Tutorial 9

(1) $\dddot{x} + \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2f(t)$

- Como a equação diferencial é de 3ª ordem, existem 3 condições iniciais e, portanto 3 variáveis de estado, para descrever completamente a dinâmica do sistema.

$$x_1 = x \quad , \quad x_2 = \dot{x} \quad , \quad x_3 = \ddot{x}$$

- Derivando e usando a equação diferencial.

$$\dot{x}_1 = \dot{x} = x_2 \quad \rightarrow \dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{x} = x_3 \quad \rightarrow \dot{x}_2 = x_3$$

$$\dot{x}_3 = \dddot{x} = -x_3 - 2x_2 - x_1 + 2f(t) \qquad y = x$$

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} [f(t)]$$

- Considerando $y = x = x_1$ como saída, a equação de saída é

$$y = Cx + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + [0]\, f(t)$$

Função de transferência Resultante do Matlab

$$G(s) = \frac{2}{s^3 + s^2 + 2s + 1}$$

② $J_1 \ddot{\theta}_1(t) + (K_1 + K_2)\theta_1 - K_2\theta_2 = T$

$J_2 \ddot{\theta}_2(t) - K_2\theta_1 + (K_2 + K_3)\theta_2 = 0$

$J_1 = 1\ Kg\cdot m^2$, $J_2 = 2\ Kg\cdot m^2$, $K_1 = 1$, $K_2 = 2$, $K_3 = 3$

a) Como cada equação diferencial é de 2ª ordem, existem 4 condições iniciais no total, e portanto 4 variáveis de estado.

$x_1 = \theta_1$; $x_2 = \theta_2$; $x_3 = \dot{\theta}_1$, $x_4 = \dot{\theta}_2$

_Derivando

$\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = x_3 \rightarrow \dot{x}_1 = x_3$

$\dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 = x_4 \rightarrow \dot{x}_2 = x_4$

$$\dot{x}_3 = \ddot{\theta}_1 = \frac{-(K_1+K_2)\overset{x_1}{\theta_1} + K_2\overset{x_2}{\theta_2} + T}{J_1} = -3\theta_1 + 2\theta_2 + T$$

$$\dot{x}_4 = \ddot{\theta}_2 = \frac{K_2\theta_1 - (K_2+K_3)\theta_2}{J_2} = \theta_1 - \frac{5}{2}\theta_2$$

$\dot{x} = Ax + Bu$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} T$$

_Considerando $x_1 = \theta_1$ como saída

$y = Cx + Du$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + 0$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 2,5}{s^4 + 5,5s^2 + 5,5}$$

b) Considerando $x_1 = \theta_1$ e $x_2 = \theta_2$ como saída

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \frac{s^2 + 3,5}{s^4 + 5,5s^2 + 5,5}$$