Recordar (Corolario 1 -Donalson-)

Sea X una superficie de Riemann compacta. Si existe una función meromorfa $f: X \to \hat{\mathbb{C}}$ (donde $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ esfera de Riemann) con exactamente un polo de orden uno, entonces X es isomorfa a la esfera de Riemann.

Obs: Sea X una superficie de Riemann compacta. Entonces (por el T. de módulo máximo / T. de Louville) X no admite funciones holomorfas no triviales (i.e. las únicas funciones holomorfas en X son las funciones ctes.)

Así, para estudiar / clasificar X necesitamos estudiar funciones meromorfas (no holomorfas).
✓ Debemos permitir existencia de polos. ✓

Notar / Recordar: Sea Λ un lático en $\mathbb{C}$

$$\Lambda \simeq \mathbb{Z} \oplus \lambda \mathbb{Z}$$

$$\lambda \in \mathbb{C}, \quad \operatorname{im}(\lambda) > 0.$$

Sabemos $\mathbb{C}/\Lambda$ (toro) es una superficie de Riemann compacta.

Pregunta general (cap 6)

¿Podemos construir funciones meromorfas en $\mathbb{C}/\Lambda$?
¿Qué propiedades deberían tener?

Como $\mathbb{C}/\Lambda$ no es esfera de Riemann, si

$$f : \mathbb{C}/\Lambda \to \hat{\mathbb{C}} \text{ es meromorfa,}$$

entonces
f tiene más de un polo simple
(ó un polo múltiple).

- Teorema (Teorema 3 texto)

Sea X una superficie de Riemann compacta.
Sea α una 1-forma holomorfa sin ceros.
(no se anule en X).

Entonces existe un latice $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ y un isomorfismo $i : \mathbb{C}/\Lambda \to X$ tal que

$$\mathbb{C} \xrightarrow{\pi} \mathbb{C}/\Lambda \xrightarrow{i} X$$

α

$$\pi^*(i^*(\alpha)) = du$$

donde u es la función identidad en $\mathbb{C}$.

Idea: sea α 1-forma holo. no se anule en X.

local: $\alpha = f(z)dz$ → con f holomorfa.
(α es cerrada, $d\alpha = 0$)

Consideremos $p : \tilde{X} \to X$ cubrimiento univ. de X
($\tilde{X}$ simplem. conexo).

OJO: holomorfa

"Levantamos" α a $\tilde{X}$; i.e. consideramos

$X = \tilde{X}/\pi_1(X)$.

$p^*(\alpha) \leftarrow$ 1- forma. cerrada en $\tilde{X}$.

Como $\tilde{X}$ es simplem. conexo

$$\Rightarrow \quad \underbrace{p^*(\alpha) = dF}_{\text{exacta}}, \quad \text{con } F \text{ holomorfa.}$$

$$F : \tilde{X} \longrightarrow \mathbb{C}.$$

Como α no se anula $\Rightarrow$ F homeo. local.

(*) Afirmación (1) ✓: F cubrimiento.

Afirmación (2) ✓: $F : \tilde{X} \to \mathbb{C}$ isomorfismo. $\left(\tilde{X} \underset{\text{iso}}{\cong} \mathbb{C}\right)$

Así: $X = \mathbb{C}/\pi_1(X)$

Próxima clase + Función Weierstrass.

Con ello se tiene:

Sea X una superficie de Riemann compacta de genero 1.

Entonces se cumple:

- Existe una función meromorfa con un polo doble (ó dos polo simples) en X. Es más, X es un cubrimiento doble ramificado de $\hat{\mathbb{C}}$. (con 4 puntos de ramificación).

- existe una 1-forma -holomorfa- sin ceros en X.

($\underset{\text{Teo 3}}{\Rightarrow}$ $X \simeq \mathbb{C}/\Lambda$).

Objetivo: Estudiar la existencia de funciones meromorfas en una sup. de Riemann compacta X, con ciertas propiedades.
(i.e. "prescripción" en los polos).

Contexto para la respuesta:

Recordar: X Sup. Riemann compacta.

De Rham:

$$\begin{array}{c} 0 \\ \downarrow \\ \Omega^0 \\ \downarrow d \\ \boxed{\Omega^1} \\ \downarrow d \\ \Omega^2 \\ \downarrow \\ 0 \end{array}$$

usando $d = \partial + \bar\partial$.

$$\begin{array}{ccccc} & & \Omega^{0,0} & & \\ & \swarrow \partial & & \bar\partial \searrow & \\ \Omega^{1,0} & & & & \Omega^{0,1} \\ & \bar\partial \searrow & & \swarrow \partial & & \searrow \bar\partial^{0,1} = 0 \\ & & \Omega^2 & & & & 0 \\ & & & \searrow & & & \\ & & & & 0 & & \end{array}$$

- $\partial^2 = 0$
- $\bar\partial^2 = 0$

para p fijo

$$\Omega^{p,q} \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{p,q+1}$$

$$H^{p,q} = \operatorname{Ker} \bar\partial^{p,q} / \operatorname{Im} \bar\partial^{p,q-1}$$

Usando ∂, $\bar\partial$ podemos construir los sgtes. espacios vectoriales:

① $H^{0,0}_X = \operatorname{Ker} \bar\partial : \Omega^0 \to \Omega^{0,1}$

$H^{0,0}_X$ consiste de la funciones holomorf en X (global)

② $H^{1,0}_X = \operatorname{Ker} \bar\partial : \Omega^{1,0} \to \Omega^2$

$H^{0,0}$ ...

$\ldots_X = \{ f : X \to \mathbb{C} \mid$

$\bar{\partial} f = 0 \}$

$= \{$ funciones holomorfas globales $\}$

$H^{1,0}_X$ consiste de las 1-formas holomorfas (global).

✱ ③ $H^{0,1}_X = \operatorname{Ker} \bar{\partial}^{0,1} / \operatorname{Im} \bar{\partial}^{0}$

$= \Omega^{0,1} / \operatorname{Im} \bar{\partial}$

$= \operatorname{coker} \bar{\partial}$, donde

$\bar{\partial} : \Omega^0 \to \Omega^{0,1}$.

✱ ④ $H^{1,1}_X \overset{\text{args. como en ③}}{=} \operatorname{coker} \bar{\partial}$ donde

$\bar{\partial} : \Omega^{1,0} \to \Omega^2$.

①, ②, ③, ④ grupos de coh. de Dolbeault de X.

Preg 1: ¿Qué info. codifican $H^{0,1}_X$ y $H^{1,1}_X$?

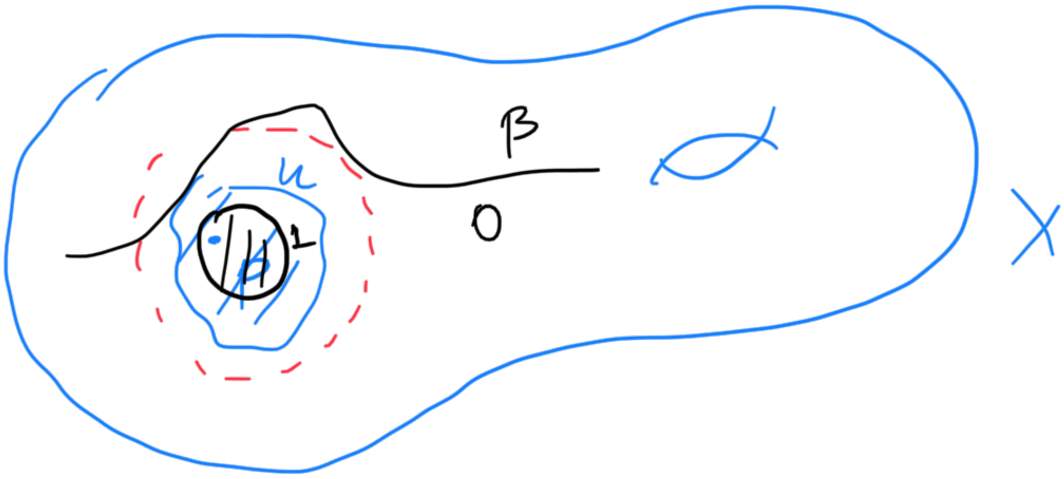
$H^{0,1}_X \longleftrightarrow$ codifica info. funciones meromorfas en X.

preg 2: Sea $p \in X$.

¿Existirá una función meromorfa en X con un polo simple en p y sin otros polos?

(esto ocurre si X es $\hat{\mathbb{C}}$)

¿Cómo construir f?



z: coord. local alrededor de $p \in X$.

Así $\dfrac{1}{z}$ es una función meromorfa local alrededor de p (en una vecindad abierta U de p).

Consideramos β: función suave con soporte en U tal que $\beta = 1$ en una vecindad de p.

Notar:

$\beta \cdot \dfrac{1}{z}$ es una función en $X \setminus p$.

(i.e. es 0 fuera de U)

Hallar una función meromorfa con un único polo en p es equiv. a hallar una función suave g en X tal que

$$\boxed{g + \beta \cdot \frac{1}{z}} \text{ es } \underline{\text{holomorfa en}} \; X - p.$$

Obs:

- $\boxed{A = \bar\partial\left(\beta \frac{1}{z}\right)} \overset{(*)}{=} (\bar\partial \beta) \frac{1}{z}$

tiene soporte compacto en $X - p$.
(pues $\beta = 1$ alrededor de p).

Así A se puede considerar como una $(0,1)$-forma en X.
(extendiendo como 0 en p).

$\Rightarrow$ En resumen:

$$\boxed{\text{El prob. es equiv. a mostrar: } \quad \bar\partial g = -A.}$$ (*)

$$\left[\bar\partial\left(g + \beta\frac{1}{z}\right) = 0 \iff \bar\partial g = -\bar\partial\left(\beta\frac{1}{z}\right) = -A \right]$$

- existencia de una función $\underline{\text{meromorfa}}$ en X con un único polo $\underline{\text{en } p \in X}$ es equivalente a resolver

$(*)$ ... $\boxed{\bar{\partial} g = -A}$ ✓ donde $A = \bar{\partial}\left(\beta \cdot \frac{1}{z}\right)$

$(0,1)$ forma.

$g \in \Omega^0$

Recordar: $H^{0,1}_X = \operatorname{coker} \bar{\partial} = \Omega^{0,1} / \operatorname{Im} \bar{\partial}$.

En otras palabras, $(*)$ tiene solución si $[A] = 0$ en $H^{0,1}_X$. $\longleftrightarrow$ (género de X)

En particular, si $\boxed{H^{0,1} = 0}$ $(**)$ $\Rightarrow$ $(*)$ tiene solución.

(i.e. X simplem. conexa)

$X = \hat{\mathbb{C}}$.

Obs:

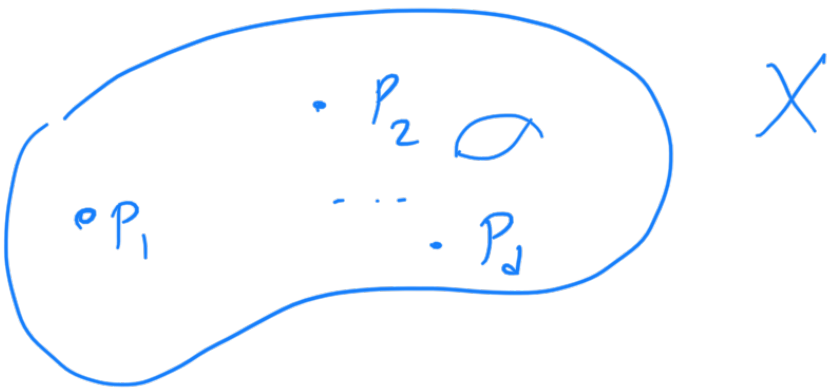
Sea $\phi : X \setminus \{p\} \to \mathbb{C}$ una función que se extiende a X con un único polo en p.

$\Rightarrow$ existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tal que $\phi - \lambda \beta \frac{1}{z}$ es holo. en $X - p$.

$$\Rightarrow \quad [\bar{\partial} \phi] = \lambda [A] \in H^{0,1}_{X}.$$

Supongamos tenemos $p_1, \dots, p_d$ puntos distintos en X.

¿cómo garantizar existencia función meromorfa $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ (no holo.) con polos en $p_1, \dots, p_d$ – ó en algunos de estos puntos –.



De manera similar (argum. como arriba) dicha función f existe si y sólo si existen escalares $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ tales que

$$\boxed{\lambda_1 [A_1] + \dots + \lambda_d [A_d] = 0} \leftarrow (*)$$

en $H^{1,0}_X$.

Se tiene así:

Proposición 26: Supongamos $\boxed{H^{0,1}_X}$ tiene dimensión k.
Entonces, dados cualesquiera $k+1$ puntos $p_1, p_2, \dots, p_{k+1}$, existe una función $f : X \to \hat{\mathbb{C}}$ meromorfa (no holo.) tal que f tiene polos simples en un subconjunto de $\{p_1, p_2, \dots, p_{k+1}\}$.

prueba: $[A_1], [A_2], \dots, [A_{k+1}]$ son l.d.
$\Rightarrow$ existe sol. no trivial de $(*)$

Obs: X : sup. de Riemann.

- $\dim H^{0,1}_X$ = género (X)

- $H^{0,1}_X \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Dolbeault}}}{=} H^1(X, \Omega^0)$

coh. de haces

funciones holomorfas no nulas en X.

Para entender de mejor manera (de modo más eficiente) funciones meromorfas en X necesitamos el sgte. teorema.

Teorema principal:

Sea X una sup. de Riemann compacta. y ρ 2-forma en X.

Existe una sol. de

$f \in \Omega^0(X)$ holo.

$$\underline{\underline{H^{0,1}}} \iff \boxed{\Delta f = \rho} \quad \cdots (*)$$

si y solo si

$\Delta : \Omega^0 \to \Omega^2$

$\Delta = 2i\partial\bar\partial$.

$$\int \rho = 0.$$

$\vee X$

(sol. de (*) es única salvo traslaciones por cte.)

Consecuencias del T. principal:

X comp. R.S.

(1) $H^{1,0} \xleftrightarrow{\sim} \overline{H^{0,1}}$ (iso inducido por $\alpha \to \bar{\alpha}$)

$H^{1,0}_X \xleftrightarrow{\sim} \overline{H^{0,1}}$

1-formas holomorfas

existencia de funciones meromorfas

(2) $B : H^{1,0} \times H^{0,1} \longrightarrow \mathbb{C}$

$(\alpha, [\theta]) \longmapsto \int_X \alpha \wedge \theta.$

perfect pairing.

$H^{0,1} \simeq (H^{1,0})^*$

(3) $H^1 \simeq H^{1,0} \oplus H^{0,1}$

$(\Omega^1 \simeq \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1})$ filtra a los gp. de coh de Dolbeault)

$$\mathbb{C}^{2g} \simeq \mathbb{C}^{g} \oplus \mathbb{C}^{g}, \quad g: \text{gênero} = (X).$$