumento para calcular la cohomología de deRham de $\mathbb{R}^2$ menos un número finito de puntos? Justifique y calcule los grupos de cohomología en este caso.

10. El lema de Poincaré para *cohomología de de Rham con soporte compacto* afirma lo siguiente

$$H_c^k(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si} \quad k = n \\ 0 & \text{si} \quad k \neq n \end{cases}$$

Pruebe, explícitamente, el lema de Poincaré con soporte compacto para los casos $n = 1,\ 2$.

11. Sea $f : M \to N$ una función diferenciable entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^m$ respectivamente. Muestre que el pullback $f^* : \Omega^*(N) \to \Omega^*(M)$ conmuta con la derivada exterior, esto es, muestre que

$$f^* \circ d_N = d_M \circ f^*,$$

donde d_M y d_N son las derivadas exteriores de $\Omega^*(M)$ y $\Omega^*(N)$ respectivamente. Asimismo, muestre que f^* induce un homomorfismo en cohomología de de Rham.

12. Sea X una superficie de Riemann compacta. Muestre que si α es una 1-forma *holomorfa* entonces $d\alpha = 0$ (esto es, toda 1-forma holomorfa es cerrada).

13. Sea X una superficie de Riemann compacta. Sea f una 1-forma meromorfa en X. Muestre que la suma de los residuos de f sobre todos los polos de f es igual a cero.

14. Sea X una superficie de Riemann compacta. Sean f y g funciones reales suaves en X, de las cuales al menos una de ellas tiene soporte compacto.
Si f o g son armónicas, muestre que

$$\langle f, g \rangle_D = 0,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle_D$ es el producto interno de Dirichlet.

15. Sea X una superficie de Riemann. Sea U una subregión compacta de X con frontera suave $\partial U \subset X$. Si φ es una función real positiva en (el interior de) U y que se anula en ∂U, muestre que

$$\int_{\partial U} i\partial\varphi \geq 0.$$

Sugerencia: Considere $U \subset \mathbb{C}$ y muestre que la integral es, en notación tradicional, la fluctuación de flujo (flux) del gradiente de φ a través de la frontera de U.

16. Sean $x_1, \ldots, x_n$ puntos distintos en una superficie de Riemann compacta X, y sean $w_1, \ldots, w_n$ puntos distintos de $\mathbb{C}$. Muestre que existe una función meromorfa en X que envía x_i a w_i para $i = 1, \ldots, n$.

17. Muestre que si S_g es una superficie de Riemann con género $g \geq 1$, entonces no hay punto en X donde todas las 1-formas holomorfas de X se anulen simultáneamente.

18. Sea X una superficie de Riemann compacta (y conexa). Muestre que si $\dim \mathrm{H}_{\mathrm{X}}^{0,1} = 1$ entonces existe una 1-forma que nunca se anula en X. Es más, muestre que X es isomorfa, como superficie de Riemann, al toro.

19. Sea ω una 1-forma meromorfa no trivial en una superficie de Riemann compacta X. Muestre que el número de ceros menos el número de polos de ω (contados con multiplicidad) es igual a $2g - 2$.

20. Muestre que una superficie de Riemann compacta es un cubrimiento ramificado de la esfera con solo puntos de ramificación simples.

Profesor: Richard Gonzales Vilcarromero

Fecha de entrega: Martes 28 de julio, a las 11:59 pm.