Princípios de Contagem e Probabilidade

A análise combinatória é a matéria que desenvolve métodos para fazer a contagem com eficiência. Os problemas de contagem estão presentes no cotidiano, por exemplo, no planejamento de pratos em um cardápio, a combinação de números em um jogo de loteria, nas placas dos veículos, entre inúmeras outras situações.

A ideia é a seguinte: Imagine que você tenha 3 calças, 5 camisas e 2 sapatos e queira saber quantas são as combinações possíveis utilizando essas peças. Para isso basta efetuar a multiplicação, assim: 5 . 3 . 2 = 30 possibilidades de combinações. Esse é chamado de **princípio multiplicativo.**

Exemplo 1. Quantos números de dois algarismos distintos podemos formar com os dígitos: 3, 5, 7 e 6?
Então são 4 possibilidades para as dezenas, são quatro dígitos diferentes, e para as unidades serão 3, pois não queremos repetidos, portanto:
4 . 3 = 12 números de dois algarismos distintos.

Muitos problemas de Análise combinatória podem ser resolvidos utilizando o fatorial (n!), que é a multiplicação de números consecutivos: 4!= 4.3.2.1= 24.

Exemplo 2. Calcule o valor de: 5!

5.4.3.2.1
5.4
20 . 3 . 2 . 1
120

Essa propriedade utilizada na análise combinatória é a **permutação**, significa mudar a ordem, pense: De quantas maneiras distintas sete pessoas podem sentar em sete poltronas?

Temos uma permutação de sete elementos, então:

7! = 7.6.5.4.3.2.1 = 5.040 maneiras.

Outras propriedades são: **combinação e arranjo**.

A combinação é a formação de um grupo não ordenado. Vamos pensar dentro da contagem: Em uma turma de 30 alunos, 6 serão sorteados para uma viagem. Quantas possibilidades possíveis para esse sorteio?

Lembre-se que a ordem do sorteio não importa.

$$C30,6 = \frac{30!}{24!\,6!} = \frac{30.29.28.27.26.25.\cancel{24!}}{\cancel{24!}\,6.5.4.3.2.1} = \frac{427.518.000}{720} = 593.775 \text{ Possibilidades.}$$

$\boxed{\textit{Simplificando os fatores comuns, 24!}}$

Já arranjo forma grupos específicos, vejamos uma situação: Na formação de senhas para clientes, um banco disponibiliza oito dígitos entre: 0, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 8. Sabendo que cada senha é formada por três dígitos distintos, qual o número de senha?

Lembre-se, aqui é importante a ordem dos elementos:

$$A8,3= \frac{8!}{8!-3!}$$

$$\frac{8!}{5!}$$

$$\frac{8.7.6.5!}{5!}$$

8 . 7 . 6

336 senhas.

A análise combinatória é utilizada para resolver problemas de contagem. Utilizando os processos combinatórios é possível determinar o número de combinações, arranjos e permutações possíveis. Para cada uma destas aplicações, alguns critérios devem ser respeitados. Iremos agora conduzir você a entender o Diagrama da Árvore. Quando conseguir assimilar esta estrutura será fácil entender o **Princípio Fundamental da Contagem**, que define - se como sendo:

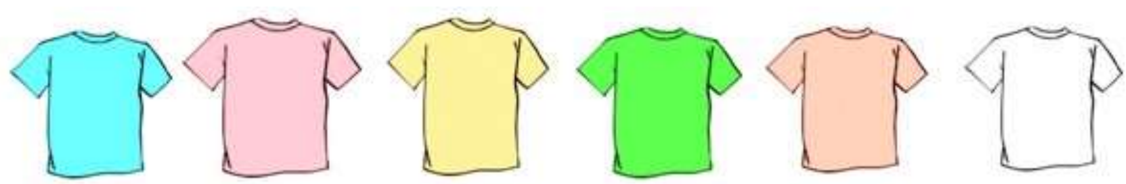
O Produto De Duas Ou Mais Etapas Independentes.

Em notação matemática isso seria o mesmo que considerarmos, que determinada atividade pode ser realizada em duas etapas, ou seja, de m e n maneiras distintas, o total de possibilidades será dado pelo produto de m por **n** (m x n). Iremos agora resolver um problema utilizando o **Diagrama da Árvore** para que possamos entender o Princípio Fundamental da Contagem:

Problema: Jeniffer irá participar da promoção de uma loja de roupas que está dando um vale compras no valor de R$ 1000,00 reais. Ganhará o desafio o primeiro participante que conseguir fazer o maior número de combinações com o kit de roupa cedido pela loja. No kit temos: seis camisetas, quatro saias e dois pares de sapato do tipo salto alto. De quantas maneiras distintas Jeniffer poderá combinar todo o vestuário que esta no quite de roupa?

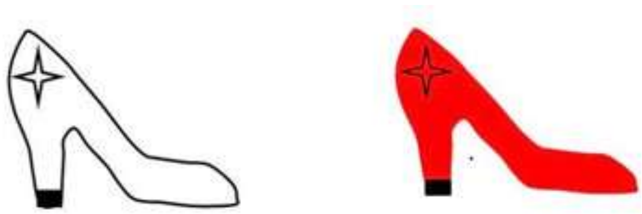
Peças Que Compõem O Kit De Roupa

Camisetas

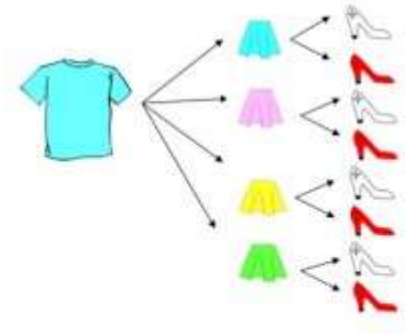


Saias

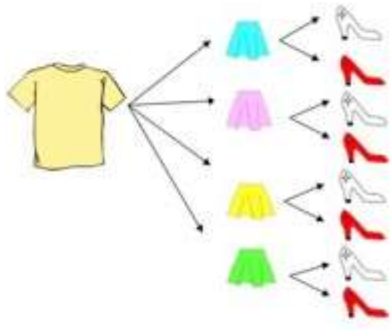
Sapatos



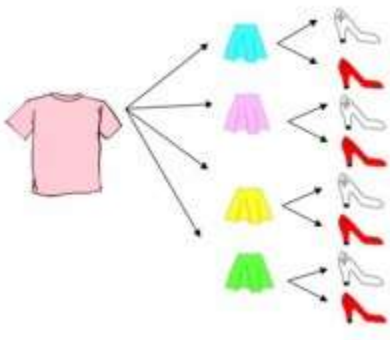
Utilizando o Diagrama da Árvore vamos descobrir a quantidade de combinações possíveis.



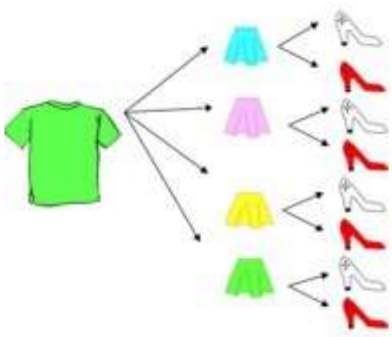
8 combinações possíveis.



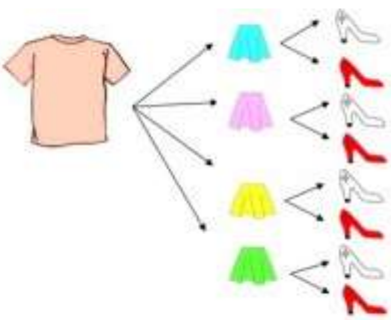
8 combinações possíveis.



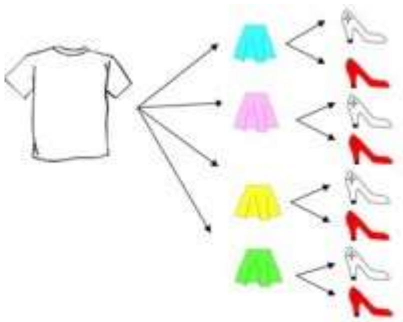
8 combinações possíveis.



8 combinações possíveis.



8 combinações possíveis.



8 combinações possíveis.

Ao realizar a contagem iremos constatar a quantidade referente à 48 combinações possíveis.

A outra forma que temos para resolver este problema é utilizando o **Princípio Fundamental da Contagem**.

Total de camisetas **X** Total de Saias **X** Total Sapatos **=** Total de combinações possíveis

6 **x** 4 **x** 2 **=** 48

Observe que ao utilizarmos o Princípio Fundamental da Contagem, também foi possível determinar o número de combinações do Kit roupa, este número corresponde ao que foi encontrado quando utilizamos o Diagrama da árvore.

Princípio Fundamental da Contagem

O princípio fundamental da contagem diz que um evento que ocorre em **n**situações independentes e sucessivas, tendo a primeira situação ocorrendo de $\mathbf{m_1}$ maneiras, a segunda situação ocorrendo de m_2 maneiras e assim sucessivamente até a **n-ésima** situação ocorrendo de m_n maneiras, temos que o número total de ocorrências será dado pelo produto:

$$m_1 \cdot m_2 \cdot \ldots \cdot m_n$$

Exemplos

- **Quantos são os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5?**

Como o zero à esquerda de um número não é significativo, para que tenhamos um número natural com dois algarismos ele deve começar com um dígito de **1** a **9**, temos portanto **9** possibilidades.

Para que o número seja um múltiplo de 5, o mesmo deve terminar em **0** ou **5**, portanto temos apenas **2** possibilidades.

A multiplicação de **9** por **2** nos dará o resultado desejado.

Logo:

São 18 os números naturais de dois algarismos que são múltiplos de 5.

Eu possuo 4 pares de sapatos e 10 pares de meias. De quantas maneiras poderei me calçar utilizando um par de meias e um de sapatos?

Pelo princípio fundamental da contagem temos que multiplicar **4**, que é o número de elementos do primeiro conjunto, por **10** que corresponde ao número de elementos do segundo conjunto.

Portanto:

Poderei me calçar de 40 maneiras diferentes.

De quantas formas podemos dispor as letras da palavra FLUOR de sorte que a última letra seja sempre a letra R?

Para a última letra, segundo o enunciado temos apenas uma possibilidade que é a letra **R**.

Para a primeira, segunda, terceira e quarta letras temos respectivamente **4**, **3**, **2** e **1** possibilidades. Assim temos:

$$4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 24$$

Note que este exemplo é semelhante ao caso dos livros, explicado no início da página, só que neste caso teríamos mais um livro, digamos de **ciências**, que sempre seria colocado na pilha por último.

Podemos dispor as letras da palavra FLUOR de 24 formas diferentes, tal que a última letra seja sempre a letra R.

Quantos números naturais com 3 algarismos podemos formar que não comecem com 16, nem com 17?

Neste exemplo iremos fazer o cálculo em duas partes. Primeiro iremos calcular quantos são os números com três algarismos.

Como neste caso na primeira posição não podemos ter o dígito zero, o número de possibilidades para cada posição é respectivamente: **9**, **10** e **10**.

Portanto temos **900** números naturais com três dígitos.

Agora vamos calcular quantos deles começam com **16** ou **17**.

Para a primeira posição temos apenas uma possibilidade, o dígito **1**. Para a segunda temos **2**, pois servem tanto o dígito **6**, quanto o **7**.

Para a terceira e última posição temos todos os dígitos possíveis, ou seja, **10** possibilidades.

Multiplicando tudo temos **20**.

Logo, subtraindo **20** de **900** obtemos **880**.

Existem 880 números naturais nestas condições.

São quantos os números ímpares com três algarismos, que não possuem dígitos repetidos e que de trás para frente também são ímpares?

Os números devem ser ímpares, temos então **5** possibilidades para o último algarismo.

A história do "de trás para frente", em outras palavras quer dizer que o primeiro algarismo também é ímpar. Como um dígito ímpar já foi utilizado na última posição, temos então apenas **4** disponíveis para a primeira posição.

Para o dígito central temos apenas **8** possibilidades, pois dois dígitos ímpares já foram utilizados.

Multiplicando **4** por **8** e por **5** obtemos **160**.