

# Superficies de Riemann (tarea 1)

Eduardo León (梁遠光)

Mayo 2020

## Ejercicio 1. (Compactificaciones)

- (Compactificación de Alexandroff) Considere el conjunto  $X = \mathbb{R}^n \cup \{\infty\}$  equipado con la topología en la cual un subconjunto  $U \subset X$  es abierto si cumple una de las siguientes condiciones:

- a) Si  $\infty \notin U$ , entonces  $U$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Si  $\infty \in U$ , entonces  $X - U$  es un subconjunto compacto en  $\mathbb{R}^n$ .

Muestre que  $X$  es un espacio topológico Hausdorff y compacto.

- (Proyección estereográfica) Considere la esfera unitaria

$$S^n = \{(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$$

Muestre que la proyección estereográfica  $\sigma : S^n \rightarrow X$  dada por

$$\sigma(x_0, \dots, x_n) = \begin{cases} \frac{1}{1-x_0}(x_1, \dots, x_n), & \text{si } x_0 \neq 1 \\ \infty, & \text{si } x_0 = 1 \end{cases}$$

es un homeomorfismo. En particular, la esfera de Riemann  $\hat{\mathbb{C}}$  es homeomorfa a la esfera  $S^2$ , después de identificar  $\mathbb{R}^2$  con  $\mathbb{C}$  de la manera usual.

*Solución.*

- Primero nos aseguraremos de que la topología del enunciado sea, en efecto, una topología. Notemos que los abiertos de  $X$  son los subconjuntos  $U \subset X$  tales que

- a) La parte finita  $U' = U \cap \mathbb{R}^n$  es un subconjunto abierto de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Si  $\infty \in U$ , entonces  $U^c = X - U$  es un subconjunto acotado de  $\mathbb{R}^n$ . Recordemos que  $C > 0$  es una cota para  $A \subset \mathbb{R}^n$  si todo punto  $p \in A$  tiene norma  $\|p\| < C$ .

Dada una familia  $\mathcal{F} = \{U_\alpha\}$  de subconjuntos de  $X$ , pongamos  $\mathcal{F}' = \{U'_\alpha\}$  y  $\mathcal{F}^c = \{U_\alpha^c\}$ .

Sea  $\mathcal{F}$  una familia de abiertos de  $X$ . Entonces  $V = \bigcup \mathcal{F}$  también es un abierto de  $X$ :

- a)  $\mathcal{F}'$  es una familia de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $V' = \bigcup(\mathcal{F}')$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Si  $\infty \in \bigcup \mathcal{F}$ , entonces existe algún  $U \in \mathcal{F}$  tal que  $\infty \in U$ . Su complemento  $U^c$  es acotado. Por ende,  $V^c = \bigcap(\mathcal{F}^c)$  está acotado por la misma cota de  $U^c$ .

Sea  $\mathcal{G}$  una familia finita de abiertos de  $X$ . Entonces  $V = \bigcap \mathcal{G}$  también es un abierto de  $X$ :

- a)  $\mathcal{G}'$  es una familia finita de abiertos de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces  $V' = \bigcap(\mathcal{G}')$  es un abierto de  $\mathbb{R}^n$ .
- b) Si  $\infty \in \bigcap \mathcal{G}$ , entonces  $\infty \in U$  para todo  $U \in \mathcal{G}$ . Entonces todos los complementos  $U^c \in \mathcal{G}^c$  son acotados. Por ende,  $V^c = \bigcup(\mathcal{G}^c)$  está acotado por el máximo de las cotas de los  $U^c \in \mathcal{G}^c$ .

Puesto que  $\mathbb{R}^n$  es Hausdorff y abierto en  $X$ , dos puntos distintos de  $\mathbb{R}^n$  pueden ser separados en  $X$  utilizando los mismos abiertos que los separan en  $\mathbb{R}^n$ . Puesto que  $\mathbb{R}^n$  es localmente compacto, todo punto de  $\mathbb{R}^n$  puede ser separado de  $\infty$  por una vecindad relativamente compacta. Por ende,  $X$  es un espacio Hausdorff.

Sea  $\mathcal{F}$  una cobertura abierta de  $X$ . En particular, existe algún  $U \in \mathcal{F}$  tal que  $\infty \in U$ . Entonces  $U^c$  es compacto y existe una subfamilia finita  $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$  que cubre  $U^c$ . Agregando  $U$  a la canasta  $\mathcal{G}$ , tenemos una subfamilia finita de  $\mathcal{F}$  que cubre  $X$ . Por ende,  $X$  es un espacio compacto.

■ La proyección estereográfica  $\sigma$  es una biyección por razones geométricas:

- Si  $p$  es el polo norte de  $S^n$ , entonces  $\sigma(p) = \infty$ .
- Si  $p$  no es el polo norte de  $S^n$ , entonces  $q = \sigma(p)$  es el único punto del hiperplano  $x_0 = 0$  que es colineal con  $p$  y el polo norte.
- Si  $q$  es un punto del hiperplano  $x_0 = 0$ , entonces existe un único punto  $p = \sigma^{-1}(q)$ , distinto del polo norte, que es colineal con  $q$  y el polo norte.

La proyección estereográfica  $\sigma$  es continua en cada punto  $p \in S^2$ :

- Si  $p$  no es el polo norte, entonces tomaremos una vecindad  $U$  de  $p$  alejada del polo norte. Por construcción, la restricción de  $\sigma$  a  $U$  es una aplicación diferenciable  $\tilde{\sigma} : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Entonces  $\tilde{\sigma}$  es continua en  $p$ . Por ende,  $\sigma$  es continua en  $p$ .
- Si  $p$  es el polo norte, entonces tomaremos una vecindad arbitrariamente pequeña de  $\infty = \sigma(p)$ , i.e., el complemento  $K^c$  de un compacto arbitrariamente grande  $K \subset \mathbb{R}^n$ . Sea  $C > 0$  una cota superior para  $K$  y consideremos los puntos  $(x_0, \dots, x_n) \in S^2$  tales que

$$\frac{1+x_0}{1-x_0} > C^2$$

Estos puntos forman una vecindad agujereada en  $p$ . Para estos puntos,

$$\|\sigma(x_0, \dots, x_n)\|^2 = \frac{\|(x_1, \dots, x_n)\|^2}{(1-x_0)^2} = \frac{1-x_0^2}{(1-x_0)^2} = \frac{1+x_0}{1-x_0} > C^2$$

Entonces  $\sigma(x_0, \dots, x_n) \in K^c$ . Por ende,  $\sigma$  es continua en el polo norte.

La inversa de la proyección estereográfica  $\sigma$  también es continua:

- En un espacio Hausdorff y compacto (e.g.  $S^n$  o  $X$ ), los subespacios compactos son precisamente los subconjuntos cerrados.
- Por continuidad,  $\sigma$  envía subespacios compactos de  $S^n$  a subespacios compactos de  $X$ .
- Entonces  $\sigma$  envía subconjuntos cerrados de  $S^n$  a subconjuntos cerrados de  $X$ .

Por ende, la proyección estereográfica  $\sigma$  es un homeomorfismo.

## Ejercicio 2. (La recta proyectiva compleja)

La recta proyectiva compleja  $\mathbb{CP}^1$  se define como el cociente del espacio total  $M = \mathbb{C}^2 - \{0\}$  en el cual dos vectores  $v, v' \in M$  se identifican si existe un escalar  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  tal que  $v' = \lambda v$ .

- Pruebe que  $\mathbb{CP}^1$  dotado de la topología cociente es una superficie topológica.
- Sean  $U_i = \{[z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^1 : z_i \neq 0\}$  y considere las aplicaciones  $\varphi_i : U_i \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por

$$\varphi_1([z_1 : z_2]) = z_2/z_1, \quad \varphi_2([z_1 : z_2]) = z_1/z_2$$

Muestre que  $\mathcal{U} = \{(U_1, \varphi_1), (U_2, \varphi_2)\}$  es un atlas holomorfo sobre  $\mathbb{CP}^1$ .

- Muestre que  $\mathbb{CP}^1$  es biholomorfa a la esfera de Riemann  $\widehat{\mathbb{C}}$ .

*Solución.*

- La topología cociente es la topología más fina sobre  $\mathbb{CP}^1$  tal que la aplicación cociente  $\pi : M \rightarrow \mathbb{CP}^1$  es continua. Esta topología se construye declarando como abiertos a los subconjuntos  $U \subset \mathbb{CP}^1$  cuya preimagen  $\pi^{-1}(U)$  es abierta en  $M$ .

Sea  $z, w : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  un sistema lineal de coordenadas y sea  $V \subset \mathbb{C}^2$  el abierto  $w \neq 0$ . Consideremos el automorfismo  $\psi : V \rightarrow V$  definido por  $\psi(z, w) = (z/w, w)$  y la proyección  $\rho : V \rightarrow \mathbb{C}$  que descarta la coordenada  $w$ . Por construcción,  $\psi$  envía órbitas de  $\pi$  en el dominio a órbitas de  $\rho$  en el codominio. Entonces la aplicación  $\varphi : \pi(V) \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $\varphi([z : w]) = z/w$  que completa el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\psi} & V \\ \downarrow \pi & & \downarrow \rho \\ \pi(V) & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C} \end{array}$$

es un homeomorfismo. Considerando todas las elecciones posibles de  $z, w$ , hemos construido un atlas topológico sobre  $\mathbb{CP}^1$ . Sólo faltan dos últimos detalles:

- Dados dos puntos  $p, q \in \mathbb{CP}^1$ , siempre podemos elegir  $z, w$  de tal manera  $p, q \in \pi(V)$ . Entonces  $p, q$  pueden ser separados en  $\mathbb{CP}^1$  utilizando los mismos abiertos que los separan en  $\pi(V)$ . Por ende,  $\mathbb{CP}^1$  es un espacio Hausdorff.
- Dos elecciones de  $z, w$  (en particular, las que usaremos en el siguiente ítem) son suficientes para cubrir  $\mathbb{CP}^1$ . Las dos vecindades  $\pi(V)$  inducidas son segundo enumerables, por ende, la unión de ellas, que es todo  $\mathbb{CP}^1$ , también es segundo enumerable.

Entonces  $\mathbb{CP}^1$  es una variedad topológica de dimensión real 2, i.e., una superficie.

- Sea  $z', w' : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}$  un nuevo sistema lineal de coordenadas y sea

$$\begin{bmatrix} z' \\ w' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ w \end{bmatrix}$$

el cambio de base entre el sistema original y este nuevo sistema. Entonces la aplicación de transición entre  $\pi(V)$  y  $\pi(V')$  es la transformación de Möbius

$$z'/w' = \frac{az + bw}{cz + dw} = \frac{a(z/w) + b}{c(z/w) + d}$$

que es obviamente holomorfa. En particular,

- Tomando  $(z, w) = (z_2, z_1)$  obtenemos la carta  $(U_1, \varphi_1)$ .
- Tomando  $(z', w') = (z_1, z_2)$  obtenemos la carta  $(U_2, \varphi_2)$ .
- La aplicación de transición entre estas cartas es la inversa multiplicativa  $z_2/z_1 \mapsto z_1/z_2$ .
- La estructura compleja de  $\widehat{\mathbb{C}}$  se construye usando un atlas muy similar al de  $\mathbb{CP}^1$ :
  - Sobre la vecindad  $\mathbb{C}$ , usamos la carta coordenada  $z \mapsto z$ .
  - Sobre la vecindad  $\mathbb{C}^{-1} = \widehat{\mathbb{C}} - \{0\}$ , usamos la carta coordenada  $z \mapsto 1/z$ .
  - La aplicación de transición entre estas cartas es la inversa multiplicativa  $z \mapsto 1/z$ .

El isomorfismo  $\varphi : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que aprovecha esta semejanza estructural está definido por

$$\varphi([z_1 : z_2]) = \begin{cases} z_2/z_1, & \text{si } z_1 \neq 0 \\ \infty, & \text{si } z_1 = 0 \end{cases}$$

**Ejercicio 3.** (Operadores  $\partial$  y  $\bar{\partial}$ )

- Sea  $f(z) = u(z) + i v(z)$  una función compleja continua. Recuerde que  $f$  es holomorfa en  $z_0$  si y sólo si las derivadas parciales de  $u, v$  existen y satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x$$

en una vecindad de  $z_0$  (teorema de Looman-Menchoff). Note que

$$x = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

así que  $u, v$  pueden ser consideradas funciones de  $z, \bar{z}$ . Verifique que

$$\bar{\partial}f = \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x)$$

y concluya que  $f$  es holomorfa en  $z_0$  si y sólo si  $\bar{\partial}f = 0$  en una vecindad de  $z_0$ .

- Usando como modelo el ítem anterior, defina un operador  $\partial$  tal que  $\partial \bar{f} = 0$  para toda función antiholomorfa  $\bar{f}$ .

*Solución.*

- Por la regla de la cadena, tenemos

$$\bar{\partial} = \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{\partial x}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

Aplicando este operador a  $f = u + iv$ , tenemos

$$\bar{\partial}f = \bar{\partial}u + i\bar{\partial}v = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(u_y + v_x)$$

Por ende, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $f$  es holomorfa en  $z_0$ .
- $u, v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann en una vecindad de  $z_0$ .
- Las partes real e imaginaria de  $\bar{\partial}f$  se anulan en una vecindad de  $z_0$ .
- $\bar{\partial}f = 0$  en una vecindad de  $z_0$ .

- Por la regla de la cadena, tenemos

$$\partial = \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial x}{\partial z} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z} \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial}{\partial y}$$

Aplicando este operador a  $\bar{f} = u - iv$ , tenemos

$$\partial \bar{f} = \partial u - i\partial v = \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{i}{2} \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{i}{2} \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) - \frac{i}{2}(u_y + v_x)$$

Por ende, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $\bar{f}$  es antiholomorfa (en  $z_0$ ).
- $u, v$  satisfacen las ecuaciones de Cauchy-Riemann (en una vecindad de  $z_0$ ).
- Las partes real e imaginaria de  $\partial \bar{f}$  se anulan (en una vecindad de  $z_0$ ).
- $\partial \bar{f} = 0$  (en una vecindad de  $z_0$ ).

**Ejercicio 4.** (Retículos y toros)

Sean  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  y  $\Gamma' = \mathbb{Z}\omega'_1 + \mathbb{Z}\omega'_2$  dos retículos en  $\mathbb{C}$ .

- Muestre que  $\mathbb{C}/\Gamma$  es homeomorfo a  $S^1 \times S^1 \subset \mathbb{C}^2$  vía

$$\lambda\omega_1 + \mu\omega_2 \mapsto (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu})$$

donde  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ . Aquí  $S^1 \times S^1$  es considerado con la topología métrica inducida por

$$\{(e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu}) : \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

y, puesto que  $\omega_1, \omega_2$  son  $\mathbb{R}$ -linealmente independientes, se tiene  $\mathbb{C} = \mathbb{R}\omega_1 + \mathbb{R}\omega_2$ .

- Muestre que  $\Gamma = \Gamma'$  si y sólo si existe una matriz

$$A \in \text{SL}(2, \mathbb{Z}) = \{A \in \text{GL}(2, \mathbb{Z}) : \det A = 1\}$$

que satisface alguna de las relaciones

$$\begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_2 \\ \omega_1 \end{bmatrix}$$

- Sea  $\alpha \in \mathbb{C}^*$  tal que  $\alpha\Gamma \subset \Gamma'$ . Muestre que el reescalamiento  $z \mapsto \alpha z$  induce una aplicación holomorfa  $\varphi : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma'$ , la cual es un biholomorfismo si y sólo si  $\alpha\Gamma = \Gamma'$ .
- Muestre que todo toro  $X = \mathbb{C}/\Gamma$  es isomorfo a uno de la forma

$$X(\tau) = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau}$$

donde  $\tau$  satisface  $\Im(\tau) > 0$ .

- Sea  $A = \text{SL}(2, \mathbb{Z})$  y sea  $\Im(t) > 0$ . Defina

$$\tau' = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Muestre que los toros  $X(\tau), X(\tau')$  son biholomorfos.

*Solución.*

- Tomando dos copias del recubrimiento universal  $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1, p(t) = e^{2\pi it}$ , tenemos

$$p^2(\lambda, \mu) = (p(\lambda), p(\mu)) = (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu})$$

Reetiquetando  $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$  como el número complejo  $\lambda\omega_1 + \mu\omega_2$ , tenemos

$$\pi(\lambda\omega_1 + \mu\omega_2) = (e^{2\pi i\lambda}, e^{2\pi i\mu})$$

Cocientando el dominio de  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow S^1 \times S^1$  por el grupo fundamental  $\pi_1(S^1 \times S^1) \cong \Gamma$ , obtenemos  $\tilde{\pi} : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow S^1 \times S^1$ , que es el homeomorfismo deseado.

- Puesto que  $\omega_1, \omega_2$  generan  $\Gamma$ , tenemos  $\Gamma \subset \Gamma'$  si y sólo si  $\omega_1, \omega_2 \in \Gamma'$ . Esto es,

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = A' \begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix}$$

para alguna matriz  $A'$  con entradas enteras. Invirtiendo los roles, tenemos  $\Gamma' \subset \Gamma$  si y sólo si

$$\begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

para alguna matriz  $A$  con entradas enteras. Si  $\Gamma = \Gamma'$ , entonces  $A, A'$  existen y satisfacen

$$\begin{bmatrix} \omega'_1 \\ \omega'_2 \end{bmatrix} = AA' \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix}$$

lo cual sólo es posible si  $AA' = I_2$ , porque  $\omega'_1, \omega'_2$  son  $\mathbb{Z}$ -linealmente independientes. Así pues,  $A, A'$  pertenecen al grupo de unidades  $M(2, \mathbb{Z})^* = \text{GL}(2, \mathbb{Z})$ .

La imagen de  $\text{GL}(2, \mathbb{Z})$  bajo el determinante es el grupo de unidades  $\mathbb{Z}^* = \{1, -1\}$ . Si queremos que nuestra matriz de cambio de base  $A$  siempre tenga determinante 1, podemos invertir el orden de sus columnas de ser necesario, pero en este caso tenemos que invertir las entradas del vector  $(\omega_1, \omega_2)^T$ .

- Sean  $z, w \in \mathbb{C}$  tales que  $z = w$  (mód  $\Gamma$ ). Entonces  $\alpha z = \alpha w$  (mód  $\alpha\Gamma$ ). Por ende,  $\alpha z = \alpha w$  (mód  $\Gamma'$ ). Por ende, existe una aplicación  $\varphi : \mathbb{C}/\Gamma \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma'$  que completa el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \xrightarrow{\alpha} & \mathbb{C} \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \mathbb{C}/\Gamma & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{C}/\Gamma' \end{array}$$

donde  $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma$  y  $\pi' : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}/\Gamma'$  son los cubrimientos respectivos.

Cubramos el plano complejo con bolas  $B \subset \mathbb{C}$  tales que  $B' = \alpha B$  puede ser trasladada al interior del polígono fundamental de  $\Gamma'$ , que está incluido en el polígono fundamental de  $\alpha\Gamma$ . Entonces  $B$  puede ser trasladada al interior del polígono fundamental de  $\Gamma$ . En particular,  $B, B'$  son buenas vecindades de los cubrimientos  $\pi, \pi'$ . Por ende, la representación local del diagrama anterior es

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\alpha} & B' \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi' \\ \pi(B) & \xrightarrow{\varphi} & \pi'(B') \end{array}$$

donde  $\alpha, \pi, \pi'$  son biholomorfismos locales conocidos. Por ende,  $\varphi$  es un biholomorfismo local.

Para completar nuestra felicidad, las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $\varphi$  es un biholomorfismo global.
  - $\varphi$  es una biyección.
  - $\alpha\Gamma = \Gamma'$
- Intercambiando  $\omega_1, \omega_2$  si es necesario, podemos suponer que  $\tau = \omega_2/\omega_1$  satisface  $\Im(\tau) > 0$ . Entonces, poniendo  $\alpha = 1/\omega_1$ , tenemos  $\Gamma' = \alpha\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$  y deducimos que  $\mathbb{C}/\Gamma$  es biholomorfo a

$$\frac{\mathbb{C}}{\Gamma'} = \frac{\mathbb{C}}{\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau}$$

- Pongamos  $\Gamma = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ . Utilizando la matriz  $A$ , obtenemos otra base de  $\Gamma$ :

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} \tau \\ 1 \end{bmatrix}$$

Reescalando  $\Gamma = \mathbb{Z}\omega_1 + \mathbb{Z}\omega_2$  por  $\alpha = 1/\omega_2$ , obtenemos  $\Gamma' = \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau'$ , donde

$$\tau' = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

Por el ítem anterior,  $X(\tau) = \mathbb{C}/\Gamma$  es biholomorfo a  $X(\tau') = \mathbb{C}/\Gamma'$ .

**Ejercicio 5.** (Orientabilidad de una superficie de Riemann)

Una variedad topológica  $X$  es *suave* si admite un atlas

$$\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n)\}$$

cuyas aplicaciones de transición

$$\tau_{\alpha\beta} = \varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

son suaves para todo  $\alpha, \beta$ . En este caso, decimos que  $\mathcal{U}$  es una *estructura diferenciable* sobre  $X$ .

Decimos que  $X$  es *orientable* si admite una estructura diferenciable  $\mathcal{U}$  tal que  $\det d\tau_{\alpha\beta} > 0$  para todo par de índices  $\alpha, \beta$ . Pruebe que toda superficie de Riemann es orientable.

*Solución.* Sea  $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$  un atlas holomorfo sobre  $X$ . Tomemos dos vecindades coordinadas  $U_\alpha, U_\beta$  que se intersecan. Sea  $z = x + iy$  la coordenada de  $U_\alpha$  y sea  $w = u + iv$  la coordenada de  $U_\beta$ . Entonces la aplicación de transición  $\tau : \varphi_\alpha(U_{\alpha\beta}) \rightarrow \varphi_\beta(U_{\alpha\beta})$ ,  $\tau(z) = w$  es holomorfa. Es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Tomando el jacobiano real de este cambio de coordenadas, tenemos

$$\det d\tau = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 > 0$$

Por ende, la estructura compleja de  $X$  induce una orientación canónica sobre  $X$ .

**Ejercicio 6.** (Continuación analítica)

(A propósito de la pregunta de David) Para los siguientes dos ejercicios concernientes a las *continuaciones analíticas*, use como guía las siguientes definiciones tomadas textualmente del libro “A Course in Complex Analysis and Riemann Surfaces” de Wilhelm Schlag (§2.4, pp. 56-57).

**Definition 2.16.** Suppose  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  is a continuous curve inside a region  $\Omega$ . We say that  $D_j = D(\gamma(t_j), r_j)$ ,  $0 \leq j \leq J$ , is a *chain of disks along  $\gamma$  in  $\Omega$*  if  $0 \leq t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_N = 1$  and  $\gamma([t_j, t_{j+1}]) \subset D_j \cap D_{j+1}$  for all  $0 \leq j \leq N - 1$ .

(Nota: El súbito reemplazo de  $J$  con  $N$  es evidentemente un error de edición.)

**Definition 2.17.** Let  $\gamma : [0, 1] \rightarrow \Omega$  be a continuous curve inside  $\Omega$ . Suppose  $f \in \mathcal{H}(U)$  and  $g \in \mathcal{H}(V)$ , where  $U \subset \Omega$  and  $V \subset \Omega$  are neighborhoods of  $p := \gamma(0)$  and  $q := \gamma(1)$ , respectively. Then we say that  $g$  is an *analytic continuation* of  $f$  along  $\gamma$  if there exists a chain of disks  $D_j := D(\gamma(t_j), r_j)$  along  $\gamma$  in  $\Omega$  where  $0 \leq j \leq J$ , and  $f_j \in \mathcal{H}(D_j)$  such that  $f_j = f_{j+1}$  on  $D_j \cap D_{j+1}$  and  $f_0 = f$  and  $f_J = g$  locally around  $p$  and  $q$ , respectively.

Muestre en detalle el lema 2.18 dado en la referencia mencionada:

**Lemma 2.18.** *The analytic continuation  $g$  of  $f$  along  $\gamma$  as in Definition 2.17 only depends on  $f$  and  $\gamma$ , but not on the specific choice of the chain of circles. In particular, it is unique.*

Considere una serie de potencias de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{2^n}$$

con radio de convergencia  $R = 1$ . Muestre que  $f$  no puede ser extendida analíticamente a discos centrados en  $z_0$  para ningún  $|z_0| = 1$ . (*Sugerencia:* Suponga que esto se puede hacer para una vecindad de  $z = 1$  y utilice la sustitución  $z = pw^2 + qw^3$ , donde  $0 < p < 1$  y  $p + q = 1$ .)

*Solución.*

- Diremos que una *cadena de funciones analíticas* a lo largo de  $\gamma$  es una lista de funciones  $f_j \in \mathcal{H}(D_j)$  definidas en una cadena de discos  $D_j$  a lo largo de  $\gamma$ , tales que, en cada intersección  $D_j \cap D_{j+1}$ , se tiene  $f_j = f_{j+1}$ . Entonces  $g$  es una continuación analítica de  $f$  a lo largo de  $\gamma$  si y sólo si existe una cadena de funciones analíticas  $f_j$  a lo largo de  $\gamma$  que empieza en  $f_0 = f$  y termina en  $f_n = g$ .

Sean  $f_j \in \mathcal{H}(D_j)$ ,  $\tilde{f}_k \in \mathcal{H}(\tilde{D}_k)$  dos cadenas de funciones analíticas a lo largo de  $\gamma$  que empiezan en la misma función  $f_0 = \tilde{f}_0$ . Sean  $t_j, \tilde{t}_k \in [0, 1]$  los instantes en los que  $\gamma$  pasa por los centros de  $D_j, \tilde{D}_k$ . Demostraremos que  $f_j = \tilde{f}_k$  para todo hito  $\tilde{t}_k$  en el tramo  $[t_j, t_{j+1}]$ .

Por construcción, el hito inicial  $\tilde{t}_0 = 0$  está en el tramo inicial  $[t_0, t_1]$  y satisface  $f_0 = \tilde{f}_0$ . Asumamos que el hito intermedio  $\tilde{t}_k$  está en el tramo  $[t_j, t_{j+1}]$  y satisface  $f_j = \tilde{f}_k$ . Entonces,

- Si el hito  $\tilde{t}_{k+1}$  también está en el tramo  $[t_j, t_{j+1}]$ , entonces tenemos  $f_j = \tilde{f}_k = \tilde{f}_{k+1}$  en la triple intersección  $D_j \cap \tilde{D}_k \cap \tilde{D}_{k+1}$ , que es no vacía. Por el teorema de la unicidad (proposición 1.26), tenemos  $f_j = \tilde{f}_{k+1}$  en la intersección  $D_j \cap \tilde{D}_{k+1}$ .
- Si no, entonces el hito  $\tilde{t}_{k+1}$  está en el tramo  $[\tilde{t}_k, \tilde{t}_{k+1}]$ . En todo caso, tenemos  $f_{j+1} = f_j = \tilde{f}_k$  en la triple intersección  $D_{j+1} \cap D_j \cap \tilde{D}_k$ , que no es vacía. Por el teorema de la unicidad, tenemos  $f_{j+1} = \tilde{f}_k$  en la intersección  $D_{j+1} \cap \tilde{D}_k$ .

Por inducción en  $j + k$ , cada vez que un hito  $\tilde{t}_k$  de una continuación está en un tramo  $[t_j, t_{j+1}]$  de la otra continuación, tenemos  $f_j = \tilde{f}_k$ . Así, cuando lleguemos al tramo final, tendremos  $f_n = \tilde{f}_n$  en una vecindad del punto final  $\gamma(1)$  de la curva.

- Abreviemos  $m = 2^n$  y consideremos las potencias del binomio sugerido:

$$g_n(w) = (pw^2 + qw^3)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p^{m-k} q^k w^{2m+k}$$

Los términos de  $g_n(w)$  tienen grados que varían desde  $2m$  hasta  $3m$ . Entonces, para todo  $n < n'$ , los términos de  $g_n(w)$  tienen menor grado que los términos de  $g_{n'}(w)$ . Definamos

$$g(w) = f(pw^2 + qw^3) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n g_n(w) = \sum_j b_j w^j$$

Por construcción, los coeficientes no nulos de  $g(w)$  son de la forma

$$b_{2m+k} = a_n \binom{m}{k} p^{m-k} q^k$$

y provienen de un único término de un único  $g_n(w)$ .

Como serie,  $g(w)$  sólo puede converger si  $f(z)$  converge para  $z = pw^2 + qw^3$ . Esto se debe a que las sumas parciales de  $f(z)$  forman una subsucesión de las sumas parciales de  $g(w)$ . En particular, para  $w > 1$ , tenemos  $z > 1$ . Por ende, la serie  $f(z)$  no converge. Por ende, la serie  $g(w)$  no converge. Por ende, el radio de convergencia de  $g(w)$  es menor o igual que 1.

Como función holomorfa,  $g(w)$  está definida en la región  $|pw^2 + qw^3| < 1$ . En particular, en el disco  $|w| \leq 1$ , tenemos  $|pw^2 + qw^3| \leq |pw^2| + |qw^3| \leq p + q = 1$ , con igualdad si y sólo si  $w = 1$ . Por ende, el radio de convergencia de  $g(w)$  es exactamente 1, pero  $g(w)$  puede ser continuada analíticamente a través el círculo  $|w| = 1$  en cualquier punto distinto de  $w = 1$ .

Supongamos por el absurdo que  $\tilde{f}(z)$  es una continuación analítica de  $f$  definida en  $z = 1$ . Entonces  $\tilde{g}(w) = \tilde{f}(pw^2 + qw^3)$  sería una continuación analítica de  $g$  definida en  $w = 1$ . La unión del disco de convergencia centrado en  $w = 1$  con la región  $|pw^2 + qw^3| < 1$  contiene un disco centrado en  $w = 0$  cuyo radio es mayor que 1, en el cual  $\tilde{g}$  es analítica. Esto contradice el hecho de que la serie  $g(w)$  no converge más allá del círculo unitario.



### Ejercicio 7. (Ramificaciones)

- Describa (de manera similar a lo hecho en clase) las superficies de Riemann asociadas a las siguientes funciones. Esto es, haga un listado de los puntos de ramificación, el índice u orden de la ramificación y los cortes y pegados requeridos para construir la superficie de Riemann.

$$z^{2/3}, \quad \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}, \quad \sqrt[3]{z^3 - z}, \quad \sqrt{z^3 - 3z},$$

$$\log(z), \quad \log(z^2 + i), \quad z^{5/7}(z - 3)^{2/7}$$

- (Dessin d'enfant versión Coquito: <https://mathoverflow.net/questions/1909/>)

Un *dessin d'enfant* es una representación esquemática de un cubrimiento ramificado  $\pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que tiene a lo más tres puntos de ramificación. Mediante una transformación de Möbius de  $\widehat{\mathbb{C}}$ , podemos suponer que los puntos de ramificación son  $0, 1, \infty$ .

El dessin d'enfant de  $\pi$  es un grafo en el cual

- Los puntos de  $\pi^{-1}(0)$  se representan como vértices blancos.
- Los puntos de  $\pi^{-1}(1)$  se representan como vértices negros.
- Las componentes conexas de  $\pi^{-1}((0, 1))$  se representan como aristas rojas que unen un vértice blanco con un vértice negro.
- El encaje del grafo en  $X$  es parte íntegra de la estructura.

Para toda superficie de Riemann  $X$ , las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $X$  es la complejificación de una curva algebraica proyectiva no singular sobre  $\bar{\mathbb{Q}}$ .
- $X$  es el espacio base de un cubrimiento ramificado  $\pi : X \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$  que tiene a lo más tres puntos de ramificación.

Este resultado demostrado por Belyi explica la importancia *aritmética* de los dessins d'enfant, pues estos últimos nos dan una herramienta *geométrica* para investigar la estructura del grupo de Galois absoluto  $\text{Gal}(\bar{\mathbb{Q}})$ , un objeto muy importante, pero poco comprendido hasta el momento.

Bajo estas consideraciones, se le pide que

- Construya un dessin d'enfant para las funciones  $f_n : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por  $f_n(z) = z^n$ .
- Construya un dessin d'enfant para las funciones  $g_1, g_2 : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definidas por

$$g_1(z) = \frac{27}{4}z^2(1 - z), \quad g_2(z) = 16z^2(1 - z)^2$$

- Halle una función holomorfa  $h(z)$  cuyo dessin d'enfant sea

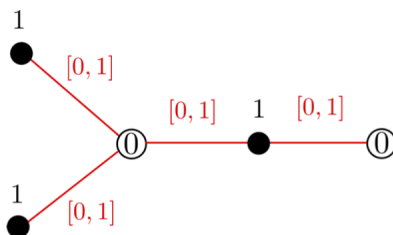


Figura 1: Esquema de  $h(z)$ .

- Construya un dessin d'enfant para  $T_n^2(z)$ , donde  $T_n(z)$  es el  $n$ -ésimo polinomio de Chebyshev y está definido por  $T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta)$ .

*Solución.*

- En todos los casos, la superficie de Riemann en cuestión está definida por una ecuación de la forma  $f(z) = g(w) = u$ , donde  $g$  tiene un único punto de ramificación en el origen. Entonces,
- Los puntos de la superficie de Riemann están determinados por sus coordenadas  $z, w$ . Por ende, la superficie buscada es el pullback que cierra universalmente el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & \mathbb{C}_z \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \mathbb{C}_w & \xrightarrow{\quad g \quad} & \mathbb{C}_u \end{array}$$

donde  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w, \mathbb{C}_u$  son los planos con coordenadas  $z, w, u$ , respectivamente.

- Puesto que el único punto de ramificación de  $g^{-1}$  es el origen de  $\mathbb{C}_u$ , podemos tomar una curva que pasa por el origen de  $\mathbb{C}_u$  para definir las ramas. Hemos escogido el eje real  $\Im(u) = 0$ , que divide el plano  $\mathbb{C}_u$  en dos regiones que colorearemos rosa y celeste.

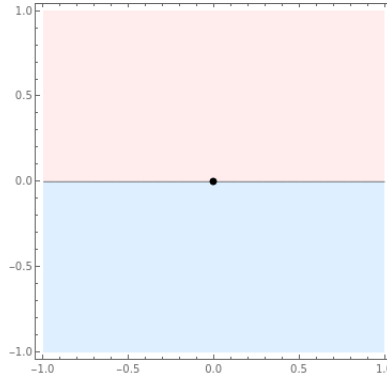


Figura 2: El plano  $\mathbb{C}_u$  con el único punto de ramificación de  $g^{-1}$ .

- En ningún caso se puede graficar directamente la superficie de Riemann buscada. Para superar este impasse, graficaremos las proyecciones de la superficie sobre  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ . Las preimágenes de la recta  $\Im(u) = 0$  dividen a estos planos en regiones que serán pintadas con el mismo color que su imagen en  $\mathbb{C}_u$ .
- El método más simple posible para construir cada superficie de Riemann es
  - Tomar tantas copias de  $\mathbb{C}_z$  como haya ramas de  $g^{-1}$  y ordenarlas cíclicamente.
  - Cortar todas las copias a lo largo de la curva  $\Im(f(z)) = 0$ .
  - Considerar los tramos en la curva  $\Im(f(z)) = 0$  cuyos extremos son puntos de ramificación y/o críticos de  $w(z)$ . Determinar en qué dirección se debe cruzar el tramo para avanzar a la siguiente rama.
  - Dado un lazo  $\gamma$  que cruza la curva  $\Im(f(z)) = 0$  sin pasar por ningún punto de ramificación, definir la cantidad auxiliar

$$n(\gamma) = \sum_{z \in R_f} W(\gamma, z)$$

donde  $R_f \subset \mathbb{C}_z$  es el conjunto de puntos de ramificación de  $f$  y  $W(\gamma, z)$  es la cantidad de vueltas (*winding number*) que  $\gamma$  da alrededor de  $z \in R$ .

- El levantamiento de  $\gamma$  a la superficie es un camino que avanza  $n(\gamma)$  ramas de  $w(z)$ .

Este método hace muchos más cortes que los estrictamente necesarios, pero tiene la ventaja de que siempre funciona y no hay que pensar demasiado para aplicarlo.

Sin más preámbulo...

- a) El único punto de ramificación de  $w(z) = z^{2/3}$  es el origen  $z = 0$ , con índice de ramificación 3.

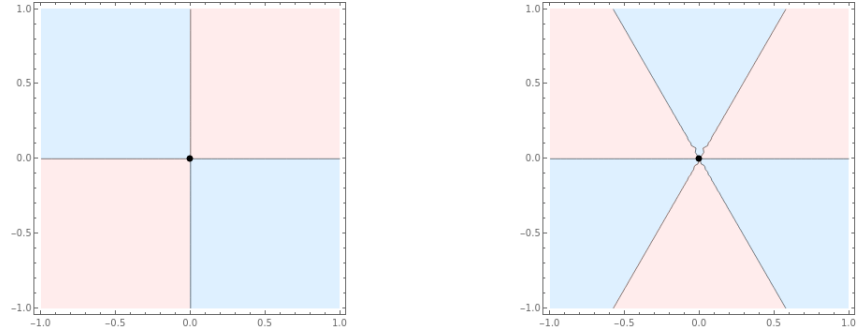


Figura 3: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $w^3 = z^2$ .

Para construir la superficie de Riemann buscada:

- Tomemos tres copias de  $\mathbb{C}_z$ , ordenadas cíclicamente y cortadas el eje real negativo.
- Peguemos el lado superior del eje real negativo en cada copia con el lado inferior del mismo eje real negativo en la siguiente copia.

Observemos que el espacio construido tiene una singularidad en el origen. Siendo estrictos, una superficie de Riemann es, primero y ante todo, una variedad diferenciable. Entonces, para tener una superficie de Riemann propiamente dicha, debemos eliminar el origen. Otra posibilidad es resolver la singularidad mediante una explosión (*blowup*).

- b) Los puntos de ramificación de  $w(z) = \sqrt{(z^2 - 1)(z^2 - 4)}$  son los ceros del radicando, colocados en los puntos  $z = \pm 1, z = \pm 2$ . En todos los casos, el índice de ramificación es 2.

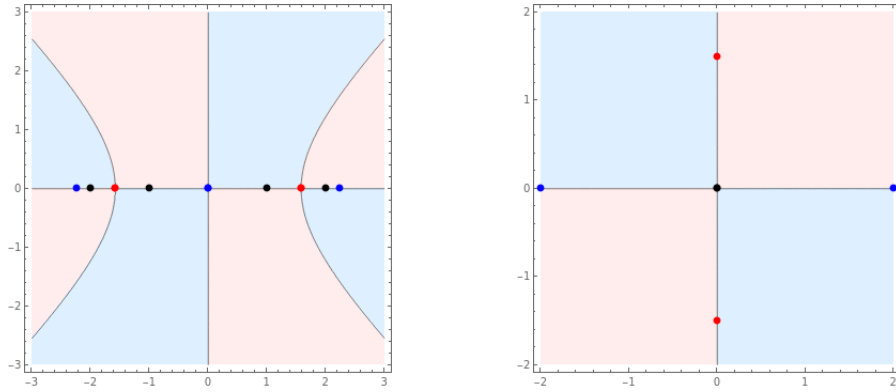


Figura 4: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $w^2 = (z^2 - 1)(z^2 - 4)$ .

Observemos que

- Cruzar el segmento  $A = [1, 2]$  o su espejo  $B = [-2, -1]$  en  $\mathbb{C}_z$  equivale a girar alrededor del origen en el plano  $\mathbb{C}_w$ , dentro del rombo con vértices en  $z = \pm 2, z = \pm 3i/2$ .
- Para  $z \gg 0$ , tenemos  $w^2 \approx z^4$ . Puesto que 2 divide a 4, no hay ramificación en el infinito. Entonces, los cortes se pueden hacer a lo largo de segmentos compactos.

Para construir la superficie de Riemann buscada,

- Tomemos dos copias de  $\mathbb{C}_z$ , cortadas en los segmentos  $A, B$ .
- Peguemos el lado superior de cada segmento cortado ( $A, B$ ) con el lado inferior del mismo segmento en la otra copia de  $\mathbb{C}_z$ .

- c) Los puntos de ramificación de  $w(z) = \sqrt[3]{z^3 - z}$  son los ceros del radicando, que están colocados en los puntos  $z = 0, z \pm 1$ . En todos los casos, el índice de ramificación es 3.

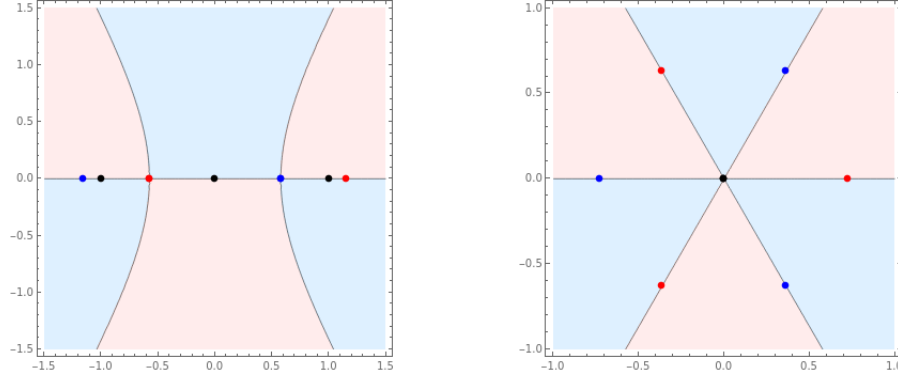


Figura 5: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $w^3 = z^3 - z$ .

Observemos que

- Cruzar el segmento  $A = [-1, 1]$  en el plano  $\mathbb{C}_z$  equivale a girar alrededor del origen en  $\mathbb{C}_w$ , dentro del hexágono con vértices en las raíces sextas de la unidad.
- Para  $z \gg 0$ , tenemos  $w^3 \approx z^3$ . Puesto que 3 divide a 3, no hay ramificación en el infinito. Entonces los cortes se pueden hacer a lo largo de segmentos compactos.

Para construir la superficie de Riemann buscada,

- Tomemos tres copias de  $\mathbb{C}_z$ , llamadas  $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$ .
- Cortemos cada plano  $\mathbb{C}_k$  en los segmentos  $A_{1k} = [-1, 0]$  y  $A_{2k} = [0, 1]$ .
- Peguemos el lado superior de  $A_{jk}$  con el lado inferior de  $A_{jl}$ , donde  $l = j + k \pmod{3}$ .

- d) Los puntos de ramificación de  $w(z) = \sqrt{z^3 - 3z}$  son los ceros del radicando, que están colocados en los puntos  $z = 0, z = \pm\sqrt{3}$ . En todos los casos, el índice de ramificación es 2.

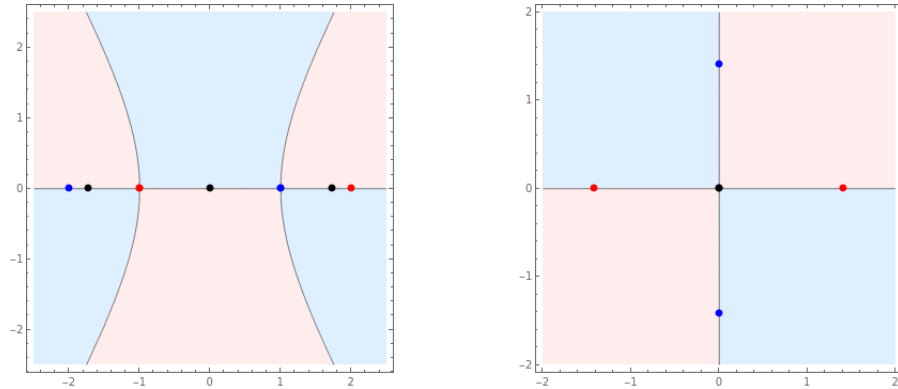


Figura 6: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $w^2 = z^3 - 3z$ .

Observemos que

- Para  $z \gg 0$ , tenemos  $w^2 \approx z^3$ . Puesto que 2 no divide a 3, hay ramificación en el infinito. Entonces debemos hacer algún corte no acotado.

Para construir la superficie de Riemann buscada:

- Tomemos dos copias de  $\mathbb{C}_z$ , cortadas en los segmentos  $A = [-1, 0]$  y  $B = [1, \infty)$ .
- Peguemos el lado superior de cada segmento cortado  $(A, B)$  con el lado inferior del mismo segmento en la otra copia de  $\mathbb{C}_z$ .

e) El único punto de ramificación de  $\log(z)$  es el origen  $z = 0$ , con índice de ramificación  $\infty$ . Esta vez ocurren dos cosas que no veíamos en las curvas algebraicas:

- La función no tiene puntos críticos.
- El punto de ramificación no está en el dominio de la función.

Por ende, no tenemos suficientes puntos de referencia como en los ítems anteriores. Para mitigar este inconveniente, hemos graficado explícitamente los cortes en los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ .

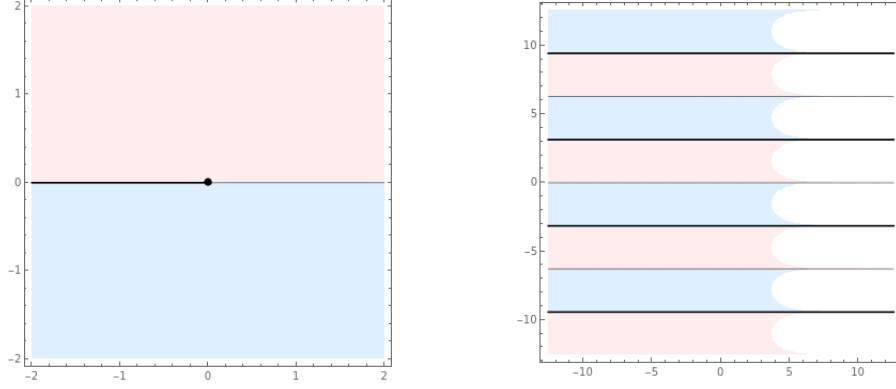


Figura 7: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $e^w = z$ .

Debemos pensar que la imagen de  $z = 0$  es un punto extra  $w = -\infty$  situado muy a la izquierda del plano  $\mathbb{C}_w$ . Para construir la superficie de Riemann buscada:

- Tomemos infinitas copias de  $\mathbb{C}_z^*$ , indizadas por los enteros  $\mathbb{Z}$ .
- Cortemos cada copia de  $\mathbb{C}_z^*$  en el eje real negativo.
- Peguemos el lado superior del eje real negativo en cada copia con el lado inferior del mismo eje real negativo en la siguiente copia.

El resultado de este proceso es el recubrimiento universal del plano agujereado  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}_z^*$ , que es biholomorfo al plano complejo usual  $\mathbb{C}_w$ . Podemos pensar en  $X$  como una hélice infinita que proyecta sombra sobre el plano agujereado.

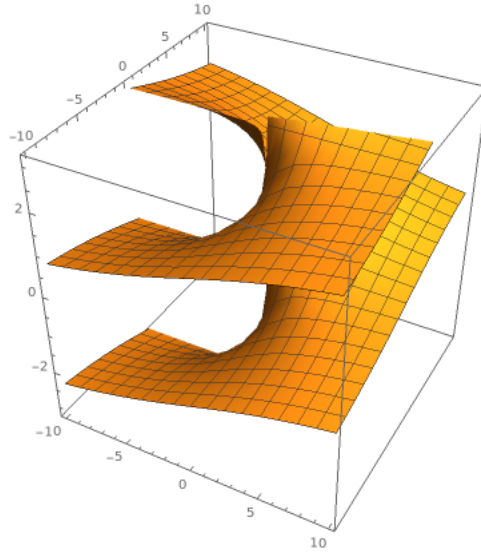


Figura 8: El recubrimiento universal  $\pi : X \rightarrow \mathbb{C}_z^*$ .

- f) En este ítem, no cortaremos el plano  $\mathbb{C}_u$  a lo largo del eje real  $\Im(u) = 0$ , sino a lo largo del eje imaginario  $\Re(u) = 0$ . La razón detrás de esta elección será clara más adelante. El eje  $\Re(u) = 0$  también divide a  $\mathbb{C}_u$  en dos regiones que colorearemos rosa y celeste.

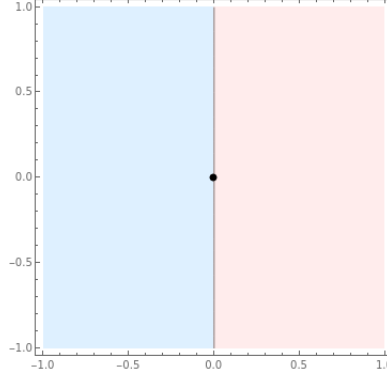


Figura 9: El plano  $\mathbb{C}_u$  cortado a lo largo de un eje diferente.

Los puntos de ramificación de  $w(z) = \log(z^2 + i)$  son los ceros de la expresión suministrada a la función logaritmo, i.e.,  $z = \pm\sqrt{-i}$ . En ambos casos, el índice de ramificación es  $\infty$ .

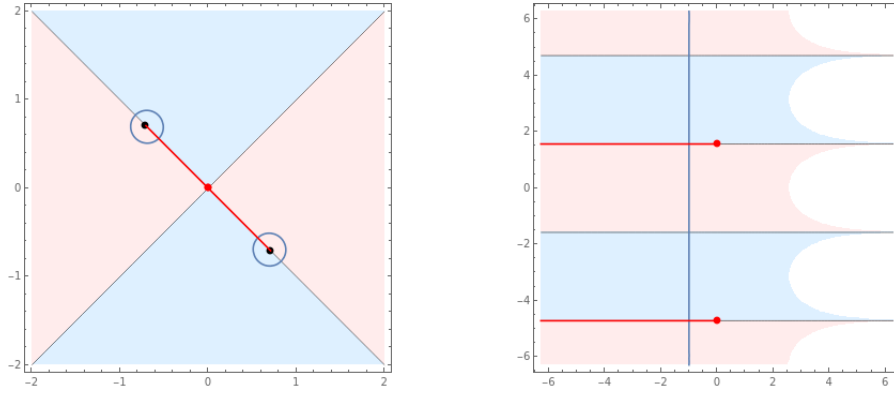


Figura 10: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $e^w = z^2 + i$ .

La ventaja del corte en  $\mathbb{C}_u$  a lo largo de  $\Re(u) = 0$  es que el corte  $\Re(z^2 + i) = 0$  inducido en  $\mathbb{C}_z$  pasa por los puntos de ramificación de  $w(z)$ . Entonces podemos usar este corte para realizar la transición de una rama del logaritmo a la siguiente.

(De hecho, la única razón por la cual utilizamos el corte  $\Im(u) = 0$  en los ítems anteriores es que en dichos casos  $f(z)$  era un polinomio con raíces reales.)

Para construir la superficie de Riemann buscada:

- Tomemos infinitas copias de  $\mathbb{C}_z$ , indizadas por los enteros  $\mathbb{Z}$ .
- Cortemos cada copia de  $\mathbb{C}_z$  a lo largo del segmento que conecta a las raíces de  $z^2 + i$ . Esto equivale a cortar  $\mathbb{C}_w$  a lo largo de los rayos que parten de  $2\pi in$  y se extienden de manera horizontal en el semiplano izquierdo.
- Peguemos el lado superior del segmento cortado en una copia de  $\mathbb{C}_z$  con el lado inferior del segmento cortado en la siguiente copia de  $\mathbb{C}_z$ . Esto equivale a pegar las ramas de la función logaritmo de la manera usual.

El resultado de este proceso es una superficie de Riemann suave, sin puntos singulares. Esto se debe a que  $g$  no tiene puntos críticos. Por ende, al menos de manera local,  $w$  se puede expresar como una función holomorfa de  $z$ .

- g) Los puntos de ramificación de  $w(z) = \sqrt[7]{z^5(z-3)^2}$  son los ceros del radicando, colocados en los puntos  $z = 0$  y  $z = 3$ . En ambos casos, el índice de ramificación es 7.

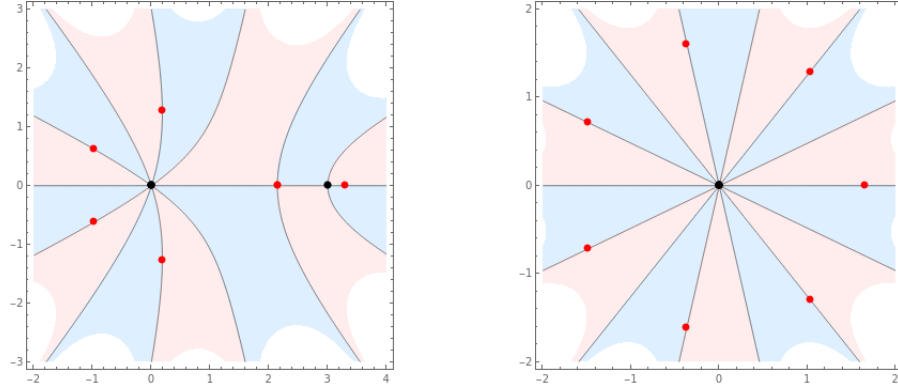


Figura 11: Los planos  $\mathbb{C}_z, \mathbb{C}_w$ , donde  $w^7 = z^5(z-3)^2$ .

Observemos que

- Cruzar el segmento  $A = [0, 3]$  equivale a girar alrededor del origen en el plano  $\mathbb{C}_w$ , dentro del heptágono con vértices en las raíces séptimas de la unidad.
- Para  $z \gg 0$ , tenemos  $w^7 \approx z^7$ . Puesto que 7 divide a 7, no hay ramificación en el infinito. Entonces los cortes se pueden hacer a lo largo de segmentos compactos.

Para construir la superficie de Riemann buscada:

- Tomemos siete copias de  $\mathbb{C}_z$ , ordenadas cíclicamente.
- Cortemos cada copia de  $\mathbb{C}_z$  a lo largo del segmento  $[0, 3]$ .
- Peguemos el lado superior del segmento cortado en una copia de  $\mathbb{C}_z$  con el lado inferior del segmento cortado en la siguiente copia de  $\mathbb{C}_z$ .

Puede parecer sorprendente que no hayamos tenido cuidado de pasar a la quinta o a la segunda copia más adelante en el orden cíclico. Sin embargo, esto no es problema, pues tanto 5 como 2 son relativamente primos a 7 y, por ende, generan el grupo cíclico  $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$  que indiza las copias.

- Para generar los dessins d'enfant, utilicé la siguiente rutina en Mathematica:

```
diag = 1 + I;
size = PointSize[0.02];
proc[f_, a_, b_] := Module[{p0, p1, p2, p3, p4, sol},
  sol[t_] := z /. Solve[f == t];
  p0 = ComplexContourPlot[Im[f], {z, a - b*diag, a + b*diag},
    Contours -> {0}, ContourStyle -> Red, ContourShading -> False];
  p1 = ComplexListPlot[sol[-1], PlotStyle -> {Red, size}];
  p2 = ComplexListPlot[sol[0], PlotStyle -> {Blue, size}];
  p3 = ComplexListPlot[sol[1], PlotStyle -> {Black, size}];
  p4 = ComplexListPlot[sol[2], PlotStyle -> {Red, size}];
  Show[p0, p1, p4, p2, p3]
];
```

El parámetro principal de esta rutina es una función holomorfa  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ . La rutina grafica

- La preimagen del eje real como una curva roja.
- La preimagen de  $-1$  como una colección de puntos rojos.
- La preimagen de  $0$  como una colección de puntos azules. (Blancos, en el enunciado.)
- La preimagen de  $1$  como una colección de puntos negros.
- La preimagen de  $2$  como una colección de puntos rojos.

El propósito de marcar los puntos rojos es simplemente indicar qué partes de la curva roja deben ser ignoradas. Los segmentos que nos interesan unen a puntos azules con puntos negros. Finalmente, los parámetros auxiliares  $a, b$  controlan el posicionamiento de la gráfica de una manera más conveniente que la utilizada por Mathematica por defecto.

Sin más preámbulo...

- El dessin d'enfant de la función  $z^n$  es una estrella con un único punto blanco (el origen) unido por segmentos rojos a  $n$  puntos negros (las  $n$  raíces de la unidad).
- El dessin d'enfant de  $g_1$  se construye con el comando

```
g1 = 27/4*z^2*(1 - z);
proc[g1, 1/3, 1 + I]
```

Obtenemos el siguiente resultado:

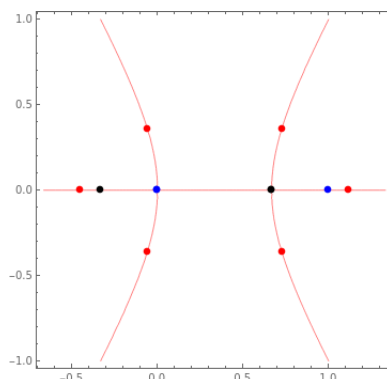


Figura 12: Esquema de  $g_1(z)$ .

Ignorando los tramos que pasan por los puntos rojos, el dessin d'enfant de  $g_1$  es un camino que pasa por puntos negro blanco, negro, blanco, en sucesión.

- El dessin d'enfant de  $g_2$  se construye con el comando

```
g2 = 16*z^2*(1 - z)^2;
proc[g2, 1/2, 1 + I]
```

Obtenemos el siguiente resultado:

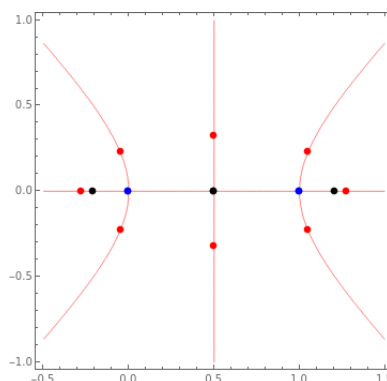


Figura 13: Esquema de  $g_2(z)$ .

Ignorando los tramos que pasan por los puntos rojos, el dessin d'enfant de  $g_2$  es un camino que pasa por puntos negro, blanco, negro, blanco, negro, blanco, en sucesión.



- Puesto que el dessin d'enfant dado es un árbol (no tiene ciclos), podemos asumir que  $h(z)$  es un polinomio. Como los puntos  $t \in (0, 1)$  no son de ramificación, ellos ilustran el comportamiento genérico de la ecuación  $h(z) = t$ . Entonces,
  - $h(z)$  es un polinomio de grado 4.
  - $h(z)$  tiene una raíz triple.
  - $1 - h(z)$  tiene una raíz doble.

Parece razonable hacer los siguientes supuestos adicionales:

- Las raíces de  $h(z)$  son reales.
- Las raíces simples de  $1 - h(z)$  son complejos conjugados.

Jugando con Mathematica, encontré la función  $h(z) = 16z^3(2 - 3z)$ . Posteriormente me dijeron en <https://math.stackexchange.com/q/3668144/4675> que  $h(z)$  es un reescalamiento de un polinomio de Shabat. Podemos ver que

$$1 - h(z) = (1 - 2z)^2(1 + 4z + 12z^2)$$

tiene una raíz real doble y dos raíces complejas conjugadas, como predijimos inicialmente. Para construir el dessin d'enfant de  $h(z)$ , utilizamos el siguiente comando:

```
h = 16*z^3 (2 - 3 z);
proc[h, 1/4, 1 + I]
```

Obtenemos el siguiente resultado:

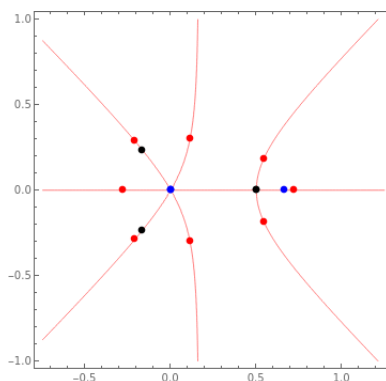


Figura 14: Esquema de  $h(z)$ .

Ignorando los tramos que pasan por los puntos rojos, el dessin d'enfant de  $h$  tiene la forma de árbol que se indica en el enunciado.

- Las siguientes afirmaciones se demuestran de manera tediosa pero fácil por inducción:
  - $\cos(n\theta)$ ,  $\sin(n\theta)$  son polinomios homogéneos de grado  $n$  en  $\cos\theta$ ,  $\sin\theta$ .
  - $\sin\theta$  aparece con exponente par en todos los términos de  $\cos(n\theta)$ .
  - $\sin\theta$  aparece con exponente impar en todos los términos de  $\sin(n\theta)$ .

Sustituyendo  $\sin^2(z) = 1 - \cos^2(z)$  en la expansión de  $\cos(nz)$ , demostramos que  $\cos(nz)$  es un polinomio de grado  $n$  en  $\cos(z)$ . Este polinomio es  $T_n(z)$ . Además,

- Las soluciones de  $\cos^2(n\theta) = 0$  son los ángulos  $\theta \in S^1$  tales que  $e^{in\theta} = \pm i$ . Estas soluciones vienen en pares complejos conjugados. Por ende,  $T^2(z)$  tiene  $n$  raíces distintas, cada una de multiplicidad 2.
- Las soluciones de  $\sin^2(n\theta) = 0$  son los ángulos  $\theta \in S^1$  tales que  $e^{in\theta} = \pm 1$ . Estas soluciones vienen en pares complejos conjugados, a excepción de  $\pm 1$ . Por ende,  $1 - T^2(z)$  tiene  $n + 1$  raíces distintas:  $z = \pm 1$ , ambas de multiplicidad 1, y todas las demás de multiplicidad 2.

Por ende, el dessin d'enfant de  $T_n^2(z)$  es un único segmento en el que aparecen  $2n + 1$  nodos de colores alternados, empezando y terminando con un nodo negro.

Para confirmar este hallazgo, graficamos los dessins d'enfant de  $T_n^2(z)$  para  $n = 2, 3, 4, 5$ :

```

cheb[n_] := ChebyshevT[n, z]^2;
proc[cheb[2], 0, 1]
proc[cheb[3], 0, 1]
proc[cheb[4], 0, 1]
proc[cheb[5], 0, 1]

```

Obtenemos el siguiente resultado:

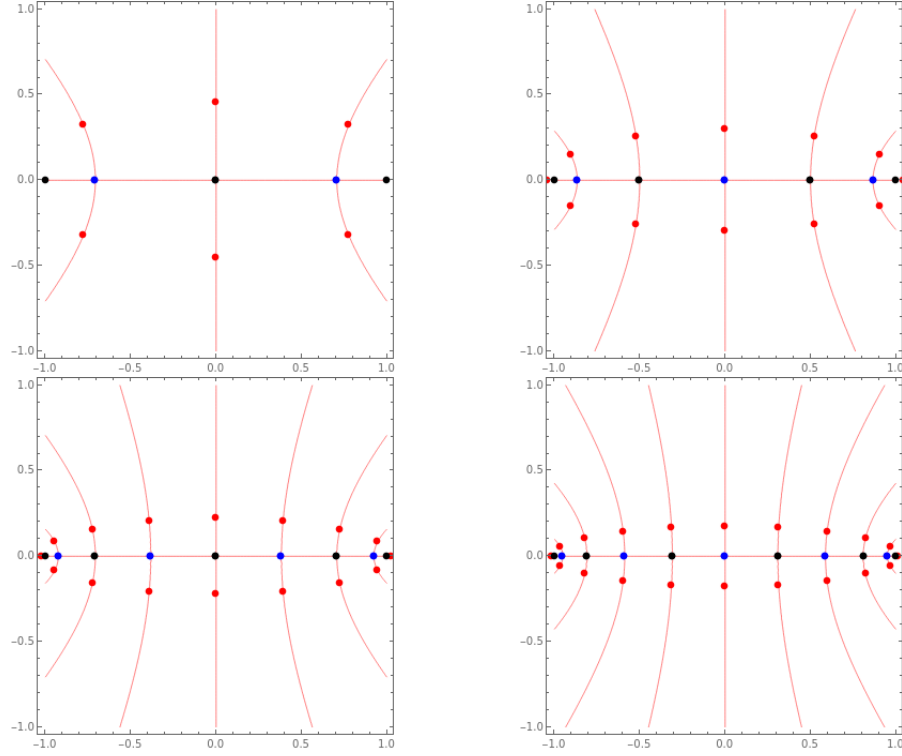


Figura 15: Esquema de  $T_n^2(z)$  para  $n = 2, 3, 4, 5$ .