Pontificia Universidad Católica del Perú Escuela de Posgrado
Doctorado en Matemáticas

Superficies de Riemann
TAREA 1: primera parte
2020-I

Indicaciones Generales:

- La primera parte de la TAREA 1 debe ser subida a la plataforma Paideia a más tardar a las 4pm. el viernes 17 de abril.

1. **Función Gamma.**

   a) Considere la función integral de Euler (de segunda clase)

   $$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt.$$

   Muestre que dicha función es continua para todo $x > 0$.

   b) Considere la función de variable compleja (función Gamma)

   $$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt.$$

   Muestre que $\Gamma(z)$ es continua para todo $z \in D = \{z \in \mathbb{C} \,|\, \mathfrak{Re}(z) > 0\}$.

   c) Muestre que

   $$\int_C \Gamma(z) dz = \int_0^\infty e^{-t} dt \int_C t^{z-1} dz$$

   para toda curva C contenida en D.

   d) Muestre que

   $$\int_C \Gamma(z) dz = 0$$

   para toda curva C contenida en D. (Sugerencia: apele al teorema de Cauchy-Goursat.)

   e) Muestre que $\Gamma(z)$ es analítica para todo z tal que $\mathfrak{Re}(z) > 0$. (Sugerencia: apele al teorema de Morera.)

   f) Muestre que $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ y concluya que $\Gamma(z)$ admite una extensión meromorfa en $\mathfrak{Re}(z) > -1$: $\Gamma(z)$ es analítica en $\mathfrak{Re}(z) > -1$ excepto en el origen donde existe un polo simple.

   g) Muestre que Γ tiene una extensión meroforma a todo $\mathbb{C}$ con polos simples en $z = 0, z = -1, \ldots z = -k, \ldots$. Muestre que el residuo para k está dado por $(-1)^k/k!$

   h) Muestre que Γ no tiene ceros.

2. **Ramificaciones.**

   a) Considere la serie de potencias

   $$f(z) = 1 + \frac{z}{2} - \frac{z^2}{2^2 2!} + \frac{3z^3}{2^3 3!} - \frac{5 \cdot 3z^5}{2^4 4!} + \ldots$$

      1) Muestre que esta es holomorfa en el disco unitario $|z| < 1$.
      2) Muestre que esta función no puede ser extendida holomorficamente a $z = -1$.
      3) ¿Puede ser extendida holomorficamente a $\mathbf{C} \backslash \{-1\}$. Explique en detalle su argumento.

   b) Considere $P(z, w) = w^3 - (z^2 + 1)$ y sea $w = \phi_0(z)$ la solución local de $P(z, \phi_0(z))$, alrededor de $z = 0, w = 1$. Exhiba dos caminos con puntos final e inicial en $z = 0$ tal que a lo largo de dichos caminos se puede extender analíticamente ϕ_0 y llegar a dos soluciones diferentes alrededor de $z = 0$.

3. **Función zeta de Riemann.**

   a) Considere la función zeta de Riemann

   $$\zeta(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-z}.$$

   Muestre que $\zeta(z)$ converge absoluta y uniformente en $\{z \in \mathbb{C} |, \mathfrak{Re}(z) \geq 1 + \epsilon\}$ para todo $\epsilon > 0$. (Sugerencia, use el M-test de Weierstrass.)

   b) Muestre que $\zeta(z)$ es analítica para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $\mathfrak{Re}(z) > 1$. (Sugerencia: use algún corolario del teorema de Morera.)

   c) Muestre la siguiente expresión

   $$\zeta(z)\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \frac{x^{z-1} e^{-x}}{1 - e^{-x}} dx.$$

   (Sugerencia: en $\Gamma(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$ realice el cambio de variable $t = nx$, con $n = 1, 2, \ldots$)

      1) Apartir de esta expresión obtenga una continuación meromorfa de $\zeta(z)$ en $\mathbb{C}$. (Sugerencia: estudie $\int_1^{\infty} \frac{t^{z-1}}{e^t - 1} dt$: considere $\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + G(z)$ donde $G(z)$ es una función meromorfa con polos en $2m\pi i$. Luego use la igualdad

      $$\frac{1}{e^z - 1} = \frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

      con esta última serie absolutamente convergente para $|z| < 2\pi$.)
      2) ¿Puede Ud. describir los polos de esta extensión?

4. **Ecuaciones diferenciales**

Sean $P(z)$ y $Q(z)$ funciones holomorfas en alguna vecindad de $z = 0$. Considere sus respectivas expansiones en serie de potencias

$$P(z) = \sum p_n z^n, \quad Q(z) = \sum q_n z^n$$

en una región común $|z| < R$.

a) Considere la ecuación diferencial homogénea de segundo orden

$$u'' + Pu' + Qu = 0.$$

Muestre que para cada $n \geq 0$, se cumple la siguiente igualdad

$$(n+2)(n+1)u_{n+2} + \sum_{i \geq 0}(n+1-i)p_i u_{n+1-i} + \sum_{j \geq 0} q_j u_{n-j} = 0.$$

b) Halle una fórmula recursiva para la expresión dada en el item anterior.

c) Considere las condiciones iniciales u_0 y u_1, muestre que las solución en series de potencia a la ecuación diferencial $u'' + Pu' + Qu = 0$ es única y converge para $|z| < R$.

Prof. del curso: Jaime Cuadros. San Miguel, abril, 2020.