Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de Posgrado
Doctorado en Matemáticas

Superficies de Riemann
TAREA 2
2020-I

Indicaciones Generales:

- La TAREA 2 debe ser subida a la plataforma Paideia a más tardar a las 11:59pm. el domingo 31 de mayo.

Varios de los ejercicios de esta lista son tomados textualmente (módulo traducción) del Cápitulo 3 del libro texto Riemann Surface de S. Donaldson. Se recomienda ir a esta fuente para compatibilizar conceptos (esto es, lean el libro!).

1. **Espacio proyectivo complejo, curvas algebraicas proyectivas.**

   a) Muestre en detalle que $\mathbb{CP}^n$ es una variedad diferenciable: exhiba las cartas explicitamente y muestre que el cambio de coordenadas es diferenciable. Muestre que con la topología natural heredada de $\mathbb{C}$, $\mathbb{CP}^n$ es compacta.

   b) Considere el conjunto

   $$\overline{X} = \left\{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : p(z_0, z_1, z_2) = z_0^3 z_1 + z_1^3 z_3 + z_3^3 z_0 = 0\right\} \subseteq \mathbb{CP}^2.$$

   En clase mostramos que este tipo de conjuntos es una superficie de Riemann suave/regular de manera genérica. Con lujo de detalle haga lo mismo para este $\overline{X}$:

   - Determine la relación entre el conjunto X de ceros de la deshomogenización de p y $\overline{X}$.
   - Halle las cartas de $\overline{X}$
   - Muestre que la compatibilidad arroja un cambio de coordenadas biholomorfo.
   - Argumente por que la superficie de Riemann hallada es suave/regular.

2. **Automorfismos.**

   a) Muestre que los biholomorfismos $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ son polinomios lineales, i.e.

   $$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} : f(z) = az + b, \quad (a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\}$$

   con la operación de grupo dada por la composición.

b) Muestre que $\mathrm{Aut}(\mathbb{C})$ es isomorfo al grupo

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : (a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}\right\}$$

donde la operación es multiplicación de matrices.

c) Consideramos $\mathbb{C}^* = \mathbb{C}\backslash\{0\}$. Muestre que los biholomorfismos $f : \mathbb{C}^* \longrightarrow \mathbb{C}^*$ son

$$\{f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{C}) : f(z) = az \text{ or } f(z) = a/z, \quad a \in \mathbb{C}^*\}.$$

Calcule el grupo de biholomorfismos de $\mathbb{C}\backslash\{z_0\}$ para cualquier $z_0 \in \mathbb{C}$.

d) Muestre que el grupo de biholomorfismos $\mathrm{Aut}(\mathbb{C} \cup \{\infty\})$ es isomorfo a

$$PSL(2,\mathbb{C}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad - bc = 1\right\} / \{\pm \mathrm{Id}\}$$

e) Halle los siguientes grupos

$$\mathrm{Aut}(\mathbb{C}\backslash\{0,1\}), \quad \mathrm{Aut}(\mathbb{C}\backslash\{0,1,2-2i\}).$$

f) Muestre que cualquier acción transitiva de un grupo G sobre un conjunto X es equivalente a la acción G por multiplicación por izquierda sobre el espacio G/H (H subgrupo de G). Concluya que $X = G/H$. Si uno fija un $x_0 \in X$ y considera el subgrupo Stab_{x_0}, entonces existe una biyección entre G/Stab_{x_0} y X vía la correspondencia $g\,\mathrm{Stab}_{x_0} \mapsto gx_0$. Esta biyección identifica multiplicación por izquierda en G/Stab_{x_0} con la acción de G en X.

g) Muestre que $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{D}$. Por tanto $\mathbb{D}$ es un espacio homogéneo. Use este hecho para justificar que solo basta hacer el estudio del estabilizador de $0 \in \mathbb{D}$ en $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ en la prueba de la Proposición 4 Sección 3.2.3 del libro texto.

3. **Capítulo 3 del libro texto**

a) Muestre que un subgrupo discreto $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ actua libremente sobre $\mathbb{H}$ si y solo si el grupo es torsión libre.

b) Muestre que Γ_p actúa libremente sobre $\mathbb{H}$ para todos los primos p.

c) Muestre que el conjunto de puntos $(z,w) \in \mathbb{C}^2$ con $w^2 = \sin z$ es una superficie de Riemann.

d) Pruebe la fórmula de Euler.

e) Sea A un matriz en $\mathrm{GL}(3,\mathbb{C})$. Muestre que A induce una aplicación $\underline{A}$ de $\mathbb{CP}^2$ en sí mismo tal que si p es un polinomio homogéneo con conjunto de ceros $Z_p \subset \mathbb{CP}^2$ entonces $\underline{A}\,(Z_p)$ es el conjunto de ceros de otro polinomio homogéneo p_A. Muestre que si p cumple el criterio para que Z_p sea una curva plana regular, entonces p_A, también lo cumple. Es más, el operador map $\underline{A} : Z_p \to \underline{A}\,(Z_p)$ es un isomorfismos de superficies de Riemann. (Observación: este ejercicio muestra la invarianza de la teoría bajo transformaciones proyectivas. Visto de otra manera, pudimos haber empezado con un espacio vectorial tridimensional, y una elección de coordenadas Z_0, Z_1, Z_2 corresponde a la elección de base en este espacio.

f) Suponga que el polinomio p tiene grado 2, y así pueden considerarse como formas cuadráticas en $\mathbb{C}^3$. Muestre que el criterio que determina si el conjunto de ceros es una curva regular plana se cumple si y solo si esta forma cuadrática es no-degenerada.

Prof. del curso: Jaime Cuadros. San Miguel, mayo, 2020.