Universidade Federal de Minas Gerais

DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA ELETRÔNICA

ELT129 – Oficina de Modelagem e Simulação

Professor: Leonardo Mozelli – lamoz@ufmg.br

Tutorial 10 – Representação de Sistemas no Espaço de Estados

1 Introdução

Neste tutorial serão apresentadas a representação de sistemas lineares utilizando espaço de estados e a linearização de sistemas não lineares.

Será mostrado que, sob determinadas condições, sistemas não lineares podem ser linearizados em torno de um ponto de equilíbrio (ou operação) com boa precisão, para isso exploraremos Séries de Taylor em Matlab. Esse procedimento é frequente em análise e controle de sistemas dinâmicos.

2 Representação no Espaço de Estados

Trata-se de um enfoque mais recente do que os métodos baseados em função de transferência (também chamados de métodos frequenciais). A representação no espaço de estados é baseada na *Teoria de Variáveis de Estados*, na qual os sistemas dinâmicos são descritos por meio de equações diferenciais, possuindo o tempo como variável independente. Por esse motivo, essa abordagem é dita ser no domínio do tempo.

Nesta representação, um modelo matemático descrito por uma equação diferencial de ordem n é substituído por um sistema de n equações diferenciais, todas de 1ª ordem. Se o modelo matemático for descrito por m equações diferenciais de ordem n, então ele será substituído por um sistema de $m \times n$ equações diferenciais de 1ª ordem. A representação no espaço de estados é particularmente útil na análise e no projeto de sistemas de controle. Ela possui as seguintes características:

- usa o domínio do tempo;
- quaisquer condições iniciais;
- aplicabilidade mais ampla:
  - sistemas lineares e não-lineares;
  - sistemas invariantes no tempo e variantes no tempo;
  - sistemas SISO (Single Input-Single Output) e MIMO (Multiple Input-Multiple Output);
- interpretação física mais abstrata.

A seguir, apresentaremos os fundamentos do método a partir de exemplos simples.

Exemplo 1. Representação de um sistema mecânico de 2ª ordem (por exemplo, massa-mola-amortecedor) com um grau de liberdade, sendo a entrada $u(t)$ a força externa aplicada sobre a massa m, e a saída $y(t)$ o deslocamento medido a partir da posição de equilíbrio estático.

O modelo matemático genérico desse tipo de sistema é dado pela EDO

$$m\ddot{y} + c\dot{y} + ky = u(t)$$

com condições iniciais $y(0) = y_0$ e $\dot{y}(0) = \dot{y}_0$.

Duas questões aparecem:

Q1 $\rightarrow$ Quantas variáveis de estado são necessárias?

A quantidade de variáveis de estado é igual à quantidade de condições iniciais. Como o sistema é de 2ª ordem, ele possui duas condições iniciais, logo necessita de duas variáveis de estado para descrever completamente a dinâmica do sistema.

Q2 $\rightarrow$ Quais são as variáveis de estado do problema?

São as correspondentes às condições iniciais do problema. No caso, as variáveis de estado são o deslocamento $y(t)$ e a velocidade $\dot{y}(t)$

Observação 1. É importante não confundir variável de estado (ente matemático) com variável física. Por exemplo, consideremos um sistema dinâmico descrito pelo sistema de equações diferenciais abaixo, no qual x_1, x_2 e suas derivadas são variáveis físicas:

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}_1 + \dot{x}_1 + x_1 - x_2 = 0 \\
&\dot{x}_2 - 2x_1 + x_2 = 0
\end{aligned}$$

Nesse caso, existem 3 variáveis de estado: duas para a coordenada x_1 e uma para a coordenada x_2, sendo x_1 e x_2 (variáveis de estado (matemática)) iguais a x_1 e x_2 (deslocamentos (físico)), respectivamente, e x_3 (variável de estado (matemática)) igual a $\dot{x}_1$ (velocidade (físico)).

Voltando ao exemplo, as variáveis de estado serão $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$. Derivando, obtemos:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \dot{y} \\
\dot{x}_2 &= \frac{1}{m}(-ky - c\dot{y}) + \frac{1}{m}u
\end{aligned}$$

Vemos que a primeira equação não depende da dinâmica do sistema, enquanto que a segunda depende. Em termos de variáveis de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= -\frac{k}{m}x_1 - \frac{c}{m}x_2 + \frac{1}{m}u
\end{aligned}$$

que são as equações de estado. Sob forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} u$$

A equação de saída, assumindo a variável de saída $\boldsymbol{y} = x_1$, pode ser escrita como

$$\boldsymbol{y} = [y] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Essas duas últimas equações matriciais são, respectivamente, a equação de estado e a equação de saída. Em forma padrão:

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}} &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u} \\
\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}
\end{aligned}$$

sendo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{u} = [u(t)]$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{1}{m} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{D} = [0]$$

Exemplo 2 (Representação de um sistema de 2ª ordem com dois graus de liberdade)**.** Seja o sistema mecânico da Figura 1.

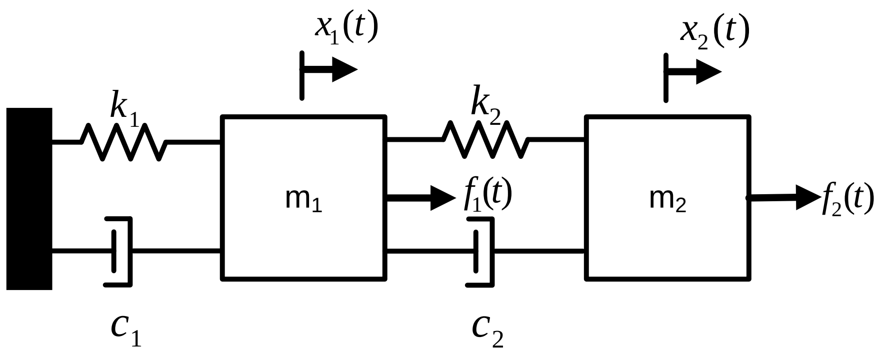

Figura 1: Sistema mecânico com 2 GDL.

Pedem-se:

a) as variáveis de estado e as equações de estado;

b) supondo que as entradas do sistema sejam $f_1(t)$ e $f_2(t)$ e que a saída seja x_1, obter a equação da saída;

c) repetir o item b), porém agora as saídas são x_1 e $\dot{x}_1$.

Solução:
O modelo matemático é dado pelo sistema de EDOs:

$$\begin{aligned} &m_1\ddot{x}_1 + (c_1 + c_2)\dot{x}_1 - c_2\dot{x}_2 + (k_1 + k_2)x_1 - k_2x_2 = f_1(t) \\ &m_2\ddot{x}_2 - c_2\dot{x}_1 + c_2\dot{x}_2 - k_2x_1 + k_2x_2 = f_2(t) \end{aligned}$$

a) Como cada equação diferencial é de 2ª ordem, existem quatro condições iniciais e, portanto, quatro variáveis de estado:

$$x_1 = x_1, \quad x_2 = x_2, \quad x_3 = \dot{x}_1, \quad x_4 = \dot{x}_2.$$

Derivando e usando as equações diferenciais do modelo matemático, obtemos, após manipulações algébricas:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_4 \\ \dot{x}_3 &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1}x_1 + \frac{k_2}{m_1}x_2 - \frac{c_1 + c_2}{m_1}x_3 + \frac{c_2}{m_1}x_4 + \frac{1}{m_1}f_1(t) \\ \dot{x}_4 &= \frac{k_2}{m_2}x_1 - \frac{k_2}{m_2}x_2 + \frac{c_2}{m_2}x_3 - \frac{c_2}{m_2}x_4 + \frac{1}{m_2}f_2(t) \end{aligned}$$

Note que as duas primeiras equações não dependem da dinâmica do sistema, enquanto que as duas últimas dependem. Reescrevendo o sistema de equações acima em forma matricial, temos

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{k_1+k_2}{m_1} & \frac{k_2}{m_1} & -\frac{c_1+c_2}{m_1} & \frac{c_2}{m_1}x_4 \\ \frac{k_2}{m_2} & -\frac{k_2}{m_2} & +\frac{c_2}{m_2} & -\frac{c_2}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{1}{m_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

ou seja, $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Ax} + \boldsymbol{Bu}$, onde os vetores e matrizes podem ser facilmente identificados.

b) Considerando x_1 como saída, isto é, $y = x_1$, a equação de saída é

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

ou seja, $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Cx} + \boldsymbol{Du}$, onde os vetores e matrizes podem ser facilmente identificados.

c) Considerando como saídas x_1 e $\dot{x}_1$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

2.1 Formalização do Método

2.1.1 Definições

- **Estado de um sistema dinâmico**: menor conjunto de variáveis (denominadas variáveis de estado) independentes tal que o conhecimento dessas variáveis no instante $t = t_0$, juntamente com o conhecimento da entrada para $t \geq t_0$, determina completamente o comportamento do sistema para $t \geq t_0$. Portanto, o estado para $t \geq t_0$ não depende do estado e da entrada para $t < t_0$. No caso de sistemas lineares invariantes no tempo, usualmente escolhemos $t_0 = 0$.

- **Variáveis de estado de um sistema dinâmico**: são as n variáveis que compõem o menor conjunto de variáveis que determina o estado do sistema. É importante notar que essas variáveis não representam necessariamente quantidades físicas e que o conjunto de variáveis de estado de um determinado sistema dinâmico não é único. Tendo em vista que as variáveis de estado são independentes, uma variável de estado não pode ser expressa como função algébrica de outra(s) variável(eis) de estado.

- **Vetor de estado de um sistema dinâmico**: é o vetor $x(t)$ cujas componentes são as n variáveis de estado. Um vetor de estado $x(t)$ determina univocamente o estado do sistema para qualquer instante $t \geq t_0$, uma vez que o estado em $t = t_0$ seja dado e a entrada $u(t)$ para qualquer instante $t \geq t_0$ seja especificada.

- **Espaço de estado**: é o espaço n-dimensional cujos eixos coordenados são as variáveis de estado $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Portanto, qualquer estado pode ser representado por um ponto no espaço de estado. Assim, no sistema do Exemplo 1, temos as variáveis de estado $x_1 = y$ e $x_2 = \dot{y}$, logo o espaço de estados é bidimensional, podendo ser localizado num plano com eixos x_1 e x_2.

2.1.2 Equações do espaço de estados

Três tipos de variáveis aparecem na modelagem de sistemas dinâmicos por espaço de estados:

- variáveis de entrada;
- variáveis de saída;
- variáveis de estado.

Seja o sistema dinâmico da Figura 2, o qual possui

- r variáveis de entrada: $u_1(t), u_2(t), \ldots, u_r(t)$
- m variáveis de saída: $y_1(t), y_2(t), \ldots, y_m(t)$
- n variáveis de estado: $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$

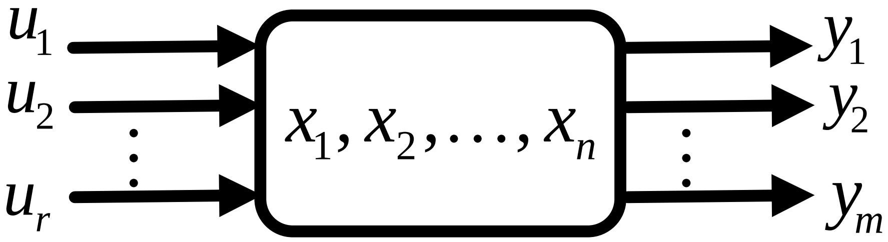

Figura 2: Sistema com r entradas e m saídas.

Então, o sistema pode ser descrito por n equações diferenciais de 1ª ordem, que são as equações de estado:

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r, t)\\
\dot{x}_2(t) &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r, t)\\
&\vdots\\
\dot{x}_n(t) &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r, t)
\end{aligned}$$

onde $f_1, f_2, \ldots, f_n$ são não lineares, em geral. Por outro lado, as saídas do sistema são funções das variáveis de entrada, das variáveis de estado e do tempo, constituindo as equações de saída:

$$\begin{aligned}
y_1(t) &= g_1(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r, t)\\
y_2(t) &= g_2(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r, t)\\
&\vdots\\
y_m(t) &= g_m(x_1, x_2, \cdots, x_n; u_1, u_2, \ldots, u_r, t)
\end{aligned}$$

onde $g_1, g_2, \ldots, g_m$ são não lineares, em geral.

Definindo

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{vetor de estado}$$

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{vetor de entrada}$$

$$\boldsymbol{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \text{vetor de saída}$$

as equações de estado e de saída podem ser escritas sob forma matricial compacta como

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}, t) \end{aligned}$$

Se as funções vetoriais $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ envolvem o tempo t explicitamente, então o sistema é dito variante no tempo. Um caso particular ocorre quando o sistema é variante no tempo e linear. Neste caso,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \end{aligned}$$

onde $\boldsymbol{A}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ é a matriz de estado (ou matriz dinâmica), $\boldsymbol{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times r}$ é a matriz de entrada, $\boldsymbol{C}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de saída e $\boldsymbol{D}(t) \in \mathbb{R}^{m \times r}$ é a matriz de transmissão direta.

Se o sistema é variante no tempo e não-linear, as equações de estado e de saída, em certos casos, podem ser linearizadas em torno de um ponto de operação, de modo a permitir o uso das equações de estado e de saída para um sistema linear.

Por outro lado, se as funções vetoriais $f(\cdot)$ e $g(\cdot)$ não envolvem o tempo t explicitamente, então o sistema é dito invariante no tempo e, nesse caso, as equações de estado e de saída podem ser simplificadas para

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\ \boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t) \end{aligned} \tag{1}$$

onde $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{D}$ são matrizes constantes.

2.1.3 Não Unicidade das Variáveis de Estado

Podemos mostrar que o conjunto de variáveis de estado não é único, ou seja, podemos selecionar um conjunto diferente de variáveis de tal modo que o modelo do sistema possa ser representado por um conjunto de equações semelhante ao apresentado em (1).

Consideremos um sistema dinâmico para o qual um conjunto de n variáveis de estado

$$\boldsymbol{x}(t) = [x_1 \; x_2 \; \cdots \; x_n]^T$$

foi escolhido adequadamente e para o qual a representação no espaço de estados é dada por (1). Consideremos, também, um outro conjunto de variáveis

$$\boldsymbol{x}^*(t) = [x_1^* \; x_2^a st \; \cdots \; x_n^*]^T$$

relacionado ao primeiro pela transformação matricial

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^* \tag{2}$$

sendo $\boldsymbol{P}$ uma matriz $n \times n$ não singular (determinante não nulo), com elementos constantes. Substituindo (2) em (1), temos

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{aligned}$$

Pré-multiplicando a primeira equação por $\boldsymbol{P}^{-1}$, obtemos

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{aligned}$$

e definindo

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{A}^* \\
\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}^* \\
\boldsymbol{C}\boldsymbol{P} &= \boldsymbol{C}^*
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{u}(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{aligned}$$

que está precisamente na mesma forma da expressão (1), logo representa também o mesmo sistema dinâmico, porém utilizando um outro conjunto de variáveis de estado, o que vem demonstrar que o conjunto de variáveis de estado não é único.

2.1.4 Desacoplamento das Variáveis de Estados

Na maioria dos casos, as variáveis de estado estão acopladas, conforme ilustra o Exemplo 2, no qual podemos ver que a matriz de estado $\boldsymbol{A}$ é uma matriz cheia (ou seja, não é uma matriz diagonal ou triangular), o que indica a presença de uma variável de estado em mais de uma equação. Tal fato se chama acoplamento e, matematicamente, significa que as equações não podem ser tratadas separadamente, a não ser que consigamos desacoplá-las.

Para desacoplar as equações de estado, podemos usar a transformação matricial

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*$$

onde $\boldsymbol{P}$ é a matriz modal associada à matriz $\boldsymbol{A}$, ou seja, $\boldsymbol{P}$ é a matriz cujas colunas são os autovetores da matriz $\boldsymbol{A}$. Da Álgebra Linear sabemos que

$$\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{3}$$

onde $\boldsymbol{\Lambda}$ é uma matriz diagonal cujos elementos da diagonal principal são os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$. Então, as equações de estado que utilizam um vetor de estados x^* que satisfaça a transformação (3) tomam a forma especial

$$\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{x}}^*(t) &= \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t) \\
\boldsymbol{y}(t) &= \boldsymbol{C}\boldsymbol{P}\boldsymbol{x}^*(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)
\end{aligned} \tag{4}$$

o que garante o desacoplamento das equações de estado, uma vez que a matriz $\boldsymbol{\Lambda}$ é diagonal.

Exemplo 3. Seja um sistema dinâmico cujo modelo matemático é descrito pela EDO

$$\ddot{x} + 5\dot{x} + 4x = f(t)$$

sendo $f(t)$ a entrada e $x(t)$ a saída. Pedem-se:

a) a representação no espaço de estados;

b) desacoplar as equações de estado.

Solução:

a) Variáveis de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ x_2 &= \dot{x} \end{aligned}$$

Derivando:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \dot{x} = x_2 \\ \dot{x}_2 &= \ddot{x} = -5\dot{x} - 4x + f(t) \end{aligned}$$

e as equações de estado são

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -5x_2 - 4x_1 + f(t) \end{aligned}$$

que podem ser colocadas na forma matricial $\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)$:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t)$$

A equação da saída é $y = x = x_1$, que pode ser colocada na forma matricial $\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\boldsymbol{u}(t)$:

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix} f(t)$$

b) Os autovalores da matriz $\boldsymbol{A}$ podem ser determinados a partir da equação característica da matriz

$$\Delta(\lambda) = \det(\lambda I - \boldsymbol{A}) = 0$$

e são tais que $\lambda_1 = -4$ e $\lambda_2 = -1$. Os autovetores, por sua vez, podem ser obtidos determinando a solução não nula da equação

$$(\boldsymbol{A} - \lambda I)v = 0$$

para cada autovalor λ_i. Os autovetores associados aos autovalores λ_1 e λ_2 são, respectivamente,

$$v_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Alternativamente, pode-se utilizar o comando `eig` no Matlab para encontrar tanto os autovalores quanto os autovetores de uma matriz.

A matriz modal do sistema é, então, obtida concatenando os autovetores nas colunas, ou seja,

$$\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$$

Aplicando o processo de diagonalização, tem-se

$$\boldsymbol{\Lambda} = \boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

e substituindo em (4):

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^* &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^* + \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} f(t) \\ y &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}}^* &= \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^* + \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} f(t) \\ y &= \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \boldsymbol{x}^* \end{aligned}$$

Verificamos, pois, que com a adoção das variáveis de estado x^* as equações de estado se tornam desacopladas.

3 Linearização de Sistemas

3.1 Série de Taylor

Sistemas lineares são 'realmente' lineares somente dentro de um intervalo limitado. Em geral, sistemas físicos, químicos, biológicos, ecológicos, etc. são não lineares, isto é, o princípio da superposição não se aplica a esses sistemas.

A operação normal de um sistema não linear pode variar em um intervalo em torno de um ponto de equilíbrio. Neste caso, o valor das variáveis envolvidas não varia significativamente. Note que podem existir várias situações em que a afirmação anterior não é válida. Entretanto, se um sistema não linear opera em torno de um ponto de equilíbrio, é possível aproximar com boa precisão o comportamento do sistema não linear usando um modelo linear.

Uma abordagem para linearização de uma função (sistema) não linear consiste em expandir a função em uma Série de Taylor em torno de um ponto de equilíbrio e desprezar os termos de ordem maior ou igual a dois. Se os termos de ordem superior à primeira forem suficientemente pequenos teremos um modelo linear interessante.

Seja $y = f(x)$. A expansão em série de Taylor de $f(x)$ em torno do ponto $\bar{x}$ é

$$y = f(\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}} \cdot (x - \bar{x}) + \frac{1}{2!} \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=\bar{x}} \cdot (x - \bar{x})^2 + \cdots$$

onde as derivadas $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}$, $\frac{1}{2!}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x=\bar{x}}$, ... são funções avaliadas em torno do ponto $\bar{x}$, isto é, medem a sensibilidade de $(x - \bar{x})$. Se a variação de $(x - \bar{x})$ for pequena, pode-se desprezar os termos de ordem igual ou superior a dois, resultando no modelo linear dado por

$$
\begin{aligned}
y &= f(x) \\
y &= f(\bar{x}) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x=\bar{x}}}_{\boldsymbol{K}} \cdot (x-\bar{x}) \\
y - \bar{y} &= \boldsymbol{K}(x-\bar{x}) \\
\Delta y &= \boldsymbol{K}\Delta x
\end{aligned}
$$

Dado um modelo não-linear cuja saída é função de duas variáveis

$$y = f(x,u)\ ,$$

a expansão em série de Taylor de $f(x,u)$ em torno do ponto $(\bar{x},\bar{u})$ é

$$
\begin{aligned}
y =& f(\bar{x},\bar{u}) + \left[\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot (x-\bar{x}) + \left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot (u-\bar{u}) \right] \\
&+ \frac{1}{2!}\left[\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot (x-\bar{x})^2 + 2\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot (x-\bar{x})(u-\bar{u}) + \left.\frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}} \cdot (u-\bar{u})^2 \right] + \cdots
\end{aligned}
$$

Desprezando os termos de ordem igual ou maior que dois e avaliando as derivadas parciais de $f(x,u)$ em $x=\bar{x}$ e $u=\bar{u}$ temos

$$
\begin{aligned}
rcly - \bar{y} &= \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}}_{\boldsymbol{A}} \cdot (x-\bar{x}) + \underbrace{\left.\frac{\partial f}{\partial u}\right|_{\substack{x=\bar{x}\\u=\bar{u}}}}_{\boldsymbol{B}} \cdot (u-\bar{u}) \\
y - \bar{y} &= \boldsymbol{A}(x-\hat{x}) + \boldsymbol{B}(u-\hat{u}) \\
\Delta y &= \boldsymbol{A}\Delta x + \boldsymbol{B}\Delta u
\end{aligned}
$$

A relação anterior é a linearização de $f(x,u)$ em torno de $(\bar{x},\bar{u})$.

Em Matlab, o comando `taylor` é usado para realizar as expansões acima.

4 Exercícios

1. Dada a equação diferencial de 3ª ordem $\dddot{x} + \ddot{x} + 2\dot{x} + x = 2f(t)$, represente-a no espaço de estados e em função de transferência considerando a saída $y = x$. Dica: utilize o comando `ss2tf`.

2. Dado o sistema mecânico rotacional da figura 3, cujo modelo matemático é dado pelo sistema de equações diferenciais

$$
\begin{aligned}
J_1\ddot{\theta}_1(t) + (k_1+k_2)\theta_1 - k_2\theta_2 &= T \\
J_2\ddot{\theta}_2(t) - k_2\theta_1 + (k_2+k_3)\theta_2 &= 0
\end{aligned}
$$

onde $J_1 = 1kg.m^2$, $J_2 = 2kg.m^2$, $k_1 = 1$, $k_2 = 2$ e $k_3 = 3$.

Pedem-se:

a) a representação no espaço de estados e em função de transferência, sendo $T(t)$ a entrada e $\theta_1(t)$ a saída;

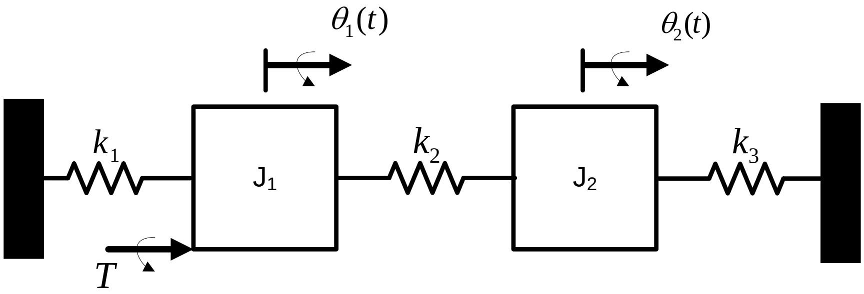

Figura 3: Sistema Massa-Mola.

b) a representação no espaço de estados e matriz de transferência, sendo $T(t)$ a entrada e $\theta_1(t)$ e $\theta_2(t)$ as saídas.

3. Linearize a equação não linear $z = xy$ no intervalo $5 \leq x \leq 7$ e $10 \leq y \leq 12$. Encontre o erro de aproximação quando $x = 5$ e $y = 10$.

4. Defina uma variável simbólica x. Encontre a expansão em série de Taylor de $f(x) = e^x$ em torno do ponto 1.5. Construa apenas um gráfico contendo seis funções. São elas: a função original $f(x)$ e as séries de Taylor truncadas até os termos de 5ª, 4ª, ..., 1ª ordem. Comente o ocorrido. PS.: Escolha a escala do eixo das abscissas entre -3 e 3 para uma melhor visualização do gráfico.

5. Escolha uma função senoidal. Obtenha uma aproximação linear em torno de um ponto qualquer usando série de Taylor. Faça as suposições necessárias. Mostre as funções original e aproximada na janela de comando e em gráfico.

6. Dado o modelo não linear que descreve o comportamento cinemático de um robô móvel diferencial apresentado na Figura 4:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v \cdot \cos(\theta) \\ \dot{y} &= v \cdot \operatorname{sen}(\theta) \\ \dot{\theta} &= \omega \end{aligned}$$

Obtenha o modelo linearizado em torno do ponto de equilíbrio $(x_0, y_0, \theta_0, v_0, \omega_0)$.

Comandos úteis: `ss, ss2tf, tf2ss, zp2tf, zp2ss, ss2zp, taylor, eig`

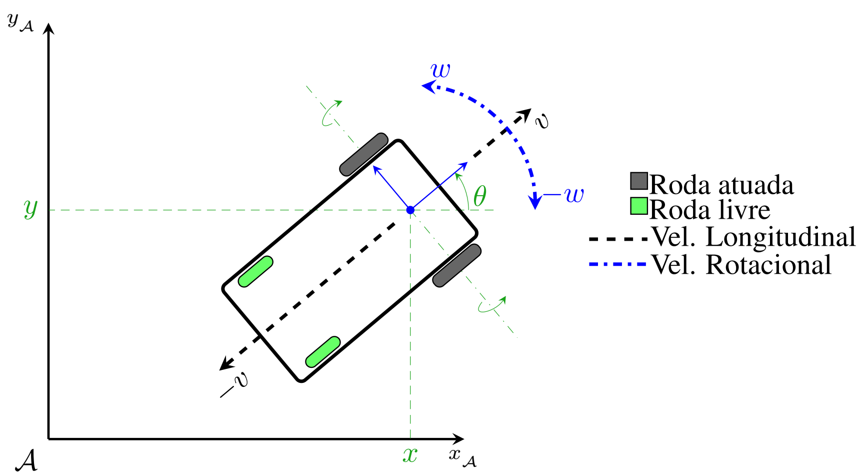

Figura 4: Diagrama de um robô móvel com acionamento diferencial.