Média Aritmética

Média

Você escuta a todo momento nos noticiários a palavra média.

Exemplo:
A média de idade da seleção brasileira é 23 anos.
A média de preço da gasolina é 1,33 reais.

Média Aritmética

Média aritmética de dois ou mais termos é o quociente do resultado da divisão da soma dos números dados pela quantidade de números somados.

Exemplos:

1. Calcule a média aritmética entre os número 12, 4, 5, 7.

$$Ma = \frac{12 + 4 + 5 + 7}{4} = \frac{28}{4} = 7$$

observe o que foi feito, somamos os quatro número e dividimos pela quantidade de números.

2. O time de futebol do Cruzeiro de Minas Gerai, fez 6 partidas amistosas, obtendo os seguintes resultados, 4 x 2, 4 x 3, 2 x 5, 6 x 0, 5 x 3, 2 x 0. Qual a média de gols marcados nestes amistoso?

$$Ma = \frac{4+4+2+6+5+2}{6} = \frac{23}{6} = 3,8$$

Média Aritmética Ponderada

Exemplo:
1. Um colégio resolveu inovar a forma de calcular a média final de seu alunos.

1 bimestre teve peso 2.
2 bimestre teve peso 2.
3° bimestre teve peso 3.
4° bimestre teve peso 3.

Vamos calcular a média anual de Ricardo que obteve as seguintes notas em historia. 1° bim = 3, 2° bim = 2,5, 3° bim = 3,5 e 4° bim = 3

$$Mp = \frac{2x3+2x2,5+3x3,5+3x3}{2+2+3+3}$$

$$Mp = \frac{6+5+10,5+9}{10}$$

$$Mp = \frac{30,5}{10} = 30,5$$

Este tipo de média é muito usada nos vestibulares, você já deve ter ouvido algum colega falar assim, a prova de matemática para quem faz engenharia é peso 3 e historia é peso 1, isto é devido a engenharia ser um curso ligado a ciências exatas. Este peso varia de acordo com a área de atuação do curso.

Progressão Aritmética

Progressão aritmética

Chamamos de progressão aritmética, ou simplesmente de PA, a toda sequência em que cada número, somado a um número fixo, resulta no próximo número da sequência. O número fixo é chamado de razão da progressão e os números da sequência são chamados de termos da progressão.

Observe os exemplos:

50, 60, 70, 80 é uma PA de 4 termos, com razão 10.

3, 5, 7, 9, 11, 13 é uma PA de 6 termos, com razão 2.

-8, -5, -2, 1, 4 é uma PA de 5 termos, com razão 3.

156, 152, 148 é uma PA de 3 termos, com razão -4.

100, 80, 60, 40 é uma PA de 4 termos, com razão -20.

6, 6, 6, 6,..... é uma PA de infinitos termos, com razão 0.

Numa PA de 7 termos, o primeiro deles é 6, o segundo é 10. Escreva todos os termos dessa PA.

6, 10, 14, 18, 22, 26, 30

Numa PA de 5 termos, o último deles é 201 e o penúltimo é 187. Escreva todos os termos dessa PA.

145, 159, 173, 187, 201

Numa PA de 8 termos, o 3º termo é 26 e a razão é -3. Escreva todos os termos dessa PA.

32, 29, 26, 23, 20, 17, 14, 11

Numa PA, o 1º termo é 45 e o 2º termo é 80. Qual a razão dessa PA.

Numa PA, o 5º termo é -7 e o 6º termo é 15. Qual a razão dessa PA.

Símbolos Usados Nas Progressões

Em qualquer sequência, costumamos indicar o primeiro termo por a_1, o segundo termo por a_2, o terceiro termo por a_3, e assim por diante. Generalizando, o termo da sequência que está na posição n é indicado por a_n.

Veja alguns exemplos

Na PA 2, 12, 22, 32 temos: $a_1 = 2$, $a_2 = 12$, $a_3 = 22$ e $a_4 = 32$

Quando escrevemos que, numa sequência, tem-se $a_5 = 7$, por exemplo, observe que o índice 5 indica a posição que o termo ocupa na sequência. No caso, trata-se do 5º termo da sequência. Já o símbolo a_5 indica o valor do termo que está na 5º posição. No caso o valor do quinto termo é 7.

A razão de uma PA é indicada por r, pois ela representa a diferença entre qualquer termo da PA e o termo anterior.

Observe os exemplos:

Na PA 1856, 1863, 1870, 1877, 1884 a razão é r = 7, pois:

$a_2 – a_1 = 1863 - 1856 = 7$

$a_3 – a_2 = 1870 – 1863 = 7$

$a_4 – a_3 = 1877 – 1870 = 7$

$a_5 – a_4 = 1884 – 1877 = 7$

Na PA 20, 15, 10, 5 a razão é r = -5, pois:

$a_2 - a_1 = 15 - 20 = -5$

$a_3 - a_2 = 10 - 15 = -5$

$a_4 - a_3 = 5 - 10 = -5$

Classificação Das Progressões Aritméticas

Uma PA é crescente quando cada termo, a partir do segundo, é maior que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que a sua razão seja positiva.

Exemplo:

(7, 11, 15, 19,...) é uma PA crescente. Note que sua razão é positiva, r = 4

Uma PA é decrescente quando cada termo, a partir do segundo, é menor que o termo que o antecede. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que a sua razão seja negativa.

Exemplo:

(50, 40, 30, 20,...) é uma PA decrescente. Note que sua razão é negativa, r = -10

Uma PA é constante quando todos os seus termos são iguais. Para que isso aconteça é necessário e suficiente que sua razão seja igual a zero.

Exemplo:

$\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \frac{4}{3}, \dots\right)$ *é constante. Note que sua razão é igual a zero,* $r = 0$.

Determine x para que a sequência (3+ x, 5x, 2x + 11) seja PA.

$5x - (3 + x) = 2x + 11 - 5x$

$5x - 3 - x = 2x + 11 - 5x$

$5x - x - 2x + 5x = 11 + 3$

$7x = 14$

$x = 14/7 = 2$

Fórmula do termo geral da PA

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

Determinar o 61º termo da PA (9, 13, 17, 21,...)

$r = 4$ $a_1 = 9$ $n = 61$ $a_{61} = ?$

$a_{61} = 9 + (61 - 1).4$

$a_{61} = 9 + 60.4 = 9 + 240 = 249$

Determinar a razão da PA (a_1, a_2, a_3,...) em que $a_1 = 2$ e $a_8 = 3$

$a_n = a_1 + (n - 1).r$

$a_8 = a_1 + (8 - 1).r$

$a_8 = a_1 + 7r$

$3 = 2 + 7r$

$7r = 3 – 2$

$7r = 1$

$r = 1/7$

Determinar o número de termos da PA (4,7,10,...,136)

$a_1 = 4$ $a_n = 136$ $r = 7 – 4 = 3$

$a_n = a_1 + (n – 1).r$

$136 = 4 + (n – 1).3$

$136 = 4 + 3n – 3$

$3n = 136 – 4 + 3$

$3n = 135$

$n = 135/3 = 45$ termos

Determinar a razão da PA tal que:

$a_1 + a_4 = 12$ e $a_3 + a_5 = 18$

$a_4 = a_1 + (4 – 1).r$ $a_3 = a_1 + (3 – 1).r$ $a_5 = a_1 + 4r$

$a_4 = a_1 + 3r$ $a_3 = a_1 + 2r$

$a_1 + a_1 + 3r = 12$

$a_1 + 2r + a_1 + 4r = 18$

$2a_1 + 3r = 12$

$2a_1 + 6r = 18$

$3r = 6$

$r = 6/3 = 2$

Interpolar (inserir) cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem .

Interpolar (ou inserir) cinco meios aritméticos entre 1 e 25, nessa ordem, significa determinar a PA de primeiro termo igual a 1 e último termo igual a 25.

(1,_,_,_,_,_,25)

$a_7 = a_1 + 6r$

$25 = 1 + 6r$

$6r = 24$

$r = 24/6$

$r = 4$

(1, 5, 9, 13, 17, 21, 25)

Representação genérica de uma PA

PA de três termos:

(x, x + r, x + 2r)

ou

(x – r, x , x + r), em que a razão é r

PA de quatro termos:

(x, x + r, x + 2r, x + 3r)

ou

(x – 3r, x – r, x + r, x + 3r), em que a razão é 2r

Cálculo da soma dos n primeiros termos de uma PA

Em uma pequena escola do principado de Braunschweig, Alemanha, em 1785, o professor Buttner propôs a seus alunos que somassem os números naturais de 1 a 100. Apenas três minutos depois, um gurizote de oito anos de idade aproximou-se da mesa do senhor Buttner e, mostrando-lhe sua prancheta, proclamou: “ taí “. O professor, assombrado, constatou que o resultado estava correto. Aquele gurizote viria a ser um dos maiores matemáticos de todos os tempos: Karl Friedrich Gauss (1777-1855). O cálculo efetuado por ele foi simples e elegante: o menino percebeu que a soma do primeiro número, 1, com o último, 100, é igual a 101; a soma do segundo número, 2 , com o penúltimo, 99 , é igual a 101; também a soma do terceiro número, 3 , com o antepenúltimo, 98 , é igual a 101; e assim por diante, a soma de dois termos equidistantes dos extremos é igual a soma dos extremos.

1 2 3 4.................................97 98 99 100

4 + 97 = 101

3 + 98 = 101

2 + 99 = 101

1 + 100 = 101

Como são possíveis cinquenta somas iguais a 101, Gauss concluiu que:

1 + 2 + 3 + 4 + ... + 97 + 98 + 99 + 100 = 50.101 = 5050

Esse raciocínio pode ser estendido para o cálculo da soma dos n primeiros termos de uma progressão aritmética qualquer:

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}$$

Calcular a soma dos trinta primeiros termos da PA (4, 9, 14, 19,...).

$a_{30} = a_1 + (30 – 1).r$

$a_{30} = a_1 + 29r$

$a_{30} = 4 + 29.5 = 149$

$$S_{30} = \frac{(4 + 149).30}{2}$$

$$S_{30} = \frac{153.30}{2} = 2295$$

Calcular a soma dos n primeiros termos da PA (2, 10, 18, 26,...).

$a_n = 2 + (n – 1).8$

$a_n = 2 + 8n – 8$

$a_n = 8n – 6$

$$S_n = \frac{(2 + 8n - 6).n}{2}$$
$$S_n = \frac{2n + 8n^2 - 6n}{2}$$
$$S_n = \frac{-4n + 8n^2}{2}$$
$$S_n = -2n + 4n^2$$

Determine a soma dos termos da PA (6, 10, 14,..., 134).

$$S_n = \frac{(6 + 134).n}{2}$$
$$a_n = a_1 + (n - 1).r$$
$$134 = 6 + (n - 1).4$$
$$134 = 6 + 4n - 4$$
$$4n = 134 - 6 + 4$$
$$4n = 132$$
$$n = \frac{132}{4} = 33$$
$$S_n = \frac{(6 + 134).33}{2}$$
$$S_n = \frac{140.33}{2} = 2310$$

Calcule a soma dos múltiplos de 7 compreendidos entre 100 e 300.

Múltiplos de 7 (0, 7, 14, 21, 28,...).

O primeiro múltiplo de 7 compreendido entre 100 e 300 é o 105.

O último múltiplo de 7 compreendido entre 100 e 300 é o 294.

294 = 105 + (n – 1).7

294 = 105 + 7n – 7

7n = 294 – 105 + 7

7n = 196

n = 196/7 = 28

$$S_n = \frac{(105 + 294).28}{2}$$

$$S_n = \frac{399.28}{2} = 5586$$

Progressão Geométrica

Denominamos de progressão geométrica, ou simplesmente PG, a toda sequência de números não nulos em que cada um deles, multiplicado por um número fixo, resulta no próximo número da sequência. Esse número fixo é chamado de razão da progressão e os números da sequência recebem o nome de termos da progressão.

Observe estes exemplos:

8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 é uma PG de 8 termos, com razão 2.

5, 15, 45,135 é uma PG de 4 termos, com razão 3.

3000, 300, 30, 3 é uma PG de 4 termos, com razão 1/10

Numa PG de 5 termos o 1º termo é 2 e o 2º termo é 12. Escreva os termos dessa PG.

2, 12, 72, 432, 2592

Numa PG de 4 termos, o último termo é 500 e o penúltimo é 100. Escreva os termos dessa PG.

4,20,100,500

Numa PG de 6 termos, o 1º termo é 3 e a razão é 10. Qual o 6º termo dessa PG.

3,30,300,3000,30000,300000

a_6 = 300000

Numa PG de 5 termos, o 3º termo é -810 e a razão é -3. Escreva os termos dessa PG.

-90,270,-810,2430,-7290

Numa PG, o 9º termo é 180 e o 10º termo é 30. Qual a razão dessa PG.

q = 30/180 = 3/18 = 1/6

A razão é 1/6

Determinar $x, x \in R$, de modo que a sequência :
$(4, 4x, 10x + 6)$ seja PG.

$$\frac{4x}{4} = \frac{10x+6}{4x}$$
$$(4x)^2 = 4(10x+6)$$
$$16x^2 = 40x + 24$$
$$16x^2 - 40x - 24 = 0$$
$$2x^2 - 5x - 3 = 0$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4.2.(-3)}}{4}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 24}}{4}$$
$$x = \frac{5 \pm \sqrt{49}}{4}$$
$$x = \frac{5 \pm 7}{4}$$
$$x_1 = \frac{5+7}{4} = 3$$
$$x_2 = \frac{5-7}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Fórmula do termo geral de uma progressão geométrica.

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

Determinar o 15º termo da progressão geométrica (256, 128, 64,...).

$$q = \frac{1}{2}$$
$$a_1 = 256$$
$$n = 15$$
$$a_{15} = 256.\left(\frac{1}{2}\right)^{15-1}$$
$$a_{15} = 256.\left(\frac{1}{2}\right)^{14}$$
$$a_{15} = 256.\frac{1}{2^{14}} \Rightarrow a_{15} = 2^8.\frac{1}{2^{14}} \Rightarrow a_{15} = \frac{1}{2^6} = \frac{1}{64}$$

Determinar a razão da PG tal que:

$$a_1 = \frac{1}{3^{28}} \quad e \quad a_{10} = \frac{1}{3^{10}}$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$a_{10} = a_1 \cdot q^{10-1}$$
$$a_{10} = a_1 \cdot q^9$$
$$\frac{1}{3^{10}} = \frac{1}{3^{28}} q^9$$
$$q^9 = \frac{3^{28}}{3^{10}}$$
$$q^9 = 3^{18}$$
$$q = \sqrt[9]{3^{18}}$$
$$q = 3^{18/9} = 3^2 = 9$$

Determinar o número de termos da PG (128, 64, 32,......, 1/256).

$$q = \frac{1}{2}$$
$$a_n = \frac{1}{256}$$
$$a_1 = 128$$
$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$
$$\frac{1}{256} = 128.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \Rightarrow \frac{1}{256.128} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^7 \cdot 2^8}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^{15}}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{15}$$
$$n - 1 = 15$$
$$n = 15 + 1 = 16$$

Determinar a razão da PG tal que:

$$a_1 + a_4 = 252 \quad e \quad a_2 + a_5 = 84$$
$$a_4 = a_1 \cdot q^{4-1} \Rightarrow a_4 = a_1 \cdot q^3$$
$$a_2 = a_1 \cdot q^1$$
$$a_5 = a_1 \cdot q^4$$
$$a_1 + a_1 \cdot q^3 = 252$$
$$a_1 q + a_1 \cdot q^4 = 84$$
$$a_1 (1 + q^3) = 252$$
$$a_1 q(1 + q^3) = 84$$
$$\frac{a_1 (1 + q^3)}{a_1 q(1 + q^3)} = \frac{252}{84}$$
$$\frac{1}{q} = 3 \Rightarrow q = \frac{1}{3}$$

Representação genérica de uma PG:

a) PG de três termos, (x, xq, xq^2) em que a razão é q;

$(x/q, x, xq)$, com razão q, se $q \neq 0$.

b) PG de quatro termos, (x, xq, xq^2, xq^3), com razão q;

$(x/q^3, x/q, xq, xq^3)$, com razão q^2, se $q \neq 0$.

Determinar a PG de três termos, sabendo que o produto desses termos é 8 e que a soma do segundo com o terceiro termo é 10.

$$\left(\frac{x}{q}, x, xq\right)$$

$$\frac{x}{q}.x.xq = 8 \Rightarrow x^3 = 8 \Rightarrow x = \sqrt[3]{8} = 2$$

$$x + xq = 10$$

$$2 + 2q = 10$$

$$2q = 10 - 2$$

$$2q = 8 \Rightarrow q = \frac{8}{2} = 4$$

$$\left(\frac{2}{4}, 2, 2.4\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}, 2, 8\right)$$

Soma dos n primeiros termos de uma PG:

Sendo S_n a soma dos n primeiros termos da PG ($a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, \ldots$) de razão q, temos:

Se q = 1, então $S_n = n.a_1$

$$\text{Se } q \neq 1, \text{ então } S_n = \frac{a_1(1 - q^n)}{1 - q}$$

Calcular a soma dos dez primeiros termos da PG (3, 6, 12,....).

$$a_1 = 3$$

$$q = 2$$

$$n = 10$$

$$S_{10} = \frac{3.(1 - 2^{10})}{1 - 2}$$

$$S_{10} = \frac{3.(1 - 1024)}{-1}$$

$$S_{10} = \frac{3.(-1023)}{-1} = \frac{-3069}{-1} = 3069$$