Recordar:

Lema:

Sea X sup. de Riemann compacta.

Sea $f: X \to \mathbb{P}^1$ una función meromorfa no cte.

(i.e. $f: X \to \mathbb{P}^1$ holo. $f \not\equiv \infty$)

Se tiene

$$\boxed{\# \text{zeros}(f) = \# \text{polos}(f)}$$

– contados con multiplicidad – .

⌜

$$\# f^{-1}(0) = \# f^{-1}(\infty) = n \leftarrow \text{grado de } f.$$

(f propia + grado(f)). ⌟

Prueba:

Consideremos la forma diferencial

$$\omega = \frac{df}{f}$$

holo. excepto en ceros y polos de f.

(ω 1-forma meromorfa).

- si $a \in X$, es cero de f de orden k

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_a f = k$$

- Si $a \in X$, es polo de f de orden j

$$\Rightarrow \operatorname{Res}_a f = -j$$

Por el T. de Residuo:

$$\sum_{a \in \text{polo}(\omega)} \operatorname{Res}_a \omega = 0.$$

$$\# \text{ceros de } f - \# \text{polos de } f = 0$$

(con mult.)

Divisores en una superficie de Riemann:

X: sup. de Riemann compacta.

Def: (Divisor)

un divisor D en X es una función

$$\boxed{D : X \longrightarrow \mathbb{Z}}$$

que es nula en todo punto de X salvo
un # finito de ellos.

$$D(x) \in \mathbb{Z} \qquad D(x) = n_x$$

$$D \underset{\text{ident. formal}}{=} \sum_{x \in X} n_x \cdot x \qquad (*)$$

Obs ①: Existe un orden parcial en el cjto de divisores

- $D \geq E$ si $D(p) \geq E(p) \ \forall p \in X$.

Obs ②: Sea D un divisor $\left(D = \sum_{p_i \in X} n_i p_i \right)$

$$\deg(D) = \sum n_i \in \mathbb{Z}.$$

– grado de D –

Obs ③: Denotemos el cjto de div. de X por $\mathrm{Div}(X)$

$\Rightarrow$ $\mathrm{Div}(X)$ es un grupo aditivo.

Notar: $\deg : \mathrm{Div}(X) \longrightarrow \mathbb{Z}$ homomf

Obs 4: Sea f una función meromorfa no trivial en X.

$$\underbrace{\mathrm{div}(f)}_{\text{divisor principal asociado a } f} \underset{\text{def}}{=} \sum_{p \in X} \mathrm{ord}_p(f, p) \cdot p$$

$$= \underbrace{(f)_0}_{\text{suma formal de ceros con mult.}} - \underbrace{(f)_\infty}_{\text{suma formal de polos con mult.}}$$

Por Lema: $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$.

i.e grado de un divisor princ. es 0.

Def: Decimos que dos divisores D_1 y D_2 son equivalente $(D_1 \sim D_2)$

$(D_1 \sim D_2)$

Si

$$D_1 - D_2 = \mathrm{div}(f)$$ para cierta función meromorfa $f : X \to \mathbb{P}^1$.

<u>Def</u>: $$Cl(X) = \mathrm{Div}(X)/\sim$$

Class group

– grupo de Clase de X –

$$\Rightarrow \quad \underline{\deg : Cl(X) \to \mathbb{Z}}.$$

Sea D un divisor.

Decimos que f (función meromorfa) es un múltiplo de D si $(f) \geq D$.

$\mathrm{div}(f) = (f)$

- $D = \{p\}$.

$$(f) \geq 1 \cdot P$$

$\operatorname{ord}_{\underline{P}} f \geq 1$. $\leftarrow$ f tiene un cero de orden al menos 1 en P.

$\operatorname{ord}_{Q} f \geq 0$

$(Q \neq P)$

- $\tilde{D} = \underline{-1 \cdot P}$

$(f) \geq \underline{\tilde{D}} \iff$ f meromorfa, f tiene a lo más un polo simple en P y es holo. en los demás puntos.

Sea ω una 1-forma meromorfa en X. Podemos definir el orden de ω en un punto a de X de la sgte. manera: en una carta local (alrededor de a) $\omega = f\,dz$, f merom

definimos $\operatorname{ord}_a(\omega) = \operatorname{ord}_a(f)$.

– verificar: indep. de la elección de carta –.

<u>Así</u>

$$\boxed{\operatorname{div}(\omega) = \sum_{a \in X} \operatorname{ord}_a(\omega)}.$$

Sean f, g funciones meromorfas no nulas.

ω : 1-forma meromorfa.

Se tiene:

(1) $\operatorname{div}(f \cdot g) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(g)$

(2) $\operatorname{div}\left(\frac{1}{f}\right) = -\operatorname{div}(f)$

(3) $\boxed{\operatorname{div}(f \cdot \omega) = \operatorname{div}(f) + \operatorname{div}(\omega)}$ ✓

Def: Sea X sup de Riemann compacta.

Un divisor canónico en X es un

divisor de la forma $\underline{\text{div}(\omega)}$, donde

ω es 1-forma meromorfa.

Obs: Sean ω, ω' 1-formas meromorfas.

Cuál es la relación $\text{div}(\omega)$, $\text{div}(\omega')$?

Notar: existe $f: X \to \mathbb{P}^1$ meromorfa tal que

$$\omega' = f \cdot \omega$$

$$\overset{③}{\Rightarrow} \text{div}(\omega') = \text{div}(f\omega)$$

$$= \text{div}(f) + \text{div}(\omega)$$

$$\Rightarrow \text{div}(\omega') - \text{div}(\omega) = \text{div}(f)$$

$$\Rightarrow \text{div}(\omega') \underset{\text{equiv.}}{\sim} \text{div}(\omega)$$

Obs: El divisor canónico de X se define por

$K_X = [\omega] \in \mathcal{U}(X)$

ω 1-forma meromorfa.

Preg: ¿cuál es el grado de K_X?

Ejm: $X = \mathbb{P}^1 \leftarrow$ cartas $\{ \underline{\underline{z}}, \frac{1}{z} \}$

$\omega = dz$

ω es meromorfa:
en carta $1/z$ se tiene

$$\omega \underset{\text{rep}}{=} d\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z^2} dz.$$

∞ es un polo de orden 2 de ω.

$\operatorname{div}(\omega) = -2 \cdot \infty \leftarrow$ (un) divisor canónico

$\deg(\operatorname{div}(\omega)) = -2$

Comentario: X sup. de Riemann.

$\rightarrow \deg(K_X) = 2g - 2$

$\deg(K_X) = 2g - 2$

(Consecuencia de Riemann-Roch)

g: género de X.

$K_X \underset{\text{rel.}}{\longleftrightarrow}$ haz de 1-formas holomorfas en X.

Dado un divisor D de X podemos definir un haz $\mathcal{O}_D$:
para $U \subseteq X$ abierto:

$$\mathcal{O}_D(\underline{U}) := \{ f \in \underbrace{\mathcal{M}(U)}_{\text{meromorfa en } U} \mid f = 0 \text{ ó } \operatorname{div}(f) \geq -D \}$$

f función meromorfa múltiplo de $-D$.

La asignación es compatible con $\underline{\underline{\text{intersecciones}}}$,
$\mathcal{O}_D \leftarrow$ haz.

Nota: ① $D = 0 \Rightarrow \mathcal{O}_0 = \mathcal{O}$

haz de func. holomorfas en X.

② Si D y D' son equivalentes; entonces

$$\mathcal{O}_D \simeq \mathcal{O}_{D'}$$

En efecto, sea f una función meromorfa (no nula) tal que

$$D - D' = (f)$$

entonces la asignación:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_D &\longrightarrow \mathcal{O}_{D'} \\ g &\longmapsto f \cdot g \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Teo: X sup. de Riemann compacta.

$D \in \mathrm{Div}(X)$ tal que $\boxed{\deg D < 0}$

Entonces

$$H^0(X, \mathcal{O}_D) = 0.$$

secciones globales.

$X = \mathbb{P}^1$

$D = \operatorname{div}(\omega)$ $\quad \omega = dz$ 1-forma meromorfa.

$\deg D = -2$

$$\underset{\text{teo.}}{\Rightarrow} \quad H^0(\mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1}) = 0.$$

· $K_{\mathbb{P}^1}$ no tiene secciones

meromorfa.

$\deg D = -2$

$$\underset{\text{teo.}}{\Rightarrow} \quad H^0(\mathbb{P}^1, K_{\mathbb{P}^1}) = 0.$$

· $K_{\mathbb{P}^1}$ no tiene secciones

$\exists$ meromorfa

Entonces $(f) \geq -D$.

Así

$$\deg(f) \geq -\deg D > 0$$

Esto contradice el hecho de que

$\deg(f) = 0$ (Lema inicial)

divisor en X.

$D \rightsquigarrow \mathcal{O}_D$

haz.

Nota / Obs:

$H^0(X, \mathcal{O}_D) = \mathcal{O}_D(X)$

$= L(D)$

Sea D un divisor

Def: El espacio de 1-formas meromorfas con polos acotados por D, denotado $I(D)$ es:

$$I(D) = \{ \omega \text{ 1-forma meromorfa en } X \mid \operatorname{div}(\omega) \geq -D \}$$

" 1-formas meromorfas que son múltiplos de $-D$ ".

$I(D)$ espacio vectorial

$D \rightsquigarrow \mathcal{O}_D$ haz func. meromorfas.

$D \rightsquigarrow \underbrace{\Omega_D}$ haz 1-formas meromorfas

en este contexto

$$\Omega_D(X) = I(D).$$

nota!

secciones globales de Ω_D

Teorema: Sea K = divisor canónico de $X = \mathrm{div}(\omega)$ 1-forma meromorfa.

mult por ω

$$\mu_\omega : L(K+D) \xrightarrow{\sim} I(D) \quad \text{--- } (*)$$
$$g \longrightarrow g\cdot\omega$$

μ_ω es un isomorfismo:

(en particular, $\dim H^0(X, \mathcal{O}_{K+D})$

$= \dim H^0(X, \Omega_D)$),

Idea: (sobreyectividad)

sea $\omega' \in I(D)$

$\mathcal{O}_{D+K} \cong \Omega_D$

$\Rightarrow \quad \underline{(\omega') + D} \geq 0 \quad \text{--- } (*)$

Además

$\underline{\omega' = f\omega}$, f func. meromorfa

$$(\omega') = (f) + K$$

$$\Rightarrow K + (f) + D \geq 0.$$

$$\Rightarrow (f) \geq -(K+D).$$

$$\Rightarrow f \in L(K+D)$$

$$\Rightarrow \mu_\omega(f) = \omega'.$$

Teorema Riemann-Roch:

- $\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^1(X, \mathcal{O}_D)$

$$= 1 - g + \deg D.$$

¡Validez!

Otra manera:

- $\boxed{\dim H^0(X, \mathcal{O}_D) - \dim H^0(X, \mathcal{O}_{K-D}) = 1 - g + \deg D}$

dual de Serre

- $\boxed{\ell(D) - \ell(K-D) = 1 - g + \deg D}$

$$K \otimes \mathcal{O}_D^* \simeq \mathcal{O}_{-D}$$

Obs: Si $D = p_1 + p_2 + \dots + p_d$

(p_i puntos de X, D positivo)

R.R en este contexto nos dice

$$\dim \left\{ \begin{array}{l} \text{espacio vect.} \\ \text{de funciones} \\ \text{meromorfas} \\ \text{con a lo más} \\ \text{polos simples} \\ \text{en } p_i \end{array} \right\} - \dim \left\{ \begin{array}{l} \text{1-formas} \\ \text{holomorfas} \\ \text{que se} \\ \text{anulan} \\ \text{en } p_i \end{array} \right\}$$

(d)

$$\ell(D) - \ell(K-D) = \deg(D) - g + 1.$$

Aplicación: Tomemos

$D = K \leftarrow$ divisor canónico.

$$\underbrace{\ell(K)} - \ell(0) = \deg(K) - g + 1$$

$$\ell(K) - 1 - 1 + g = \deg(K)$$

$\ell(K) \Leftrightarrow \dim H^{1,0}$

$$g - 1 - 1 + g = \deg(K)$$

$$\boxed{2g - 2 = \deg(K)} \checkmark$$

(*) Si $\deg(K) > 0 \Rightarrow K$ "amplio"

"tiene suficientes secciones"

- Nos va a permitir encajar

$$S_g \hookrightarrow \mathbb{P}^N.$$