

Arranjos e Permutações

As principais ferramentas da Análise Combinatória são a Permutação, o Arranjo e a Combinação, mas muitos estudantes se confundem na hora de decidir qual delas utilizar para resolver um problema específico. Aqui, vamos explicar as características de cada uma e quando devem ser utilizadas.

Uma **permutação** de n elementos distintos é um agrupamento ordenado desses elementos. Pode ser calculada pela fórmula $P_n = n!$. Ela deve ser utilizada quando você quiser contar quantas possibilidades existem de se organizar um número de objetos de forma distinta, por exemplo:

- O número de anagramas da palavra LIVRO é uma permutação de 5 elementos, calculada através de $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$, pois para a primeira posição você pode colocar 5 letras; para a segunda, restaram 4, para a terceira, 3 e assim por diante;
- O número de filas que podem ser formadas com 25 pessoas é $25!$, pois para o primeiro lugar da fila temos 25 possibilidades, para o segundo 24 e assim por diante.

Um **arranjo** de n elementos dispostos p a p , com p menor ou igual a n , é uma escolha de p entre esses n objetos na qual a ordem importa. Sua fórmula é dada por

$$A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!}$$

O exemplo mais clássico de arranjo é o pódio: em uma competição de 20 jogadores, quantas são as possibilidades de se formar um pódio com os três primeiros lugares? Note que, neste problema, queremos dispor 20 jogadores em 3 lugares, onde a ordem importa, afinal o pódio formado por João, por Marcos e por Pedro não é o mesmo formado por Pedro, por Marcos e por João. Outro exemplo é o número de possibilidades de se formar uma foto com n pessoas. Perceba que as permutações nada mais são do que casos particulares de arranjos onde $n = p$.

As **Combinações** de n elementos tomados p a p são escolhas não ordenadas desses elementos, calculadas por

$$C_n^p = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Um exemplo clássico é quando queremos formar uma comissão de 3 pessoas escolhidas entre 10 pessoas. Diferentemente do pódio do exemplo anterior, uma comissão formada por João, por Pedro e por Maria é a mesma comissão formada por Maria, por Pedro e por João.

Por fim, fique com essa frase de impacto:

“Uma escolha ordenada significa escolher e colocar em ordem”

ou, matematicamente,

$$A = C \cdot P$$

Arranjos são agrupamentos nos quais a ordem dos seus elementos faz a diferença ($p < m$). Os arranjos são distintos entre si pela ordem ou pela espécie. Existem dois tipos:

- Arranjo simples
- Arranjo com repetição

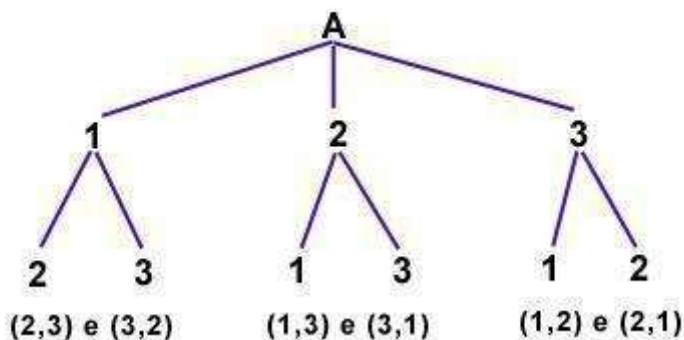
Arranjo Simples

No arranjo simples não encontramos a repetição de qualquer elemento em cada grupo de p elementos. Por exemplo, os números de três algarismos formados pelos elementos (1, 2, 3) são:

312, 321, 132, 123, 213 e 231.

Como pudemos perceber os elementos não se repetem. O arranjo simples tem como fórmula: $As(m, p) = \frac{m!}{(m-p)!}$

Como cálculo de exemplo podemos utilizar: $As(4, 2) = \frac{4!}{2!} = \frac{24}{2} = 12$.



Arranjo Com Repetição

Neste caso de arranjo com repetição todos os elementos podem aparecer repetidos em cada grupo de elementos. Como cálculo de exemplo podemos utilizar: $Ar(4, 2) = 4^2 = 16$

Fórmula do arranjo com repetição: $Ar(m, p) = m^p$

Por exemplo: seja $C = (A, B, C, D)$, $m = 4$ e $p = 2$. Os arranjos com repetição desses 4 elementos tomados 2 a 2 formam 16 grupos onde encontramos elementos repetidos em cada grupo, pois todos os agrupamentos estão no conjunto:

$Ar = (AA, AB, AC, AD, BA, BB, BC, BD, CA, CB, CC, CD, DA, DB, DC, DD)$

Permutações

Permutações ocorrem quando formamos agrupamentos com m elementos, de forma que os m elementos sejam distintos entre si pela ordem.

As permutações podem ser de três tipos:

- Permutações simples;
- Permutações com repetição;
- Permutações circulares.

Permutações Simples

São agrupamentos formados com todos os m elementos distintos. Como cálculo de exemplo podemos utilizar: $Ps(3) = 3! = 6$

Sua fórmula é: $Ps(m) = m!$

Deve ser utilizada quando queremos contar quantas possibilidades existem de se organizar um número de objetos de forma distinta.

Por exemplo: Se $C = (A, B, C)$ e $m = 3$, então as permutações simples desses três elementos são seis agrupamentos que não podem ter a repetição de qualquer elemento em cada grupo mas podem aparecer na ordem trocada, isto é:

