Superficies de Riemann (tarea 2)

Eduardo León (梁遠光)

Junio 2020

Ejercicio 1. (Espacio proyectivo complejo, curvas algebraicas proyectivas)

a) Muestre en detalle que $\mathbb{CP}^n$ es una variedad diferenciable: exhiba las cartas explícitamente y muestre que los cambios de coordenadas son diferenciables. Muestre que, con la topología inducida por estas cartas, el espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$ es compacto.

b) La cuártica de Klein es el curva proyectiva plana

$$\bar{X} = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 : p(z_0, z_1, z_2) = z_0^3 z_1 + z_1^3 z_2 + z_2^3 z_0 = 0\}$$

En clase mostramos que los conjuntos de este tipo son superficies de Riemann suaves/regulares de manera genérica. Con lujo de detalle haga lo mismo para $\bar{X}$.

- Determine la relación entre el conjunto X de ceros de la deshomogenización de p y $\bar{X}$.
- Halle las cartas de $\bar{X}$.
- Muestre que la compatibilidad arroja un cambio de coordenadas holomorfo.
- Argumente por qué la superficie de Riemann hallada es suave/regular.

Solución.

a) Sea U el espacio vectorial $\mathbb{C}^{n+1}$ agujereado en el origen. El espacio proyectivo $\mathbb{CP}^n$ se define como el espacio de órbitas de la acción de $\mathbb{C}^\star$ sobre U vía reescalamientos. Denotaremos por $\pi : U \to \mathbb{CP}^n$ la aplicación proyección y $[z_0 : \cdots : z_n] = \pi(z_0, \ldots, z_n)$.

Para construir un atlas sobre $\mathbb{CP}^n$, generalizaremos el procedimiento utilizado en el ejercicio 2 de la tarea anterior. Tomemos

- Un sistema lineal de coordenadas $z_0, \ldots, z_n : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$.
- El conjunto $V = \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}^n$, identificado con el abierto $z_0 \neq 0$ de $\mathbb{C}^{n+1}$.
- El automorfismo $\psi : V \to V$ dado por $\psi(z_0, z_1, \ldots, z_n) = (z_0, w_1, \ldots, w_n)$, donde $w_i = z_i/z_0$.
- La proyección $\rho : V \to \mathbb{C}^n$ que descarta la coordenada $z_0 \in \mathbb{C}^\star$.

Por construcción, ψ envía las órbitas de la proyección "complicada" $\pi : V \to \pi(V)$ a las órbitas de la proyección "más sencilla, imposible" $\rho : V \to \mathbb{C}^n$. Entonces existe un homeomorfismo $\varphi : \pi(V) \to \mathbb{C}^n$ que completa el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"] & V \arrow[d, "\rho"] \\ \pi(V) \arrow[r, dashed, "\varphi"] & \mathbb{C}^n \end{tikzcd}$$

Por supuesto, $\varphi([z_0 : \cdots : z_n]) = (w_1, \ldots, w_n)$. Utilizando todas las elecciones posibles de $z_0, \ldots, z_n$, hemos construido una cobertura abierta de $\mathbb{CP}^n$ por copias de $\mathbb{C}^n$. Por ende, $\mathbb{CP}^n$ es localmente homeomorfo a $\mathbb{C}^n$.

Los cambios de coordenadas de este atlas se construyen tomando dos sistemas de referencia z_i, z_i' y calculando la matriz de cambio de base que los relaciona:

$$\begin{bmatrix} z_0' \\ \vdots \\ z_n' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \dots & a_{0n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n0} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_0 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix}$$

Entonces la aplicación de transición entre las vecindades coordenadas $\pi(V)$ y $\pi(V')$ es

$$w_i' = \frac{a_{i0} + a_{i1}w_1 + \dots + a_{in}w_n}{a_{00} + a_{01}w_1 + \dots + a_{0n}w_n}$$

Esta aplicación es claramente holomorfa. Por ende, el atlas es holomorfo.

El atlas que hemos construido es mucho más grande que lo estrictamente necesario para cubrir $\mathbb{CP}^n$, pero este esfuerzo adicional tiene un propósito. Dados dos puntos distintos $\pi(p), \pi(q) \in \mathbb{CP}^n$, existe algún hiperplano $L \subset \mathbb{C}^{n+1}$ que no contiene a p, q. Tomando un sistema de referencia en el cual L es el hiperplano $z_0 = 0$, obtenemos una vecindad coordenada $\pi(V) \cong \mathbb{C}^n$ en la que $\pi(p)$, $\pi(q)$ se pueden separar por abiertos usando métodos ya conocidos. Así pues, $\mathbb{CP}^n$ es un espacio Hausdorff.

Consideremos ahora los $n+1$ sistemas de referencia en los que z_i es una permutación cíclica de las coordenadas estándares de $\mathbb{C}^{n+1}$. En cada caso, V es el complemento de un hiperplano coordenado distinto. Puesto que dichos hiperplanos se intersecan únicamente en el origen, las $n+1$ vecindades coordenadas inducidas $\pi(V) \cong \mathbb{C}^n$ cubren $\mathbb{CP}^n$. Por ende, $\mathbb{CP}^n$ es segundo enumerable.

Observemos que todo vector no nulo $v \in U$ se representa de manera única como el producto de un escalar positivo $\lambda > 0$ con un vector unitario $u \in S^{2n+1}$. Además, tanto $\lambda = \|v\|$ como $u = v/\lambda$ son funciones continuas de v. Esto implica que, topológicamente, $U = \mathbb{R}^+ \times S^{2n+1}$. Por la misma razón, tenemos $\mathbb{C}^\star = \mathbb{R}^+ \times S^1$. Esta última factorización también respeta la estructura de grupo.

Entonces la acción de $\mathbb{C}^\star$ sobre U se descompone en dos acciones consecutivas:

- Reescalamiento en módulo, con espacio de órbitas $U/\mathbb{R}^+ = S^{2n+1}$. La aplicación cociente es la normalización de vectores $v \mapsto v/\|v\|$.
- Rotación de cada componente, con espacio de órbitas $S^{2n+1}/S^1 = \mathbb{CP}^n$. La aplicación cociente puede verse como una generalización de la fibración de Hopf.

Sabemos que la esfera S^{2n+1} es compacta, ya sea por el ejercicio 1 de la tarea anterior o por análisis real elemental. Entonces $\mathbb{CP}^n$, que es cociente de S^{2n+1}, también es compacto.

b) Puesto que $p(z_0, z_1, z_2) = p(z_1, z_2, z_0) = p(z_2, z_0, z_1)$, las partes de $\bar{X}$ en los abiertos afines canónicos son isomorfas. Entonces podemos estudiar sólo una parte afín X, digamos,

$$f(z, w) = p(1, z, w) = z + z^3 w + w^3 = 0$$

y replicar nuestros hallazgos en las otras dos partes.

Debemos verificar que, en cada punto de X, alguna de las coordenadas z, w se puede expresar como función holomorfa de la otra. La condición necesaria y suficiente para ello es que el diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial z}\,dz + \frac{\partial f}{\partial w}\,dw = (1 + 3z^2 w)\,dz + (z^3 + 3w^2)\,dw$$

no se anule en ningún punto de X. El siguiente programa calcula el ideal de $\mathbb{C}[z, w]$ que se anula en los puntos singulares de X:

```
f = z + z^3 w + w^3;
fz = D[f, z];
fw = D[f, w];
GroebnerBasis[{f, fz, fw}, {z, w}]
```

El significado de la respuesta de Mathematica

```
Out[4]= {1}
```

es que el polinomio 1 se anula en los puntos singulares de X. Por supuesto, 1 no se anula en ningún sitio, así que X no tiene puntos singulares, i.e., X es una superficie de Riemann suave.

El teorema de la función implícita nos permite construir un atlas sobre X únicamente con cartas de los dos siguientes tipos:

- Funciones holomorfas $w = g(z)$ que satisfacen $f(z, g(z)) = 0$.
- Funciones holomorfas $z = g(w)$ que satisfacen $f(g(w), w) = 0$.

Para verificar la compatibilidad de las cartas, tomemos dos cartas y restrinjamos sus dominios a las partes que cubren la misma porción de X. Tenemos dos posibles casos:

- Si las cartas son del mismo tipo, digamos $w = g(z)$ y $w = h(z)$, entonces $g(z) = h(z)$. Por ende, la función de transición es la identidad, que es obviamente holomorfa.
- Si las cartas son de tipos "contrarios", digamos $w = g(z)$ y $z = h(w)$, entonces las funciones de transición en ambas direcciones son las mismas cartas g, h, holomorfas por hipótesis.

El atlas de $\bar{X}$ es la unión de los atlases de las tres copias de X. Sabemos que

- Las cartas de la misma copia se pegan de manera "internamente" compatible.
- Existen automorfismos obvios de $\bar{X}$ que rotan las tres copias de X.

Entonces sólo tenemos que verificar que dos copias de X se peguen de manera "externamente" compatible. Utilizaremos el original X y la réplica X' definida por

$$p(t, s, 1) = t^3 s + s^3 + t = 0$$

Tomemos una carta en X, otra en X' y restrinjamos sus dominios a las partes que cubren la misma porción de $\bar{X}$. Recordemos que, si $[1 : z : w] \in X$, $[t : s : 1] \in X'$ son el mismo punto de $\bar{X}$, entonces sus coordenadas están relacionadas por $(t, s) = \varphi(z, w) = (1/w, z/w)$, donde φ es una aplicación de transición de $\mathbb{CP}^2$ y, por ende, es un biholomorfismo. Luego,

- Si $w = g(z)$ es la carta en X, entonces proyectando

  $$(t, s) = \varphi(z, w) = \varphi(z, g(z))$$

  a la coordenada local de X', tenemos una función holomorfa de z.
- Si $z = g(w)$ es la carta en X, entonces proyectando

  $$(t, s) = \varphi(z, w) = \varphi(g(w), w)$$

  a la coordenada local de X', tenemos una función holomorfa de w.
- Si $s = g(t)$ es la carta en X', entonces proyectando

  $$(z, w) = \varphi^{-1}(t, s) = \varphi^{-1}(t, g(t))$$

  a la coordenada local de X, tenemos una función holomorfa de t.
- Si $t = g(s)$ es la carta en X', entonces proyectando

  $$(z, w) = \varphi^{-1}(t, s) = \varphi^{-1}(g(s), s)$$

  a la coordenada local de X, tenemos una función holomorfa de s.

Por ende, $\bar{X}$ tiene funciones de transición holomorfas y es una superficie de Riemann suave.

Ejercicio 2. (Automorfismos)

a) Muestre que los biholomorfismos $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ son polinomios lineales, i.e.,

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{C}) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = ax + b, (a, b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C}\}$$

con la operación de grupo dada por la composición.

b) Muestre que $\operatorname{Aut}(\mathbb{C})$ es isomorfo al grupo

$$\operatorname{Aff}(\mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : (a, b) \in \mathbb{C}^\star \times \mathbb{C} \right\}$$

donde la operación es la multiplicación de matrices.

c) Muestre que los biholomorfismos $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$ son

$$\operatorname{Aut}(\mathbb{C}^\star) = \{f : \mathbb{C} \to \mathbb{C} \mid f(z) = az \vee f(z) = a/z, a \in \mathbb{C}^\star\}$$

d) Muestre que el grupo de biholomorfismos $\operatorname{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$ es isomorfo a

$$\operatorname{PSL}(2, \mathbb{C}) = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : ad - bc = 1 \right\} / \{\pm \operatorname{Id}\}$$

e) Halle los grupos de automorfismos de los siguientes espacios:

- El plano $\mathbb{C}$ agujereado en $\{0, 1\}$.
- El plano $\mathbb{C}$ agujereado en $\{0, 1, 2 - 2i\}$.

f) Muestre que toda acción transitiva de un grupo G sobre un conjunto X es equivalente a la acción de G sobre el conjunto de clases laterales G/H de algún subgrupo $H \subset G$. Concluya que $X \cong G/H$. En particular, si uno fija un elemento $x \in X$ y considera el estabilizador $H = G_x$, entonces la aplicación $\varphi : G/H \to X$ definida por $\varphi(gH) = g(x)$ es una biyección.

g) Muestre que $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{D}$. Por tanto, $\mathbb{D}$ es un espacio homogéneo. Use este hecho para justificar que sólo basta estudiar el estabilizador de $0 \in \mathbb{D}$ en $\operatorname{Aut}(\mathbb{D})$ en la prueba de la proposición 4 de la sección 3.2.3 del libro de texto.

Solución.

a) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ un automorfismo del plano. Entonces f tiene una singularidad aislada en $z = \infty$, que no puede ser esencial: si lo fuese, entonces la imagen de la región $|z| > r$ sería densa en el plano, por el teorema de Casorati-Weierstrass, pero entonces no habría sitio suficiente en el resto del plano para encajar la imagen de $|z| < r$.

   Puesto que la singularidad de f en el infinito es un polo[1], f es un polinomio. Si este polinomio es de grado m, entonces la ecuación $f(z) = b$ tiene de manera genérica m soluciones. Como el único valor aceptable es $m = 1$, deducimos que f es un un polinomio de grado exactamente 1.

b) Representemos el número $z \in \mathbb{C}$ como el vector columna $(z, 1)^T \in \mathbb{C}^2$ y la transformación lineal afín $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = az + b$ como la matriz

$$\varphi(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   Entonces la evaluación de f en z se representa como el producto

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ 1 \end{bmatrix}$$

   Esto implica que $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \cdot \varphi(f)$ para todo $f, g \in \operatorname{Aut}(\mathbb{C})$. Por ende, $\varphi : \operatorname{Aut}(\mathbb{C}) \to \operatorname{Aff}(\mathbb{C})$ no sólo es una biyección, sino también un isomorfismo de grupos.

[1] Una singularidad removible es un polo de orden cero.

c) Sea $f : \mathbb{C}^\star \to \mathbb{C}^\star$ un automorfismo del plano agujereado. Nuevamente, f tiene singularidades aisladas en cero y en el infinito, que no pueden ser esenciales por el teorema de Casorati-Weierstrass. Por lo tanto, $f = p/q$ es una función racional que fija o permuta los agujeros.

Reescribamos la ecuación $f(z) = b$ como $p(z) = bq(z)$. Si m es el máximo de los grados de p, q, esta ecuación tiene de manera genérica m soluciones. Como el único valor aceptable es $m = 1$, deducimos que f es una transformación de Möbius.

Recordemos que una transformación de Möbius está completamente determinada por su efecto sobre tres puntos de la esfera. Tenemos dos casos:

- Si f fija los agujeros, entonces $f(z) = az$, donde $a = f(1)$.
- Si f permuta los agujeros, entonces $f(z) = a/z$, donde $a = f(1)$.

Éstos son los casos estipulados en el enunciado.

d) Sea $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ un automorfismo de la esfera. Tomemos una transformación de Möbius $g : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ tal que $h = g \circ f$ fija el punto en el infinito. Entonces h es también un automorfismo del plano, i.e., una transformación lineal afín. Por ende, $f = g^{-1} \circ h$ es una transformación de Möbius. Esto es, no hay más automorfismos de la esfera que las transformaciones de Möbius.

Representemos $z \in \mathbb{C}$ como la recta generada por $(z, 1)^T \in \mathbb{C}^2$, el punto en el infinito como la recta generada por $(1, 0)^T \in \mathbb{C}^2$ y la transformación de Möbius $f : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ definida por

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}$$

como la recta en el espacio de matrices generada por

$$\varphi(f) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Entonces la evaluación de f en $z \in \mathbb{C}$ se representa como la recta generada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} az + b \\ cz + d \end{bmatrix}$$

mientras que la evaluación de f en $z = \infty$ se representa como la recta generada por

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix}$$

Esto implica que $\varphi(g \circ f) = \varphi(g) \cdot \varphi(f)$ para todo $f, g \in \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}})$. Por ende, $\varphi : \mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \to \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C})$ no sólo es una biyección, sino también un isomorfismo de grupos.

Finalmente, puesto que $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, los grupos proyectivos general y especial son isomorfos. Por ende, $\mathrm{Aut}(\widehat{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{PGL}(2, \mathbb{C}) \cong \mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$.

e) En ambos casos, tenemos el espacio U formado agujereando el plano en un número finito de puntos. Debemos considerar este espacio como la esfera con todos los agujeros dados más uno adicional en el infinito. Sea A este conjunto extendido de agujeros. Entonces, el grupo $\mathrm{Aut}(U)$ está conformado por las transformaciones de Möbius que permutan A de alguna manera.

- En el primer caso, $A = \{0, 1, \infty\}$. Puesto que A tiene sólo tres puntos, todas las permutaciones de A se extienden de manera única a una transformación de Möbius que fija U. Por lo tanto, el grupo de automorfismos $\mathrm{Aut}(U)$ es isomorfo a S_3.
- En el segundo caso, $A = \{0, 1, \alpha, \infty\}$, donde $\alpha = 2 - 2i$. Puesto que A tiene cuatro puntos, una permutación de $\sigma : A \to A$ se extiende a una transformación de Möbius si y sólo si preserva la razón anarmónica $(z_1 : z_2 : z_3 : z_4) = (\sigma(z_1) : \sigma(z_2) : \sigma(z_3) : \sigma(z_4))$ para todo $z_1, z_2, z_3, z_4 \in A$.

Para determinar las permutaciones válidas, escribí el siguiente programa:

```
p[a_, b_, c_, d_] := (a - b) (c - d);
q[a_, b_, c_, d_] := p[a, c, b, d] / p[a, b, c, d];
r[xs_] := Limit[q[a, b, c, d], {a, b, c, d} -> xs];
c[xs_] := r[xs] == 2 - 2I;
xs = {0, 1, 2 - 2I, Infinity};
xss = Permutations[xs];
Select[xss, c]
```

La respuesta de Mathematica es

```
Out[7]= {{0, 1, 2 - 2 I, Infinity}, {1, 0, Infinity, 2 - 2 I},
>    {2 - 2 I, Infinity, 0, 1}, {Infinity, 2 - 2 I, 1, 0}}
```

Entonces las permutaciones válidas son

- $\mathrm{id}(0) = 0$, $\mathrm{id}(1) = 1$, $\mathrm{id}(\alpha) = \alpha$, $\mathrm{id}(\infty) = \infty$
- $\lambda(0) = 1$, $\lambda(1) = 0$, $\lambda(\alpha) = \infty$, $\lambda(\infty) = \alpha$
- $\mu(0) = \alpha$, $\mu(1) = \infty$, $\mu(\alpha) = 0$, $\mu(\infty) = 1$
- $\nu(0) = \infty$, $\nu(1) = \alpha$, $\nu(\alpha) = 1$, $\nu(\infty) = 0$

Todas ellas satisfacen $\sigma^2 = \mathrm{id}$, así que $\mathrm{Aut}(U) = \{\mathrm{id}, \lambda, \mu, \nu\}$ es isomorfo al grupo de Klein.

f) Fijemos un punto de referencia $x \in X$ y pensemos en cada elemento $g \in G$ como un camino desde x hasta algún otro punto $g(x)$. Las siguientes proposiciones son equivalentes:

- Dos caminos $g, h \in G$ conducen al mismo punto $g(x) = h(x)$.
- La composición de ida y vuelta $g^{-1}h \in G_x$ es un "lazo" que regresa a x.
- g, h pertenecen a la misma clase lateral izquierda $gG_x = hG_x$ del estabilizador.

Sea G/H el conjunto de clases laterales izquierdas del estabilizador $H = G_x$ y sea $\varphi : G/H \to X$ la aplicación del enunciado $\varphi(gH) = g(x)$. Entonces,

- φ está bien definida, porque todo $h \in gH$ también conduce a $g(x)$.
- φ es inyectiva, porque todo $h \notin gH$ conduce a un punto distinto de $g(x)$.
- φ es sobreyectiva, porque todo $y \in X$ es el destino de algún $g \in G$.

Por ende, φ es una biyección.

g) Sea $\alpha \in \mathbb{D}$ un elemento arbitrario. Observemos que la transformación de Möbius

$$\varphi(z) = \frac{z - \alpha}{1 - \bar{\alpha}z}$$

fija el círculo unitario. Explícitamente, si $|z| = 1$, entonces

$$|\varphi(z)| = \frac{|z - \alpha|}{|1 - \bar{\alpha}z|} = \frac{|z - \alpha|}{|\bar{z} - \bar{\alpha}|} = 1$$

Además, hemos construido φ específicamente para que $\varphi(\alpha) = 0$. Entonces $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ y todo $\alpha \in \mathbb{D}$ pertenece a la órbita de cero. Por ende, $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ actúa transitivamente sobre $\mathbb{D}$.

El libro de texto demuestra explícitamente que, para todo subgrupo discreto $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ que actúa libremente sobre $\mathbb{D}$, se cumplen las siguientes proposiciones (parafraseadas):

- Existe una vecindad $U \subset \mathbb{D}$ del origen tal que $\Gamma(U)$ es la unión disjunta de $|\Gamma|$ copias de U, las cuales son permutadas libremente por Γ.
- Todo $\beta \in \mathbb{D}$ distinto del origen es separado del origen por vecindades Γ-invariantes.

El subgrupo conjugado $\Lambda = \varphi \circ \Gamma \circ \varphi^{-1}$ también satisface estas condiciones:

- Existe una vecindad $\varphi(U) \in \mathbb{D}$ del origen tal que $\Lambda \circ \varphi(U)$ es la unión disjunta de $|\Lambda|$ copias de $\varphi(U)$, las cuales son permutadas libremente por Λ.
- Todo $\varphi(\beta) \in \mathbb{D}$ distinto del origen es separado del origen por vecindades Λ-invariantes.

Puesto que $\Gamma = \varphi^{-1} \circ \Lambda \circ \varphi$, tenemos los siguientes resultados:

- Existe una vecindad $U \in \mathbb{D}$ de $\alpha = \varphi^{-1}(0)$ tal que $\Gamma(U)$ es la unión disjunta de $|\Gamma|$ copias de U, las cuales son libremente permutadas por Γ.
- Todo $\beta \in \mathbb{D}$ distinto de α es separado de α por vecindades Γ-invariantes.

Ejercicio 3. (Capítulo 3 del libro de texto)

a) Muestre que, para todo subgrupo discreto $\Gamma \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$, son equivalentes:

- Γ actúa libremente sobre $\mathbb{H}$.
- Γ es libre de torsión.

b) Muestre que Γ_p actúa libremente sobre $\mathbb{H}$ para todo número primo p.

c) Muestre que $X = \{(z, w) \in \mathbb{C}^2 \mid w^2 = \sin z\}$ es una superficie de Riemann.

d) Pruebe la fórmula de Euler.

e) El conjunto de ceros de un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ se denota

$$V(f) = \{[z_0 : z_1 : z_2] \in \mathbb{CP}^2 \mid f(z_0, z_1, z_2) = 0\}$$

Muestre que toda matriz $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ induce un automorfismo $\varphi_A : \mathbb{CP}^2 \to \mathbb{CP}^2$ tal que, para todo polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$, existe algún otro polinomio homogéneo $f_A \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ tal que $\varphi_A \circ V(f) = V(f_A)$.

f) Sea $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ un polinomio homogéneo de grado 2, considerado como forma cuadrática en $\mathbb{C}^3$. Muestre que el criterio que determina si $V(f)$ es una curva regular plana se cumple si y sólo si esta forma es no degenerada.

Solución.

a) Tomemos un elemento torsión $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ con representación matricial $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$. Entonces A es diagonalizable y sus autovalores son raíces de la unidad. Tenemos dos casos:

- Si los autovalores son reales, entonces $A = \pm I$, por ende $\varphi = \mathrm{id}$.
- Si los autovalores son complejos conjugados $\lambda, \bar{\lambda} \in \mathbb{C}$, entonces sus autoespacios asociados son generados por autovectores conjugados $v, \bar{v} \in \mathbb{C}^2$. Exactamente uno de los dos corresponde a un punto fijo de φ en el semiplano $\mathbb{H}$.

Por ende, todo subgrupo de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ que actúa libremente sobre $\mathbb{H}$ es libre de torsión.

Tomemos ahora un elemento de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ con un punto fijo. Mediante una transformación de Möbius, identifiquemos este elemento con algún $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ que fija el origen. El lema de Schwarz garantiza que φ es una rotación. Tenemos dos casos:

- Si φ es una rotación racional, digamos, una fracción m/n de vuelta, entonces $\varphi^n = \mathrm{id}$.
- Si φ es una rotación irracional, entonces φ genera un subgrupo denso en el círculo $S^1 \subset \mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ conformado por todas las rotaciones.

Entonces φ genera un subgrupo discreto de $\mathrm{Aut}(\mathbb{D})$ si y sólo si es torsión. Por ende, todo subgrupo discreto libre de torsión de $\mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ actúa libremente sobre $\mathbb{H}$.

b) Tomemos un elemento $\varphi \in \Gamma_p$ con representación matricial

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \tilde{\Gamma}_p$$

Puesto que $A = I \pmod{p}$, tenemos

- $a = d = 1 \pmod{p}$, lo cual implica que $a + d = 1 + ad \pmod{p^2}$.
- $b = c = 0 \pmod{p}$, lo cual implica que $0 = bc \pmod{p^2}$.

Entonces $a + d = 1 + (ad - bc) = 2 \pmod{p^2}$. Ahora tenemos dos casos:

- Si $p \geq 3$, entonces $|a + d|$ se minimiza tomando $a + d = 2$.
- Si $p = 2$, entonces $|a + d|$ se minimiza tomando $a + d = \pm 2$.

El libro de texto demuestra explícitamente que $\varphi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{H})$ tiene puntos fijos si y sólo si $\varphi = \mathrm{id}$ o la matriz asociada $A \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{R})$ satisface $|a + d| < 2$. Lo último es imposible para $\varphi \in \Gamma_p$, por ende, Γ_p actúa libremente sobre $\mathbb{H}$.

c) Debemos verificar que, en cada punto de X, alguna de las coordenadas z, w se puede expresar como función holomorfa de la otra. Por definición, X es la curva de nivel $f^{-1}(0)$ para la función

$$f(z, w) = w^2 - \sin z$$

Por el teorema de la función implícita, la condición necesaria y suficiente para que una variable sea función holomorfa de la otra en una vecindad de $(z, w) \in X$ es que el diferencial

$$df = \frac{\partial f}{\partial z} \, dz + \frac{\partial f}{\partial w} \, dw = -\cos z \, dz + 2w \, dw$$

no se anule en este punto. Puesto que dz, dw forman una base de $T^\star \mathbb{C}^2$, tenemos

$$df = 0 \iff w = \cos z = 0$$

lo cual es imposible sobre X, porque $w = 0$ implica $\cos^2 z = 1 - \sin^2 z = 1 - w^4 = 1$. Por ende, X es una superficie de Riemann suave.

d) Sea P_m el espacio de polinomios homogéneos de grado m. La identidad de Euler es

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = mf$$

para todo $f \in P_m$. El miembro izquierdo es una evaluación del operador lineal

$$z_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial}{\partial z_n}$$

mientras que el miembro derecho es un reescalamiento por una constante, lo cual obviamente es una transformación lineal. Esta observación nos permite verificar la identidad en una base de P_m y luego extender el resultado a todo P_m por linealidad.

Por supuesto, la base de P_m más conveniente para esta situación está conformada por los monomios de grado total m. Sea $f = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ uno de estos monomios. Para cada $i = 1, \dots n$, tenemos

$$\begin{aligned} z_i \frac{\partial f}{\partial z_i} &= z_i \frac{\partial}{\partial z_i} (x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}) \\ &= (z_1^{m_1} \cdots \widehat{z_i^{m_i}} \cdots z_n^{m_n}) \cdot z_i \frac{\partial}{\partial z_i} (z_i^{m_i}) \\ &= (z_1^{m_1} \cdots \widehat{z_i^{m_i}} \cdots z_n^{m_n}) \cdot m_i z_i^{m_i} \\ &= m_i \cdot z_1^{m_1} \cdots z_i^{m_i} \cdots z_n^{m_n} \\ &= m_i f \end{aligned}$$

Sumando sobre todos los índices i, tenemos

$$z_1 \frac{\partial f}{\partial z_1} + \cdots + z_n \frac{\partial f}{\partial z_n} = (m_1 + \ldots m_n) f = mf$$

e) No hay ninguna buena razón para limitarnos al caso bidimensional, así que no lo haremos. Sea U el espacio vectorial $\mathbb{C}^{n+1}$ agujereado en el origen y sea $\pi : U \to \mathbb{CP}^n$ la proyección natural.

Recordemos que los reescalamientos $\mathbb{C}^\star$ son el centro del grupo lineal $\mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$. Entonces, toda matriz invertible $A \in \mathrm{GL}(n+1, \mathbb{C})$, interpretada como un automorfismo lineal $\tilde{\varphi}_A : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$, deja invariantes las órbitas de la acción de $\mathbb{C}^\star$ sobre U. Por ende, existe un morfismo de variedades algebraicas $\varphi_A : \mathbb{CP}^n \to \mathbb{CP}^n$ que completa el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\tilde{\varphi}_A"] \arrow[d, "\pi"] & U \arrow[d, "\pi"] \\ \mathbb{CP}^n \arrow[r, dashed, "\varphi_A"] & \mathbb{CP}^n \end{tikzcd}$$

Eligiendo correctamente las coordenadas locales en las copias de $\mathbb{CP}^n$ que fungen de dominio y codominio, podemos conseguir que la representación coordenada de φ_A sea la aplicación identidad. (Ésta es otra de las virtudes del atlas construido en el ejercicio 1.) Por ende, φ_A es un biholomorfismo.

Recordemos que un polinomio homogéneo $f \in \mathbb{C}[z_0, \ldots, z_n]$ puede ser interpretado como una función $f : \mathbb{CP}^n \to \Sigma$, donde $\Sigma = \{0, 1\}$ es el espacio de Sierpiński. Para cada $\pi(p) \in \mathbb{CP}^n$, tenemos

$$f \circ \pi(p) = \begin{cases} 0, & \text{si } f(p) = 0 \\ 1, & \text{si } f(p) \neq 0 \end{cases}$$

Entonces los subconjuntos algebraicos proyectivos de $\mathbb{CP}^n$ se expresan como

$$V(f_1, \ldots, f_k) = f_1^{-1}(0) \cap \ldots f_k^{-1}(0)$$

Pongamos $g_i = f_i \circ \varphi_A^{-1}$. Es inmediato que

- g_i es un polinomio homogéneo.
- g_i tiene el mismo grado que f_i.
- g_i se anula en $p \in \mathbb{CP}^n$ si y sólo si f_i se anula en $\varphi_A(p)$.

Entonces φ_A envía conjuntos algebraicos a conjuntos algebraicos:

$$\begin{aligned} \varphi_A \circ V(f_1, \ldots, f_k) &= \varphi_A(f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_k^{-1}(0)) \\ &= \varphi_A \circ f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap \varphi_A \circ f_k^{-1}(0) \\ &= g_1^{-1}(0) \cap \ldots g_k^{-1}(0) \\ &= V(g_1, \ldots, g_k) \end{aligned}$$

La restricción de φ a cualquier subconjunto algebraico

$$\varphi_A : V(f_1, \ldots, f_k) \to V(g_1, \ldots, g_k)$$

es un isomorfismo de variedades algebraicas. Además, son equivalentes:

- $V(f_1, \ldots, f_k)$ es una variedad compleja suave.
- $V(g_1, \ldots, g_k)$ es una variedad compleja suave.
- φ_A es un biholomorfismo entre ellas dos.

f) Extendamos la forma cuadrática $f \in \mathbb{C}[z_0, z_1, z_2]$ a la forma bilineal simétrica

$$\tilde{f}(v, w) = \frac{f(v + w) - f(v) - f(w)}{2}$$

Sea $A \in \mathrm{Mat}(3, \mathbb{C})$ la matriz simétrica que representa a $\tilde{f}$. Por construcción,

$$f(p) = \tilde{f}(p, p) = p^t A p$$

Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:

- $df = 2p^t A \, dp$ sólo se anula en el origen de $\mathbb{C}^3$.
- $p^t A$ no se anula para ningún $p \in \mathbb{C}^3$ distinto de cero.
- Ap no se anula para ningún $p \in \mathbb{C}^3$ distinto de cero.
- $A \in \mathrm{GL}(3, \mathbb{C})$ es una matriz invertible.
- f es una forma cuadrática no degenerada.

El libro de texto demuestra que cualquiera de estas condiciones es suficiente para que $V(f)$ sea una superficie de Riemann compacta.