

### Múltiplos e Divisores

Dizemos que um número é múltiplo de outro quando o primeiro é resultado da multiplicação entre o segundo e algum número natural. Nesse mesmo caso, também é possível dizer que o segundo é divisor do primeiro.

Em outras palavras, dados os números  $x$  e  $y$ , dizemos que  $x$  é múltiplo de  $y$  se existir algum número natural  $n$  tal que:

$$x = y \cdot n$$

Se esse número existir, podemos dizer que  $y$  é um divisor de  $x$  e podemos escrever:

$$\begin{array}{l} x = n \\ y \end{array}$$

Dessa maneira, um bom teste para descobrir se um número qualquer  $y$  é divisor de outro número  $x$  é observar o resultado da divisão de  $x$  por  $y$ . Se o resultado for exato,  $y$  é divisor de  $x$ .

Por exemplo: 70 é múltiplo de 2, pois o número natural 35 multiplicado por 2 tem 70 como resultado. Em outras palavras:

$$70 = 2 \cdot 35$$

Também podemos afirmar que 10 é divisor de 70, pois

$$\begin{array}{l} 70 = 7 \\ 10 \end{array}$$

### Múltiplos de Um Número Natural

O conjunto que contém os múltiplos de um número natural é um subconjunto infinito do conjunto dos números naturais. Isso acontece porque os múltiplos são obtidos ao multiplicar o número em questão por todos os números naturais. Assim, o conjunto dos múltiplos do número 2 pode ser obtido da seguinte maneira:

$$2 \cdot 0 = 0$$

$$2 \cdot 1 = 2$$

$$2 \cdot 2 = 4$$

$$2 \cdot 3 = 6$$

Esses resultados podem ser escritos na notação de conjuntos:

$$P = \{0, 2, 4, 6, 8, \dots\}$$

Esses resultados são conhecidos como conjunto dos números pares.

Observe que é possível listar os múltiplos de um número qualquer realizando um procedimento exatamente igual ao de construir a tabuada daquele número.

### Divisores de Um Número Natural

Já o conjunto dos divisores de um número natural é um subconjunto finito dos números naturais. Isso acontece em virtude de alguns resultados diretos da definição de divisores:

- a) O número 1 sempre é o menor divisor de qualquer número natural;
- b) O próprio número sempre é o seu maior divisor;
- c) Zero não é divisor de nenhum número.

Como existe um “maior elemento” no conjunto dos divisores de um número natural qualquer, esse conjunto é finito.

Para encontrar os divisores de um número natural, é necessário dividir esse número por todos os naturais menores que ele. Assim, os divisores do número 48, por exemplo, são:

1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24 e 48

Dizemos que o número 48 é divisível por qualquer elemento da lista acima.

Muitas vezes não é necessário realizar a divisão para saber se um número é divisível (ou divisor de) por outro. Basta consultar os critérios de divisibilidade, que podem ser encontrados aqui.

### Números Primos

São números primos aqueles que não são divisíveis por nenhum número natural, exceto 1 e o próprio número. Lembre-se de que qualquer número é divisível por 1 e por ele mesmo, mas nem sempre existe outro divisor para esse número. Por exemplo: o número 2 é divisível apenas por 1 e pelo próprio 2.

$$\begin{array}{l} 2 = 2 \\ 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 = 1 \\ 2 \end{array}$$

O conjunto dos números primos também é infinito. Contudo, quanto maior o número natural, menor a probabilidade de ele ser primo.

O procedimento usado para garantir que um número é primo é tentativa e erro. É necessário dividir um número por todos os naturais menores que ele para comprovar que ele é primo.

### Mínimo Múltiplo Comum

Ao analisar dois ou mais números, é possível identificar o menor múltiplo comum que eles possuem, ou seja, escrevendo a lista de múltiplos de ambos, destacar o menor dos múltiplos que aparecem em ambas as listas simultaneamente. Por exemplo: O mínimo múltiplo comum (também chamado de MMC ou apenas mínimo) entre 6 e 20 é:

Múltiplos do 6: 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 54, 60, 66, ...

Múltiplos do 20: 0, 20, 40, 60, 80, ...

Observe que o primeiro número que aparece nas duas listas ao mesmo tempo é 60. Logo, o MMC entre 6 e 20 é 60.

Um método prático para fazer esses cálculos pode ser encontrado aqui.

### Máximo divisor comum

Segue a mesma ideia do mínimo múltiplo comum, porém, procurando o maior divisor nas duas listas. Por exemplo: o máximo divisor comum (também chamado de MDC) entre 6 e 20 é:

Divisores do 6: 1, 2, 3 e 6

Divisores do 20: 1, 2, 4, 5, 10 e 20

O número 2 é o maior dos divisores comuns entre os números 6 e 20 (e o único).

### Máximo Divisor Comum

MDC significa máximo divisor comum. O máximo divisor comum entre dois ou mais números naturais é o maior de seus divisores. Dois números naturais sempre tem divisores em comum.

Os divisores de um número natural podem ser encontrados dividindo este número pelos números naturais maiores que zero. Quando a divisão for exata, ou seja, com resto zero, então tal número é divisor do número dado.

Como Calcular o MDC de Dois ou Mais Números?

Para calcular o MDC devemos fazer o seguinte: decomposição em fatores primos ou decomposição simultânea.

Decomposição em fatores primos

Para encontrar o MDC pela decomposição em fatores primos devemos seguir as seguintes regras:

- Decompor os números dados em fatores primos.
- Pegar os fatores primos comuns com seus expoentes menores.
- Fazer o produtos desses fatores.

Exemplo: Vamos encontrar o máximo divisor comum para os números 16 e 24.

$$16 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$$

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

Os fatores primos comuns aos dois números dados  $2^4$  e  $2^3$ . Desses dois temos  $2^3$  com o menor expoente. Logo,  $2^3 = 8$ .

Portanto, o MDC (16; 24) = 8, que é o maior número natural que divide ambos os números dados.

Vamos ver mais um exemplo?

Considere os números 30, 50 e 20, o MDC deles é?

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$50 = 2 \times 5 \times 5 = 2 \times 5^2$$

$$20 = 2 \times 2 \times 5 = 2^2 \times 5$$

Os únicos fatores que divide ambos ao mesmo tempo são 2 e 5, veja acima na multiplicação dos números primos. Dessa forma pegamos os fatores com menores expoente e fazemos a multiplicação.

$$\text{Logo, } 2 \times 5 = 10$$

$$\text{Portanto, o MDC (30; 50; 20) = 10}$$

Curiosidade: dois números são primos entre si quando o maior divisor comum (MDC) a eles é 1.

Exemplo: 13 e 5, o único número que divide ambos ao mesmo tempo é o número 1.

### **Decomposição Simultânea**

A decomposição simultânea ou fatoração simultânea consiste em dividir várias vezes os números dados pelo menor fator primo, se o número não for divisível pelo menor fator ele deve ser repetido.

O MDC é obtido pela multiplicação dos fatores primos comuns, ou seja, os fatores que dividem os números dados ao mesmo tempo.

Exemplo: Encontre o máximo divisor comum dos números 180, 240 e 270.

Pela decomposição simultânea devemos dividir simultaneamente os três números dados começando pelo menor número primo possível até chegar ao resto 1.

180 ; 240 ; 270	②
90 ; 120 ; 135	2
45 ; 60 ; 135	2
45 ; 30 ; 135	2
45 ; 15 ; 135	③
15 ; 5 ; 45	3
5 ; 5 ; 15	3
5 ; 5 ; 5	⑤
1 ; 1 ; 1	

*MDC (180; 240; 270) = 2 x 3 x 5 = 30*

### Fatoração Simultânea

O que fizemos foi dividir os números dados pelo menor primo, o número 2. Dividimos o três números. Depois verificamos se ainda é possível continuar dividindo pelo 2, sim. Os números que não puderem ser divididos devem ser repetidos, como o 135.

Seguimos dividindo pelo 2. Quando não for mais possível dividi-los pelo 2, procuramos o menor número primo possível que possamos dividir pelo menos um deles, neste caso o número primo 3 pode dividir 45, 15 e 135.

Seguimos dividindo pelo 3 quando possível e conservando aqueles que não podem. Por fim, somente o número 5, que também é primo, podem dividir o número 5, resto das divisões anteriores.

Esse processo acaba quando encontramos resto 1 para todos os números dados. O MDC é a multiplicação dos números primos que puderam dividir todos os números dados ao mesmo tempo.

Portanto, o MDC (180; 240; 270) = 2 x 3 x 5 = 30.

O números 2 dividiu todos os números na primeira vez, o 3 e o 5 também.

Veja mais um exemplo para destruir qualquer dúvida.

Exemplo: calcular o MDC para 20, 50.

Resultado da divisão de 20, 50 por 2.	20, 50	2	Números que dividiu todos os números ao mesmo tempo.
	10, 25	2	
	5, 25	5	
Quando um número não pode ser dividido pelo menor número primo, ele deve ser repetido. 25 não pode ser dividido por 2.	1, 5	5	Multiplicamos os números que são fatores comuns.
	1, 1		
		2 x 5 = 10	

### Decomposição Simultânea

#### Propriedades Básicas

- Dados dois ou mais números, se um deles é divisor de todos os outros, então ele é o MDC dos números dados;
- Exemplo: MDC (3; 6; 12) = 3. 3 é divisor de 6 e 12, então ele é o máximo divisor comum.
- Dois números consecutivos são sempre primos entre si.
- Exemplo: MDC (25, 26) = 1. O maior número que divide 25 e 26 é 1. Então, ele é o máximo divisor entre 25 e 26.

**Divisibilidade**

Para alguns números como o dois, o três, o cinco e outros, existem regras que permitem verificar a divisibilidade sem se efetuar a divisão. Essas regras são chamadas de critérios de divisibilidade.

**Divisibilidade Por 2**

Um número natural é divisível por 2 quando ele termina em 0, ou 2, ou 4, ou 6, ou 8, ou seja, quando ele é par.

Exemplos:

- 1) 5040 é divisível por 2, pois termina em 0.
- 2) 237 não é divisível por 2, pois não é um número par.

**Divisibilidade Por 3**

Um número é divisível por 3 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 3.

Exemplo:

234 é divisível por 3, pois a soma de seus algarismos é igual a  $2+3+4=9$ , e como 9 é divisível por 3, então 234 é divisível por 3.

**Divisibilidade Por 4**

Um número é divisível por 4 quando termina em 00 ou quando o número formado pelos dois últimos algarismos da direita for divisível por 4.

Exemplo:

- 1800 é divisível por 4, pois termina em 00.
- 4116 é divisível por 4, pois 16 é divisível por 4.
- 1324 é divisível por 4, pois 24 é divisível por 4.
- 3850 não é divisível por 4, pois não termina em 00 e 50 não é divisível por 4.

**Divisibilidade Por 5**

Um número natural é divisível por 5 quando ele termina em 0 ou 5.

Exemplos:

- 1) 55 é divisível por 5, pois termina em 5.
- 2) 90 é divisível por 5, pois termina em 0.
- 3) 87 não é divisível por 5, pois não termina em 0 nem em 5.

**Divisibilidade Por 6**

Um número é divisível por 6 quando é divisível por 2 e por 3.

Exemplos:

- 1) 312 é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma: 6).
- 2) 5214 é divisível por 6, porque é divisível por 2 (par) e por 3 (soma: 12).
- 3) 716 não é divisível por 6, (é divisível por 2, mas não é divisível por 3).

4) 3405 não é divisível por 6 (é divisível por 3, mas não é divisível por 2).

### **Divisibilidade Por 8**

Um número é divisível por 8 quando termina em 000, ou quando o número formado pelos três últimos algarismos da direita for divisível por 8.

Exemplos:

- 1) 7000 é divisível por 8, pois termina em 000.
- 2) 56104 é divisível por 8, pois 104 é divisível por 8.
- 3) 61112 é divisível por 8, pois 112 é divisível por 8.
- 4) 78164 não é divisível por 8, pois 164 não é divisível por 8.

### **Divisibilidade Por 9**

Um número é divisível por 9 quando a soma dos valores absolutos dos seus algarismos for divisível por 9.

Exemplo:

2871 é divisível por 9, pois a soma de seus algarismos é igual a  $2+8+7+1=18$ , e como 18 é divisível por 9, então 2871 é divisível por 9.

### **Divisibilidade Por 10**

Um número natural é divisível por 10 quando ele termina em 0.

Exemplos:

- 1) 4150 é divisível por 10, pois termina em 0.
- 2) 2106 não é divisível por 10, pois não termina em 0.

Continua após a publicidade

### **Divisibilidade Por 11**

Um número é divisível por 11 quando a diferença entre as somas dos valores absolutos dos algarismos de ordem ímpar e a dos de ordem par é divisível por 11.

O algarismo das unidades é de 1ª ordem, o das dezenas de 2ª ordem, o das centenas de 3ª ordem, e assim sucessivamente.

Exemplos:

1) 87549

Si (soma das ordens ímpares) =  $9+5+8 = 22$

Sp (soma das ordens pares) =  $4+7 = 11$

Si-Sp =  $22-11 = 11$

Como 11 é divisível por 11, então o número 87549 é divisível por 11.

2) 439087

Si (soma das ordens ímpares) =  $7+0+3 = 10$

Sp (soma das ordens pares) =  $8+9+4 = 21$

