Equivalência e Implicação Lógica

Implicação Lógica

Relembrando a operação lógica da condicional p→q (lê-se: se p então q)

Você está lembrado quando estudamos as proposições condicionais e utilizamos o símbolo → ? Vamos recordar!

Na condicional p→q, p é chamado de antecedente e q é o consequente. O símbolo "→" é chamado símbolo de implicação. Note que, neste caso, p e q são proposições simples.

O símbolo → representa uma operação matemática entre as proposições p e q que tem como resultado a proposição p → q, como valor lógico V ou F.

A proposição condicional "se p então q" é uma proposição composta que só admite valor lógico falso no caso em que a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa, sendo verdade nas demais situações.

O valor lógico da condicional de duas proposições é definido pela seguinte tabela-verdade:

Possibilidades	p	q	p→q
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

Vamos rever esta operação lógica por meio de uma situação:

Suponha que um determinado pai faz a seguinte promessa para seu filho: "Se fizer sol amanhã, então viajaremos para a praia".

Há 4 possibilidades:

1. Fez sol e viajaram para a praia.
2. Fez sol e não viajaram para a praia.
3. Não fez sol e viajaram para a praia.
4. Não fez sol e não viajaram para a praia.

	p	q	p→q
Possibilidades	**Se** fizer sol amanhã	**então** viajaremos para a praia	**Se** fizer sol amanhã, **então** viajaremos para a praia
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

Compare cada uma destas possibilidades levantadas anteriormente com os valores lógicos colocados na tabela e responda a seguinte pergunta:

Em Qual Das Possibilidades A Situação Foi Descumprida?

Não é difícil concluir que na possibilidade 2, a situação foi descumprida. Você deve estar se perguntando sobre a possibilidade 3. Afinal, se não fez sol, como viajaram para a praia? Parece estranho, não? Na verdade, temos que tomar um certo cuidado, o pai só disse o que fariam se fizesse sol, mas não disse o que fariam se não fizesse sol. Esta é razão da condicional na linha 3 ser logicamente verdadeira. Temos que ter muita atenção, especialmente nesta parte. Esta é a parte que as pessoas, em geral, apresentam mais dificuldades de compreensão. Por este motivo vamos discutir um pouco mais sobre o assunto.

Utilizamos com frequência sentenças condicionais, como: “Se hoje chover, então vou ficar em casa”. Vamos ver as quatro possibilidades para esta situação:

1. Choveu e fiquei em casa.
2. Choveu e não fiquei em casa.
3. Não choveu e fiquei em casa.
4. Não choveu e não fiquei em casa.

	p	q	p→q
Possibilidades	**Se** hoje chover	**então** vou ficar em casa	Se hoje chover, então vou ficar em casa”
1	V	V	V
2	V	F	F
3	F	V	V
4	F	F	V

Caro aluno, é importantíssimo que você aprenda que na lógica matemática não nos preocupamos com qualquer relação de causa e efeito entre o antecedente e o consequente de uma implicação. O que há é uma relação entre os valores lógicos. Neste exemplo, ficou claro para você que na possibilidade 2, a situação foi descumprida; isto é, “choveu e não fiquei em casa” ? É provável que você tenha dúvidas com relação à possibilidade 3. Afinal, se não choveu, como fiquei em casa? Voltamos a dizer, sendo o antecedente (p) logicamente falso, não importa o valor lógico do consequente (q), pois o valor lógico da condicional será sempre verdadeiro!

Desta Forma, Releia O Conceito:

A proposição condicional “se p então q” é uma proposição composta que só admite valor lógico falso no caso em que a proposição p é verdadeira e a proposição q é falsa, sendo verdade nas demais situações.

E Qual É A Importância Da Implicação?

O conceito de implicação é essencial para os diversos campos do conhecimento. Como exemplo, podemos citar as implicações lógicas de um discurso que remete a explicação ou demonstração de argumentos, e isto não é restrito à Matemática.

É comum aparecerem declarações do tipo: “Sempre que isto ocorre, e, é verdadeiro, implica que aquilo também é verdadeiro”. Pense nas diversas áreas, tais como: Medicina, Direito, Engenharia, Educação, Propaganda e Marketing, Processamento de Dados e tantas outras áreas, que utilizam inúmeras implicações. Enfim vivemos imersos em um mundo de implicações lógicas! Pense a este respeito.

A implicação é muito importante na linguagem matemática porque aparece sistematicamente nos teoremas que constituem as teorias matemáticas. Um teorema é uma proposição do tipo p ⇒ q, onde p é uma proposição verdadeira na teoria em questão. Demonstrar um teorema não é mais do que provar que a proposição p ⇒ q é verdadeira e sendo p verdadeira, por hipótese, implica dizer que q é também verdadeira.

Num teorema é comum chamarmos a proposição p de hipótese, é o antecedente da implicação p ⇒q. A proposição q, que é o consequente da implicação, é denominada de tese. As demonstrações de teoremas são essenciais para o desenvolvimento de habilidades e competências relacionadas à experimentação, observação e percepção, realização de conjecturas, desenvolvimento de argumentações convincentes, entre outras.

Conceito

Diz-se que uma proposição P **implica** uma proposição Q (indica-se por P⇒ Q), quando na tabela-verdade de **P e Q,** verifica-se que **P** é verdadeiro, e Q também. Podemos também dizer que P **implica** em Q quando a condicional **P→ Q** é uma tautologia. Você se lembra do conceito de tautologia?

RELEMBRANDO

Relembrando o conceito de tautologia

Quando uma proposição composta é **sempre** verdadeira, então teremos uma tautologia. De outra forma, podemos afirmar que numa tautologia a proposições compostas serão logicamente verdadeiras (V).

O símbolo P⇒ Q (P implica Q) representa a implicação lógica. Observe neste conceito que aparecem dois símbolos matemáticos → e ⇒. Vamos diferenciá-los?

Diferenciação dos símbolos → e ⇒

1. O símbolo → (p → q) Lê-se: se p….. então q representa uma operação matemática entre as proposições p e q que tem como resultado a proposição p → q, com valor lógico V ou F.

2. O símbolo ⇒ (P⇒ Q) Lê-se: P implica Q representa a não ocorrência de VF na tabela-verdade de P → Q, ou ainda que o valor lógico da condicional P → Q será sempre V, ou então que P → Q é uma tautologia.

Você já deve ter se familiarizado com o primeiro (símbolo →), pois fizemos uso dele em vários exemplos envolvendo a operação lógica da condicional em que podíamos fazer um julgamento (verdadeiro ou falso), já o segundo (símbolo ⇒) passaremos a ver agora com mais detalhes. Tenha sempre em mente que o símbolo ⇒ representa uma implicação, cuja condicional será sempre tautológica, isto é, será sempre logicamente verdadeira. Vamos agora ver alguns exemplos e verificar a implicação lógica indicada em cada caso.

Exemplos:

Implicações	Leitura
1) $p \wedge q \Rightarrow p$	p e q **implica** p
2) $p \Rightarrow q \rightarrow p$	p **implica** a condicional, **se** q **então** p
3) $p \wedge q \Rightarrow p \vee q$	(p **e** q) **implica** (p **ou** q)
4) $p \Rightarrow p \vee q$	p **implica** (p ou q)

Atenção:

Devemos ter em mente que uma proposição P implica uma proposição Q, se Q é verdadeira todas as vezes que P é verdadeira.

Vamos comprovar isto para o 1ª exemplo dado. p ^ q ⇒ p

Considere a situação:

p: Marina Silva vencerá as eleições para a Presidência do Brasil.

q: A taxa de desemprego cairá nos próximos três anos.

p ^ q: Marina Silva vencerá as eleições para a Presidência do Brasil e a taxa de desemprego cairá nos próximos três anos.

Vamos agora verificar como ficam os possíveis valores lógicos das proposições:

	p	**q**	**p ^ q**
Possibilidades	Marina Silva vencerá as eleições para a Presidência do Brasil neste ano.	A taxa de desemprego cairá nos próximos três anos.	Marina Silva vencerá as eleições para a Presidência do Brasil e a taxa de desemprego cairá nos próximos três anos.
1	**V**	V	**V**
2	V	F	F
3	F	V	F
4	F	F	F

Relembrando: Você está lembrado que a proposição composta da conjunção p ^ q (p e q) somente será verdadeira quando as proposições p e q forem verdadeiras.

Perceba que quando p ^ q é verdadeira (1ª possibilidade, veja o quadro acima), p é verdadeira também, logo dizemos que p ^ q implica p e, tem a seguinte notação: p ^ q ⇒ p. E mais, se você fizer a condicional (p ^ q) → p, ela será sempre verdadeira, ou seja uma tautologia.

2º exemplo: p ⇒ q → p Vamos verificar esta implicação.

Atenção: A intenção aqui, caro aluno, é que você perceba que o ponto fundamental da implicação lógica (P implica uma proposição Q, indica-se por P ⇒ Q), é que sempre que temos um antecedente verdadeiro, teremos um consequente verdadeiro também.

Vamos verificar se “p” de fato implica a proposição composta “q → p” (p ⇒ q → p)

Atenção: A proposição condicional q→p (lê-se: “se q então p”) é uma proposição composta que só admite valor lógico falso no caso em que a proposição q é verdadeira e a proposição p é falsa, sendo verdade nas demais situações. (veja a 3ª coluna da tabela seguinte)

1ª	2ª	3ª	4ª
p	**q**	**q→p**	**p→ (q→p)**
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V

p ⇒ q → p, pois o condicional p→ (q→p) é tautológica.

Perceba que quando p é verdadeira (1ª e 2ª colunas), q→p é verdadeira também, logo dizemos que p implica a proposição composta q → p. (p ⇒ q → p)

Vamos agora mostrar as implicações no 3º e 4º exemplos.

3º exemplo: p Λ q ⇒ p v q

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
p	**q**	**p ∧ q**	**p v q**	**(p ∧ q) → (p v q)**
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	F	V	V
F	F	F	F	V

Caro aluno, não se assuste com o tamanho das tabelas-verdade. Você deve organizar as colunas, e para iniciar, atribua todos os valores lógicos possíveis para as proposições simples p e q. (são quatro situações; isto é, são quatro linhas).

Para compreender a tabela acima, você deverá retomar as operações da conjunção e disjunção, além, obviamente, da condicional.

Observe que na 3ª coluna (p Λ q), temos uma conjunção, e que ela é logicamente verdadeira apenas quando as proposições simples p e q são ambas verdadeiras, e logicamente falsas nas demais situações.

Observe que na 4ª coluna (p v q), temos uma disjunção, e que ela é logicamente falsa apenas quando as proposições simples p e q são ambas falsas, e logicamente verdadeiras nas demais situações. Até aqui, tudo bem? Se ficou claro, então vamos entender melhor a 5ª coluna.

Na 5ª e última coluna, temos a condicional (p Λ q) → (p v q) logicamente verdadeira para todas as situações, pois a condicional só é falsa quando o antecedente é verdadeiro e o consequente falso.

Podemos verificar a implicação p Λ q ⇒ p v q, por meio da condicional (p Λ q) → (p v q), pois, neste exemplo, ela é sempre verdadeira e, portanto, tautológica. Você também pode verificar a implicação dada observando que quando a proposição p Λ q é verdadeira, temos que p v q, também, é verdadeira (1ª linha). Logo, está verificada a implicação dada.

4º exemplo: p ⇒ p v q

1ª	2ª	3ª	4ª
p	q	p v q	p→ (p v q)
V	V	V	V
V	F	V	V
F	V	V	V
F	F	F	V

Neste 4º exemplo , também verificamos a implicação p ⇒ p v q , pois a condicional p → (p v q) é tautológica.

Observe que quando a proposição p é verdadeira, temos que p v q, também, é verdadeira (1ª e 2ª linhas). Logo, está verificada a implicação dada.

Observação O fato de dizer que uma proposição P implica uma proposição Q, não garante dizer o caminho inverso, isto é, que Q também implica P.

Abaixo estudaremos as situações que envolvem o caminho de ida e de volta quando consideramos as implicações. Neste caso chamaremos de equivalências lógicas.

Equivalência Lógica

Caro aluno, estudamos as implicações lógicas e foi enfatizado que o ponto fundamental da implicação lógica (P implica uma proposição Q, indica-se por P ⇒ Q), é que sempre que temos um antecedente verdadeiro, teremos um consequente verdadeiro também. Está lembrado? Vimos também que se uma proposição P implica uma proposição Q, não garante dizer o caminho inverso, isto é, que Q também implica P. Neste capítulo trataremos de ver as situações que envolvem o caminho de ida e de volta quando consideramos as implicações. Estas implicações são denominadas de equivalências lógicas.

Conceito:

Diz-se que uma proposição composta P é logicamente equivalente a uma proposição composta Q (indica-se pela notação P ⇔ Q – o símbolo ⇔ é uma forma abreviada de dizer que duas proposições são logicamente equivalentes) quando, as tabelas verdade destas duas proposições compostas são idênticas. De outra forma, podemos dizer que as proposições P e Q são equivalentes, se a bicondicional P ↔ Q for uma tautologia.

E para iniciar este estudo das equivalências lógicas, considere as seguintes proposições:

1. Não vi ninguém.
2. Vi alguém.

Na primeira proposição temos uma dupla negação, logo se "não vi ninguém" (dupla negação), então "vi alguém".(afirmação) Podemos concluir que estas proposições são equivalentes. Desta forma, tenha cuidado ao usar "não vi ninguém" com o sentido de pessoa alguma foi vista. Isto é lógico para você?

Podemos construir uma tabela-verdade e colocar todos os valores lógicos possíveis. Vamos ver como ficam?

Para esta construção, considere p: vi alguém.

p	~p	~(~p)	p→~(~p)	~(~p) → p	p ↔ ~(~p)
vi alguém	não vi alguém	Não vi ninguém	Se vi alguém, então não vi ninguém	Se não vi ninguém, então vi alguém	Vi alguém, se e somente se não vi ninguém
V	**F**	**V**	**V**	**V**	**V**
F	**V**	**F**	**V**	**V**	**V**

Perceba que a última coluna da tabela-verdade é a bicondicional e ela é sempre verdadeira, e portanto tautológica.

Os valores lógicos de p e ~(~p) são idênticos. Desta forma, podemos concluir que estas proposições são logicamente equivalentes. E também são equivalentes as proposições compostas p→~(~p) e ~(~p) → p, e esta equivalência expressa a lei da dupla negação.

Podemos indicar estas equivalências da seguinte forma:

Equivalência	Leitura
p ⇔ ~(~p)	**"Vi alguém"** é equivalente a **"não vi ninguém".**
p→~(~p) ⇔ ~(~p) → p	**"Se vi alguém, então não vi ninguém."** é equivalente a **"Se não vi ninguém, então vi alguém"**

Vamos trabalhar esta noção de equivalência por meio de alguns outros exemplos:

1º Exemplo: Veja as seguintes sentenças:

▪ Se hoje é sábado, então hoje é dia de pegar um cineminha.

▪ Se hoje não é dia de pegar um cineminha, então hoje não é sábado.

Parece intuitivo que sejam logicamente equivalentes?

É verdade, pois possuem o mesmo "conteúdo lógico".

Vamos analisar melhor esta situação, utilizando agora os conceitos da Lógica Matemática. E para isto, considere as proposições:

p: Hoje é sábado.

q: Hoje é dia de pegar um cineminha.

Vamos verificar como ficam os possíveis valores lógicos na tabela-verdade para cada sentença dada inicialmente:

▪ Se hoje é sábado, então hoje é dia de pegar um cineminha. ($p \rightarrow q$)

	p	q	p→q
Possibilidades	hoje é sábado	hoje é dia de pegar um cineminha	Se hoje é sábado, então hoje é dia de pegar um cineminha.
1	**V**	**V**	**V**
2	**V**	**F**	**F**
3	**F**	**V**	**V**
4	**F**	**F**	**V**

Você lembra que a condicional $p \rightarrow q$ será logicamente falsa apenas quando o antecedente (p) é verdadeiro e o consequente (q) é falso? Veja a possibilidade 2. (2ª linha da tabela)

Vamos agora para a segunda sentença. E para isto, considere as proposições p e q e suas negações ~p e ~q

p: hoje é sábado	**q:** hoje é dia de pegar um cineminha
~p: hoje não é sábado	**~q:** hoje não é dia de pegar um cineminha

II -Se hoje não é dia de pegar um cineminha, então hoje não é sábado. (**~q→~p)**

	~q	**~p**	**~q→~p**
Possibilidades	hoje não é dia de pegar um cineminha	hoje não é sábado	Se hoje não é dia de pegar um cineminha, então hoje não é sábado.
1	**F**	**F**	**V**
2	**V**	**F**	**F**
3	**F**	**V**	**V**
4	**V**	**V**	**V**

Se você observar atentamente as tabelas, facilmente perceberá que as últimas colunas das tabelas, que são das proposições condicionais (p→q) e (~q→~p), são idênticas. Desta forma, podemos concluir que há aqui uma equivalência lógica. Assim sendo, as sentenças I e II, são equivalentes:

I -Se hoje é sábado, então hoje é dia de pegar um cineminha. (p→q)

II -Se hoje não é dia de pegar um cineminha, então hoje não é sábado. (~q→~p)

Simbolicamente representamos esta equivalência da seguinte maneira:

(p→q) ⇔ (~q→~p) (Esta equivalência é denominada de Contrapositiva da condicional dada.)

Releia o conceito inicial de equivalência lógica e observe que:

(p→q) corresponde a proposição composta

P (~q→~p) corresponde a proposição composta Q

É importante que você valorize aquilo que temos estudado dentro da Lógica Matemática, pois certamente a fundamentação teórica é importante para o entendimento de situações, inclusive as do nosso cotidiano.

Vamos ver mais alguns exemplos de equivalência entre proposições (P ⇔ Q). Nosso objetivo é que você entenda a construção das tabelas-verdade como um instrumento importante de verificação das equivalências lógicas, pois sempre que os valores lógicos das proposições P e Q forem idênticos, elas serão equivalentes.

2º Exemplo: Vamos para o seguinte enunciado:

Verificar a equivalência das proposições a seguir:

p ∧ q ⇔ q ∧ p .

observação:

p ∧ q corresponde a proposição composta P.

q ∧ p corresponde a proposição composta Q.

Vamos recorrer à tabela-verdade e colocar os valores lógicos de cada proposição.

p	q	$p \wedge q$	$q \wedge p$	$p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	F	F	V
F	F	F	F	V

Perceba que neste caso, as colunas das proposições “p ∧ q” e “q ∧ p” são idênticas, logo são equivalentes, e sendo equivalentes, a coluna da bicondicional tem sempre valores lógicos verdadeiros, e portanto a bicondicional é considerada tautológica.

Uma aplicação bastante interessante de equivalência lógica entre as proposições condicionais e as proposições com o conectivo “ou” (disjunção) é:

3º Exemplo: Neste 3º exemplo, verificaremos uma transformação de uma proposição condicional em proposição com o conectivo “ou” (disjunção), pois são equivalentes. (p→q) ⇔ (~p v q).
Achou estranha esta equivalência? Podemos compreendê-la, utilizando a tabela-verdade. Para que não fiquemos trabalhando apenas com letras e para que não vejamos este tópico com estranheza e distância, vamos buscar uma solução para o enunciado abaixo:

Enunciado: Transforme, através da equivalência por disjunção, a proposição condicional “Se estudo, passo no teste”.

Veja que inicialmente temos as seguintes proposições:

p: estudo

q: passo no teste

A proposição dada no enunciado é a proposição composta que podemos representar matematicamente por p→q e a pedida é (~p v q).

Veja, se utilizarmos a equivalência citada anteriormente (p→q) ⇔ (~p v q), podemos escrever:

A proposição condicional “Se estudo, passo no teste” (p→q) é logicamente equivalente a proposição com o conectivo “ou” (disjunção) “Não estudo ou passo no teste” (~p v q)

Vamos verificar esta equivalência, por meio da tabela-verdade.

p	q	~p	p→q	~p v q
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Observe que os valores lógicos das proposições “p→q” e “~p v q” são idênticos.

Propriedades da Relação de Equivalência Lógica

● A relação da Equivalência Lógica possui as propriedades:

– Reflexiva:

P(p,q,r,...) ⇔ P(p,q,r,...)

P ⇔ P

– Simétrica:

Se P(p,q,r,...) ⇔ Q(p,q,r,...), então Q(p,q,r,...) ⇔ P(p,q,r,...) Se P ⇔ Q, então Q ⇔ P

– Transitiva:

Se P(p,q,r,...) ⇔ Q(p,q,r,...) e

Q(p,q,r,...) ⇔ R(p,q,r,...), então P(p,q,r,...) ⇔ R(p,q,r,...)

Se P ⇔ Q e Q ⇔ R, então P ⇔ R

Proposições associadas a uma condicional

● Dada a condicional p → q, chamam-se proposições associadas a p → q (direta) as três seguintes proposições:

– Proposição recíproca de p → q: q → p

– Proposição contrária de p → q: ~p → ~q

– Proposição contrapositiva de p → q: ~q → ~p

Princípio da Substituição

● Se P(p, q, r, …) é uma Tautologia, então P(P0 , Q0 , R0 , …) também é uma Tautologia, não importando quais sejam as proposições P0 , Q0 , R0 , …

● Primeiro obtenha uma Tautologia. – Por exemplo: P(p,q) = p ∧ q → q

● Agora, escolha uma sentença lógica que qualquer. Essa sentença pode ser uma Tautologia ou não, não faz diferença. – Por exemplo: Q = r ∧ s

● Então, escolha uma proposição simples de P e substitua pela sentença escolhida. – Por exemplo, substituindo “q” em P: P(p, Q): p ∧ (Q) → (Q) P(p, Q): p ∧ (r ∧ s) → (r ∧ s)

● A sentença gerada é uma nova tautologia.

Propriedades da Implicação Lógica

Propriedades

A implicação lógica possui duas importantes propriedades:

• Reflexiva (R)

○ P(p, q, r,...) ⇒ P(p, q, r,...)

• Transitiva (T)

○ Se P(p, q, r,...) ⇒ Q(p, q, r,...) e Q(p, q, r,...) ⇒ R(p, q, r,...) então P(p, q, r,...) ⇒ R(p, q, r,...).