Superficies de Riemann (tarea 1)

Eduardo León (梁遠光)

Abril 2020

Ejercicio 1. (Función gamma)

a) Considere la función integral de Euler (de segunda clase)

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1}\, dt$$

Muestre que dicha función es continua para todo $x > 0$.

b) Considere la función de variable compleja (función gamma)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1}\, dt$$

Muestre que $\Gamma(z)$ es continua en todo punto de la región $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) > 0\}$.

c) Sea C una curva compacta contenida en D. Muestre que

$$\int_C \Gamma(z)\, dz = \int_0^\infty e^{-t} \left[\int_C t^{z-1}\, dz\right] dt$$

d) Sea C una curva cerrada contenida en D. Muestre que

$$\int_C \Gamma(z)\, dz = 0$$

(*Sugerencia:* Apele al teorema de Cauchy-Goursat.)

e) Muestre que $\Gamma(z)$ es analítica para todo $z \in D$. (*Sugerencia:* Apele al teorema de Morera.)

f) Muestre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y concluya que Γ admite una extensión meromorfa en $\Re(z) > -1$. Más precisamente, Γ es analítica en $\Re(z) > -1$ excepto en el origen, donde existe un polo simple.

g) Muestre que Γ admite una extensión meromorfa a todo el plano $\mathbb{C}$ con polos simples en los enteros no positivos. Muestre que el residuo en $z = -k$ es $(-1)^k/k!$.

h) Muestre que Γ no tiene ceros.

Solución. Pongamos $\varphi(t, z) = e^{-t} t^{z-1}$, donde, por supuesto, $t^z = e^{z \ln t}$.

a) Si $x \geq 1$, entonces existe algún $T \geq 1$ tal que $t^{x-1} \leq e^{t/2}$ para todo $t \geq T$. Entonces,

$$\Gamma(x) = \int_0^T \varphi(t, z)\, dt + \int_T^\infty \varphi(t, z)\, dt \leq \int_0^T e^{-t} t^{x-1}\, dt + \int_T^\infty e^{-t/2}\, dt$$

Por otro lado, si $0 < x \leq 1$, entonces

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \varphi(t, z)\, dt + \int_1^\infty \varphi(t, z)\, dt \leq \int_0^1 t^{x-1}\, dt + \int_1^\infty e^{-t}\, dt$$

En ambos casos, $\Gamma(x)$ está acotado por una cantidad finita. Por ende, $\Gamma(x)$ es un número real bien definido para todo $x > 0$.

Sea $x_n > 0$ es una sucesión convergente, con límite $x > 0$. Por construcción, la sucesión de funciones $f_n(t) = \varphi(t, x_n)$ converge punto a punto a $f(t) = \varphi(t, x)$. Además, f_n es eventualmente dominada en valor absoluto por la función integrable

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t, x+\varepsilon) & t \geq 1 \\ \varphi(t, x-\varepsilon) & t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(x_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^\infty f = \Gamma(x)$$

Por ende, Γ es continua en x.

b) Pongamos $x = \Re(z)$ y observemos que $|\varphi(t, z)| = \varphi(t, x)$. Entonces,

$$|\Gamma(z)| = \left| \int_0^\infty \varphi(t, z)\, dt \right| \leq \int_0^\infty \varphi(t, x)\, dt = \Gamma(x)$$

es una cantidad finita. Por ende, $\Gamma(z)$ es un número complejo bien definido.

Sea $z_n \in D$ es una sucesión convergente, con límite $z \in D$. Por construcción, la sucesión de funciones $f_n(t) = \varphi(t, z_n)$ converge punto a punto a $f(t) = \varphi(t, z)$. Además, f_n es eventualmente dominada en módulo por la función integrable

$$g(t) = \begin{cases} \varphi(t, x+\varepsilon) & t \geq 1 \\ \varphi(t, x-\varepsilon) & t \leq 1 \end{cases}$$

Entonces, por el teorema de la convergencia dominada,

$$\lim_{n\to\infty} \Gamma(z_n) = \lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n = \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} f_n = \int_0^\infty f = \Gamma(z)$$

Por ende, Γ es continua en z.

c) Para toda curva compacta C, la integral

$$\int_C |\Gamma(z)|\, dz \leq \int_C \Gamma(\Re(z))\, dz$$

es una cantidad finita. Entonces, por el teorema de Fubini-Tonelli,

$$\int_C \Gamma(z) = \int_C \int_0^\infty \varphi(t, z)\, dt\, dz = \int_0^\infty \int_C \varphi(t, z)\, dz\, dt = \int_0^\infty e^{-t} \left[\int_C t^{z-1} dz \right] dt$$

d) Fijemos $t > 0$. La función $f(z) = t^{z-1}$ es entera. Por el teorema de Cauchy-Goursat,

$$\int_C t^{z-1}\, dz = 0$$

para toda curva cerrada C en el plano. Entonces,

$$\int_C \Gamma(z)\, dz = \int_0^\infty e^{-t} \left[\int_C t^{z-1}\, dz \right] dt = \int_0^\infty 0 = 0$$

para toda curva cerrada C contenida en D.

e) El resultado del ítem anterior es textualmente la hipótesis del teorema de Morera:

$$\int_C \Gamma(z)\, dz = 0$$

para toda curva cerrada C contenida en D. La conclusión del teorema es que Γ es holomorfa en D.

f) Pongamos $u = t^z$, $v = -e^{-t}$. Entonces $du = zt^{z-1}\, dt$, $dv = e^{-t}\, dt$. Entonces,

$$\Gamma(z+1) = \int_0^\infty u\, dv = uv\Big|_0^\infty - \int_0^\infty v\, du = z\Gamma(z)$$

Esto nos permite extender Γ de manera meromorfa a $\Re(z) > -1$ como

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+1)}{z}$$

Puesto que $\Gamma(1) = 1$ no es ni cero ni polo, Γ tiene un polo simple en $z = 0$, con residuo

$$\operatorname{Res}(\Gamma, 0) = \Gamma(1) \cdot \operatorname{Res}(1/z, 0) = 1$$

g) Utilizando repetidamente la recurrencia $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, tenemos

$$\Gamma(z) = \frac{\Gamma(z+k+1)}{(z+k) \cdots (z+2) \cdot (z+1) \cdot z} = \frac{\Delta(z)}{z+k}$$

Esta extensión es meromorfa en $\Re(z) > -(k+1)$. Puesto que

$$\Delta(-k) = \frac{1}{(-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdots (-k)} = \frac{(-1)^k}{k!}$$

no es ni cero ni polo, Γ tiene un polo simple en $z = -k$, con residuo

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -k) = \Delta(-k) \cdot \operatorname{Res}\left(\frac{1}{z+k}, 0\right) = \frac{(-1)^k}{k!}$$

h) Tomemos un número complejo en la franja $0 < \Re(z) < 1$. Entonces,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} t^{z-1} s^{-z}\, ds\, dt$$

Pongamos $u = s + t$, $v = t/s$. Diferenciando, tenemos

$$\frac{\partial u}{\partial s} = 1, \qquad \frac{\partial u}{\partial t} = 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial s} = -\frac{t}{s^2}, \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{s}$$

El jacobiano de este cambio de variables es

$$J = \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial s} = \frac{1}{s} + \frac{t}{s^2} = \frac{u}{s^2}$$

Entonces $s^{-2}\, ds\, dt = u^{-1}\, du\, dv$. Por ende,

$$s^{-1}\, ds\, dt = \frac{s+t}{1+t/s}\, s^{-2}\, ds\, dt = \frac{u}{1+v}\, u^{-1}\, du\, dv = \frac{1}{1+v}\, du\, dv$$

Aplicando este cambio de variables a la integral original, tenemos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-(t+s)} (t/s)^{z-1} s^{-1}\, ds\, dt = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-u} v^{z-1} \frac{1}{1+v}\, du\, dv$$

Aplicando la sustitución $v = e^w$ a esta integral, tenemos

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \int_0^\infty e^{-u}\,du \cdot \int_0^\infty \frac{v^z}{1+v}\,\frac{dv}{v} = 1 \cdot \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{zw}}{1+e^w}\,dw$$

El beneficio de la última sustitución es que el nuevo integrando

$$f(w) = \frac{1}{g(w)} = \frac{e^{zw}}{1+e^w}$$

es meromorfo con polos simples en los múltiplos impares de πi. Esto nos permite evaluar la integral de manera indirecta, utilizando una integral de contorno en el plano complejo como paso intermedio. Consideremos el lazo formado por los siguientes tramos:

A) El segmento de recta desde $w = -R$ hasta $w = R$.

B) El segmento de recta desde $w = R$ hasta $w = R - 2\pi i$.

C) El segmento de recta desde $w = R - 2\pi i$ hasta $w = -R - 2\pi i$.

D) El segmento de recta desde $w = -R - 2\pi i$ hasta $w = -R$.

Este lazo encierra un único polo simple de f en el punto $w = -\pi i$, cuyo residuo es

$$\operatorname{Res}(f, -\pi i) = \frac{1}{g'(-\pi i)} = \frac{e^{-\pi i z}}{e^{-\pi i}} = -e^{-\pi i z}$$

Puesto que el lazo gira en sentido horario, por el teorema del residuo,

$$\int_A f + \int_B f + \int_C f + \int_D f = -2\pi i \operatorname{Res}(f, -\pi i) = 2\pi i e^{-\pi i z}$$

Analicemos el comportamiento de estas integrales cuando R tiende a ∞:

- El segmento A converge a la recta real. El segmento C se obtiene revirtiendo A y desfasando w por $-2\pi i$. Por ende, en el límite,

  $$\int_A f + \int_C f = (1 - e^{-2\pi i z})\,\Gamma(z)\Gamma(1-z)$$

- Los segmentos B y D tienen longitud constante 2π. Poniendo $x = \Re(z)$, $r = e^R$, tenemos

  $$\left|\int_B f\right| \le \int_B |f| \le \frac{2\pi r^x}{r-1}, \qquad \left|\int_D f\right| \le \int_D |f| \le \frac{2\pi r^{-x}}{1-r^{-1}}$$

  Ambas cantidades tienden a cero.

Combinando estos resultados, obtenemos la fórmula de reflexión de Euler:

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{2\pi i e^{-\pi i z}}{1 - e^{-2\pi i z}} = \frac{2\pi i}{e^{\pi i z} - e^{-\pi i z}} = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

Hemos deducido esta fórmula sólo para $0 < \Re(z) < 1$, pero, por continuación analítica, la fórmula se cumple en todo $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$. Entonces:

- Γ no tiene ceros en $\mathbb{C} - \mathbb{Z}$.
- Γ no tiene ceros en $z = -k$ para $k \in \mathbb{N}$, porque dichos puntos son polos.
- Γ no tiene ceros en $z = k + 1$ para $k \in \mathbb{N}$, porque $\Gamma(k+1) = k!$.

Por ende, la función Γ no tiene ceros.

Ejercicio 2. (Ramificaciones)

a) Considere la serie de potencias

$$f(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^2 \cdot 2!} + \frac{3z^3}{2^3 \cdot 3!} - \frac{5 \cdot 3z^4}{2^4 \cdot 4!} + \dots$$

1) Muestre que f es holomorfa en el disco unitario $|z| < 1$.
2) Muestre que f no puede ser extendida de manera holomorfa a $z = -1$.
3) ¿Puede f ser extendida de manera holomorfa a $\mathbb{C} - \{-1\}$? Explique en detalle su argumento.

b) Considere $P(z, w) = w^3 - (z^2 + 1)$ y sea $w = \phi(z)$ la solución local de $P(z, \phi(z)) = 0$ alrededor del punto $(z, w) = (0, 1)$. Exhiba dos caminos cerrados desde y hasta $z = 0$ tales que, si extendemos ϕ analíticamente a lo largo de estos caminos, llegamos a dos soluciones diferentes alrededor de $z = 0$.

Solución.

a) Consideremos la curva algebraica $w^2 = z + 1$. Puesto que la derivada parcial $\partial/\partial w$ no se anula en el punto $(z, w) = (0, 1)$, existe una vecindad de este punto en la curva que es la gráfica de una función holomorfa $w = \phi(z)$. Diferenciando implícitamente, tenemos

$$w' = \frac{1}{2w}$$

Observemos que w' es una función racional de w de grado -1. Es decir, el operador d/dz redujo el grado de w en 2, de 1 a -1. Esto es perfectamente razonable, porque w^2 es un polinomio de grado 1 en z. Postulemos que las derivadas superiores de w son de la forma

$$\frac{w^{(n)}}{n!} = a_n w^{1-2n}$$

Diferenciando esta expresión una vez más, tenemos

$$\frac{w^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{a_n}{n+1} w^{-2n} \frac{dw}{dz} = \frac{1-2n}{2+2n} a_n w^{-1-2n}$$

Entonces la sucesión a_n satisface la recurrencia

$$a_{n+1} = \frac{1-2n}{2+2n} a_n$$

Dada la semilla $a_0 = \phi(0) = 1$, el resto de la sucesión es

$$a_{n+1} = \frac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} \cdot (n+1)!}$$

Los primeros términos de esta solución son

$$a_1 = \frac{1}{2}, \qquad a_2 = -\frac{1}{2^2 \cdot 2!}, \qquad a_3 = \frac{3}{2^3 \cdot 3!}, \qquad a_4 = -\frac{5 \cdot 3}{2^4 \cdot 4!}$$

Por inspección, $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$ es la serie de potencias de ϕ centrada en $z = 0$.

1) El radio de convergencia de f es

$$\liminf_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| = \liminf_{n \to \infty} \frac{2n+2}{2n-1} = 1$$

Por ende, f es holomorfa en el disco $|z| < 1$.

2) Supongamos por el absurdo que g es una extensión de f holomorfa en $z = -1$. En particular, g es continua en -1 y, por ende,

$$g(-1) = \lim_{z \to -1} g(z) = \lim_{z \to -1} f(z) = 0$$

La derivada de g también es continua en -1 y, por ende,

$$g'(-1) = \lim_{z \to -1} g'(z) = \lim_{z \to -1} f'(z) = \lim_{z \to -1} \frac{1}{2f(z)} = \frac{1}{0}$$

Esto es imposible, porque $1/0$ no es un número complejo bien definido.

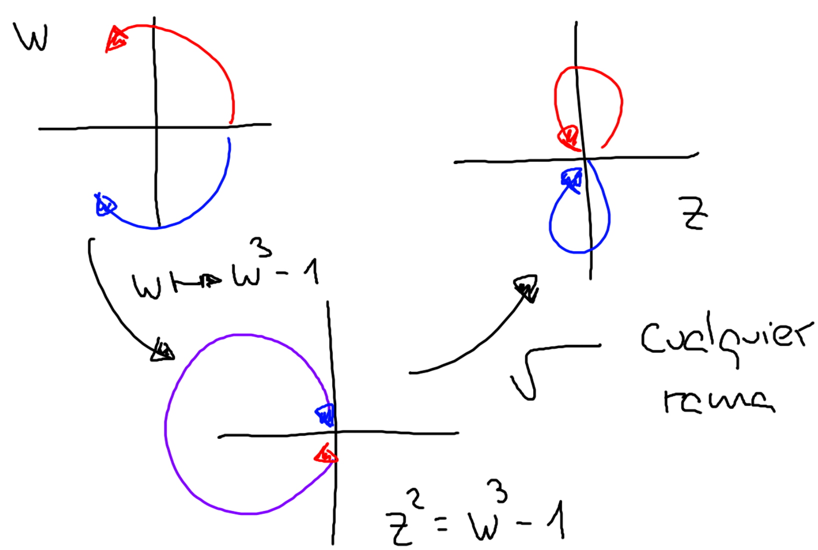
3) Supongamos por el absurdo que g es una extensión de f holomorfa en $\mathbb{C} - \{-1\}$. Consideremos el camino cerrado $z = e^{i\theta} - 1$, con $\theta \in [0, 2\pi]$. El levantamiento de este camino a la gráfica de g debería ser el camino cerrado $w = g(e^{i\theta} - 1)$. Sin embargo, el levantamiento es $w = e^{i\theta/2}$, que empieza en $w = 1$ para $\theta = 0$ y termina en $w = -1$ para $\theta = 2\pi$. Por ende, no existe ninguna extensión holomorfa de f al plano agujereado $\mathbb{C} - \{-1\}$.

b) Consideremos tres copias del plano complejo $\mathbb{C}_1, \mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$, con coordenadas z^2, z, w, respectivamente. Observemos que $\mathbb{C}_2, \mathbb{C}_3$ son recubrimientos ramificados de $\mathbb{C}_1$, doble y triple, respectivamente.

En $\mathbb{C}_3$, dibujemos los arcos del círculo unitario que nacen en $w = 1$ y desembocan en las otras dos raíces cúbicas de la unidad. Ambos arcos se proyectan a $\mathbb{C}_1$ como el círculo de radio 1 centrado en $z^2 = -1$, recorrido desde $z^2 = 0$ hasta $z^2 = 0$. Sin embargo, hay una diferencia: en un caso el círculo es recorrido en sentido antihorario, en el otro el círculo es recorrido en sentido horario.

Cada lazo en $\mathbb{C}_1$ puede ser levantado a $\mathbb{C}_2$ de dos maneras diferentes, una por cada rama de la raíz cuadrada. Escogiendo arbitrariamente un levantamiento de cada lazo, obtenemos los lazos buscados en $\mathbb{C}_2$.

El siguiente bosquejo ilustra la situación:



Como se puede observar, los lazos levantados no son diferenciables en $z = 0$. En el gráfico, los lazos parten del origen en direción a $1 \pm i$, pero regresan al origen como si proviniesen de $-1 \pm i$.

Ejercicio 3. (Función zeta de Riemann)

a) Muestre que la función zeta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

converge absoluta y uniformemente en $\Re(z) \geq 1 + \varepsilon$ para todo $\varepsilon > 0$.

(*Sugerencia:* Use la prueba M de Weierstrass.)

b) Muestre que $\zeta(z)$ es analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\Re(z) > 1$.

(*Sugerencia:* Use algún corolario del teorema de Morera.)

c) Demuestre la siguiente identidad:

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1}e^{-x}}{1 - e^{-x}}\, dx$$

(*Sugerencia:* Parta de la definición de Γ como la integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t}t^{z-1}\, dt$$

y aplique el cambio de variable $t = nx$, con $n = 1, 2, 3, \dots$)

1) A partir de esta expresión, obtenga una continuación meromorfa de $\zeta(z)$ en $\mathbb{C}$. (*Sugerencia:* Por un lado, considere la integral

$$\int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1}\, dt$$

Por otro lado, expanda la serie de Laurent

$$\frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n t^n$$

cuya región de convergencia es $0 < |t| < 2\pi$.)

2) Describa los polos de esta extensión.

Solución.

a) Pongamos $p = 1 + \varepsilon$. Cada término de la p-serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

es una cota uniforme para el término correspondiente de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-\Re(z)}$$

en la región $\Re(z) \geq p$. Por ende, la función zeta de Riemann

$$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}$$

converge absoluta y uniformemente en la región $\Re(z) \geq p$.

b) Sea C una curva cerrada en la región $\Re(z) > 1$. Puesto que C es compacta, la coordenada real $\Re(z)$ alcanza un valor mínimo $p = 1 + \varepsilon$ entre los puntos de C. Entonces C está contenida en la región $\Re(z) \geq p$. Llamemos L a la longitud de C y observemos que la integral

$$\int_C \sum_{n=1}^{\infty} \left|n^{-z}\right| \, dz \leq \int_C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p} \, dz = L \cdot \sum_{n=1}^{\infty} n^{-p}$$

es una cantidad finita. Entonces, por el teorema de Fubini-Tonelli,

$$\int_C \zeta(z) \, dz = \int_C \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C n^{-z} \, dz = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$$

Entonces, por el teorema de Morera, ζ es una función holomorfa.

c) Expandiendo las definiciones de ζ, Γ y sustituyendo $t = ns$, tenemos

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} \, dt = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-ns} s^{z-1} \, ds$$

Pongamos $x = \Re(z)$ y observemos que la integral

$$\zeta(x)\Gamma(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-nx} s^{x-1} \, ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\infty} \left|e^{-nz} s^{z-1}\right| \, ds$$

es una cantidad finita. Entonces, por el teorema de Fubini-Tonelli,

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} s^{z-1} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns} \, ds = \int_0^{\infty} s^{z-1} \frac{e^{-s}}{1 - e^{-s}} \, ds = \int_0^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt$$

que es el resultado solicitado.

1) Reescribamos el resultado anterior como

$$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt + \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt$$

Dado un compacto $K \subset \mathbb{C}$, existe un instante uniforme $T \geq 1$ a partir del cual el integrando es dominado en módulo por $e^{-t/2}$ para todo $z \in K$. Entonces la integral

$$\int_T^{\infty} \left| \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \right| \, dt \leq \int_T^{\infty} e^{-t/2} \, dt$$

es una cantidad finita. Por ende, la integral en el tramo final

$$F(z) = \int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt$$

converge de manera localmente uniforme a una función entera de z.
Consideremos la serie de Laurent centrada en el polo simple $t = 0$ del factor meromorfo

$$f(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{e^t - 1} = \sum_{n=-1}^{\infty} c_n t^n$$

Esta serie converge de manera localmente uniforme en $0 < |t| < 2\pi$, pues los polos más cercanos a $t = 0$ son $t = \pm 2\pi i$. Por ende, la integral en el tramo inicial es

$$G(z) = \int_0^1 \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} \, dt = \int_0^1 \sum_{n=-1}^{\infty} c_n t^{z+n-1} \, dt$$

Pongamos $x = \Re(z)$ y observemos que, en la región $x > 1$, la integral

$$G(x) = \int_0^1 \sum_{n=-1}^{\infty} c_n t^{x+n-1}\, dt = \int_0^1 \sum_{n=-1}^{\infty} c_n \left| t^{z+n-1} \right| dt$$

es una cantidad finita. Entonces, por el teorema de Fubini-Tonelli,

$$G(z) = \int_0^1 \sum_{n=-1}^{\infty} c_n t^{z+n-1}\, dt = \sum_{n=-1}^{\infty} \int_0^1 c_n t^{z+n-1}\, dt = \sum_{n=-1}^{\infty} \frac{c_n}{z+n}$$

Recordemos que la serie $f(1) = c_{-1} + c_0 + c_1 + \dots$ es absolutamente convergente. Tomemos un entero $k \geq 2$ y un radio ligeramente menor $r = k - \varepsilon$. Cada término de la serie

$$\frac{1}{\varepsilon} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} |c_n|$$

es una cota uniforme para el término correspondiente de la serie

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left| \frac{c_n}{z+n} \right|$$

en la región $|z| < r$. Por ende, el sufijo

$$G_k(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{c_n}{z+n}$$

es una función holomorfa en $|z| < k$. Por ende, G es una función meromorfa en $\mathbb{C}$ y tiene las mismas singularidades que el prefijo

$$G(z) - G_k(z) = \frac{c_{-1}}{z-1} + \dots + \frac{c_{k-1}}{z+k-1}$$

en cada disco $|z| < k$. Estas singularidades son polos simples en los puntos $z = -n$ con $c_n \neq 0$ y los residuos correspondientes son $\operatorname{Res}(G, -n) = c_n$.
Finalmente, la función ζ puede ser extendida de manera meromorfa en $\mathbb{C}$ como

$$\zeta = \frac{F+G}{\Gamma}$$

2) Puesto que F, $1/\Gamma$ son funciones enteras, todo polo de ζ se manifiesta como polo de G. Puesto que G sólo tiene polos simples, ζ y Γ no tienen polos comunes. Entonces el único polo de ζ es $z = 1$ y el residuo correspondiente es

$$\operatorname{Res}(\zeta, 1) = \frac{\operatorname{Res}(G, 1)}{\Gamma(1)} = c_{-1} = \operatorname{Res}(f, 0) = \frac{1}{g'(0)} = 1$$

Ejercicio 4. (Ecuaciones diferenciales) Sean $P(z)$, $Q(z)$ funciones holomorfas en el origen. Considere sus respectivas expansiones en series de potencias

$$P(z) = \sum_n p_n z^n, \qquad Q(z) = \sum_n q_n z^n$$

en una región común $|z| < R$.

a) Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden $u'' + Pu' + Qu = 0$. Pruebe que para cada $n \in \mathbb{N}$ se cumple la siguiente igualdad

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} + \sum_{i+j=n} (j+1)p_i u_{j+1} + \sum_{i+j=n} q_i u_j = 0$$

b) Halle una fórmula recursiva para la expresión dada en el ítem anterior.

c) Considere las condiciones iniciales u_0, u_1. Muestre que la solución en serie de potencias de la ecuación diferencial dada es única y converge para $|z| < R$.

Solución.

a) Postulemos una solución formal $u(z)$ que se expresa como

$$u = \sum_n u_n z^n, \qquad u' = \sum_n (n+1)u_{n+1} z^n, \qquad u'' = \sum_n (n+2)(n+1)u_{n+2} z^n$$

Recordemos que el producto de dos series de potencias es

$$\sum_n a_n z^n \cdot \sum_n b_n z^n = \sum_n \sum_{i+j=n} a_i b_j z^n$$

Entonces los términos de la ecuación diferencial son

$$Pu' = \sum_n p_n z^n \cdot \sum_n (n+1)u_{n+1} z^n = \sum_n \sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1} z^n$$

$$Qu = \sum_n q_n z^n \cdot \sum_n u_n z^n = \sum_n \sum_{i+j=n} q_i u_j z^n$$

Combinando todo, tenemos

$$0 = \sum_n (n+2)(n+1)u_{n+2} z^n + \sum_n \sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1} z^n + \sum_n \sum_{i+j=n} q_i u_j z^n$$

$$0 = \sum_n \left[(n+2)(n+1)u_{n+2} + \sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1} + \sum_{i+j=n} q_i u_j \right] z^n$$

Por el teorema de la identidad, cada coeficiente entre corchetes se anula:

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} + \sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1} + \sum_{i+j=n} q_i u_j = 0$$

b) Por construcción, u_{n+2} no aparece en las sumatorias

$$\sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1}, \qquad \qquad \sum_{i+j=n} q_i u_j$$

Entonces la recurrencia que determina la sucesión u_n es

$$u_{n+2} = \frac{-1}{(n+2)(n+1)} \left[\sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1} + \sum_{i+j=n} q_i u_j \right]$$

c) Una vez conocidas las semillas u_0, u_1, el resto de la sucesión u_n está completamente determinado por la recurrencia construida en el ítem anterior. Por ende, la solución en serie de potencias de la ecuación diferencial es única.

Tomemos cualquier $r < R$. Puesto que las series

$$P(r) = \sum_n p_n r^n, \qquad \qquad Q(r) = \sum_n q_n r^n$$

son absolutamente convergentes, existe una cota uniforme $L > 0$ tal que

$$|p_n| r^{n+1} \leq L, \qquad |q_n| r^{n+2} \leq L$$

Si $L > 1$, reemplacemos r con r/L. De este modo, aseguramos que la cota $L = 1$ funcione.

Tomemos $M > 0$ tal que $|u_0| \leq M$, $|u_1| r \leq M$. Supongamos inductivamente que $(j+1)\,|u_j|\, r^j \leq M$ para todo $i = 0, 1, 2, \ldots, n+1$. Entonces,

$$\begin{aligned}
(n+2)(n+1)\,|u_{n+2}|\, r^{n+2} &= \left| \sum_{i+j=n} (j+1) p_i u_{j+1} r^{n+2} + \sum_{i+j=n} q_i u_j r^{n+2} \right| \\
&\leq \sum_{i+j=n} (j+1)\,|p_i u_{j+1}|\, r^{n+2} + \sum_{i+j=n} |q_i u_j|\, r^{n+2} \\
&\leq M \cdot \sum_{j=0}^{n} (j+2) \\
&= M \cdot \frac{(n+1)(n+4)}{2}
\end{aligned}$$

Por ende, para todo $n \in \mathbb{N}$, también es válida la cota superior

$$|u_{n+2}|\, r^{n+2} \leq \frac{M}{2} \cdot \frac{n+4}{n+2} \leq M$$

Por ende, la solución formal $u(z)$ hallada en el ítem a) converge en el disco $|z| < r$.

Tomemos un punto z_0 del círculo $|z| = r$. Puesto que P, Q son holomorfas en z_0, podemos repetir el procedimiento del ítem a) usando las series de potencias de P, Q centradas en z_0. Sea $\tilde{u}(z)$ la única solución de este nuevo problema y sea $\tilde{r} > 0$ su radio de convergencia. Entonces $\tilde{u}(z) = u(z)$ en la intersección de los discos $|z| < r$ y $|z - z_0| < \tilde{r}$. Por ende, $\tilde{u}(z)$ es una continuación analítica de $u(z)$. Por ende, la solución $u(z)$ se extiende a todo el disco $|z| < R$. Por ende, el radio de convergencia de $u(z)$ es mayor o igual que R.

Adenda. (Construcción explícita de las curvas del ejercicio 2.b)

Solución. Para construir las curvas rojas, variemos t desde 0 hasta 2π. Para construir las curvas azules, variemos t desde 0 hasta -2π. Las curvas en el plano $\mathbb{C}_3$ son arcos circulares descritos por $w = e^{it/3}$:

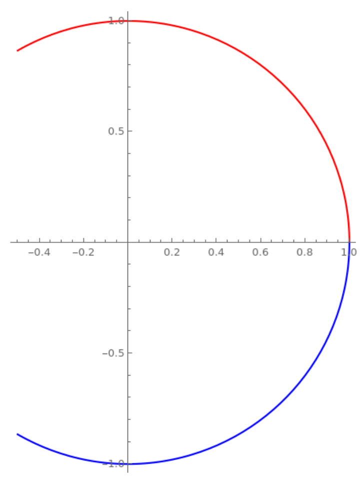


Figura 1: Una vecindad del origen en $\mathbb{C}_3$.

Ambas curvas se proyectan a $\mathbb{C}_1$ como el círculo $z^2 = e^{it} - 1$:

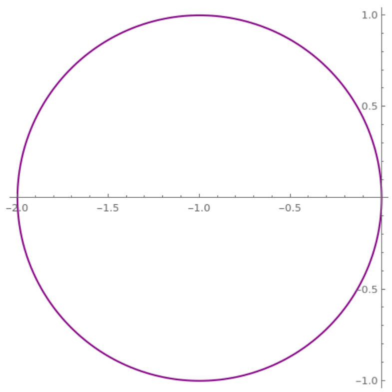


Figura 2: Una vecindad del punto $z^2 = -1$ en $\mathbb{C}_1$.

Escribamos la coordenada de $\mathbb{C}_2$ como $z = re^{i\theta}$. Entonces,

$$r^4 = |z^2|^2 = (1 - \cos t)^2 + (\sin t)^2 = 2 - 2\cos t$$

$$\cos^2 2\theta = \frac{(1 - \cos t)^2}{2 - 2\cos t} = \frac{1 - \cos t}{2} = \frac{r^4}{4}$$

Notemos que $\cos 2\theta \leq 0$, porque $\Im(z^2) \leq 0$. Entonces la ecuación de las curvas en $\mathbb{C}_2$ es

$$r^2 = -2\cos 2\theta$$

Recordemos que no hay ambigüedad sobre el signo de r: en coordenadas polares, siempre $r > 0$. Para dibujar la curva roja en $\mathbb{C}_2$, haremos variar θ desde $\pi/4$ hasta $3\pi/4$. Para dibujar la curva azul, haremos variar θ desde $-\pi/4$ hasta $-3\pi/4$. Obtenemos el siguiente resultado:

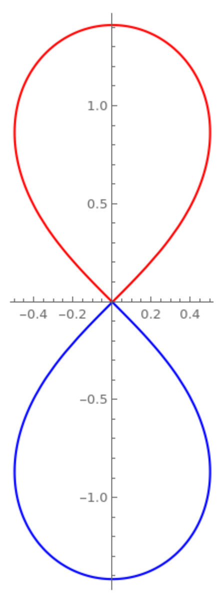


Figura 3: Las curvas buscadas en $\mathbb{C}_2$.