De la clase pasada: dado un divisor D de X (X sup. Riemann compacta)

- $\mathcal{O}_D \leftarrow$ haz lineal de funciones meromorfas f

$$(f) + D \geq 0$$

- $\Omega_D \leftarrow$ haz lineal de 1-formas meromorfas ω tal que

$$(\omega) + D \geq 0.$$

Recordar: Existe un isomorfismo:

$$\mathcal{O}_{K+D} \xrightarrow{\sim} \Omega_D, \quad g \mapsto g \cdot \omega$$

donde $K = \mathrm{div}(\omega)$, ω 1-forma meromorfa en X

$K \leftarrow$ divisor canónico.

e.g: $\mathcal{O}_{K-D} \simeq \underline{\underline{\Omega_{-D}}}$

Obs: $K \leftarrow$ divisor canónico de X ($K = K_X = \mathrm{div}(\omega)$

Notar:

$$D = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_K \xrightarrow{\sim} \underbrace{\Omega_0}_{\text{haz de 1-formas holomorfas}}$$

haz de 1-formas holomorfas en X

en X.

- $\dim H^0(X, \Omega_0) = \dim$ espacio vec. de 1-formas holo. en X

$= g \leftarrow$ género

$= \dim H^0(X, \mathcal{O}_K)$.

Obs 1

Sea $D = \sum_{x \in X} n_x \cdot x$ divisor en X.

Decimos que D es efectivo si $n_x \geq 0$ $\forall x \in X$.

Obs 2: (Teorema Abel - Jacobi)

Si D es un divisor en X de grado mayor o igual que $g =$ genero(X), entonces D es equivalente a un divisor efectivo.

(es decir, existe D' efectivo tal que

$$D - D' = \text{div}(f),$$

+ meromorfa en X).

Obs 3:

Recordemos Teo. de Riemann-Roch nos dice lo sgte:

$$\boxed{\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g + \deg(D).}$$

Equivalentemente

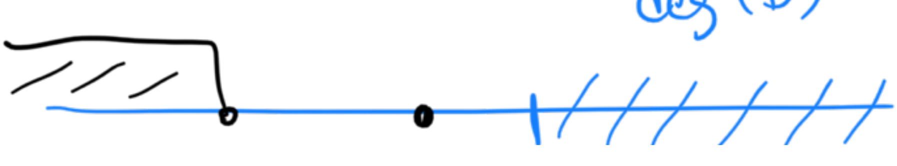
$$\boxed{\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + \deg(D).}$$

El argumento clásico reduce la prueba del T. de R-R al caso de divisores efectivos.

- si $\deg(D) \geq g$, entonces $D \sim$ divisor efectivo D'

$$\overset{(*)}{=}$$

$\deg(D)$



$g-2 \quad g-1 \quad g$

- si $\deg(D) \leq g-2$

entonces

$$\deg(K-D) = \deg K - \deg D$$
$$= (2g-2) - \deg D \geq g.$$

Así $K-D \sim$ div. efectivo.

$$\Rightarrow L(K-D) - L(D) = 1-g+(2g-2+d)$$
$$= g-1-d$$

$$\Rightarrow \boxed{L(D) - L(K-D) = 1-g+d}$$

- si $\deg(D) = g-1$

$\Rightarrow$ Ni D ni $K-D$ son equiv. a un div. efectivo.

$\Rightarrow D \sim \tilde{D}$ y $K-D \sim D'$

$\deg \tilde{D} < 0$ $\qquad$ $\deg D' < 0$

$\Rightarrow \quad \ell(D) = 0 \qquad y \qquad \ell(K-D) = 0$

$\Rightarrow$ Así $\quad \ell(D) - \ell(K-D) = 0$

y

$$1 - g + d = 1 - g + (g-1) = 0.$$

Algunas consecuencias del T. de Riemann-Roch

Sean $P_1, P_2, \ldots, P_d$ puntos en X.

(1) Consider: $D = \underbrace{P_1 + P_2 + \cdots + P_d}_{\text{divisor efectivo.}}$

• $H^0(X, \mathcal{O}_D) = \left\{ f \text{ meromorfa} \;\middle|\; \begin{array}{l} f = 0 \\ \text{ó} \\ (f) \geq -D \end{array} \right\}$

$= \{ f \text{ meromorfa} \mid (f) \geq -P_1 - P_2 \cdots - P_d \}$

$= \left\{ \begin{array}{l} f \text{ meromorfa:} \\ f \text{ tiene a lo más polos de} \\ \text{orden } 1 \text{ en } P_1 \ldots P_d \end{array} \right\}$

$p_1, \dots, p_d$

$$L(D) = \dim H^0(X, \mathcal{O}_D).$$

- $H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) \cong H^0(X, \Omega_{-D})$

$$= \{ \omega \text{ 1-forma meromorfa en } X \mid (\omega) + (-D) \geq 0 \}$$

$$= \{ \omega \text{ 1-forma meromorfa} \mid (\omega) \geq \underbrace{D}_{p_1+p_2+\dots+p_d} \}$$

$$= \{ \omega \text{ 1-forma meromorfa con ceros exactam. en los puntos } p_1, p_2, \dots, p_d \}$$

- $L(K-D) = \dim H^0(X, \Omega_{-D})$

Así:

$$L(D) - L(K-D) \underset{R-R}{=} 1 - g + \deg(D) = \underbrace{1-g+d}.$$

(2) Tomemos $d = g+1$ en (1)

($g+1$ puntos distintos en X)

$$L(D) - \underbrace{L(K-D)} = 2$$

$\dim \geq 0$

$\Rightarrow l(D) \geq 2$

$\Rightarrow \dim \left\{ \begin{array}{l} \text{funciones meromorfas} \\ \text{en } X \text{ con a lo más} \\ \text{polos simples en } g+1 \\ \text{puntos distintos} \end{array} \right\} \geq 2$

$\Rightarrow$ existe $g : X \to \mathbb{P}^1$ meromorfa no holo. (con polos) en X.

③ Sea D un divisor en X.

Si $\deg(D) \geq 2g-1$

entonces

$$\boxed{l(D) = 1 - g + d}$$ ✓ (i.e $l(K-D)=0$)

Prueba: si $\deg(D) \geq 2g-1 > 2g-2$

$\Rightarrow \deg(K-D) < 0$.

$$\Rightarrow \ell(K-D) \underset{\dim}{=} H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 0 . \ \text{↯}$$

Obs: Sea $K = K_X$: divisor canónico de X

$$\deg(K) = 2g-2 = -\chi(X)$$

$$= -(b_0 - b_1 + b_2)$$

$$= -(1 - 2g + 1)$$

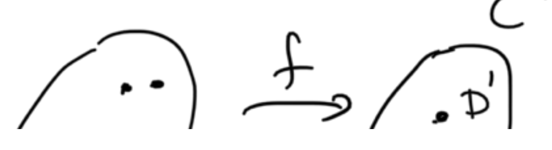
Generaliz de Gauss-Bonnet ó T. de índice de Hopf.

(4) T. de Riemann-Hurwitz: (ó fórmula de Riemann-Hurwitz)

Contexto:

Sea $f : C \to C'$ una función holo. no cte entre las sup. de Riemann C y C'.

Sean $g = \text{género}(C)$, $g' = \text{género}(C')$.



Si D' divisor en C'

Si D' divisor en C',

tomemos

$$\underbrace{f^*(D')}_{\text{divisor en } C} = \text{divisor en } C$$

definido al componer con f las ecuaciones que definen a D'.

divisor en C.

para cada $q \in C$ y $p = f(q) \in C'$ podemos elegir coord. locales z y w alrededor de q y p de modo que f se puede expresar como

$$w = z^{\nu(q)}$$

Entonces para cada $p \in C'$,

$$f^*(p) = \sum_{q \in f^{-1}(p)} \nu(q) \cdot q$$

El grado $\underline{n}$ del divisor $\underline{f^*(p)}$ es indep. del punto p y se identifica

con el grado de f

... con el grado de f.

Definimos R : divisor de ramificación de f:

$$R = \sum_{q \in C} \underbrace{(\nu(q) - 1)}_{\substack{\text{índice de} \\ \text{ramificación de } f \\ \text{en } q \in C.}} \cdot q .$$

Notar:

Dado que, alrededor de q, la función f es de la forma $w = z^{\nu(q)}$, entonces para cualquier 1-forma meromorfa ϕ en C' se tiene

$$\boxed{\underbrace{\mu_q}_{\substack{\text{orden del} \\ 0 \text{ o polo en } q}}(f^*\phi) = \mu_q(\phi) \cdot \nu(q) + \nu(q) - 1}$$

Entonces

- $(f^*\phi) = f^*((\phi)) + R$ ... (*)

div. de la

1 - forms meromorfa

$f^* \phi$

$n = \deg(f)$

Aplicando $\deg(\quad)$ a $*$:

$$\deg(K_C) = n \cdot (\deg K_{C'}) + \deg(R)$$

Es decir

$$\boxed{2g-2 = n(2g'-2) + \deg(R)}$$

Formula de Riemann - Hurwitz.

como $\deg(K_C) = -\chi(C)$ ← caract. de Euler de C

$$-\chi(C) = n \cdot (-\chi(C')) + \deg R$$

$$\boxed{\chi(C) = n \cdot \chi(C') - \deg R}$$

$(*)$

(5)

$$\dim H^{0,1} = \dim H^{1,0} = g$$

$\uparrow$ dim espacio vect. de 1-formas holomorfas en X.

Tomemos

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_g$ 1-formas holo. l. i. en X.

Si $g \geq 1$, entonces tenemos

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$$

$$x \longmapsto [\sigma_1(x) : \sigma_2(x) : \ldots : \sigma_g(x)]$$

definido en X pues (ejercicio Tarea 3) las secciones σ_i no tienen ceros comunes.

- En general, si $\mathcal{L}$ haz lineal y $s_1, s_2, \ldots, s_{N+1}$ son secciones de $\mathcal{L}$ que no se anulan simult. en X

entonces podemos definir una función

$$\varphi_D = \varphi_{\mathcal{L}} : X \longrightarrow \mathbb{P}^N$$
(evaluación)
$$x \longmapsto [s_1(x) : \dots : s_{N+1}(x)]$$

$\mathcal{L} \underset{\text{iso}}{\cong} \mathcal{O}_D$ para cierto divisor D ($\mathcal{L}$ tiene una sección meromorfa no nula (*) s, así $D = \mathrm{div}(s)$

$$\mathcal{L} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_D$$
$$f \longmapsto f/s \;)$$

$$\deg(\mathcal{L}) \underset{\text{def}}{=} \deg(D).$$

Criterio (Abel-Jacobi)

Si $\deg D > \underbrace{\deg K_X}_{2g} + 2$

entonces φ_D es inyectiva.

$$\varphi_D : X \xhookrightarrow{\text{inmersión}} \mathbb{P}^{\ell(D)-1}$$

En particular:

Sea D un divisor en X de grado $2g+1$

entonces

$$\ell(D) \overset{RR}{=} 1 - g + d \qquad \left(\text{pues } \deg D \geq 2g-1\right)$$

$$= 1 - g + 2g + 1$$

$$= g + 2 \qquad \left(\text{hay } g+2 \text{ secc. l.i. en } \mathcal{L}_D\right)$$

Así, existe una inmersión

$$\varphi_D : X \hookrightarrow \mathbb{P}^{g+1}$$

Comentario:

$\mathcal{L}$ haz lineal

s

si existe $s \neq 0$ $\forall x \in X$

entonces

$\mathcal{L} \simeq \mathcal{O}$ haz trivial.

Queremos mostrar que $\mathcal{L}$ admite una sección meromorfa no nula.

si $\mathcal{L} \neq \mathcal{O}$, entonces dada una sección global s de $\mathcal{L}$, $V(s) = \{x \in X \mid s(x) = 0\}$

no vacío.

- Podemos considerar

$D' = \operatorname{div}(s)$ ← hallar $\dim L(D')$.

$\updownarrow$

- $p \in X$.

$\mathcal{L}^{\otimes np}$ ✓ $\quad n >> 0$

$\deg(\mathcal{L}^{\otimes np})$

$\dim h^0(\mathcal{L}^{\otimes np}) \geq 1 - g + \deg(\mathcal{L}^{\otimes np})$

$\dim H^0(\mathcal{L}^{\otimes np}) \geq 1 - g + \deg(\mathcal{L}^{\otimes np})$

≥ 2

si

$\deg(\mathcal{L}^{\otimes np}) \geq g+1.$

Comentarios más generales:

R-R:

$$\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \Omega_{-D}) = 1 - g + d.$$

otra versión es: (usar coh. de haces)

$$\underbrace{\dim H^0(X,\mathcal{L}) - \dim H^1(X,\mathcal{L})}_{\text{"característica de Euler de } \mathcal{L}\text{"}} = 1 - g + \deg(\mathcal{L})$$

primera clase de Chern de $\mathcal{L}$

$$\underbrace{b_0(\mathcal{L}) - b_1(\mathcal{L})}_{\text{índice analítico/alg/complejo.}} = 1 - g + \deg(\mathcal{L}).$$

género

$\longleftrightarrow$ $(\chi(X) = 2 - 2g)$

inv. top.

En general (dim. más altas)

X variedad alg. $\dim X = n$

$\mathcal{F}$ haz coherente.

$$\underbrace{\sum_{i=0}^{n} (-1)^i \dim H^i(X,\mathcal{F})}_{\substack{\chi(X,\mathcal{F}) \\ \text{carac. de Euler}}} = \int_X ch(\mathcal{F}) \wedge Td(X)$$

pol en las clases de chern $\mathcal{F}$.

clase de todd de X

análogo de genero de X en dim. altas

T. Hirzebruch Riemann Roch.

• $H^1(X,\mathcal{L})^* \simeq H^0(X, K_X \otimes \mathcal{L}^{-1})$

dualidad de Serre.

$$\dim H^1(X,\mathcal{L}_D) = \dim H^0(X, K_X \otimes \mathcal{L}_D^{-1})$$

$$= \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D})$$

$$\text{———————— } 0 \text{ ————————————————}$$