I. Laplaciano y formas armónicas:

X : Superficie de Riemann.

Def: El Laplaciano es el operador diferencial de orden 2 definido por:

$$\Delta : \Omega^0(X) \longrightarrow \Omega^2(X)$$

$\Delta = 2i\bar{\partial}\partial$

$$\boxed{\Delta f \underset{\text{def.}}{=} 2i\bar{\partial}\partial f}$$

$\left(\text{obs: } d^2 = 0 \Rightarrow (\partial + \bar{\partial})^2 = 0 \Rightarrow \bar{\partial}\partial = -\partial\bar{\partial}\right)$

En coord. locales:

$$\Delta f = \frac{2i}{4}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) f \, dz d\bar{z}$$

$$= -(f_{xx} + f_{yy})\, dx dy$$

$$= -\underbrace{\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) dx\, dy}_{2\text{-forma.}}$$

Salvo signo, corresp. al Laplaciano usual

Obs: $\begin{cases} dz\, d\bar{z} = -2i\, dx\, dy \\ d\bar{z}\, dz = 2i\, dx\, dy. \end{cases}$

Def: Sea f una 0-forma compleja en X.

Decimos que f es una función armónica si

$$\Delta f = 0.$$

Prop: Si f es holomorfa, entonces

$$\underbrace{\mathrm{Re}(f)}_{\substack{\text{parte real} \\ \text{de } f}}, \quad \underbrace{\mathrm{Im}(f)}_{\substack{\text{parte} \\ \text{imaginaria} \\ \text{de } f}} \quad \text{son armónicas.}$$

Notar:

$$\bar{\partial}\partial(f \pm \bar{f}) = -\partial\bar{\partial}(f \pm \bar{f})$$

$$= -\partial\bar{\partial}\cancel{f} + \overline{\bar{\partial}(\bar{\partial} \cancel{f})} \quad (\text{como } f \text{ hol}$$

$= \quad \partial f - \partial(\bar{\partial} f) \qquad$ (como f holo $\bar{\partial} f = 0$)

$= 0$

Similarmente, se tiene:

Lema: Sea $p \in X$.

Sea N una vecindad de $p \in X$.

Sea $\phi : N \to \mathbb{R}$ armónica.

Entonces: existe una vecindad (abierta) $U \subseteq N$ de $p \in X$

y

una función holomorfa $f : U \to \mathbb{C}$

tal que

$$\mathrm{Re}(f) = \phi.$$

Prueba:

Consideramos la 1-forma

$$A = \underbrace{i\,\bar{\partial}\phi}_{(0,1)\text{ forma}} + \underbrace{\overline{i\,\bar{\partial}\phi}}_{(1,0)\text{-forma}}$$

$$\begin{tikzcd}
\Omega^{0,1} \arrow[r, "\partial"] & \Omega^2 \\
\Omega^0 \arrow[u, "\bar\partial"] \arrow[r, "\partial"] & \Omega^{1,0} \arrow[u, "\bar\partial"']
\end{tikzcd}$$

ϕ

$\Omega^1_{\mathbb{C}} = \Omega^{1,0} \oplus \Omega^{0,1}$

Notar

$dA \in \Omega^2_{\mathbb{C}}(X).$

Como $d = \partial + \bar\partial.$

$\Rightarrow dA = (\partial + \bar\partial)(i\bar\partial\phi + \overline{i\bar\partial\phi})$

$= 0$ pues $\bar\partial\partial\phi = 0$

(ϕ armónica).

En otras palabras

A es 1-forma cerrada!

$\Rightarrow$ A es localm. exacta!

es decir existe una vecindad U de p tal que (i.e. $H^1(U) = 0$)

$A = dg$, con $g : U \to \mathbb{R}$

- Notemos lo sgte:

$$\underbrace{\overbrace{i\bar{\partial}\phi}^{0,1} + \overbrace{\overline{i\bar{\partial}\phi}}^{1,0}}_{A} = dg = \underbrace{\partial g}_{(1,0)} + \underbrace{\bar{\partial} g}_{(0,1)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial g = \overline{i\bar{\partial}\phi} = -i\,\partial\phi . \\ \bar{\partial} g = i\bar{\partial}\phi . \end{cases}$$

Con ello, tenemos

$$\bar{\partial}(\phi + ig) = \bar{\partial}\phi + i\bar{\partial} g = 0 .$$

i.e. $\phi + ig$ es holomorfa!

Finalmente, definimos

$$f = \phi + ig .$$

f holomorfa , $\mathrm{Re}(f) = \phi$.

Principio de máximo: X sup. de Riemann

$$\underset{\substack{\text{abierto}\\ \text{conexo}}}{\mathcal{U}} \subseteq X$$

Sea $\phi : \mathcal{U} \to \mathbb{R}$ función armónica no constante.

Entonces, para un punto $x \in \mathcal{U}$, existe un punto $x' \in \mathcal{U}$ tal que

$$\phi(x') > \phi(x).$$

Obs: Probar este resultado usando el hecho de que $\phi = \mathrm{Re}(f)$ (- Lema anterior) con f holo.

Y usar el hecho de que f es función abierta.

II. Norma de Dirichlet:

Observaciones preliminares:

X sup. de Riemann.

α (1,0)-forma

i.e. $\alpha = p(z)\,dz$.

Consideremos la 2-forma

$i\,\alpha \wedge \bar{\alpha}$

En coord. locals:

$$i\,\alpha\wedge\bar{\alpha} = i\,p\,dz \wedge \bar{p}\,d\bar{z}$$

$$= i\,\underbrace{p\cdot\bar{p}}\,dz\,d\bar{z}$$

$$= i\,\|p\|^2\,\underbrace{dz\,d\bar{z}}_{-2i\,dx\,dy}$$

$$= -2i^2\,\|p\|^2\,dx\,dy$$

$$= 2\,\|p\|^2\, dx\,dy$$

Es decir

$i\,\alpha \wedge \bar{\alpha}$ es una 2-forma positiva

Definimos así:

$$\|\alpha\|^2 = \int_X i\,\underbrace{\alpha \wedge \bar{\alpha}} \in [0, +\infty[$$

Obs: (1) Si α tiene soporte compacto entonces

$$\|\alpha\|^2 < \infty.$$

Así, $\|\cdot\|$ define una norma en el espacio de $(1,0)$-formas con soporte compacto.

Obs (2): Esta norma está modelada en el prod. inte prod. interno Hermitiano

$$\langle \alpha, \beta \rangle = \int_X i\alpha \wedge \overline{\beta}.$$

α, β $(1,0)$ formas dif.

con soporte compacto

Obs ③: Recordar:

X superficie

$$H^2_c(X) \xrightarrow[\text{iso}]{\sim} \mathbb{R}$$

$$\omega \longmapsto \int_X \omega.$$

$\Rightarrow H^2_c(X) \simeq \mathbb{R}$

una elección de generador de $H^2_c(X)$ corresponde a elegir una 2-forma de área en X.

Si ω es una forma de área en X

(ω gen de $H^2_c(X)$).

podemos definir una norma usando:

$$i\,\alpha\wedge\bar{\alpha} = |\alpha|^2\cdot\omega$$

(*) $\underbrace{i\,\alpha\wedge\bar{\alpha}}$ 2-forma positiva $\lambda\cdot\omega$, $\lambda>0$

$$\rightarrow \boxed{\|\alpha\|^2 = \int_X |\alpha|^2 \omega.}$$

(esta def. es indep. de la elección de 2-forma (verificar!))

Recordar: dada una 1-forma real A podemos identificarla con su componente $(1,0)$ $A^{(1,0)}$.

$$\underset{\dim 2}{\Omega^1_{\mathbb{C}}} = \underset{1\ \dim}{\Omega^{1,0}} \oplus \underset{1\ \dim}{\Omega^{0,1}}$$

Podemos definir así:

$$\|A\|^2 = 2\|\underbrace{A^{(1,0)}}_{\text{por lo hecho arriba.}}\|^2.$$

Esta norma o módulo está asociada al producto interno real $\langle , \rangle$:

$$\langle A, B \rangle = 2i \underbrace{\int_X A^{0,1} \wedge B^{1,0}}$$

A, B: 1-formas reales con soporte compacto.

Lema: A, B 1-formas reales en X.

$$\int_X \|A \wedge B\| \leq \|A\| \|B\|.$$

Idea: si A, B tienen soporte en una carta local.

$$A = \underbrace{P\,dz}_{} + \bar{P}\,d\bar{z}$$

$$B = Q\,dz + \bar{Q}\,d\bar{z}$$

P, Q funciones complejas.

$$A \wedge B = (P\bar{Q} - Q\bar{P})\,\underbrace{dz\,d\bar{z}}_{}$$

$$= \operatorname{Im}(P\bar{Q})\,dx\,dy.$$

$$\Rightarrow \int_X \|A \wedge B\| = \int_{\mathbb{C}} |\operatorname{Im}(P\bar{Q})|\,dx\,dy.$$

(en la carta local)

$\Rightarrow$ Cauchy-Schwarz:

$$\int_X \|A \wedge B\| \leq \underbrace{\left(\int_{\mathbb{C}} \|P\|^2\right)^{1/2}}_{\|A\|} \underbrace{\left(\int_{\mathbb{C}} \|Q\|^2\right)^{1/2}}_{\|B\|}.$$

Similarm. si las formas tienen soporte compacto, usamos partición de la unidad (-ver Donaldson -).

o

Sean f, g funciones reales en X.

(al menos una de ellas con soporte compacto)

Def: (producto interno de Dirichlet)

$$\langle f, g \rangle_D = \langle \underbrace{df}_{\text{1-forma real}}, \underbrace{dg}_{\text{1-forma real}} \rangle$$

Def. (norma de Dirichlet)

$$\|f\|_D = \|df\|$$

Lema: Si al menos una de f y g tiene soporte compacto,

entonces

entonces

$$\langle f,g\rangle_D = \int_X g\,\Delta f = \int_X f\,\Delta g.$$

Idea de la prueba:

$$\langle f,g\rangle_D = \langle \overset{\partial f+\bar\partial f}{df},\ \overset{\partial g+\bar\partial g}{dg}\rangle$$

$$\stackrel{def}{=} 2i\int_X \underset{(1,0)}{\partial f}\wedge \underset{(0,1)}{\bar\partial g}$$

$$= 2i\int_X \partial(f\bar\partial g) - f\,\partial\bar\partial g \quad \dots (*)$$

$$\left(\text{pues } \partial(f\bar\partial g) = \partial f\,\bar\partial g + f\,\partial\bar\partial g\right)$$

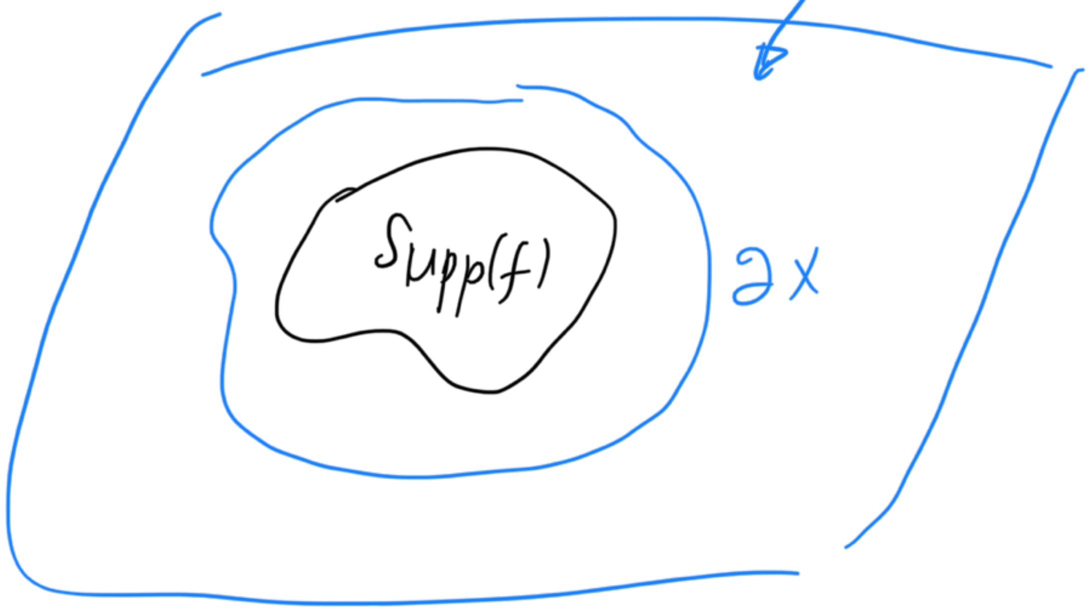
$$\left\{\begin{aligned}\Delta g &= 2i\,\bar\partial\partial g\\ &= -2i\,\partial\bar\partial g\end{aligned}\right\}$$

Observar

$$\int_X \partial(f\bar{\partial} g) = 0 \quad \text{por Stokes}$$

(*) f ó g tiene soporte compacto

$$\hookrightarrow = \int_{\partial X} f\bar{\partial} g = 0 \quad \ldots \; (**)$$



Reemp (**) en (*)

$$\langle f, g\rangle_D = -2i\int_X f\,\partial\bar{\partial} g$$

$$= \int_X f\,\Delta g \quad ✓$$

Obs: si f ó g son funciones reales armónicas

$$\langle f, g\rangle = 0$$

$$(f, g)_D = 0$$

Objetivo (prox. clase)

Teorema principal:

Sea X superf de Riemann conexa, compacta.

y sea ρ 2-forma en X.

Entonces existe una solución f a la ecuación

$$(*) \qquad \Delta f = \rho$$

si y sólo si

$$\int_X \rho = 0.$$

(solución de $(*)$ es única salvo suma de una cte.)