Ω^*: álgebra sobre $\mathbb{R}$ gen. por $dx_1, \dots, dx_n$ con relaciones

$$(*) \begin{cases} (dx_i)^2 = 0 \\ dx_i dx_j = -dx_j dx_i \quad , i \neq j. \end{cases}$$

Como espacio vect. sobre $\mathbb{R}$, Ω^* tiene base

$$1, \; dx_i \;, \underbrace{dx_i dx_j}_{i<j}^{\text{2-formas básicas.}} , \; \underbrace{dx_i dx_j dx_k}_{i<j<k} , \dots,$$

$$\underbrace{dx_1 dx_2 \cdots dx_n}.$$

- Recordar: $\vec{u}, \vec{w} \in \mathbb{R}^n$

$$\underbrace{dx_i dx_j}(\vec{u}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} \underbrace{dx_i(\vec{u})} & dx_i(\vec{w}) \\ dx_j(\vec{u}) & dx_j(\vec{w}) \end{vmatrix} \checkmark$$

$$= \begin{vmatrix} u_i & w_i \\ u_j & w_j \end{vmatrix}$$

= área del paralelogramo generado por las proy. de $\vec{v}$ y $\vec{w}$ en el plano $x_i x_j$.

Las formas diferenciales suaves (C^∞) en $\mathbb{R}^n$ son elementos de

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \left\{ \overset{\text{funciones}}{C^\infty} \text{ en } \mathbb{R}^n \right\} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Omega^* .$$

Así, $\omega \in \Omega^*(\mathbb{R}^n)$

$$\omega = \sum \underbrace{f_{i_1 \dots i_q}}_{\in C^\infty(\mathbb{R}^n)} \underbrace{dx_1 \dots dx_q}$$

(de manera sucinta

$$\omega = \sum f_I \, dx_I$$

I multiíndice)

$\Omega^*(\mathbb{R}^n)$ tiene una graduación natural (- álgebra graduada)

$$\Omega^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{q=0}^{n} \Omega^q(\mathbb{R}^n)$$

$\Omega^q(\mathbb{R}^n)$: q-formas.

<u>Notar</u>: existe un operador diferencial

$$d : \Omega^q(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \Omega^{q+1}(\mathbb{R}^n)$$

definido por:

(i) si $f \in \Omega^0(\mathbb{R}^n)$ entonces

$$df = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$$

(ii) si $\omega = \sum f_I \, dx_I$, entonces

$$d\omega = \sum df_I \cdot dx_I .$$

Ejm: $\underset{\substack{\text{1-forma} \\ \text{en } \mathbb{R}^2}}{\omega = x\,dy} \Rightarrow d\omega = dx\,dy$

En este contexto: $\underline{\underline{d}}$: derivada exterior.

- Tenemos además un producto cuña (producto wedge)

si $\tau = \sum f_I \, dx_I$

$$\omega = \sum g_J \, dx_J$$

$$\tau \wedge \omega = \sum f_I \, g_J \, dx_I \, dx_J$$

Notar:

$$\tau \wedge \omega = (-1)^{\deg \tau \deg \omega} \omega \wedge \tau .$$

Notación: $\tau \wedge \omega = \tau \cdot \omega$

Propiedades (verificar)

① $d(\tau \omega) = d\tau \cdot \omega + (-1)^{\deg \tau} \tau \cdot d\omega$

② $d^2 = d \circ d = 0.$

El par

$(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d)$ se denomina complejo de de Rham de $\mathbb{R}^n$.

Terminología:

- Si $\omega \in \mathrm{Ker}(d)$ entonces ω se denomina forma cerrada

· si $\omega \in \mathrm{Im}(d)$ entonces ω se denomina forma exacta.

Obs: Como $d^2 = 0 \Rightarrow$ toda forma exacta es cerrada.

si $\omega = d\alpha$

$\Rightarrow d\omega = d(d\alpha) = 0.$

Notar: $d^2 = 0.$

$$0 \to \Omega^0(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(\mathbb{R}^n) \to \dots \to \Omega^n(\mathbb{R}^n) \nearrow 0$$

$$\boxed{\mathrm{Im}\, d^i \subseteq \mathrm{Ker}\, d^{i+1}}$$

Obs: $(\Omega^*(\mathbb{R}^n), d)$ se puede interpretar como un cjto. de ecuaciones diferenciales cuyas soluciones son las formas cerradas.

Por ejemplo, hallar una 1-forma cerrada $f\,dx + g\,dy$ en $\mathbb{R}^2$

implica resolver la ec. diferencial.

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} = 0.} \quad (*)$$

las soluciones "triviales" de $(*)$ son las 1-formas exactas.

<u>Así</u> una medida del tamaño del espacio de soluciones "interesantes" la dan los grupos de Coh. de de Rham.

<u>Def:</u>

$$H^q_{DR}(\mathbb{R}^n) = \frac{\{q\text{-formas cerradas}\}}{\{q\text{-formas exactas}\}} = \boxed{\frac{\operatorname{Ker} d^q}{\operatorname{Im} d^{q-1}}}$$

q-ésimo grupo de coh. de de Rham de $\mathbb{R}^n$.

La clase de $\omega \in \Omega^q(\mathbb{R}^n)$, cerrada, en $H^q_{DR}(\mathbb{R}^n)$ es $[\omega]$ $\left(= \{\omega + d\alpha \mid \alpha \in \Omega^{q-1}\}\right)$

Obs: Lo mismo se puede definir para un abierto $U \subseteq \mathbb{R}^n$.

$$\Omega^*(U) = \left\{ \begin{matrix} \text{funciones} \\ C^\infty \text{ en } U \end{matrix} \right\} \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Omega^*$$

$$\Omega^*(U) = C^\infty(U) \underset{\mathbb{R}}{\otimes} \Omega^*.$$

En general:

① $$H^k_{DR}(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } k = 0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0. \end{cases}$$

Lema de Poincaré.

Ejercicio: Probar ① para $1 \leq n \leq 3$.

② Si $U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto.

Ejecicio

$\dim H^0(U) = \#$ componentes conexas de U.

Ejercicio ③

Ejercicio

Calcular $P, Q \in \mathbb{R}^2$.

(a) $H^*_{DR}(\mathbb{R}^2 - P - Q)$

(b) halle formas cerradas que representan las clases de coh.

$$\begin{cases} H^0_{DR}(\mathbb{R}^2 - P - Q) = \mathbb{R} \\ H^1_{DR}(\mathbb{R}^2 - P - Q) = \mathbb{R}^2 \\ H^K_{DR}(\mathbb{R}^2 - P - Q) = 0, \quad K \geq 2 \end{cases}$$

Formas diferenciales con soporte compacto:

(restringimos nuestra atención a $\mathbb{R}^n$).

Recordar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua

$$\operatorname{Supp}(f) = \overline{\{ p \in \mathbb{R}^n \mid f(p) \neq 0 \}}$$

Definimos

$\Omega^*(\mathbb{R}^n) \leftarrow$ complejo de de Rham.

$\Omega_c^*(\mathbb{R}^n)$: complejo de de Rham con soporte compacto.

$$\Omega_c^*(\mathbb{R}^n) = \left\{ \begin{matrix} \text{funciones} \\ C^\infty \text{ en } \mathbb{R}^n \\ \text{con soporte} \\ \text{compacto} \end{matrix} \right\} \otimes_{\mathbb{R}} \Omega^* .$$

De manera análoga, tenemos

$H_c^*(\mathbb{R}^n)$: coh. del complejo $(\Omega_c^*(\mathbb{R}^n), d)$.

Teorema (lema de Poincaré para $\Omega_c^*(\mathbb{R}^n)$).

$$H_c^q(\mathbb{R}^n) = \begin{cases} \mathbb{R} & \text{si } q = n \\ 0 & \text{si } q \neq n. \end{cases}$$

En el texto: $\cdot\ H_c^2(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}$. $\leftarrow$ generador: $\varphi(x,y)\,dx\,dy$, $\operatorname{supp}\varphi$ comp.

$\cdot\ H_c^i(\mathbb{R}^2) = 0 \quad i \neq 2.$

Sean

$U \subseteq \mathbb{R}^n$ abierto $\qquad V \subseteq \mathbb{R}^m$ abierto.

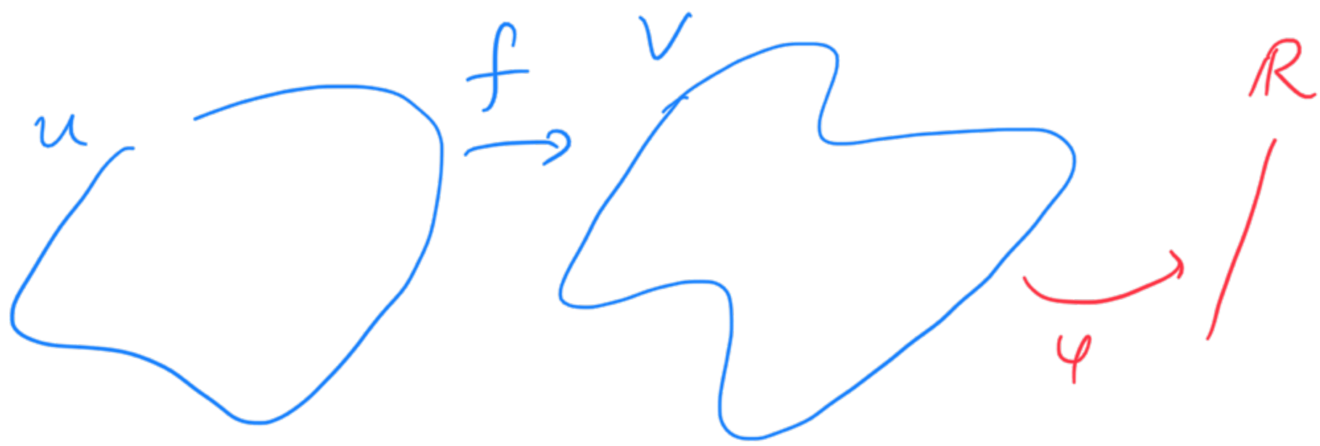
$f : U \to V$ función C^∞.

¿Qué intercambio produce f entre

$$\Omega^*(U) \quad \text{y} \quad \Omega^*(V) \quad ?$$

$q=0$: $\quad \Omega^0(U) \qquad \Omega^0(V) \qquad$ 0-formas

si $\varphi \in \Omega^0(V)$ $\qquad \varphi : V \to \mathbb{R}$



entonces

$$\varphi \circ f \in \Omega^0(U).$$

Esto es:

$f : U \to V$ induce

una transf.

$f^* : \Omega^0(V) \longrightarrow \Omega^0(U)$ $\qquad$ pullback

$f^* : C^\infty(V) \to C^\infty(U)$ pullback

$$\varphi \longmapsto \boxed{\varphi \circ f} = f^*(\varphi) \quad \text{de 0-formas.}$$

En general, tenemos el pullback:

$$f^* : \Omega^q(V), d \longrightarrow \Omega^q(U), d$$

$$\underset{(x_1, \dots, x_n)}{U \subseteq \mathbb{R}^n} \xrightarrow{\ f\ } \underset{(y_1, \dots, y_m)}{V \subseteq \mathbb{R}^m}$$

si $\omega \in \Omega^q(V)$

$$\omega = \sum \underbrace{g_{i_1 \cdots i_q}}_{\in C^\infty(V)} dy_{i_1} \cdots dy_{i_q}$$

definimos

$$f^*\omega = \sum f^*(g_{i_1} \cdots g_{i_q})\, df_{i_1} \cdots df_{i_q}.$$

Ejercicio: d conmuta con f^*.

(1)

$$\begin{tikzcd}
\Omega^q(V) \arrow[r, "f^*"] \arrow[d, "d_V"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & \Omega^q(U) \arrow[d, "d_U"] \\
\Omega^{q+1}(V) \arrow[r, "f^*"] & \Omega^{q+1}(U)
\end{tikzcd}$$

$$\Omega^q(V) \longrightarrow \Omega^q(U)$$

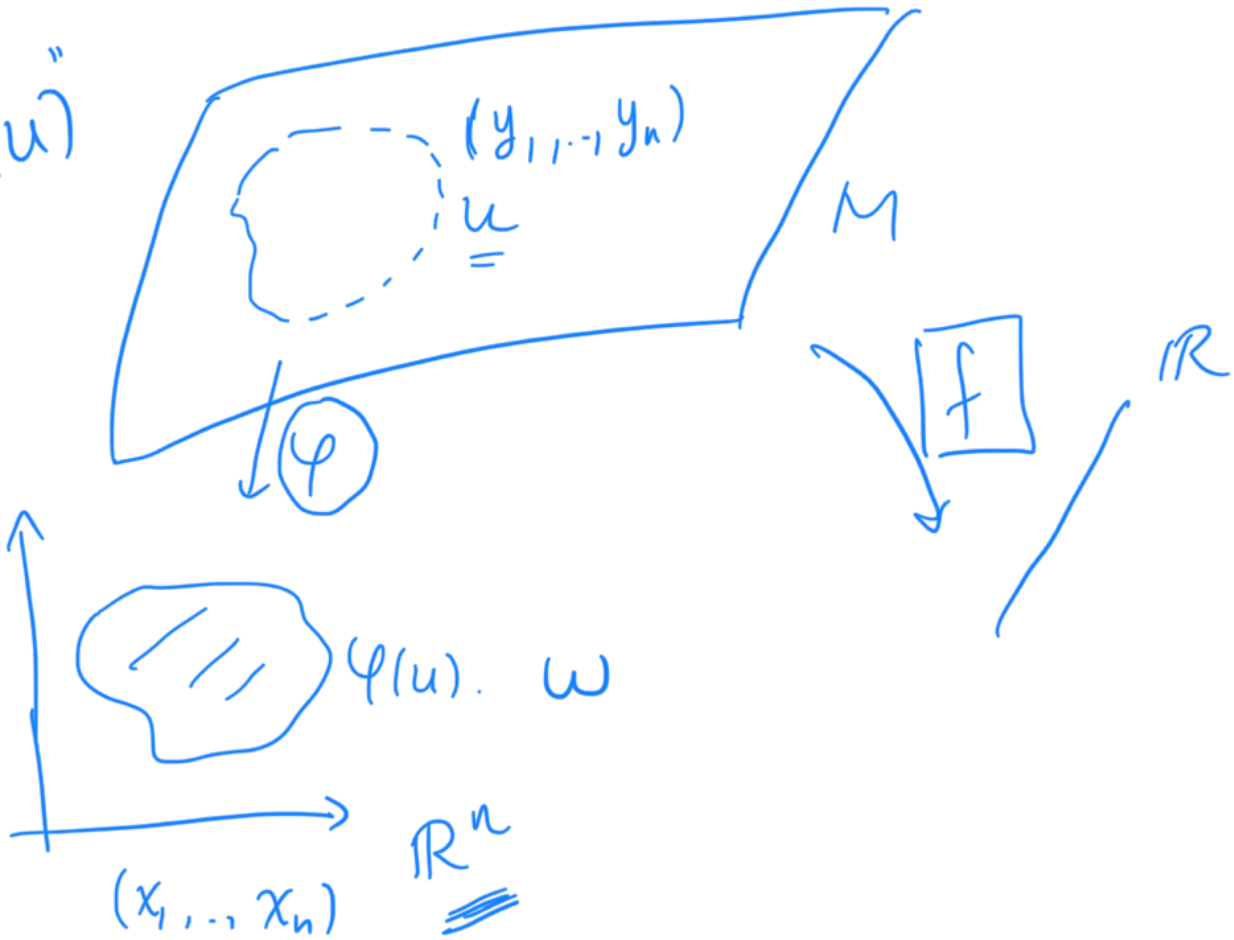
$$f^* \circ d_V = d_U \circ f^*$$

② f^* induce homomorfismos

$$f^* : H^q_{DR}(V) \to H^q_{DR}(U).$$

Extender este lenguaje/formalismo al caso global (pasar de $\mathbb{R}^n$ a una variedad n-dim. M).

"$\Omega^*(U)$"



$$y_i = x_i \circ \varphi \leftarrow \text{i-ésima comp. de } \varphi.$$

$$\left(\frac{\partial f}{\cdots}\right) \overset{def}{=} \frac{\partial}{\cdots} (\cdots)$$

$$\checkmark \quad \frac{\partial f}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \varphi^{-1})$$

Con regla de cadena mostramos comp. en inters. de cartas: (ver Notas Clase 1)

En el caso de una superficie S.

tenemos:

$$0 \to \Omega^0(S) \xrightarrow{d} \Omega^1(S) \xrightarrow{d} \Omega^2(S) \to 0$$

$$H^0_{DR}(S) = \mathbb{R} \quad (\text{si } S \text{ conexo}).$$

$$H^1_{DR}(S) = \;??$$

$$H^2_{DR}(S) = \mathbb{R}$$

Del texto (Donaldson):

(1) $S = S^2 \leftarrow$ esfera de Riemann.

$$\underline{\underline{H^1_{DR}(S^2)}} \qquad S^2 = \underbrace{\mathcal{U}}_{S^2 - N} \cup \underbrace{V}_{S^2 - S}$$

$\mathcal{U} \cap V$: conexa

$\ldots \; \Omega^1(S^2)$

$\alpha \in \Omega^1(S^2)$

- $\boxed{d\alpha = 0.}$ ⊛

Como $U \simeq \mathbb{R}^2$, $V \simeq \mathbb{R}^2$.

tenemos

- α_U (restricción de α a U) es exacta (pues $H^1(\mathbb{R}^2) = 0$)

$$\underline{\alpha_U = df_U}, \quad \exists f_U \in \Omega^\infty(U).$$

- Similarmente

$$\underline{\alpha_V = df_V}, \quad \exists f_V \in C^\infty(V).$$

¿ α exacta globalmente?

Notar

$$\overbrace{f_U - f_V}^{\in C^\infty(U \cap V)} \text{ definida en } \underbrace{U \cap V}_{\text{conexo.}}.$$

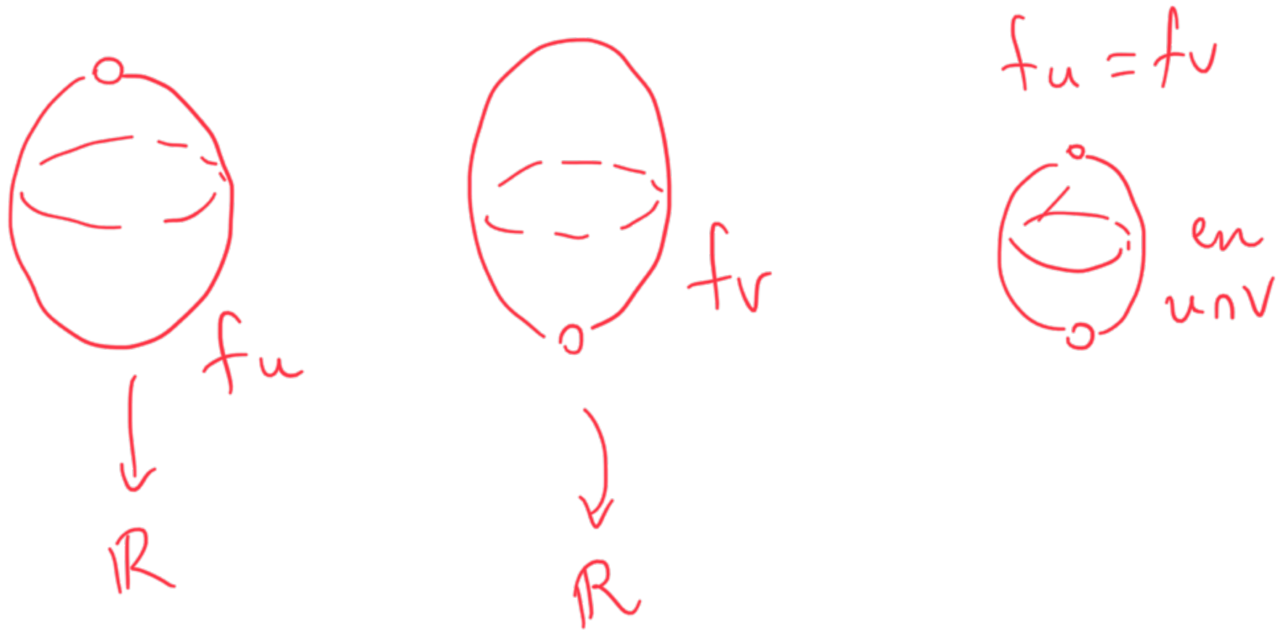
$$\Rightarrow \quad d(f_U - f_V) = 0$$

$\Rightarrow$ $f_U - f_V$ es cte.

$f_u - f_v = c$ en $U \cap V$

(sin pérdida de gen. $c = 0$)

$\Rightarrow f_u - f_v = 0$ en $\boxed{\underline{U \cap V}}$



$\Rightarrow$ existe $f : S^2 \to \mathbb{R}$ suave.

$$\begin{cases} f = f_u & \text{en } U \\ f = f_v & \text{en } V \end{cases}$$

Es decir:

Si $d\alpha = 0$

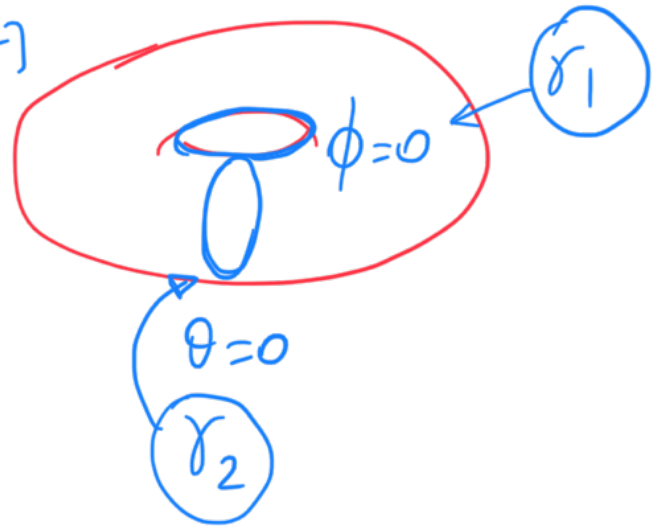
$\Rightarrow \alpha = df \Rightarrow$ α es exacta

para $f \in C^\infty(S^2)$.

$\therefore \quad H^1(S^2) = 0.$

② $S = T^2$ toro $(T^2 = S^1 \times S^1)$

$\theta, \phi \in [0, 2\pi]$



Función periodo

$$\mathcal{P} : \alpha \longmapsto \left(\int_{\gamma_1} \alpha \,,\, \int_{\gamma_2} \alpha \right)$$

1- forma

define un iso lineal entre

$$H^1(T) \xrightarrow[\sim]{\mathcal{P}} \mathbb{R}^2 .$$

pues $\displaystyle\int_{\gamma_i} df = 0 \quad \forall f.$

$\mathcal{P}$ sobre pues $(1,0) \in \mathbb{R}^2.$

$(0,1) \in \mathbb{R}^2$

$d\theta/2\pi \xrightarrow{J} (1,0)$

$d\phi \xrightarrow{P} (0,1)$

<u>Perspectiva</u>/Objetivo.

- Teo. de unif. de Riemann

  S sup. de Riemann simplem. conexa.

  entonces

  $S = S^2$ ó $S = \underline{\underline{\mathbb{C}}}$ ó

  $S = \underline{\underline{\mathbb{D}}}$ ✓

- fórmula grado - género

  X curva <u>suave</u> de grado d en $\mathbb{CP}^2$

i.e. $X = V(f)$ $\quad f(x_0, x_1, x_2)$ deg $f = d$ homog.

género

$$g_X = \frac{1}{2}(d-1)(d-2)$$

Esto muestra que no toda superficie de Riemann compacta se puede realizar como una curva compleja de $\mathbb{CP}^2$