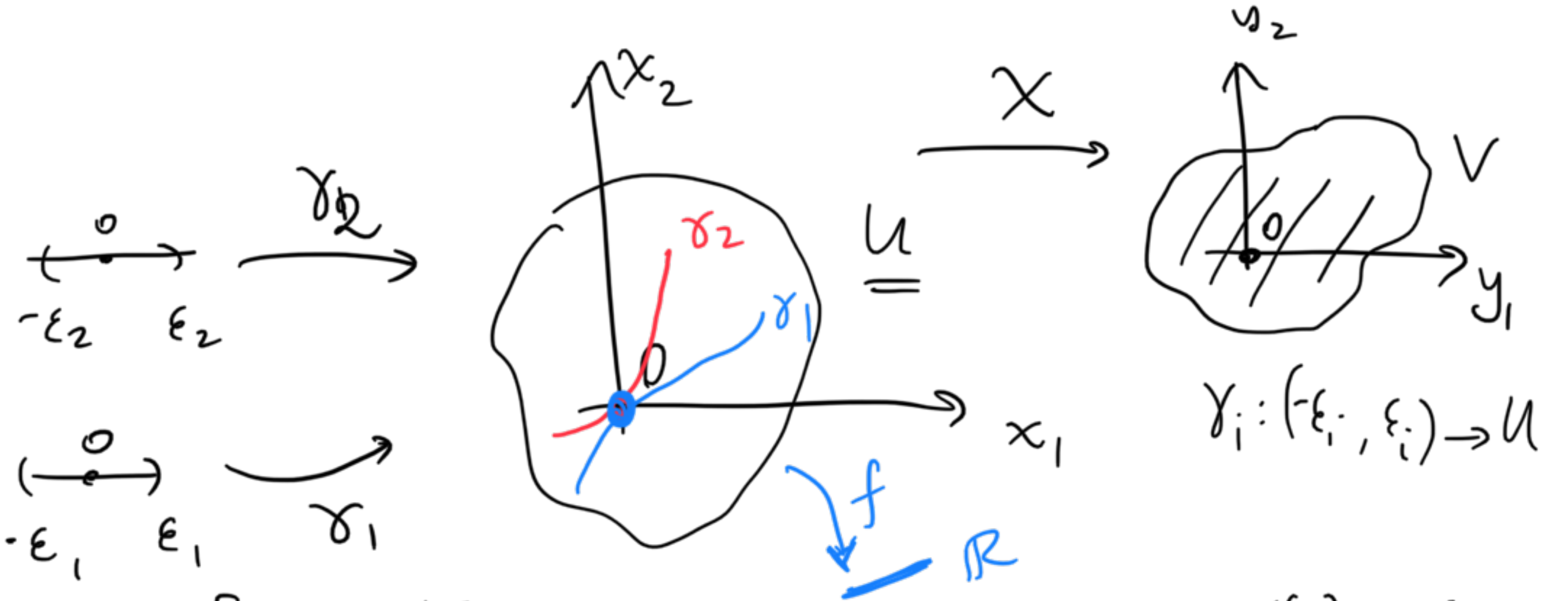
Capítulo 5 (Donaldson)

- Formas dif. en superf.
- Coh de de Rham
- $\partial, \bar{\partial}$ descomp de formas dif. en parte holomorfa y antiholom.

Hoy: Secciones 1 y 2 Cap 5.

Lema (local)

Sea f una función suave definida en un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $0 \in U$.



Sean γ_1, γ_2 curvas en U, $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$.

Sea $\chi : U \to V$ difeomorfismo tal que $\chi(0) = 0$.

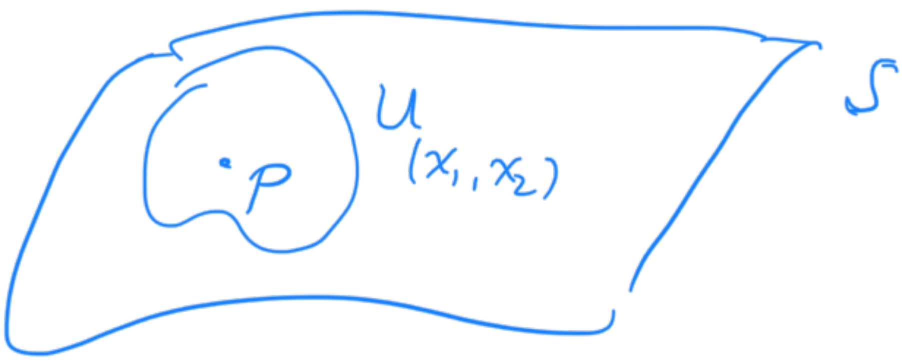
Denotemos
- $\tilde{\gamma}_i = \chi \circ \gamma_i$
- $\tilde{f} = f \circ \chi^{-1}$

Tenemos así:

(a) Si $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(0) = 0$ entonces $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_1}(0) = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial y_2}(0) = 0$

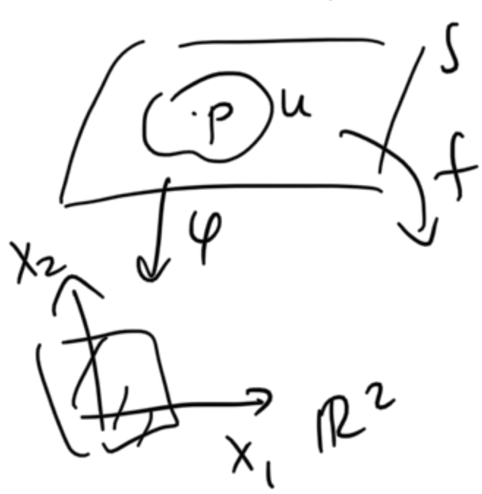
(b) Si $\frac{d\gamma_1}{dt}(0) = \frac{d\gamma_2}{dt}(0)$ entonces $\frac{d\tilde{\gamma}_1}{dt}(0) = \frac{d\tilde{\gamma}_2}{dt}$.

Sea S una superficie suave.



Sea $f: S \to \mathbb{R}$ una función suave.

① f es constante a <u>1º orden en p</u> si las derivadas parciales del rep. local de f en p se anulan en p.



$\tilde{f} = f \circ \varphi^{-1}$

$\underline{\underline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_1}(0)}} = \underline{\underline{\frac{\partial \tilde{f}}{\partial x_2}(0)}} = 0.$

(por Lema: def. indep. de la elección de carta local).

② Sean γ_1, γ_2 dos curvas que pasan por p. $(\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = p)$

Decimos

γ_1 y γ_2 son iguales a primer orden en p si los representantes locales de estas curvas tienen derivadas iguales

$$\tilde{\gamma}_1(0)=\tilde{\gamma}_2(0) \qquad \tilde{\gamma}_i \text{: rep. local de } \gamma \text{ en una carta } U.$$

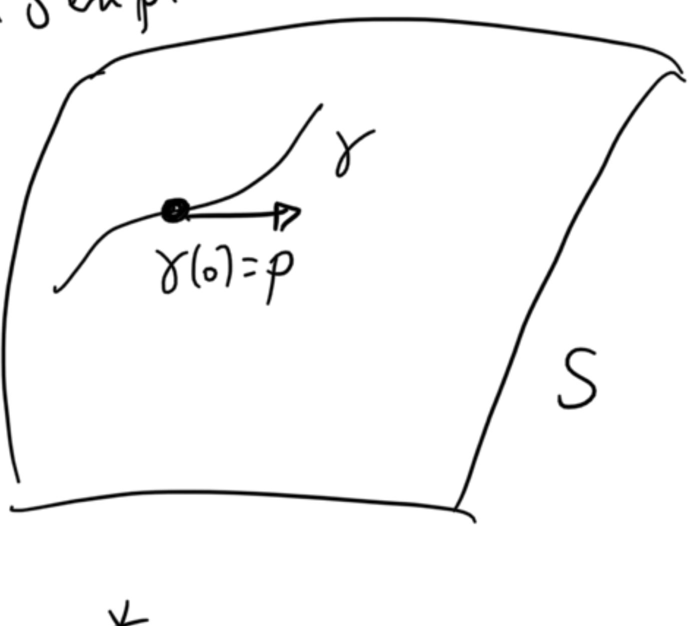
Esta cond. no dep. de la carta local escogida.

Usando estas 2 nociones podemos definir:

[A] T_pS: cjto de clases de equiv. de curvas $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$

espacio tg. a S en p.

$\gamma(0) = p$,



$\gamma_1 \underset{\text{equiv}}{\sim} \gamma_2$ si γ_1 y γ_2 son iguales a 1º orden en p.

[B] T^*S_p = espacio cotangente a S en P.

cjto de clases de equiv de

$[f]$ funciones suaves definidas en una vecindad de $p \in S$

$$\underset{\text{equiv}}{f \sim g} \iff f - g \text{ constante a } 1^{\circ} \text{ orden en } p.$$

Notar:

1. T^*S_p admite una estructura natural de espacio vectorial real. inducida por la estructura de espacio vect. en las funciones suaves def. en un abierto de p.

2. Sea $\mathcal{U}$ una vecindad (abierta) de $p \in S$.

Tenemos la asignación:

$$C^\infty(\mathcal{U}) \longrightarrow T^*S_p$$

$$f \longmapsto [df]_p \leftarrow \text{representa la clase de } f \text{ en } p$$

$=$

Recordar: Localm alrededor de p (usamos coord. x_1, x_2 alrededor de p) $\leftarrow$ $(0,0)$ en

Taylor: $f(x_1,x_2) = f(0,0) + f_x(0,0)x$ esta carta.

$$+ f_y(0,0)\,y + [f_{xx} + \cdots]$$

Notar en T^*S_p

$$\underline{[f]} = f_x(0,0)\,[x] + f_y(0,0)\,[y] \quad \ldots (*)$$

Sean x_1, x_2 cartas locales alrededor de p. $\underline{p \in U}$

Entonces x_1, x_2 son funciones suaves en U.

Tenemos así:

$$x_1 \longrightarrow [dx_1]_p$$

$$x_2 \longrightarrow [dx_2]_p$$

Es más, en U:

$$[df]_p = \frac{\partial f}{\partial x_1}[dx_1]_p + \frac{\partial f}{\partial x_2}[dx_2]_p.$$

Es decir

$[dx_1]_p$ y $[dx_2]_p$ forman una base de T^*S_p. (para todo $p \in S$: $\dim T^*S_p = 2$)

Obj: definir una función natural

$$T S_p \times T^* S_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

(bilinear pairing)

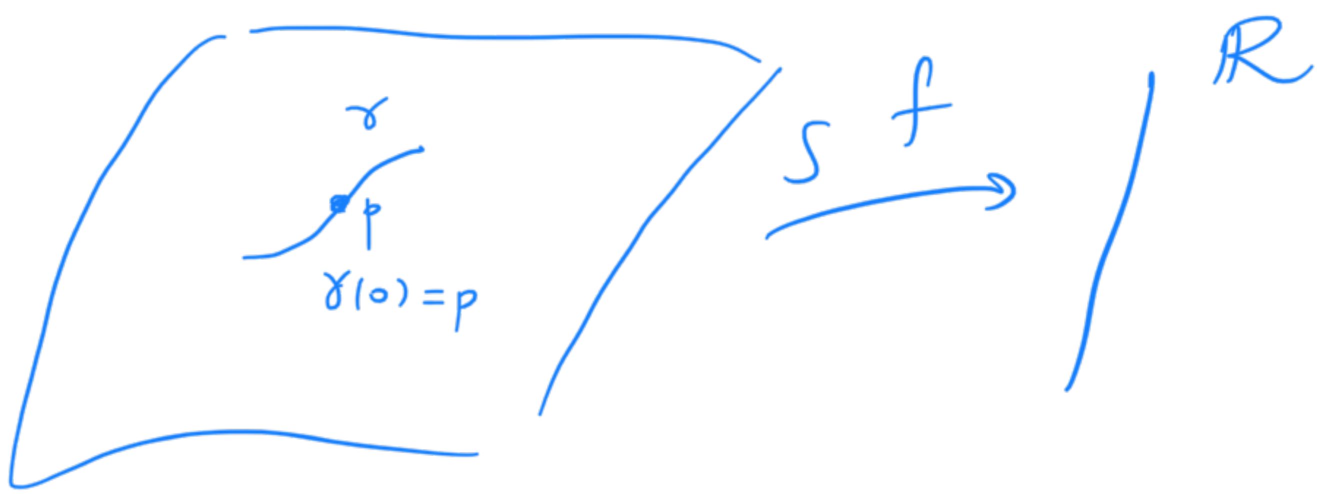
y

$$T_p^* S = \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(T S_p, \mathbb{R})$$

Para ello, necesitamos la sgte. observación:

Si $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow S$ curva suave

$$\gamma(0) = p$$



Consideramos

$$f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{R}$$

Notar

$$\frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(0) \leftarrow$$ indep. de la elección de γ y f (con resp. a los

rel. de equiv. en
TS_p y T^*S_p)

Ejercicio: — Razón: Regla de la cadena + Lema —

Podemos así definir la función

$$\varphi : TS_p \times T^*S_p \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$([\gamma], [df]) \longmapsto \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)\Big|_{t=0}$$

φ : función bilineal.

Es más: induce una identificación

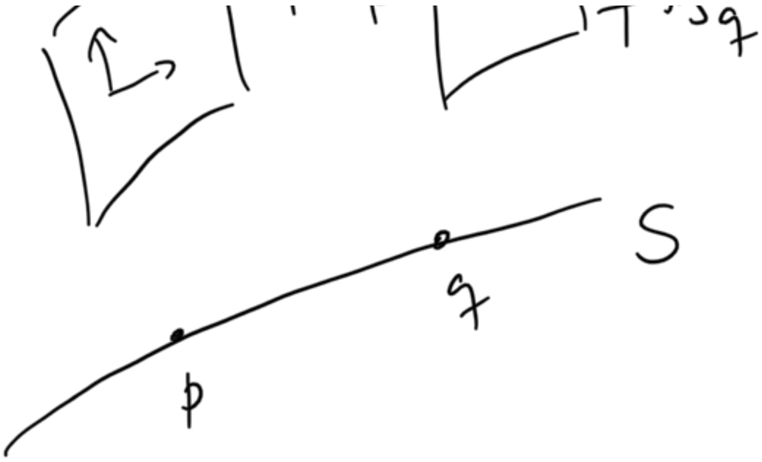
$$\underset{\substack{\text{espacio}\\ \text{cotangente}}}{T^*S_p} \cong \underbrace{\mathrm{Hom}(TS_p, \mathbb{R})}_{\text{dual de } TS_p}$$

$$[df] \longrightarrow \{ [\gamma] \longmapsto \varphi([\gamma],[df]) \}$$

Definición (Fibrado cotangente).

$$T^*S = \bigcup_{p \in S} T^*S_p$$

$$\Big(T^*S_p \Big| \ldots \Big|_{T^*S}$$



Ejercicio: verificar T^*S es, en efecto, un fibrado vectorial real de dim 2. (localm. trivial).

En $\mathbb{R}^2$: $\alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$

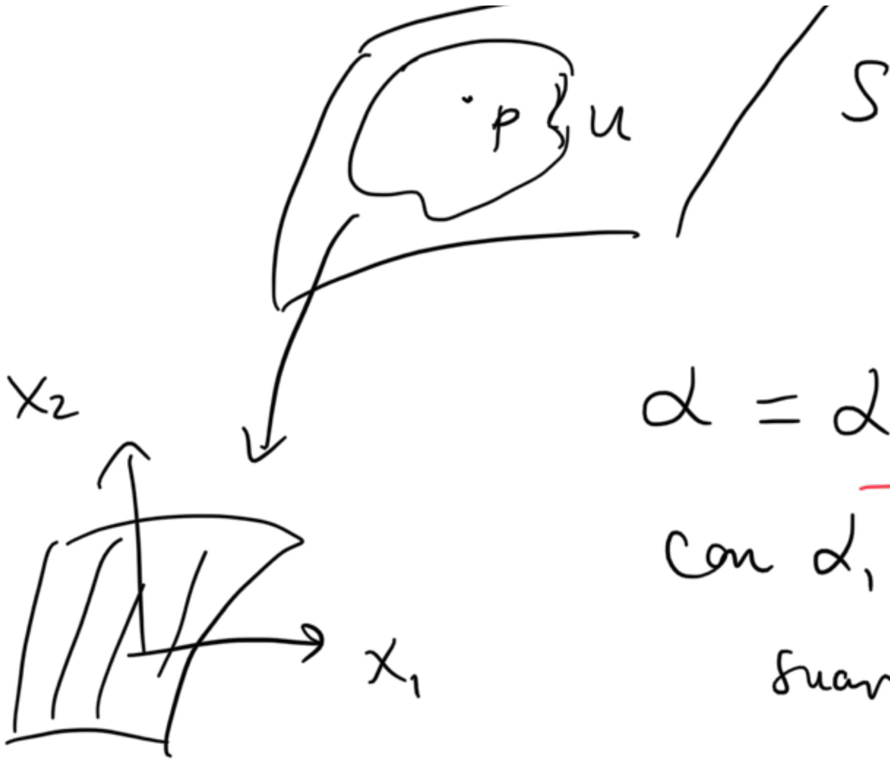
¿Qué es una 1-forma en este contexto?

Def: Una 1-forma en S es una función

$$\alpha : S \longrightarrow T^*S$$
$$p \longmapsto \alpha(p) \in T^*_p S$$

- $\alpha(p) \in T^*_p S$, $\forall p \in S$
- α "varía de manera suave con $p \in S$"

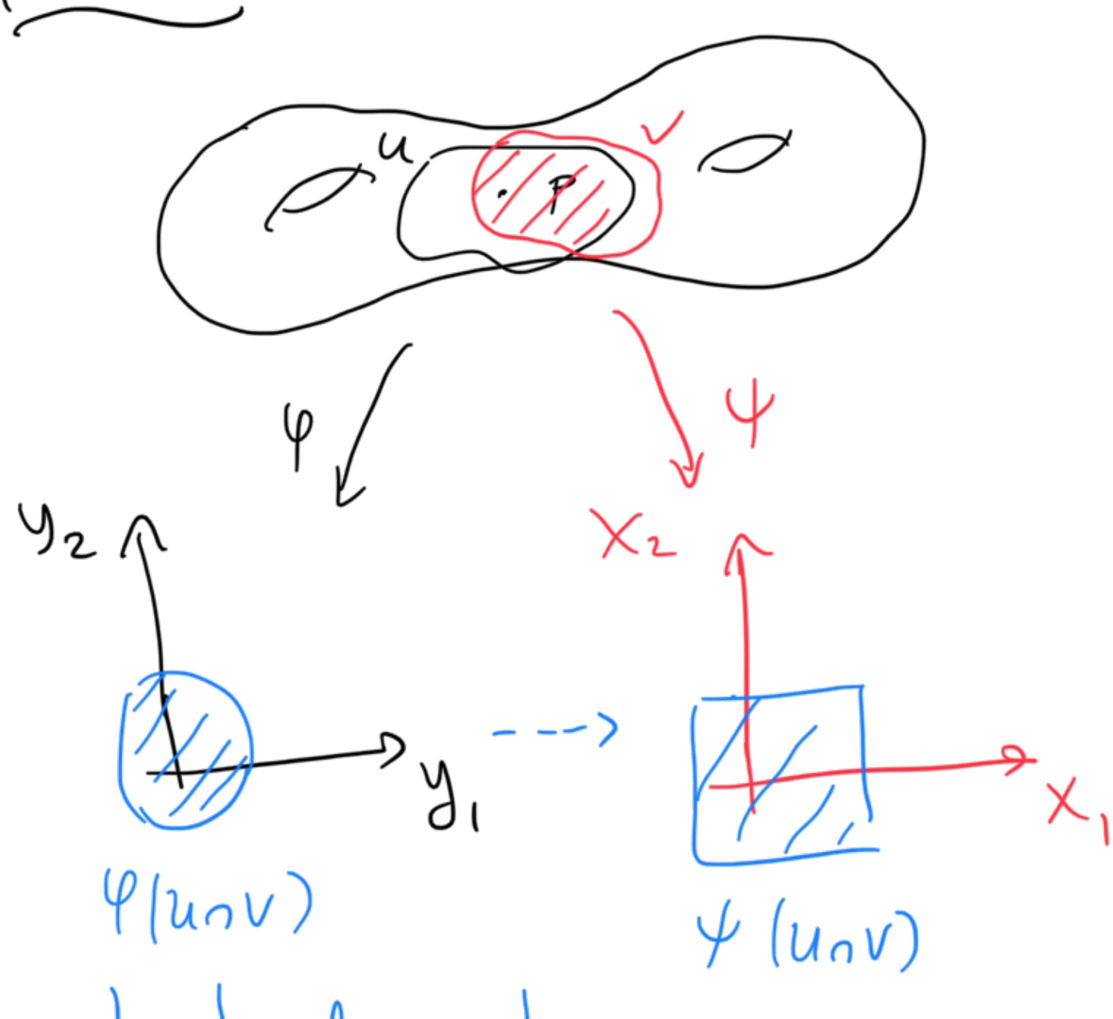
i.e. En coordenadas locales (x_1, x_2) alrededor de p.



$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$$

con α_1, α_2 funciones suaves en (x_1, x_2)

requerimos:



Por la regla de la cadena:

$i=1,2 \qquad dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial y_1} dy_1 + \dfrac{\partial x_i}{\partial y_2} dy_2 .$

Así, si $\alpha = \alpha_1(x_1,x_2)\,dx_1 + \alpha_2(x_1,x_2)\,dx_2$

En coord. (y_1, y_2) α se repres. por:

$$\alpha_1\big(\underbrace{x_1(y_1,y_2),\ x_2(y_1,y_2)}_{\text{suave}}\big)\underbrace{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2}dy_2\right)}_{*}$$

$$+\ \alpha_2\big(\underbrace{x_1(y_1,y_2),\ x_2(y_1,y_2)}_{\text{suave}}\big)\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2}dy_2\right)$$

(*) $\ldots$ (*)(*)

Obs: Notar α 1-forma es una sección suave del fibrado cotangente.

$$\begin{array}{ccc} T^*S & & T^*S_p \\ \alpha \uparrow\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi\ \uparrow \alpha \\ S & & \cdot\, p \end{array}$$

α sección global.

$\alpha(p) \in T^*S_p$.

S: superficie suave (C^∞)

Ejm: Sea $f : S \to \mathbb{R}$ una función suave

df

6 1- forma

$$df(p) \underset{def}{=} [df]_p$$

· En coord. locales

$$(*) \quad \boxed{df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2}$$

Otro punto de vista de la condición de compatibilidad para 1-formas:

Sea $F : S \to Q$ S, Q superf suaves.

$\gamma \nearrow \cdot p \longrightarrow F(p)$ $F \in C^\infty$.

Tenemos (para cada $p \in S$):

① $dF_p : TS_p \longrightarrow TQ_{F(p)}$ push-forward

$[\gamma] \longrightarrow [F \circ \gamma]$

② $dF_p^* \; T^*Q_{F(p)} \longrightarrow T^*S_p$

(pull-back) $[\alpha] \longrightarrow [\alpha \circ F]$

$[y] \longmapsto [y \circ \;\;]$

(1) y (2) son compatibles con las transf. bilineales corresp. a S y Q.

$$\left[dF^*: T^*Q \to T^*S \right]$$

Sea α una 1-forma en Q: $\alpha_{F(p)}$

definimos $F^*(\alpha) \leftarrow$ una forma pullback en S

para cada $p \in S$

$$F^*(\alpha)(p) = \underbrace{dF_p^*\Big(\underbrace{\alpha(F(p))}_{\in T^*Q_{F(p)}}\Big)}_{\in T^*S_p}.$$

Obs:

Si (x_1, x_2) son cartas locales alrededor de $F(p) \in Q$ y (y_1, y_2) cartas locales alrededor de $P \in S$

$F^*(\alpha)$ en coord. locales queda rep. por

rep. local de $F^*(\alpha)$

$$F^*(\alpha) = \alpha_1\big(x_1(y_1,y_2),\, x_2(y_1,y_2)\big)\cdot \overset{dF_1}{\boxed{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_1}{\partial y_2}dy_2\right)}}$$

$$+ \underbrace{\alpha_2\big(x_1(y_1,y_2),\, x_2(y_1,y_2)\big)\cdot \overset{dF_2}{\boxed{\left(\frac{\partial x_2}{\partial y_1}dy_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y_2}dy_2\right)}}}_{(*)(*)}$$

En $\mathbb{R}^2$: α 1-forma en $\mathbb{R}^2$

$$\alpha = f_1\, dx_1 + f_2\, dx_2$$ f_i fn's suaves

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{F = (F_1, F_2)} \mathbb{R}^2$$
(y_1, y_2) (x_1, x_2)

$$\rightarrow F^*(\alpha) = \underbrace{(f_1^* \circ F)}_{F^*(f_1)} \cdot \underbrace{dF_1}_{F^*(dx_1)} + \underbrace{(f_2^* \circ F)}_{F^*(f_2)} \cdot \underbrace{dF_2}_{F^*(dx_2)}$$

$$F_i = y_i \circ F$$

(Bott - Tu)

En resumen, tenemos:

$$\Omega^0_S \xrightarrow{d} \Omega^1_S \quad (f \mapsto [df])$$

d: derivada exterior.

d satisface:

① $d(fg) = f\,dg + g\,df$ ✓

② Si $F : S \to Q$ ✓

$d(F^* f) = F^* d f$ $\boxed{d \, y \, F^*}$

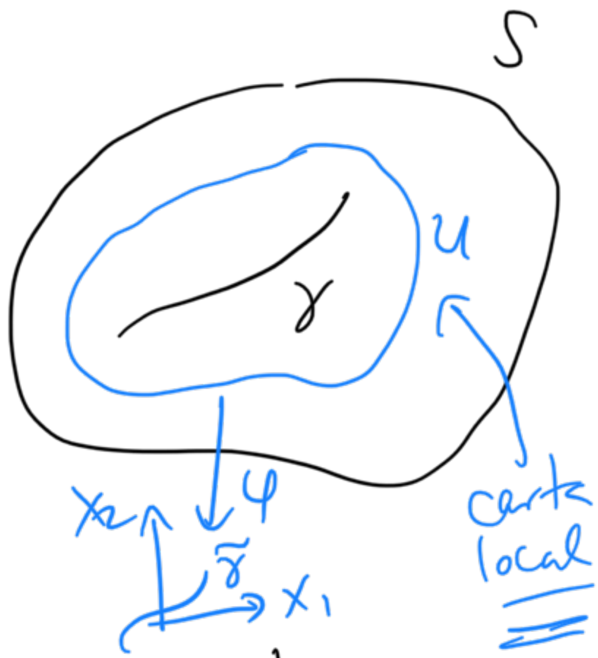
$\boxed{\text{conmutan.}}$

$$f \in \Omega^0_Q \quad y \quad F^*(f) = f \circ F$$

Observación importante:

(*) 1-formas se pueden integrar sobre curvas.

$\gamma : [0,1] \longrightarrow S$
(suave)



α 1-forma en S

$$\int_\gamma \alpha \overset{\text{def. local}}{=} \int_0^1 \alpha_1 \frac{d\gamma_1}{dt} + \alpha_2 \frac{d\gamma_2}{dt}$$

(*) Objetivo: definir de manera precisa

$$\left\{\begin{matrix} K\text{-formas} \\ \text{dif} \end{matrix}\right\} \times \left\{\begin{matrix} K\text{-subv.} \\ \text{de } M^n \end{matrix}\right\} \longrightarrow \mathbb{R}$$

función bilineal
- bilinear pairing -

$$(\alpha, S) \longrightarrow \int_S \alpha$$

2-formas en S:

Preg: Sea α 1-forma en S

¿cuándo podemos escribir

(α-exacta) $\quad \alpha = df$, para alguna: $f \in \Omega^0_S$?

$(\alpha \in \operatorname{Im} d)$

- $df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} dx_2 \qquad \Omega^0_S \xrightarrow{d} \Omega^1_S$

Cuando $S = \mathbb{R}^2$.

$$\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2$$

α_1, α_2 funciones suaves arbitrarias.

si

$\underline{df = \alpha}$, para cierta $f \in \Omega^0_{\mathbb{R}^2}$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha_1 , \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \alpha_2$$

$$\Rightarrow R = \underbrace{\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1}}_{} = 0$$

(por igualdad 2ª der. parciales

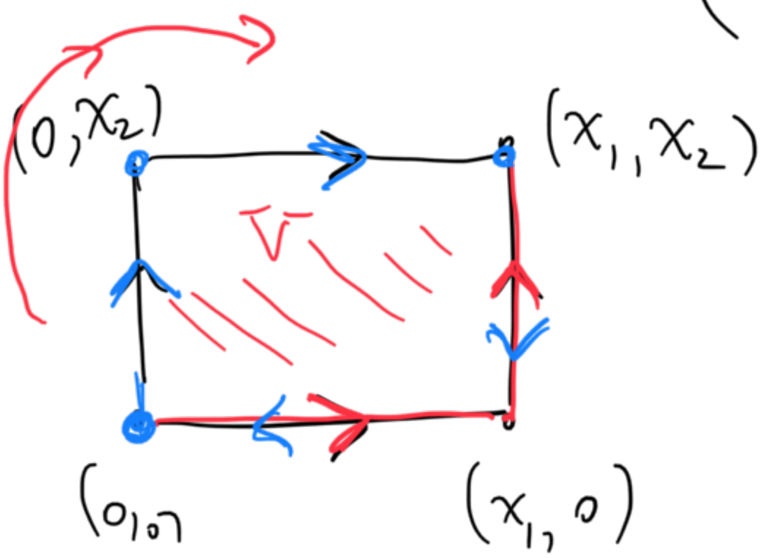
mixtas)

<u>Condición necesaria:</u> $R = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = 0$ en $\mathbb{R}^2$.

<u>Es más</u>, en $\mathbb{R}^2$ esta condición es suficiente.

suponjamos $R = \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_2} - \frac{\partial \alpha_2}{\partial x_1} = 0$.

$$\left(\alpha = \alpha_1 dx_1 + \alpha_2 dx_2 \right)$$



definimos

- $f_1(x_1,x_2) = \int_0^{x_2} \alpha_2(0,t)dt + \int_0^{x_1} \alpha_1(t,x_2)dt$

- $f_2(x_1,x_2) = \int_0^{x_1} \alpha_1(t,0)dt + \int_0^{x_2} \alpha_2(x_1,t)dt$

Notar $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_i} = \alpha_i$ (por construcción)

(*)

Stokes:

$$f_1(x_1,x_2) - f_2(x_1,x_2) = \iint\limits_V R = 0$$

$\Rightarrow f_1 = f_2$

Así $f = f_1$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} = \alpha_1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_2} = \alpha_2 \end{cases} \quad (*)$$

Obs: 1) 1-Forma Exacta: $\Longleftrightarrow$ $\alpha = df$, $f \in \Omega^0_S$

(*)

1-Forma cerrada $\Longleftrightarrow$ "$d\alpha = 0$".

En $\mathbb{R}^2$: $\left\{ \begin{matrix} \text{1-formas} \\ \text{Exacta} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{1-forma} \\ \text{cerrada} \end{matrix} \right\}$ (*)

(2) Criterio para que una 1-forma sea exacta

$\Big\updownarrow$ rel.

integración sobre reg. bidim.

$\Big\updownarrow$

T. de Stokes.

Prox: definir complejo de cadenas

$$\Omega^0_S \xrightarrow{d} \Omega^1_S \xrightarrow{d} \underbrace{\Omega^2_S}_{\text{espacio de dos formas en } S}$$

localm.

$$\omega = \underbrace{f(x_1, x_2)}_{f \text{ suave.}} dx_1 \wedge dx_2$$

- $d \circ d = 0$ ✓✓

- $d(f \cdot \alpha) = df \wedge \alpha + f\, d\alpha.$

f 0-forma

f 0-forma

α 1-forma

$$\mathrm{Im}(d) \subseteq \mathrm{Ker}(d)$$

formas exactas   formas cerradas

coh. de de Rham

$$H^1_{dR}(S) = \mathrm{Ker}(d) / \mathrm{Im}(d)$$