Tutorial 4

① $(p+5)y(t) = x(t)$, $y(0) = 5$

Sendo $x(t) = 0$

$(p+5)\,y(t) = 0$

Determinando a raiz

$p+5 = 0$

$p = -5$

A Resposta será $y(t) = C\,e^{-5t}$

Como $y(0) = 5$

$y(0) = C\,e^{0}$

$C = 5$

Portanto

$y(t) = 5\,e^{-5t}$

② $(p^2 + 2p)\,y(t) = 0$, com $y(0) = 1$ e $\dot{y}(0) = 4$

Determinando raízes

$p^2 + 2p = 0$

$p(p+2)$

$\lambda_1 = 0$

$\lambda_2 = -2$

A resposta será $y(t) = C_1 + C_2 e^{-2t}$

para $y(0) = 1$

$1 = C_1 + C_2$

$C_1 = 3$

para $\dot{y}(0) = 4$

$\dot{y}(t) = -2\,C_2\,e^{-2t}$

$4 = -2\,C_2\,e^{0}$

$C_2 = -2$

Portanto

$y(t) = 3 - 2\,e^{-2t}$

⑥ Demonstrar a equação (15)

Pela equação (13) calculamos a Transformada de Laplace e considerando condições iniciais, tem-se

$$\mathcal{L}\left\{\frac{d^n f(t)}{dt^n}\right\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) \ldots$$

$$\ddot{x}(t) + 2\zeta w_n \dot{x}(t) + w_n^2 x(t) = 0$$

$$s^2 X(s) - s\,X(0) - \dot{x}(0) + 2\zeta w_n [\,s X(s) - x(0)\,] + w_n^2 X(s) = 0$$

$$X(s)\,[\,s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2\,] = (s + 2\zeta w_n)\,x(0) + \dot{x}(0)$$

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta w_n)\,x(0) + \dot{x}(0)}{s^2 + 2\zeta w_n s + w_n^2} \qquad (15)$$

⑦ Demostrar a equação (16)

$$X(s) = \frac{(s + 2\zeta w_n)\,x(0) + \dot{x}(0)}{(s+\zeta w_n)^2 + w_d^2} = \frac{x(0)(s + \zeta w_n)}{(s+\zeta w_n)^2 + w_d^2} + \zeta w_n x(0) + \dot{x}(0)\,\frac{1}{(s+\zeta w_n)^2 + w_d^2} \times \frac{w_d}{w_d}$$

Aplicando Transformada Inversa

$$x(t) = e^{-\zeta w_n t}\left[\,x_0 \cos(w_d t) + \frac{\zeta w_n x_0 + \dot{x}_0}{w_d} \sin(w_d t)\,\right]$$

8 a) Rigidez equivalente (constante da mola equivalente)

Rotação da Barra $\theta = \frac{y}{L}$

Deslocamento no ponto da mola $y_k = a \cdot \theta = \frac{2}{3} L \cdot \frac{y}{L} = \frac{2}{3} L$

Força restouradora da mola

$F_k = -K \cdot y_k = -K\left(\frac{2}{3} y\right)$

Sendo assim $K_{eq} = \frac{2}{3} K = \frac{2}{3} \times 1200 \frac{N}{m} = 800 \frac{N}{m}$

b) Frequência Natural em Hz

$f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{K}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{800\ N/m}{100\ Kg}} = 0{,}45 \frac{\sqrt{Kg \cdot m}}{s^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{1}{\sqrt{Kg}} = 0{,}45\ Hz$

$w_n = 2{,}82$ rad/s

c) Fator de Amortecimento

$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{K_{eq} m}} = \frac{50\ N.s/m}{2\sqrt{800\ N/m \cdot 100 Kg}} = 0{,}09$

d) Tipo de Respasta Livre

$\zeta < 1$ - Sistema subamortecido

$w_d = w_n \sqrt{1 - \zeta^2}$

$w_d = 2{,}82\sqrt{1 - 0{,}09^2} = 2{,}80$

e) Forma geral da Resposta livre Subamortecida

$\theta(t) = e^{-\zeta w_n t}\left[A \cos(w_d t) + B \sin(w_d t)\right]$

Para $\theta(0) = 0{,}15 = A \rightarrow t = 0$

Para $\dot\theta(0) = 0$, $\dot\theta(t) = e^{-\zeta w_n t}\left[-\zeta w_n \left(A \cos(w_d t) + B \sin(w_d t)\right) - A w_d \sin(w_d t) + B w_d \cos(w_d t)\right]$

$\dot\theta(0) = -\zeta w_n A + B w_d = 0 \rightarrow B = \frac{\zeta w_n A}{w_d}$

$\theta(t) = e^{-\zeta w_n t}\left[0{,}15 \cos(w_d t) + \frac{\zeta w_n A}{w_d} \sin(w_d t)\right]$

$\theta(t) = e^{-0{,}2538 t}\left[0{,}15 \cos(2{,}8 t) + 0{,}0136 \sin(2{,}8 t)\right]$

9) a) $K_{eq} = K = 1200$ N/m   b) $f_n = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{1200\ N/m}{100\ Kg}} = 0{,}55\ Hz$