Consecuencias del T. Principal: X sup. Riemann compacta ($\partial X = \phi$).

① Recordar:

$$H_X^{1,0} = \{ 1\text{-formas holomorfas en } X \}.$$

$$H_X^{0,1} = \operatorname{coker}(\bar\partial) \quad \text{donde } \bar\partial : \Omega^{0,0} \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{0,1}$$

$$\cong \Omega^{0,1} / \operatorname{Im} \bar\partial$$

$H_X^{0,1} \leftarrow$ detecta existencia de funciones meromorfas en X con cierta prescipción en el comportam.

de los polos.

Obj: $H^{1,0}_X \underset{iso}{\simeq} \overline{H^{0,1}_X}$ $\wedge$ $H^{0,1}_X \simeq (H^{1,0}_X)^*$.

② Tenemos los sgtes. homomorfismos naturales:

ⓐ una función $\sigma : H^{1,0} \longrightarrow \overline{H^{0,1}}$

inducida por $\alpha \longmapsto \bar{\alpha}$.

ⓑ existe una función bilineal

$$B : H^{1,0} \times H^{0,1} \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$B(\alpha, [\theta]) = \int_X \alpha \wedge \theta . \quad (*)$$

Notar: $\underline{\underline{\theta}} \rightsquigarrow \underline{\underline{\theta + \bar{\partial} f}}$ (otro rep. de θ)

la integral $(*)$ cambia por

$$\int_X \alpha \wedge \bar{\partial} f = - \int_X \bar{\partial}(f\alpha) \underset{\text{Stokes}}{=} - \int_{\partial X} f\alpha = 0$$

α 1-forme holomorfa

$(\bar{\partial}\alpha = 0)$.

(c) (i.) $H^{1,0} \longrightarrow H^1$ $\qquad \Omega^1 = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$

$$[\alpha]_{holo} \longmapsto [\alpha]_d$$

pues α 1-forma holo. es d-cerrada ($d\alpha = 0$)

(d) $\underline{\underline{v}}: H^{1,1} \longrightarrow H^2$

es la función natural inducida por la inclusión

$$\mathrm{Im}(\bar\partial) \qquad \bar\partial : \Omega^{1,0} \longrightarrow \Omega^2$$

$$\hookrightarrow$$

$$\mathrm{Im}(d) \qquad d : \Omega^1 \longrightarrow \Omega^2 .$$

$\alpha = \underset{=}{f}\, dz$

$H^{1,1} = \operatorname{coker} \bar\partial$

$$\boxed{\Omega^{1,0} \xrightarrow{\bar\partial} \Omega^{1,1}} \longrightarrow 0$$

$$\Omega^{1,0} \xrightarrow{\partial} \underbrace{\Omega^{2,0}}_{0}$$

α

pues X sup de Riemann

$\partial(f\,dz)$

$= \left(\frac{\partial f}{\partial z} \cdot dz\right) dz$

$= 0$

$\omega = \bar\partial \alpha$, $\underbrace{\alpha \in \Omega^{1,0}}$.

$\overset{?}{\Rightarrow}$ $\omega = d\beta$ con $\beta = ?$

$\beta = \alpha$?

$d = \partial + \bar\partial$

$d\alpha = \underbrace{\partial\alpha}_{0} + \underbrace{\bar\partial \cdot \alpha}_{\omega}$

Es decir si $\beta = \alpha$

$d\beta = \omega = \bar\partial\alpha$.

$2 \quad 2{,}0 \quad 1{,}1 - 0{,}2$

$\Omega = \Omega^{1,0} \oplus \underline{\underline{\Omega^{1,1}}} \oplus \Omega^{0,1}$

Teorema 6:

Sea X una sup. de Riemann conexa compacta (sin borde).

1. $\overline{\;}: H^{1,0} \to \overline{H^{0,1}}$ es un isomorfismo.

2. La función bilineal B induce un iso: $\underline{\underline{H^{0,1}}} \xrightarrow{\simeq} (H^{1,0})^*$

es decir,

$$B: H^{1,0} \times H^{0,1} \to \mathbb{C}$$

es un "perfect pairing".

③ La transformación

$$H^{1,0} \oplus H^{0,1} \longrightarrow H^1$$

$$(\alpha, \theta) \longmapsto i(\alpha) + \overline{i(\sigma^{-1}\theta)}$$

es un isomorfismo.

④ La transformación $\nu : H^{1,1} \longrightarrow H^2$ es un isomorfismo.

Obs:

<u>Prop 26</u>: Supongamos $H_X^{0,1}$ tiene dim. h.

Entonces dados cualesquiera $h+1$ puntos $p_1, p_2, \ldots, p_{h+1}$ en X, existe una función meromorfa (no holomorfa) en X con polos simples en un subconjunto de los $p_1, \ldots, p_{h+1}$.

Corolarios ①: Sea X ...

Sea X sup. de Riemann.

- $H^1_{dR}(X)_{\mathbb{C}} \cong \mathbb{C}^{2g}$, donde g = género de X.

Como $H^1 \simeq H^{1,0} \oplus H^{0,1}$

y · $H^{1,0} \simeq \overline{H^{0,1}}$

· $H^{0,1} \simeq (H^{1,0})^*$

Entonces $\begin{cases} H^{1,0} \simeq \mathbb{C}^g \\ H^{0,1} \simeq \mathbb{C}^g . \end{cases}$

Así g = género(X) codifica también

info de la estructura cx. de X.

— no sólo de la estruct. topológica —

Ejm: X = toro (sup de género $g = 1$)

$$H^{1,0} \simeq \mathbb{C} \simeq H^{0,1}$$

$$\Rightarrow \dim\{\underbrace{\text{1-formas holomorfas}}_{H^{1,0}}\} = 1 \quad \text{- - - } (*)$$

Ω^1_{hol} Ω^1_{hol} : haz de 1-formas

$$\begin{tikzcd} {} \arrow[d, shift right] \\ X \arrow[u, bend right, "s"'] \end{tikzcd}$$

hol

$\uparrow$

(haz lineal)

holomorfas.

} localm. son formas del tipo

$f(z)dz$

f holomorfa }

para haces lineales se tiene: haz lineal es trivial $\Longleftrightarrow$ existe una sección no nula.

por $(*)$ existe una sección no nula

$s: X \to \Omega^1_{hol}$ de modo que

haz lineal

Ω^1_{hol} es trivial.

- **Pregunta/Ejercicio:**

  Si X sup. de Riemann de género 2.

  ¿Existirá una 1-forma holomorfa que nunca se anula?

(2) Sea X una sup. de Riemann de género $g = 0$.

entonces

$X \simeq \mathbb{C}$. $\qquad \dim H^{0,1} = 0$.

$$H^{0,1} = 0.$$

$$\left(\begin{array}{l} \exists f : X \to \hat{\mathbb{C}} \text{ con un} \\ \text{único polo simple} \\ \Rightarrow X \underset{\text{iso}}{\simeq} \hat{\mathbb{C}}. \end{array} \right)$$

3 Sea X una sup. de Riemann compacta de género g.
$(\dim H^{0,1} = g)$

Sean $\underbrace{p_1, p_2, \ldots, p_{g+1}}$ puntos distintos de X.

Entonces una función meromorfa no

constante en X con polos en un subc. de los P_i.

(4) Sea X sup. de Riemann de género g. Entonces existen g 1-formas holomorfas en X linealm. independientes. (*)

(pues $\dim H^{1,0} = g$).

$g =$ género (X) obstrucción para la trivialización de

$\Omega^1_{hol}(X)$.

Preámbulo al Teorema de Riemann-Roch:

$S_g = X$ Sup. Riemann (curva proyectiva / $\mathbb{C}$).

dim $\underline{\underline{H^1}}(X)$

$\underline{\underline{g}} =$ género (X) , $\underline{g \geq 1}$

$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_g$ 1-formas holomorfas l.i.

(i.e. secciones $\underline{\text{l.i.}}$ de $\Omega^1_{hol}(X) \leftarrow$ haz lineal)

? $X \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^{g-1}$

$[x] \longmapsto [\sigma_1(x) : \sigma_2(x) : \dots : \sigma_g(x)]$?

preg: φ es inyectiva??

$g \geq 2$:

$S_g \dashrightarrow \mathbb{P}^{g-1}$

$S_2 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^1$

$S_3 \xrightarrow{\varphi} \mathbb{P}^2$

---

contexto $\mathcal{L}$ $\qquad$ $\mathcal{L}$ haz lineal.

$\quad |$

$\quad X$ $\qquad$ $\{ s_1, \dots, s_k$ secciones de $\mathcal{L}$

$=$ tener suficientes secciones globales ... que generan" $\mathcal{L}$

($s_1, \dots, s_k$ son l.i.)

(haz lineal amplio)

$(*)$
$$X \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^{k-1}$$
$$x \longmapsto [s_1(x) : s_2(x) : \dots : s_k(x)]$$

<u>Preg</u>: ¿cuando π es <u>inyectiva</u>? $\Leftrightarrow$ haz muy amplio

Si π inyectiva $\Rightarrow X \hookrightarrow \mathbb{P}^{k-1}$ (encajado)

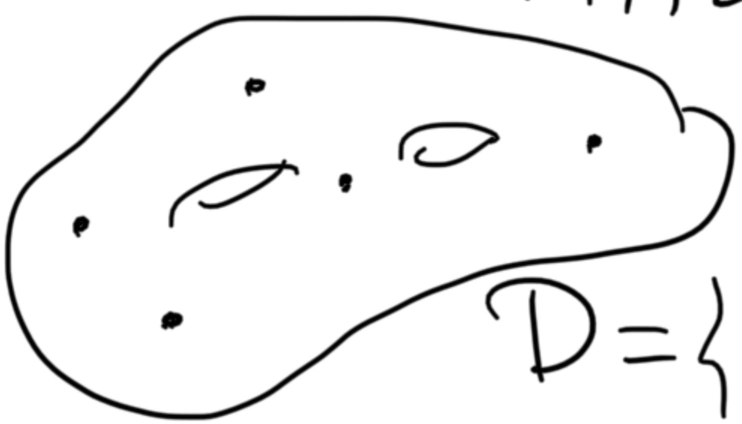
$\Rightarrow X$ (variedad) proyectiva!.

<u>Así</u>: estudiar haces lineales nos brinda

l...

técnicas para mostrar que una var. es proyectiva o no (encontrar encajes en $\mathbb{P}^N$).

Sean $p_1, p_2, \dots, p_d$ puntos distintos en X.



X

$D = \{p_1, p_2, \dots, p_d\}$ colección de estos puntos.

(divisor positivo)

Denotar

- $\underline{\underline{H^0(D)}}$: funciones meromorfas en X

con a lo más polos simples en los p_i.

$$\dim H^0(D) = h^0(D).$$

- $H^0(K-D)$ = espacio de 1-formas holomorfas que se anulan en los p_i.

$$\dim H^0(K-D) = h^0(K-D)$$

Teorema (Riemann-Roch)

$$\boxed{h^0(D) - h^0(K-D) = d - g + 1}.$$

En general:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{D} & \leftarrow & \text{haz lineal} \\ | & & \\ X & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K & \leftarrow & \text{haz lineal} \\ | & & \text{canónico} \\ X & & (\Omega^1_{hol}) \end{array}$$

En general:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_{D} & \leftarrow & \text{haz lineal} \\ | & & \\ X & & \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K & \leftarrow & \text{haz lineal} \\ | & & \text{canónico} \\ X & & (\Omega^1_{hol}). \end{array}$$

$\deg(D) = \sum a_i$.

D: divisor en X

Combinación lineal de puntos en X.

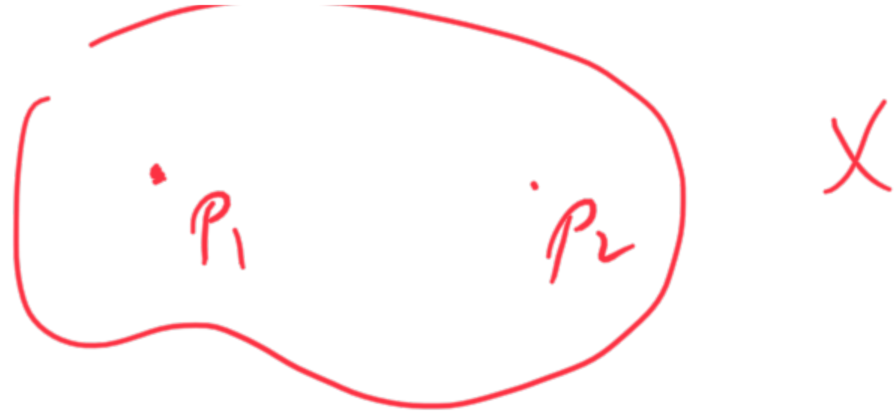
Sea f meromorfa en X. $\to$ # finito de ceros x_i

$\to$ # finito de polos y_j

$$\boxed{\underline{\mathrm{div}(f)} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{suma} \\ \text{formal}}}{=} \sum x_i - \sum y_j}$$

$$\mathrm{div}(f) = \sum \text{ceros} - \sum \text{polos}$$

$$= 2p_1 - p_2$$



$\operatorname{div}(f) = 2p_1 - p_2 \longleftrightarrow f$ meromorfa: $\begin{cases} p_1 \leftarrow \text{cero de orden } 2 \\ p_2 \leftarrow \text{polo simple.} \end{cases}$

$\deg(\operatorname{div}(f)) = 2 - 1 = 1$

z^3

$\operatorname{div}(f) = 3q_1 - 5q_2 \longleftrightarrow f$ meromorfa $\begin{cases} q_1 \text{ cero orden } 3 \\ q_2 \text{ polo de orden } 5 \end{cases}$

$\deg(\operatorname{div}(f)) = \underline{-2}$

$\dfrac{1}{z^5}$

D divisor $\quad D = \sum^{k} n_i P_i$

$i=1 \qquad\qquad p_i \in X.$

$\underset{\text{asociar}}{\rightsquigarrow} \quad \mathcal{L}_D$

haz lineal.

Ejm: ⊙ si $D = \{p\}. \subseteq X.$

$$\underbrace{h^0(D)}_{\text{funciones merom } f.} - \underbrace{h^0(K-D)}_{1\text{-formas}} = d-g+1 \qquad = 1-g+1$$

$$= 2-g$$

Ejm: ⊙ si $D = \{p\}. \subseteq X.$

$$\underbrace{h^0(D)}_{\substack{\text{funciones}\\ \text{merom. f.}}} - \underbrace{h^0(K-D)}_{\text{1-formas}} = d - g + 1 = 1 - g + 1 = 2 - g$$

$$\underbrace{h^0(D)}_{\substack{\text{funciones}\\ \text{holomorfas}\\ \text{en } X}} - h^0(K-D) = 1 - g.$$

$$\Rightarrow h^0(D) = 1.$$

$$\Rightarrow 1 - h^0(K-D) = 1 - g.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{h^0(K-D) = g}$$

Espacio de funciones holo. que no se anulan es g. --- (*)