

# Estruturas de Dados - Árvore Binária

- Árvore: grafo acíclico e conexo
  - acíclico: grafo sem ciclos
  - conexo: grafo no qual existe um caminho entre quaisquer dois vértices
- Toda árvore é um grafo bipartido e planar
  - bipartido: podemos separar os vértices do grafo em dois conjuntos  $U$  e  $V$ , de modo que todas as arestas ligam um vértice de  $U$  a um vértice de  $V$
  - planar: grafo que pode ser representado num plano sem que suas arestas se cruzem

# Árvore binária

- Árvore (arbitrária): um nó pode ter uma quantidade arbitrária de filhos
- Árvore binária: um nó pode ter no máximo 2 filhos
- Uma árvore binária  $T$  é definida recursivamente da seguinte forma
  - se  $T = \emptyset$ ,  $T$  não possui nós, logo dizemos que a árvore  $T$  é vazia
  - se  $T \neq \emptyset$ , existe um nó  $r$ , chamado de raiz de  $T$ , tal que os demais nós estão divididos em duas árvores binárias diferentes, denominadas sub-árvore esquerda e sub-árvore direita de  $r$
- Estrutura de uma árvore binária:

$r$ (nó raiz)	
sub-árvore esquerda	sub-árvore direita

# Árvore binária: estrutura

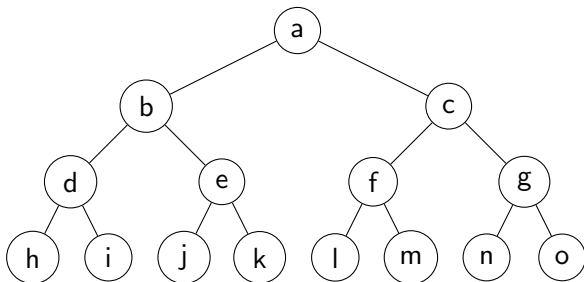
- Uma árvore é formada por um conjunto de nós
  - se esse conjunto é vazio, a árvore é vazia
  - se esse conjunto não é vazio, existe um nó raiz  $r$
- Estrutura de um nó:

chave (ou chaves)	
esq: raiz da sub-árvore esquerda	dir: raiz da sub-árvore direita

- Obs: uma sub-árvore pode ser vazia!

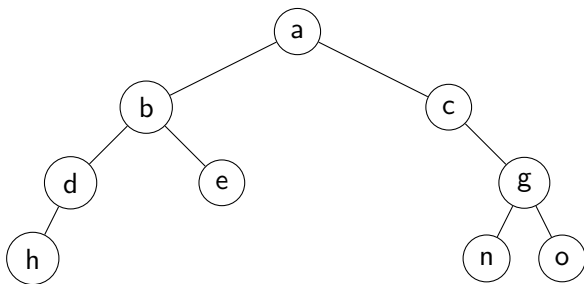
# Árvore binária: representação gráfica

- Representação gráfica de uma árvore binária:



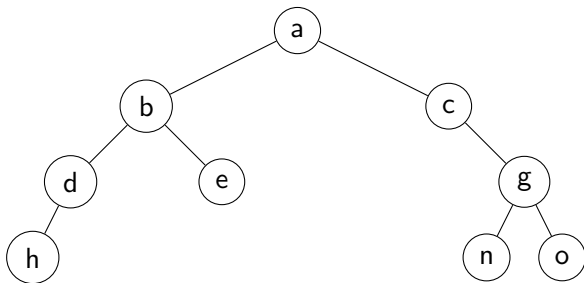
# Árvore binária: representação gráfica

- Esse caso também representa uma árvore binária?



# Árvore binária: representação gráfica

- Esse caso também representa uma árvore binária?



Sim, pois cada nó contém no máximo 2 filhos!

# Árvore binária: características

- Caso um nó tenha as duas sub-árvores vazias, chamamos esse nó de **folha**
- Seja  $T$  uma árvore binária com  $n$  nós
  - $T$  tem  $2n$  sub-árvores
  - $T$  possui  $n + 1$  sub-árvores vazias
  - $T$  possui pelo menos uma folha
  - $T$  possui no máximo  $\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor$  folhas



# Árvore binária: definições

- Caminho em uma árvore: sequência  $v_0, v_1, v_2, \dots, v_\ell$  de nós tal que  $v_{i+1} = v_i \rightarrow \text{esq}$  ou  $v_{i+1} = v_i \rightarrow \text{dir}$  para todo  $i \in \{0, \dots, \ell - 1\}$ , com comprimento mínimo de  $\ell$  nós
- Altura de um nó  $v$ : maior comprimento de um caminho de  $v$  até uma folha
  - altura da árvore: altura da raiz  $r$
- Nível (ou profundidade) de um nó  $v$ : quantidade de passos (arestas) do caminho da raiz até  $v$ 
  - obs: não confundir nível e altura de um nó!

# Árvore binária: definições

- Árvore completa: todos os nós que possuem sub-árvore vazia estão no último ou no penúltimo nível
  - Árvore completa: altura mínima para qualquer árvore com  $n$  nós
  - altura de uma árvore completa com  $n$  nós:  $h(n) = 1 + \lfloor \log n \rfloor$
- Árvore cheia: todas as folhas estão no mesmo nível