UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

UANL

FIME

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

2020

MÉTODOS NUMÉRICOS

ORALIA ZAMORA
SAID ZAMORA
ARTURO DEL ÁNGEL

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

MC. Rogelio G. Garza Rivera
Rector

Dr. Santos Guzmán López
Secretario General

Dr. Celso José Garza Acuña
Secretario de Extensión y Cultura

Dr. Arnulfo Treviño Cubero
Director de la Facultad de Ingeniería Mecánica y Eléctrica

Ave. Universidad S/N, Ciudad Universitaria
San Nicolás de los Garza, Nuevo León
México, C.P. 66451
Teléfono: (81) 83294020
Página web http://www.fime.uanl.mx/

Segunda Edición, 2020

© Autores:
MC. Oralia Zamora Pequeño
MC. Raymundo Said Zamora Pequeño
MC. Arturo del Ángel Ramírez

Revisión técnica: MC. Guadalupe Evaristo Cedillo Garza

Diseño de portada: Lic. Ma. de la Luz Zamora Pequeño

ISBN: 978-607-27-0504-3

Impreso en Monterrey, México
Printed in Monterrey, México

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

2
0
2
0

MÉTODOS NUMÉRICOS

ORALIA ZAMORA
SAID ZAMORA
ARTURO DEL ÁNGEL

2da. Edición 2020

Índice

Cálculo Numérico

La importancia de los métodos numéricos ha aumentado de forma drástica en la enseñanza de la ingeniería y ciencia; lo cual refleja el uso actual y sin precedentes de las herramientas computacionales.

Al aprender los métodos numéricos se puede ser apto para:

- **Entender los esquemas numéricos a fin de resolver problemas matemáticos de ingeniería y científicos en la computadora.**
- **Deducir esquemas numéricos básicos.**
- **Escribir programas y resolverlos en una computadora.**
- **Usar correctamente el software existente para dichos métodos.**

El aprendizaje de métodos numéricos no sólo aumenta la habilidad para el uso de computadoras, también amplia la pericia matemática y comprensión de los principios científicos básicos.

Causas principales de los errores en métodos numéricos.

Existen dos causas principales de errores en los cálculos numéricos que son:

1. **Truncamiento.**
2. **Redondeo.**

Error de truncamiento.

Este es debido a las aproximaciones utilizadas en la fórmula matemática del modelo.

La serie Taylor es el medio más importante que se emplea para obtener modelos numéricos y analizar los errores de truncamiento.

Error de Redondeo.

Es asociado con el número limitado de dígitos con que se representan los números en la computadora.

Se requiere conocer y aprender las formas en que se almacenan los números, así como se efectúan las sumas, restas dentro de la computadora para comprender la naturaleza de estos errores.

Serie de Taylor

En matemáticas, la serie de Taylor de una función finitamente derivable (real o compleja) definida en un intervalo abierto (a-r, a+r) se define con la siguiente suma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Aquí, n! es el factorial n y $f^{(n)}$ (a) indica la n-ésima derivada de f en el punto a.

Si esta serie converge para todo x perteneciente al intervalo (a-r, a+r) y la suma es igual a f(x), entonces se llama analítica.

Para comprobar si la serie converge a f(x), se utiliza una estimación del resto del teorema de Taylor.

Una función es analítica si y solo si se puede representar con una serie de potencias; los coeficientes de la misma son necesariamente los determinados en la fórmula de la serie de Taylor.

Esta representación tiene dos ventajas importantes:

1. **La derivación e integración de una de estas series se puede realizar término a término, que resultan operaciones triviales.**
2. **Se puede utilizar para calcular valores aproximados de la función.**

Las derivadas de orden superior f(n) = Ln y / dx^n = D_{nf}.

De f(x) se calculan diferenciando n veces sucesivamente.

El teorema de Taylor muestra que f(x) se puede aproximar como una serie de potencias f(x)= $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots\ldots a_nx_n$; donde los coeficientes a_0 y a_1 son constantes.

Las funciones utilizadas frecuentemente pueden aproximarse por serie de Taylor por ejemplo si f(x) = e^x se tiene que f(n)(x) = e^x para cualquier "n", y que f(n)(0) = e^0 = 1.

Interpolación

Es aquella que pasa a través de puntos dados como datos que se muestran por tablas de valores ó se consideran directamente de una función dada.

Es la base para varios modelos numéricos fundamentales.

La interpolación consiste en encontrar un valor dentro de un intervalo en el que se conocen los valores de los extremos.

Interpolación polinomial

La interpolación de los datos consiste en determinar el polinomio único de n - ésimo grado que se ajusta a n+1 puntos.

Se realiza mediante:

a) Polinomio
b) Función racional
c) Función simple
d) Series de Fourier

Interpolación por método:

- **Interpolación Lineal**
- **Newton hacia Adelante**
- **Newton hacia Atrás**
- **Newton con Diferencias Divididas**
- **Lagrange**

Interpolación Lineal

Consiste en unir dos puntos con una línea recta.

Es una aproximación a la primera derivada de la función (gradiente).

Se deduce del modelo de integración llamado regla del trapecio.

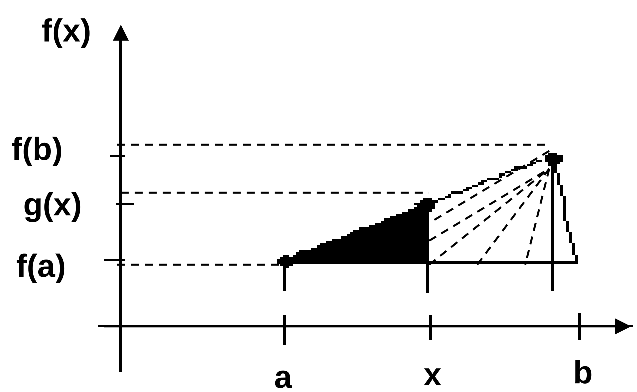
$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$$

La notación de g(x) designa que éste es un polinomio de interpolación de primer grado.

El término $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ **es una aproximación en la diferencia dividida finita a la primera derivada.**

Es decir, cuanto menor sea el intervalo entre los datos, mejor será la aproximación.

Esto se debe a que conforme el intervalo disminuye una función continua estará mejor aproximada por una línea recta.



Margen de Error Є

Є = | f(x) – g(x) | = | valor real – valor calculado |

Ejemplo. Estimar el Ln de 4 mediante interpolación lineal.

a) Primero realice el cálculo entre Ln 2 y Ln 5.

b) Después desarrolle el procedimiento pero con intervalos menores de Ln 3 y Ln 5.

Solución.
a)

Ln 2 = 0.69314718
Ln 5 = 1.609437912
a = 2
b = 5
f(a) = Ln 2 = 0.69314718
f(b) = Ln 5 = 1.609437912
x = 4
Ln 4 = 1.386294361
f(x) = Ln 4 = 1.386294361

$$g(x) = \frac{1.609437912 - 0.69314718}{(5-2)}(4-2) + 0.69314718$$

$$\boxed{g(x) = 1.304007668}$$

$$Є = |1.386294361 - 1.304007668|$$

$$\boxed{Є = 0.082286693}$$

b)

$$g(x) = \frac{1.609437912 - 0.1.098612289}{(5-3)}(4-1) + 1.098612289$$

Ln 3 = 1.098612289
Ln 5 = 1.609437912
a = 3
b = 5
f(a) = Ln 3 = 1.098612289
f(b) = Ln 5 = 1.609437912
x = 4
Ln 4 = 1.386294361
f(x) = Ln 4 = 1.386294361

$$\boxed{g(x) = 1.354025101}$$

$$Є = |1.386294361 - 1.354025101|$$

$$\boxed{Є = 0.03226926}$$

Newton hacia Adelante

Las abscisas de los datos tienen igual separación con un tamaño de intervalo h, los puntos se denotan por (x_i, f_i).

Para evaluar una fórmula de interpolación de Newton hacia Adelante son necesarios:

1. **tablas de coeficientes hacia adelante**
2. **coeficientes binomiales**

Diferencia hacia adelante de orden:

$\Delta^0 f_i = f_i$	**cero**
$\Delta^1 f_i = f_{i+1} - f_i$	**uno**
$\Delta^2 f_i = \Delta f_{i+1} - \Delta f_i$	**dos**
$\Delta^3 f_i = \Delta^2 f_{i+1} - \Delta^2 f_i$	**tres**

$\Delta^k f_i = \Delta^{k-1} f_{i+1} - \Delta^{k-1} f_i$ **diferencia hacia adelante de orden K**

Tablas de diferencias

i	$\Delta^0 f_i$	$\Delta^1 f_i$	$\Delta^2 f_i$	$\Delta^3 f_i$	$\Delta^4 f_i$	$\Delta^5 f_i$
0	$\Delta^0 f_0$	$\Delta^1 f_0$	$\Delta^2 f_0$	$\Delta^3 f_0$	$\Delta^4 f_0$	$\Delta^5 f_0$
1	$\Delta^0 f_1$	$\Delta^1 f_1$	$\Delta^2 f_1$	$\Delta^3 f_1$	$\Delta^4 f_1$	
2	$\Delta^0 f_2$	$\Delta^1 f_2$	$\Delta^2 f_2$	$\Delta^3 f_2$		
3	$\Delta^0 f_3$	$\Delta^1 f_3$	$\Delta^2 f_3$			
4	$\Delta^0 f_4$	$\Delta^1 f_4$				
5	$\Delta^0 f_5$					

Columna:

1era. Índice de los datos.
2da. Ordenadas de los datos.
3ra. Lista de las diferencias de primer orden.
Calculadas a partir de la segunda columna.
4ta. Diferencias de 2° orden calculadas a partir de la columna anterior.

Cada renglón proporciona un conjunto de diferencias hacia adelante de los puntos correspondientes.

- **Tiene intervalos iguales**

- **Intervalos uniformes $h = | x_{i+1} - x_i |$**

x_i	y_i	$\Delta' f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
$=$	$=$	$\Delta^0 f(x_2) - \Delta^0 f(x_1)$	$\Delta' f(x_2) - \Delta' f(x_i)$
		$\Delta^0 f(x_3) - \Delta^0 f(x_2)$	

$\Delta^0 f(x_1)$ la primera diferencia de los puntos, a partir de ella se obtiene todos los demás.
El valor inferior – el valor superior de acuerdo a la cantidad de puntos.

$$\Delta^{k+1} f(x_{i+1}) = \Delta^k f(x_{i+1}) - \Delta^k f(x_i)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \Delta^k f(x_i) \prod_{j=0}^{k} \frac{(s-j)}{(j+1)!}$$

Factor binomial "s"

Es una coordenada local.

Siempre positivo (izquierda a derecha).

Si no lo es se invierten los valores de "x" y "y" (derecha a izquierda).

Los coeficientes binomiales están dados por:

$$\binom{S}{0} = 1 \qquad \binom{S}{1} = S \qquad \binom{S}{2} = \frac{S(S-1)}{2!} \qquad \binom{S}{3} = \frac{S(S-1)(S-2)}{3!}$$

$$S = \frac{x - x_i}{h}$$

$$\binom{S}{n} = \frac{S(S-1)(S-2)\ldots\ldots[S-(n+1)]}{n!}$$

$$\boxed{g(x) = y_i \binom{S}{0} + \Delta' f(x_i) \binom{S}{1} + \Delta^2 f(x_i) \left(\frac{S(S-1)}{2!}\right) + \ldots\ldots}$$

Nota. Obtener "h" y ver si es uniforme; si lo es se resuelve por el método de Newton hacia Atrás ó Lagrange.

Ejemplo.- Obtener g(x) para x = 2.4

	x_i		y_i
x_1	2.2	y_1	2.54
x_2	2.5	y_2	2.82
x_3	2.8	y_3	3.21

$$h_1 = |x_2 - x_1| = |2.5 - 2.2| = 0.3$$
$$h_2 = |x_3 - x_2| = |2.8 - 2.5| = 0.3$$

Los intervalos son uniformes

x_i	y_i	$\Delta' f(x_i)$	$\Delta^2 f(x_i)$
x_1 2.2	y_1 2.54	$\Delta'_1 = y_2 - y_1 = 2.82 - 2.54 = 0.28$	$\Delta^2_1 = \Delta'_2 - \Delta'_1 = 0.39 - 0.28 = 0.11$
x_2 2.5	y_2 2.82	$\Delta'_2 = y_3 - y_2 = 3.21 - 2.82 = 0.39$	
x_3 2.8	y_3 3.21		

$$s = \frac{x - x_i}{h} \qquad s = \frac{2.4 - 2.2}{0.3}$$

$$\boxed{s = 0.666666666}$$

$$g(x) = y_i \binom{s}{0} + \Delta'_1 \binom{s}{1} + \Delta^2{}_1 \frac{s\,(s-1)}{2!}$$

$$g(x) = 2.54\,(1) + (0.28)\,(0.666666666) + (0.11)\left(\frac{(0.666666666)(0.666666666-1)}{2!}\right)$$

$$\boxed{g(x) = 2.714444444}$$

Nota: g(x) se encuentra entre los valores 0.87 y 1.03 con respecto a ”y”.

Newton hacia Atrás

Requiere que los intervalos sean uniformes para que no exista mucha discrepancia en los valores.

Existen dos cambios con respecto al tema anterior.

$$\nabla^{k-1} f(x_{i+1}) = \nabla^k f(x_{i+1}) - \nabla^k f(x_i)$$

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \nabla^k f(x_i) \prod_{j=0}^{k} \frac{(s+j)}{(j+1)!}$$

Factor binomial "s"

Es una coordenada local.

Siempre negativo.

Los coeficientes binomiales están dados por:

$$\binom{S}{0} = 1 \qquad \binom{S}{1} = S \qquad \binom{S}{2} = \frac{S(S+1)}{2!}$$

$$s = \frac{x - x_i}{h}$$

$$\boxed{g(x) = y_i \binom{S}{0} + \nabla' f(x_i) \binom{S}{1} + \nabla^2 f(x_i) \left(\frac{S(S+1)}{2!}\right) + \ldots..}$$

X_i es el último número que se interpola.

Nota. Obtener "h" y ver si es uniforme; si lo es se resuelve también por el método de Newton hacia Adelante ó Lagrange.

Ejemplo.- Obtener g(x) para x = 2.4

	x_i		y_i
x_1	2.2	y_1	2.54
x_2	2.5	y_2	2.82
x_3	2.8	y_3	3.21

$$h_1 = |x_2 - x_1| = |2.5 - 2.2| = 0.3$$
$$h_2 = |x_3 - x_2| = |2.8 - 2.5| = 0.3$$

Los intervalos son uniformes

x_i	y_i	$\nabla' f(x_i)$	$\nabla^2 f(x_i)$
x_1 2.2	y_1 2.54		
x_2 2.5	y_2 2.82	$\nabla'_2 = y_2 - y_1 = 2.82 - 2.54 = 0.28$	
x_3 2.8	y_3 3.21	$\nabla'_1 = y_3 - y_2 = 3.21 - 2.82 = 0.39$	$\nabla^2_1 = \nabla'_2 - \nabla'_1 = 0.39 - 0.28 = 0.11$

x_i y_i

$$\boxed{s = -1.333333333}$$

$$s = \frac{x - x_i}{h} \qquad s = \frac{2.4 - 2.8}{0.3}$$

$$\binom{s}{0} = 1 \qquad \binom{s}{1} = s$$

$$g(x) = y_i \binom{s}{0} + \nabla' f(x_i) \binom{s}{1} + \nabla^2 f(x_i) \left[\frac{s\,(s+1)}{2!} \right]$$

$$g(x) = 3.21\,(1) + (0.39)\,(-1.333333333) + (0.11) \left[\frac{(-1.333333333)(-1.333333333 + 1)}{2!} \right]$$

$$\boxed{g(x) = 2.714444444}$$

Nota: g(x) se encuentra entre los valores 2.54 y 2.82 con respecto a ”y”.

Newton con Diferencias Divididas

Se aplica este método cuando los intervalos son no uniformes.

De acuerdo a la fórmula se puede observar:

1) **Se requiere tener i+1 puntos de "y".**
2) **La resta de dos diferencias de tipo i-1, es el numerador.**
3) **La resta de dos valores no comunes en el numerador, es el denominador.**

$$\boxed{g(x) = D^0 + D^1 (x - x_1) + D^2 (x - x_1)(x - x_2) + D^3 (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)}$$

Ejemplo.- Encuentre g(x) para x = 3.5

x_i	y_i
4.4	-0.68
3.7	-1.59
3.1	-1.82

$h_1 = |x_2 - x_1| = |3.7 - 4.4| = 0.7$

$h_2 = |x_3 - x_2| = |3.1 - 3.7| = 0.6$

Los intervalos son no uniformes

x_i	y_i D^0	$D^1 f(x_i)$	$D^2 f(x_i)$
x_1 4.4	y_1 - 0.68	$D_1^1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{-1.59 - (-0.68)}{3.7 - 4.4} = 1.3$	$D_1^2 = \dfrac{D_2^1 - D_1^1}{x_3 - x_1} = \dfrac{0.383333333 - 1.3}{3.1 - 4.4} = 0.705128205$
x_2 3.7	y_2 - 1.59	$D_2^1 = \dfrac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2} = \dfrac{-1.82 - (-1.59)}{3.1 - 3.7}$ $D_2^1 = 0.383333333$	
x_3 3.1	y_3 - 1.82		

$g(x) = D^0 + D_1^1 (x - x_1) + D_1^2 (x - x_1)(x - x_2)$

$g(x) = (-0.68) + (1.3)(3.5 - 4.4) + (0.705128205)(3.5 - 4.4)(3.5 - 3.7)$

$\boxed{g(x) = -1.723076923}$

g(x) se encuentra entre - 1.59 y - 1.82 con respecto a “y”.

Nota: El margen de error permitido es de 2 diez milésimas.

Si los intervalos son no uniformes también se puede resolver por el método de Lagrange.

Lagrange

Se aplica para intervalos uniformes y no uniformes.

$$g(x) = \Sigma\, y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

$$g(x) = y_1 \frac{(x - x_2)\ (x - x_3)\ (x - x_4)}{(x_1 - x_2)\ (x_1 - x_3)\ (x_1 - x_4)}$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_1)\ (x - x_3)\ (x - x_4)}{(x_2 - x_1)\ (x_2 - x_3)\ (x_2 - x_4)}$$

$$+ y_3 \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_4)}{(x_3 - x_1)\ (x_3 - x_2)\ (x_3 - x_4)}$$

$$+ y_4 \frac{(x - x_1)\ (x - x_2)\ (x - x_3)}{(x_4 - x_1)\ (x_4 - x_2)\ (x_4 - x_3)}$$

$$+ y_n$$

Esta ecuación es equivalente a la serie de potencias que se determinan resolviendo la ecuación lineal.

Desventajas:

1) La cantidad de cálculos necesarios para la interpolación es grande.

2) La interpolación para otro valor "x" requiere la misma cantidad de cálculos adicionales, ya que no se puede utilizar partes de la aplicación previa.

3) Cuando el número de datos tiene que incrementarse o decrementarse, no se pueden utilizar los resultados en los cálculos previos.

4) La evaluación de error no es fácil.

Ejemplo.- Obtener g(x) para x = 2.4

	x_i		y_i
x_1	2.2	y_1	2.54
x_2	2.5	y_2	2.82
x_3	2.8	y_3	3.21

$$g(x) = (2.54)\,\frac{(2.4 - 2.5)\,(2.4 - 2.8)}{(2.2 - 2.5)\,(2.2 - 2.8)} = 0.564444444$$

$$+ (2.82)\,\frac{(2.4 - 2.2)\,(2.4 - 2.8)}{(2.5 - 2.2)\,(2.5 - 2.8)} = 2.506666667$$

$$+ (3.21)\,\frac{(2.4 - 2.2)\,(2.4 - 2.5)}{(2.8 - 2.2)\,(2.8 - 2.5)} = -\,0.356666666$$

$$\boxed{g(x) = 2.714444444}$$

g(x) se encuentra entre los valores 2.54 y 2.82 con respecto a ”y”.

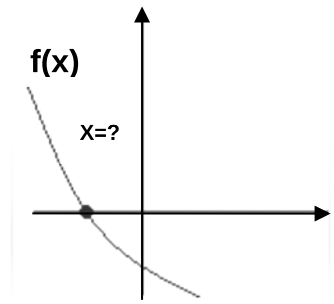
Nota: Obtener “h” y ver si es uniforme; si lo es se resuelve también por el método de Newton hacia Adelante ó hacia Atrás.

Pero si “h” es no uniforme entonces se puede resolver por el método de Newton con Diferencias Divididas.

Ecuaciones no lineales
(Raíces de la ec´n)
ec´n =0

No se debe desechar ningún dato intermedio.
Método:

- **Gráfico**
- **Bisectriz**
- **Punto fijo ó Sustituciones Sucesivas**
- **Newton Raphson**
- **Falsa Posición ó Regula – Falsi (Latín)**
- **Secante**



Se descompone el valor de x, y Es aquel que al sustituir en la ecuación esta se hace cero.

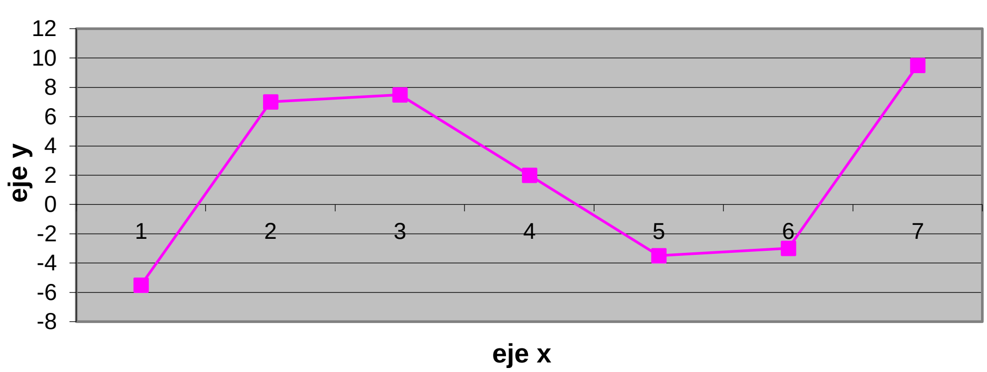
Gráfico

Método simple para obtener una aproximación f(x)=0, consiste en graficar la función y observar donde cruza el eje x. Este punto que representa el valor de f(x)=0 ofrece una aproximación inicial de la raíz.

Ejemplo. $y = x^3 - 6.5x + 2$

X	Y
-3	– 5.5
-2	7
-1	7.5
0	2
1	– 3.5
2	– 3
3	9.5

El cambio de signo indica una raíz



Bisectriz

Es el punto medio entre dos puntos conocido también como de corte binario, participación, intervalo ó balzano.

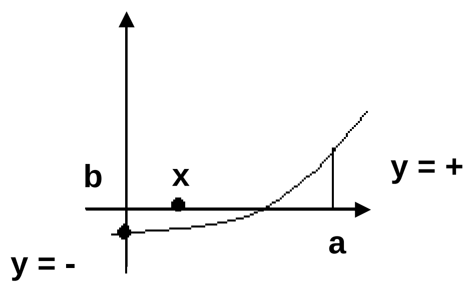
Es un tipo de búsqueda incremental en el que el intervalo se divide siempre a la mitad.

La posición de la raíz se determina situando en el punto medio del subintervalo dentro del cual ocurre un cambio de signo.

El proceso se repite hasta obtener una mejor aproximación.

Fórmula $x = \frac{a + b}{2}$

a. es el valor donde se comporta positivo.
b.- es el valor donde se comporta negativo.



Ejemplo.- En la gráfica de la función $y = x^3 - 6.5x + 2$.

A	b	x	comportamiento
0	1	0.5	-
0	0.5	0.25	+
0.25	0.5	0.375	-
0.25	0.375	0.3125	-
0.25	0.3175	0.28375	+
0.3	0.3175	0.3087	+

Cuando el valor entre los dos últimos sea igual 0.001 aquí se termina.
Buscando x que es el punto medio entre a y b.

Margen de Error Є

$$\boxed{\epsilon = \left| x_{i+1} - x_i \right| = 0.001}$$

Punto Fijo ó Sustituciones Sucesivas

Es un método abierto que emplea una fórmula para predecir la raíz.

Esta fórmula puede desarrollarse con el método de punto fijo, llamado también sustitución sucesiva, iteración de punto fijo ó iteración simple de punto fijo.

Sea la ecuación general f(x)=0; de la cual se desea encontrar una raíz real.

1) Consiste en transformar algebraicamente f(x) = 0 a la forma equivalente x = g(x).

Si se tiene $2x^2 - x - 5 = 0$

a) $x = 2x^2 - 5$ **despejando el 2° término**

b) $x = \sqrt{x + 5/2}$ **despejar "x" del 1° término**

c) $x = 5/ 2x - 1$ **factorizando "x" y despejándola**

d) $x = 2x^2 - 5$ **sumando "x" a cada lado de la igualdad**

2) Una vez que se ha determinado una fórmula equivalente, hay que examinar una raíz, esta se puede hacer por observación directa de la ecuación.

Se denota el valor de exploración ó valor de inicio como x_0.

3) Encontrando x_0, se evalúa g(x) en x_0, denotándose el resultado de esta evaluación como x; esto es $g(x_0) = x_1$.

La utilidad de x = g(x) es proporcionar una fórmula para predecir un nuevo valor de x en función del valor anterior de la misma. De esta manera, dado un valor inicial para la raíz x_i.

La ecuación x = g(x) se utiliza para obtener una nueva aproximación x_{i+1} expresada por la fórmula iterativa $x_{i+1} = g(x_i)$.

El margen de error (ε) es cero "0"

Ejemplo.

Localizar la raíz de $y = 2x - e^x + 2$, la función se puede separar directamente y expresarse en la forma $x_{i+1} = g(x_i)$.

Empezar con un valor inicial $X_0 = 0$. Se aplica la ecuación iterativa óptima para calcular.

$y = 2x - e^x + 2$ entonces $2x - e^x + 2 = 0$

Despejar "x"

1) $x = \dfrac{e^x - 2}{2}$

2) $\cancel{Ln\, e}^{\,x} = Ln\,(2x + 2)$
$x = Ln\,(2x + 2)$

i	$\dfrac{e^x - 2}{2}$	x_i	$\epsilon = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	0	0	-
1	$\dfrac{e^0 - 2}{2}$ =	- 0.5	= $\lvert -0.5 - 0 \rvert$ = 0.5
2	$\dfrac{e^{-0.5} - 2}{2}$ =	-0.69673467	0.19673467
3	$\dfrac{e^{-0.69673467} - 2}{2}$ =	-0.750895265	0.054160595
4	$\dfrac{e^{-0.750895265} - 2}{2}$ =	-0.764028075	0.01313281
5	$\dfrac{e^{-0.764028075} - 2}{2}$ =	-0.767106789	0.003078714
6	$\dfrac{e^{-0.767106789} - 2}{2}$ =	-0.767822698	0.000715909
7	$\dfrac{e^{-0.767822698} - 2}{2}$ =	-0.767988857	0.000166158
8	$\dfrac{e^{-0.767988857} - 2}{2}$ =	-0.768027404	0.000038547
9	$\dfrac{e^{-0.768027404} - 2}{2}$ =	$\boxed{-0.768036346}$	0.000008941

El margen de error se encuentra en: $\varepsilon = \lvert x_9 - x_8 \rvert$

$\varepsilon = \lvert -0.768036346 - (-0.768036346) \rvert = 0.000008941$ $\boxed{\varepsilon = 0.000008941}$

Newton – Raphson

Consiste en un procedimiento que lleva la ecuación f (x) = 0.

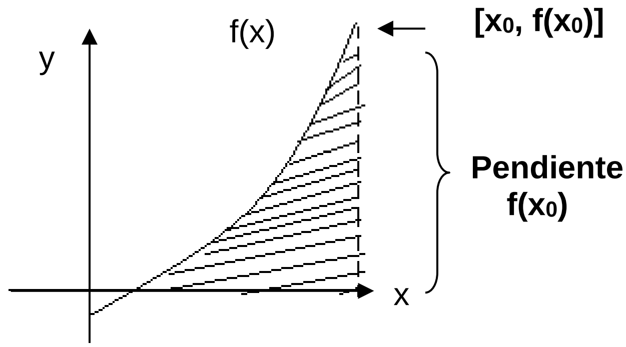
La solución única es tener un valor inicial que sea "suficiente" cercano a la raíz.

Encuentra una raíz, siempre y cuando se conozca una estimación inicial para la raíz deseada.

Utiliza de forma interactiva las rectas tangentes que pasan por aproximaciones consecutivas de la raíz.

Requiere una buena estimación inicial, de lo contrario la solución iterativa puede divergir o converger a una solución irrelevante.

La razón de convergencia iterativa es alta, cuando funciona el método.



$$\boxed{x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right)}$$

X inicial puede ser "0" o un valor cercano a la raíz.

El margen de error es igual a "0" cero.

Ejemplo.

Encuentre la raíz real de la ecuación $f(x) = 0.8x^2 + x - 3$
$f'(x) = 1.6x + 1$

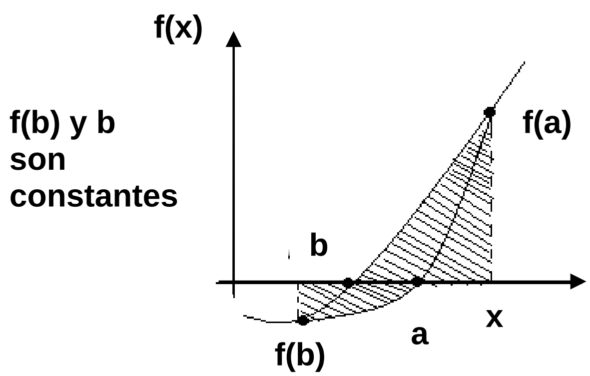
i	x_{i+1}	$\epsilon = \lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	$x_o = 1$	
1	$x_1 = x_o - \left(\dfrac{0.8x_o^2 + x_o - 3}{1.6x_o + 1}\right)$ $x_1 = 1 - \left(\dfrac{0.8(1)^2 + (1) - 3}{1.6(1) + 1}\right)$ $x_1 = 1.461538462$	$\lvert x_1 - x_0 \rvert =$ $\lvert 1.461538462 - 1 \rvert$ $= 0.461538462$
2	$x_2 = x_1 - \left(\dfrac{0.8x_1^2 + x_1 - 3}{1.6x_1 + 1}\right)$ $x_2 = 1.461538462 - \left(\dfrac{(1.461538462)^2 + (1.461538462) - 3}{1.6(1.461538462) + 1}\right)$ $x_2 = 1.410492733$	$\lvert x_2 - x_1 \rvert =$ $\lvert 1.410492733 - 1.461538462 \rvert$ $= 0.051045728$
3	$x_3 = x_2 - \left(\dfrac{0.8x_2^2 + x_2 - 3}{1.6x_2 + 1}\right)$ $x_3 = 1.410492733 - \left(\dfrac{(1.410492733)^2 + (1.410492733) - 3}{1.6(1.410492733) + 1}\right)$ $x_3 = 1.409852675$	$\lvert x_3 - x_2 \rvert =$ $\lvert 1.409852675 - 1.410492733 \rvert$ $= 0.000640057$
4	$x_4 = x_3 - \left(\dfrac{0.8x_3^2 + x_3 - 3}{1.6x_3 + 1}\right)$ $x_4 = 1.409852675 - \left(\dfrac{(1.409852675)^2 + (1.409852675) - 3}{1.6(1.409852675) + 1}\right)$ $\boxed{x_4 = 1.409852575}$	$\lvert x_4 - x_3 \rvert =$ $\lvert 1.409852575 - 1.409852675 \rvert$ $= 0.0000001$

Falsa Posición ó Regula – Falsi (Latín)

Se basa en una visualización gráfica. Si f (b) está mucho más cercana a cero que f(a), es lógico que la raíz se encuentre más cerca de "b" que dé "a".

Este método de alternativo aprovecha esta visualización gráfica y consiste en unir f (b) y f(a) con una línea recta.

La intersección de esta línea con el eje de las x representa una mejor aproximación de la raíz.



Usando triángulos semejantes la intersección de la línea recta con el eje x se estima mediante:

$$\frac{f(b)}{x-b} = \frac{f(a)}{x-a}$$

Despejando x;

$$\boxed{x = a - \frac{f(a)\,(b-a)}{f(b) - f(a)}}$$

Tiene un punto fijo que es" b" por lo tanto también lo es f(b)

$$\boxed{\epsilon = \text{Error} = \left| x_{i+1} - x_i \right| = 0.001}$$

Ejemplo.

Calcule la raíz para $f(x) = xe^x - 10$

	x	f(x)	
	- 2	- 10.27067057	
	- 1	- 10.36787944	
	0	- 10	
a→	1	- 7.281718172	→ f(a)
b→	2	4.778112190	→ f(b)

i	b	f(b)	a	x	f(a)	Є
0	2	4.778112190	1		-7.281718172	
1	2	4.778112190	1	1.603799386	-7.281718172	
2	2	4.778112190	1.603799386	1.721776248	-2.026091162	0.117976862
3	2	4.778112190	1.721776248	1.741651888	-0.367597181	0.01987564
4	2	4.778112190	1.741651888	1.744898309	-0.060806187	0.003246421
5	2	4.778112190	1.744898309	1.745425782	-0.009900159	0.000527473

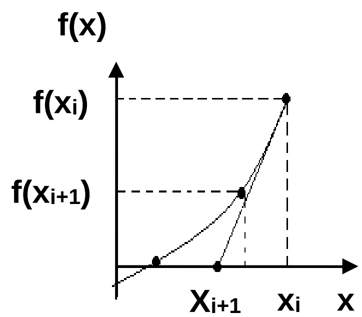
$$Є = |x_{i5} - x_{i4}| = |1.745425782 - 1.744898309|$$

$$\boxed{Є = 0.000527473}$$

Secante

Predice la aproximación de una raíz extrapolando una tangente de la función del eje x. Se basa en la fórmula de interpolación lineal.

Es más eficiente que el método Newton.



$$X_{i+1} = x_{i+1} - \left(\frac{f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \right)$$

$$\epsilon = \text{Error} = \left| x_{i+1} - x_i \right| = 0.001$$

Requiere de dos valores iniciales: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$.

Ejemplo.- Calcule la raíz de $f(x) = e^{-x} - x$.

$x_0 = 0$	$f(x_0) = e^{-0} - 0$	$f(x_0) = 1$
$x_1 = 1$	$f(x_1) = e^{-1} - 1$	$f(x_1) = -0.632120558$
$x_2 = 0.612699836$	$f(x_2) = e^{-0.612699836} - 0.612699836$	$f(x_2) = -0.070813946$
$x_3 = 0.563838389$	$f(x_3) = e^{-0.563838389} - 0.563838389$	$f(x_3) = 0.005182354419$
$x_4 = 0.567170358$	$f(x_4) = e^{-0.567170358} - 0.5671703580$	$f(x_4) = -0.00004241924099$

i	x_i	$\lvert x_{i+1} - x_i \rvert$
0	$x_0 = 0$	
1	$x_1 = 1$	$\lvert x_1 - x_0 \rvert = \lvert 1 - 0 \rvert = 1$
2	$x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1 - \left\{\dfrac{(-0.632120558)(1-0)}{(-0.632120558) - 1}\right\}$ $x_2 = 0.612699836$	$\lvert x_2 - x_1 \rvert =$ $= \lvert 0.612699836 - 1 \rvert$ $= 0.387300613$
3	$x_3 = x_2 - \dfrac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)}$ $= 0.612699836 - \left\{\dfrac{(-0.070813947)(0.612699836 - 1)}{(-0.070813947) - (-0.632120558)}\right\}$ $x_3 = 0.563838389$	$\lvert x_3 - x_2 \rvert =$ $= \lvert 0.563838389 - 0.612699836 \rvert =$ $= 0.048861447$
4	$x_4 = x_3 - \dfrac{f(x_3)(x_3 - x_2)}{f(x_3) - f(x_2)}$ $x_4 = 0.563838423 - \left\{\dfrac{(-0.00004241924099)(0.563838389 - 0.612699836)}{0.005182354419 - (-0.070813946)}\right\}$ $x_4 = 0.567170358$	$\lvert x_4 - x_3 \rvert =$ $= \lvert 0.567170358 - 0.563838389 \rvert =$ $= 0.003331969259$
5	$X_5 = x_4 - \dfrac{f(x_4)(x_4 - x_3)}{f(x_4) - f(x_3)}$ $x_5 = 0.567170358 - \left\{\dfrac{(-0.00004241924099)(0.567170358 - 0.563838389)}{(-0.00004241924099) - 0.005182354419}\right\}$ $\boxed{x_5 = 0.567143306}$	$\lvert x_5 - x_4 \rvert =$ $= \lvert 0.567143306 - 0.567170358 \rvert =$ $= 0.00002705181386$

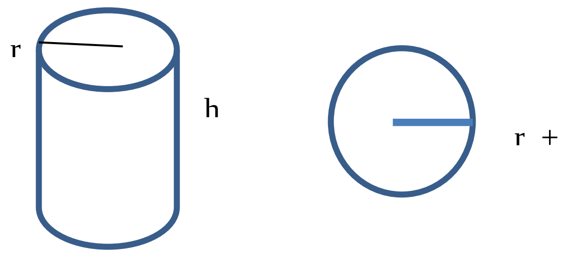
Aplicaciones

Se debe fabricar una lata en forma cilíndrica circular recta que contenga 1,200 cm^3. Las tapas de la parte superior y del fondo deben tener un radio de 0.25 cm más que el radio de la lata para que el sobrante se utilice para sellar con la pared lateral.

La hoja de material con que se construye la pared lateral también debe ser de 0.25 cm más grande que la circunferencia de la lata de modo que pueda hacerse un sello lateral.

Calcule la cantidad mínima de material para fabricar esta lata.

Considerando el siguiente gráfico:



Sea h la altura del cilindro, r el radio del volumen deseado y r + 0.25 el radio necesario para sellar la tapa.

Se tiene que el área de material a usarse, y valor a minimizar se describe mediante:

$$A_{total} = 2A_{base} + A_{cilindro}$$

Donde las áreas mencionadas para las bases y el cilindro se pueden representar en función de r y h.

$$V = 1200 = \pi r^2 h; \qquad h = \frac{1200}{\pi r^2}$$

Sustituyendo las áreas correspondientes se obtiene:

$$A_{total} = 2\pi(r+0.25)^2 + 2\pi(r+0.25)h = 2\pi(r+0.25)^2 + 2\pi(r+0.25)\frac{1200}{\pi r^2}$$

Por lo que la función a optimizar es:

$$A(r) = 2\pi(r+0.25)^2 + \frac{2400(r+0.25)}{r^2}$$

Para encontrar el material mínimo se utiliza la derivada de la función a minimizar y se iguala a cero.

$$A'(r) = 4\pi(r + 0.25) \quad - \frac{2400}{r^2} - \frac{1200}{r^3}$$

Mediante el método de bisección.

Iteración	r = a	r = b	r media	f(a)	f(b)	f(media)
0	5	6	5.5	-39.6	6.317527778	-14.29489506
1	5.5	6	5.75	-14.3	6.317527778	-3.503787892
2	5.75	6	5.875	-3.5	6.317527778	1.517465446
3	5.75	5.875	5.8125	-3.5	1.517465446	-0.964276111
4	5.8125	5.875	5.84375	-0.96	1.517465446	0.283656066
5	5.8125	5.84375	5.828125	-0.96	0.283656066	-0.338525034
6	5.828125	5.84375	5.8359375	-0.34	0.283656066	-0.026990713
7	5.8359375	5.84375	5.83984375	-0.03	0.283656066	0.128443312
8	5.8359375	5.83984375	5.83789063	-0.03	0.128443312	0.050753996
9	5.8359375	5.83789063	5.83691406	-0.03	0.050753996	0.011888571
10	5.8359375	5.83691406	5.83642578	-0.03	0.011888571	-0.007549338
11	5.83642578	5.83691406	5.83666992	-0.01	0.011888571	0.002170049
12	5.83642578	5.83666992	5.83654785	-0.01	0.002170049	-0.002689536
13	5.83654785	5.83666992	5.83660889	0	0.002170049	-0.000259716
14	5.83660889	5.83666992	5.8366394	0	0.002170049	0.000955173
15	5.83660889	5.8366394	5.83662415	0	0.000955173	0.00034773
16	5.83660889	5.83662415	5.83661652	0	0.00034773	4.40072E-05
17	5.83660889	5.83661652	5.8366127	0	4.40072E-05	-0.000107854
18	5.8366127	5.83661652	5.83661461	0	4.40072E-05	-3.19236E-05
19	5.83661461	5.83661652	5.83661556	0	4.40072E-05	6.04182E-06
20	5.83661461	5.83661556	5.83661509	0	6.04182E-06	-1.29409E-05
21	5.83661509	5.83661556	5.83661532	0	6.04182E-06	-3.44954E-06
22	5.83661532	5.83661556	5.83661544	0	6.04182E-06	1.29614E-06
23	5.83661532	5.83661544	5.83661538	0	1.29614E-06	-1.0767E-06
24	5.83661538	5.83661544	5.83661541	0	1.29614E-06	1.09723E-07
25	5.83661538	5.83661541	5.8366154	0	1.09723E-07	-4.83487E-07
26	5.8366154	5.83661541	5.83661541	0	1.09723E-07	-1.86882E-07

Finalmente se obtiene la cantidad de material requerido de la siguiente manera:

$$A(5.8366154) = \ 2\pi(5.8366154 + 0.25)^2 + \frac{2400(5.8366154 + 0.25)}{5.8366154^2} = 661.58\ cm^2$$

Ejercicios

1.- Un proyectil de M = 2 gm se ha lanzado en forma vertical al aire y está descendiendo a su velocidad terminal. Dicha velocidad se determina mediante la ecuación gM = Ddrag donde g es La gravedad y M es la masa; esta ecuación se puede escribir después de evaluar las constantes como:

$$\frac{(2)(9.81)}{1000} = 1.4x10^{-5}v^{1.5} + 1.15x10^{-5}v^{2}$$

Donde v es la velocidad terminal en m/seg. El primer término del lado derecho representa la fuerza de fricción y el segundo la fuerza de la presión.

Determine la velocidad terminal mediante el método de bisección, con una tolerancia de 0.001.

2.- La configuración superficial de la aeronave NACA 0012 de longitud de arco 1 m y con espesor máximo de 0.2 m está dada por:

$$y(x) = \pm\left[0.2969\sqrt{x} - 0.126x - 0.3516x^2 + 0.2843x^3 - 0.1015x^4\right]$$

Donde los signos más y menos se refieren a las superficies superior e inferior, respectivamente.

Determine x, donde el espesor del aparato es 0.1 m. Haga la tolerancia igual a 0.00001.

3.- El estado de un gas se determina mediante sus variables de estado (P, V, T), para la siguiente ecuación de estado, determine el Volumen que ocupa el gas cuando P = 1.5 atm y T = 290 K. Si las variables reducidas son resultado de la división del valor actual de las variables de estado entre los valores críticos, determine el Volumen para los dos gases que se consideran:

Gas	Pc (atm)	Tc (K)	Vc (m^3/kg)
A	17	812	3.8
B	9	931	5

$$V_r^3 - \frac{1}{3}\left(1 + \frac{8T_r}{P_r}\right)V_r^2 + \frac{3}{P_r}V_r - \frac{1}{P_r} = 0$$

$$V_r = \frac{V}{V_c} \qquad P_r = \frac{P}{P_c} \qquad T_r = \frac{T}{T_c}$$

Ecuaciones Lineales

Ecuación Lineal.- Es aquella en la cual cada uno de sus términos contiene una variable o incógnita con exponente de primer grado.

Por ejemplo: 2m – n – p = 3

Ecuación algebráica lineal.- Es un conjunto de ecuaciones que se resuelven simultáneamente. Se pueden escribir en forma matricial.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} 2m - n - p &= 4 \\ m - 2n + p &= 3 \end{aligned}$$

Sistema de ecuaciones lineales.- es un conjunto de ecuaciones lineales definidas, conocido también como sistema lineal de ecuaciones o simplemente sistema lineal.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} 2m - n - p &= 4 \\ m - 2n + p &= 3 \\ -m - n + 2p &= -5 \end{aligned}$$

Se requiere encontrar los valores de las variables en este caso m, n y p.

Por lo general, para resolver los sistemas de ecuaciones lineales de primer orden se utilizan los procedimientos siguientes:

1. **Algebráicos.- la resolución es por sustitución, igualación o reducción.**
2. **Gráficos.- aquí cada ecuación del sistema corresponde a un plano de manera que las soluciones del mismo y los puntos de intersección de todos los planos coinciden.**
3. **Matriciales.- son aquellos que utilizan la teoría de matrices como base.**

Solución de Ecuaciones Lineales por método:

- **Montante**
- **Gauss – Jordán**
- **Eliminación Gaussiana**
- **Gauss – Seidel**
- **Jacobi**

Aplicaciones: procesamiento digital de señales, análisis estructural, estimación, predicción, programación lineal así como en métodos numéricos.

Montante

Consiste en seleccionar un elemento al cual se le denomina elemento pivote, con él se efectúan todas las operaciones de transformación aclarando que:

1) **No se puede considerar como elemento pivote un valor igual a cero.**
2) **Considerar el signo que le corresponde al elemento pivote por su ubicación en el determinante.**

Para obtener el valor de cada elemento del determinante equivalente se aplica la siguiente fórmula:

$$N.E = \frac{(E.P)(E.A) - (E.C.F.P)\,(E.C.C.P)}{P.A}$$

Donde:

N.E.- nuevo elemento
E.P.- elemento pivote
E.A.- elemento actual (elemento externo)
E.C.F.P.- elemento correspondiente a la fila del pivote
E.C.C.P- elemento correspondiente a la columna del pivote
P.A.- pivote anterior

Reglas generales a seguir para construir la nueva matriz son las siguientes:

a) **La fila se transfiere idéntica.**
b) **Las columnas quedarán formadas por ceros excepto la diagonal principal.**

Ejemplo.

2 a + 5 b – 2 c = 1
– a + 2 b + 3 c = 2
3 a – 3 b + 2 c = 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 & 3 \end{array}\right) \sim$$

La fila pasa igual y la columna se hace cero. Se inicia con un pivote de uno.

Pivote = 1

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & \left(\dfrac{(2)(2)-(5)(-1)}{1}\right) & \left(\dfrac{(2)(3)-(-2)(-1)}{1}\right) & \left(\dfrac{(2)(2)-(1)(-1)}{1}\right) \\ 0 & \left(\dfrac{(2)(-3)-(5)(3)}{1}\right) & \left(\dfrac{(2)(2)-(-2)(3)}{1}\right) & \left(\dfrac{(2)(3)-(1)(3)}{1}\right) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -2 & 1 \\ 0 & 9 & 4 & 5 \\ 0 & -21 & 10 & 3 \end{array}\right) \sim$$

Pivote = 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \left(\dfrac{(2)(9)-(5)(0)}{2}\right) & 0 & \left(\dfrac{(9)(-2)-(5)(4)}{2}\right) & \left(\dfrac{(9)(1)-(5)(5)}{2}\right) \\ 0 & 9 & 4 & 5 \\ \left(\dfrac{(9)(0)-(-21)(0)}{2}\right) & 0 & \left(\dfrac{(9)(10)-(4)(-21)}{2}\right) & \left(\dfrac{(9)(3)-(5)(21)}{2}\right) \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 9 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 87 & 66 \end{array}\right) \sim$$

Pivote = 9

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \left(\frac{(87)(9)-(-19)(0)}{9}\right) & \left(\frac{(87)(0)-(-19)(0)}{9}\right) & 0 & \left(\frac{(87)(-8)-(66)(-19)}{9}\right) \\ \left(\frac{(87)(0)-(4)(0)}{9}\right) & \left(\frac{(87)(9)-(4)(0)}{9}\right) & 0 & \left(\frac{(87)(5)-(66)(4)}{9}\right) \\ 0 & 0 & 87 & 66 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 87 & 0 & 0 & 62 \\ 0 & 87 & 0 & 19 \\ 0 & 0 & 87 & 66 \end{array}\right)$$

a = 62/87
b = 19/87
c = 66/87

Comprobación:

2(62/87) + 5(19/87) – 2(66/87) = 1
1 = 1

-(62/87) + 2(19/87) + 3(66/87) = 2
2 = 2

3(62/87) – 3(19/87) + 2(66/87) = 3
3 = 3

Gauss – Jordán

Este método es una variación de la eliminación gaussiana.
Todos los renglones se normalizan al dividirlos entre su elemento pivote. De esta forma, el paso de eliminación genera una matriz identidad, y así obtener la solución.

Pasos a seguir:

1) **Formar la matriz.**

2) **Se encierran la 1era. Fila y la 1era. Columna y donde se cruzan estas se tiene el elemento pivote.**

3) **Para generar la matriz siguiente; la fila pivote se divide entre el elemento pivote y la columna se hace ceros.**

4) **Para generar los términos que faltan para completar la matriz sería:**

5) **El elemento actual menos el elemento correspondiente en la columna pivote por el elemento correspondiente en la fila pivote de la matriz que se está generando.**

6) **El elemento actual es el número de la matriz anterior que ocupa la posición que se va a generar.**

7) **De esta matriz generada se encierran la 2da. Fila y la 2da. Columna y donde se cruzan estas se tiene un nuevo pivote.**

8) **Se desarrollan los pasos 3 y 4.**

9) **Y así sucesivamente hasta obtener una matriz generada que contiene la matriz identidad.**

10) **Esta matriz generada también contiene una última columna de valores.**

11) **Estos valores son los que corresponden a las variables de las ecuaciones lineales proporcionadas en orden.**

12) **Los valores de las variables se aplican a las ecuaciones lineales; resolver y deben de dar los valores de las igualdades respectivamente.**

Ejemplo.

3 a - 2 b + 2 c = 1
4 a + 2 b + 2 c = 2
3 a - 3 b + 3 c = 3

Pivote = 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 3 & 3 \end{array}\right)$$

Pivote = 14/3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2/3 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 14/3 & -2/3 & 2/3 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

2 - 4(-2/3) = 2 + 8/3 = 6/3 + 8/3 = 14/3
2 - 4(2/3) = 2 - 8/3 = 6/3 - 8/3 = -2/3
2 - 4(1/3) = 2 - 4/3 = 6/3 - 4/3 = 2/3

-3 - 3(-2/3) = -3 + 6/3 = -3 + 2 = -1
3 - 3(2/3) = 3 - 6/3 = 3 - 2 = 1
3 - 3(1/3) = 3 - 3/3 = 3 - 1 = 2

Pivote = 6/7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4/7 & 3/7 \\ 0 & 1 & -1/7 & 1/7 \\ 0 & 0 & 6/7 & 15/7 \end{array}\right)$$

2/3 - (-2/3)(-1/7) = 2/3 - 2/21 = 14/21 - 2/21 = 12/21 = 4/7
1/3 - (-2/3)(1/7) = 1/3 + 2/21 = 7/21 + 2/21 = 9/21 = 3/7
1 - (-1) (-1/7) = 1 - 1/7 = 7/7 - 1/7 = 6/7
2 - (1) (-1/7) = 2 +1/7 = 14/7 + 1/7 = 15/7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 5/2 \end{array}\right)$$

3/7 - (4/7) (5/2) = 3/7 - 20/14 = 6/14 - 20/14 = -14/14 = -1
1/7 - (-1/7)(5/2) = 1/7 + 5/14 = 2/14 + 5/14 = 7/14 = 1/2
(15/7) / (6/7) = (15*7) / (6*7) = 15/6 = 5/2

a = -1 b = 1/2 c = 5/2

Comprobación:

3(-1) - 2(1/2) + 2(5/2) = 1
-3 - 1+ 5 = 1
-4 + 5 = 1
1 = 1

4(-1) + 2(1/2) + 2(5/2) = 2
-4 + 1+ 5 = 2
-4 + 6 = 2
2 = 2

3(-1) - 3(1/2) + 3(5/2) = 3
-3 - 3/2 + 15/2 = 3
-6/2 - 3/2 + 15/2 = 3
-9/2 +15/2 = 3
6/2 = 3
3 = 3

Eliminación Gaussiana

En este método se aplican varias operaciones de renglón, que son las siguientes:

1) **Multiplicar toda la fila por una constante distinta de cero.**
2) **Sumar o restar un múltiplo de una ecuación a otra.**
3) **Intercambiar de posición dos ecuaciones.**

Para facilitar el proceso, se forma una matriz aumentada que contiene solamente los coeficientes de las ecuaciones.

Al final del proceso, el sistema se reduce a una forma triangular, donde la última ecuación tiene la solución de la última incógnita.

Posteriormente, se aplica un proceso de sustitución hacia atrás para ir calculando progresivamente los valores de las otras incógnitas.

Ejemplo.

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ -x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 12 \\ 3x_1 + x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ -1 & 3 & 2 & 12 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \leftarrow$$

1er renglón * -1/3 = -1, -1/2, 3/2, 1/2

2do. renglón – 1er. Renglón =
[-1 - (-1)], [3 - (-1/2)], [2 - 3/2], [12 - 1/2]
0 7/2 1/2 23/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 23/2 \\ 3 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right) \leftarrow$$

1er renglón * 3/2 = 6/2, 3/2, -9/2, 3/2

3er. renglón – 1er renglón =
[6/2 - 6/2], [1 - 3/2], [-3 - (-9/2)] [0 - (3/2)]
0 -1/2 3/2 3/2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 23/2 \\ 0 & -1/2 & 3/2 & 3/2 \end{array}\right) \leftarrow$$

2do renglón * - 1/7 = 0, -1/2, -1/14, -23/14

3er. renglón – 2do renglón =
[(0 - 0)], [-1/2 - (-1/2)], [3/2 - (-1/14)], [3/2 - (-23/14)]
0 0 11/7 22/7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 7/2 & 1/2 & 23/2 \\ 0 & 0 & 11/7 & 22/7 \end{array}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 2 \end{array}}$$

Entonces:

$11/7\ x_3 = 22/7$
$x_3 = (22/17)/\ (11/7)$

$x_3 = 2$

$7/2\ x_2 + 1/2\ x_3 = 23/2$
$7/2\ x_2 = 23/2 - 1/2\ x_3$
$7/2\ x_2 = 23/2 - 1/2(2)$
$x_2 = \dfrac{23/2-1/2(2)}{7/2}$
$x_2 = \dfrac{21/2}{7/2} = 3$
$x_2 = 3$

$2\ x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$
$2\ x_1 = -1 - x_2 + 3x_3$
$2\ x_1 = -1 - 3 + 3(2)$
$x_1 = \dfrac{-1 - 3 + 3(2)}{2}$
$x_1 = 1$

Comprobación:

$2x_1 + x_2 - 3x_3 = -1$
$2(1) + 3 - 3(2) = -1$
$-1 = -1$

$-x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 12$
$(-1) + 3(3) + 2(2) = 12$
$12 = 12$

$3x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$
$3(1) + (3) - 3(2) = 0$
$0 = 0$

Gauss – Seidel

Es un método iterativo y por lo mismo, resulta bastante eficiente. Para un sistema de "n" ecuaciones es comúnmente utilizado.

Es necesario que en la matriz, cada elemento de la diagonal principal sea mayor que la suma de los valores de todos los demás elementos de la misma fila. Considerar valores absolutos.

El margen de error (ε) es de 0.001.

Pasos a seguir:

1) **Del sistema de ecuaciones se despeja una variable de cada una de ellas.**

2) **Considerar valores iniciales para dichas variables.**

3) **Iniciar con un valor de cero todas las variables.**

4) **Obtener el valor de la variable despejada de la 1era. ecuación considerando las variables restantes con valores de cero.**

5) **Calcular el valor de la variable despejada de la 2da. ecuación. Considerando el nuevo valor de la variable obtenido de la 1era. ecuación y el de la 3er. ec. Igual a cero.**

6) **El valor de la variable despejada de la 3er. ec., se obtiene considerando los nuevos valores de las variables de la 1era. y 2da. ec.**

7) **Obtener el nuevo valor de la variable despejada de la 1era. ec. Considerando los valores de las variables obtenidos en los pasos 4 y 5.**

8) **Calcular el nuevo valor de la variable despejada de la 2da ec., considerando los valores obtenidos en los pasos 5 y 6.**

9) **Para obtener el nuevo valor de la variable despejada de la 3era. ec., se consideran los valores anteriormente obtenidos en los pasos 6 y 7.**

Y así sucesivamente hasta que el margen de error es de 0.001 en todas las variables.

Por lo cual, se realiza una tabla de valores para el análisis del margen de error.

Nota: Se ha considerado un sistema de ecuaciones lineales de 3x3.

Ejemplo.

1) $x - 3y + 5z = 5$
2) $8x - y - z = 8$
3) $-2x + 4y + z = 4$

Diagonal Dominante

4) $8x - y - z = 8$
5) $-2x + 4y + z = 4$
6) $x - 3y + 5z = 5$

$\boxed{\varepsilon = 0.001}$

Despejando "x" de la ec.4, "y" de la ec.5 y "z" de la ec.6.

7) $x = \dfrac{8 + y + z}{8}$

8) $y = \dfrac{4 + 2x - z}{4}$

9) $z = \dfrac{5 - x + 3y}{5}$

Utilizar las ecuaciones 7, 8 y 9 para las iteraciones.

Se les asigna un valor de cero a todas las variables al iniciar. $x_0 = y_0 = z_0 = 0$

1era. Iteración. Con $y_0 = 0$ y $z_0 = 0$, obtener "x_1"

$x_1 = \dfrac{8 + 0 + 0}{8}$ $\boxed{x_1 = 1}$

Considerando $x_1 = 1$ y $z_0 = 0$, obtener "y_1"

$y_1 = \dfrac{4 + 2(1) - 0}{4}$ $\boxed{y_1 = 1.5}$

Siendo $x_1 = 1$ y $y_1 = 1.5$, obtener "z_1"

$z_1 = \dfrac{5 - 1 + 3(1.5)}{5}$ $\boxed{z_1 = 1.7}$

2da. Iteración. Con $y_1 = 1.5$ y $z_1 = 1.7$, obtener "x_2"

$x_2 = \dfrac{8 + 1.5 + 1.7}{8}$ $\boxed{x_2 = 1.4}$

Considerando $x_2 = 1.4$ y $z_1 = 1.7$, obtener "y_2"

$y_2 = \dfrac{4 + 2(1.4) - 1.7}{4}$ $\boxed{y_2 = 1.275}$

Siendo $x_2 = 1.4$ y $y_2 = 1.275$, obtener "z_2"

$z_2 = \dfrac{5 - 1.4 + 3(1.275)}{5}$ $\boxed{z_2 = 1.485}$

3era. Iteración. Con $y_2 = 1.275$ y $z_2 = 1.485$, obtener "x_3"

$x_3 = \dfrac{8 + 1.275 + 1.485}{8}$ $\boxed{x_3 = 1.345}$

Considerando $x_3 = 1.345$ y $z_2 = 1.485$, obtener "y_3"

$y_3 = \dfrac{4 + 2(1.345) - 1.7}{4}$ $\boxed{y_3 = 1.30125}$

Siendo $x_3 = 1.345$ y $y_3 = 1.30125$, obtener "z_3"

$$z_3 = \frac{5 - 1.345 + 3(1.30125)}{5}$$

$\boxed{z_3 = 1.51175}$

4a. Iteración.

Con $y_3 = 1.30125$ y $z_3 = 1.51175$, obtener "x_4"

$$x_4 = \frac{8 + 1.30125 + 1.51175}{8}$$

$\boxed{x_4 = 1.351625}$

Considerando $x_4 = 1.351625$ y $z_3 = 1.51175$, obtener "y_4"

$$y_4 = \frac{4 + 2(1.351625) - 1.51175}{4}$$

$\boxed{y_4 = 1.297875}$

Siendo $x_4 = 1.351625$ y $y_4 = 1.297875$, obtener "z_4"

$$z_4 = \frac{5 - 1.351625 + 3(1.297875)}{5}$$

$\boxed{z_4 = 1.5084}$

5a. Iteración.

Con $y_4 = 1.297875$ y $z_4 = 1.5084$, obtener "x_5"

$$x_5 = \frac{8 + 1.297875 + 1.5084}{8}$$

$\boxed{x_5 = 1.350784375}$

Considerando $x_5 = 1.350784375$ y $z_4 = 1.5084$, obtener "y_5"

$$y_5 = \frac{4 + 2(1.350784375) - 1.5084}{4}$$

$\boxed{y_5 = 1.298292188}$

Siendo $x_5 = 1.350784375$ y $y_5 = 1.298292188$, obtener "z_5"

$$z_5 = \frac{5 - 1.350784375 + 3(1.298292188)}{5}$$

$\boxed{z_5 = 1.508818438}$

I	x	y	z
0	0	0	0
1	1	1.5	1.7
2	1.4	1.275	1.485
3	1.345	1.30125	1.51175
4	1.351625	1.297875	1.5084
5	**1.350784375**	**1.298292188**	**1.508818438**

$\varepsilon_x = |x_5 - x_4|$ $\varepsilon_y = |y_5 - y_4|$ $\varepsilon_z = |z_5 - z_4|$

$\boxed{\varepsilon_x = 0.000840625}$ $\boxed{\varepsilon_y = 0.000417188}$ $\boxed{\varepsilon_z = 0.000418438}$

Jacobi

Es utilizado para un sistema de "n" ecuaciones pues es eficiente al igual que el método anterior.

Se requiere que en la matriz, cada elemento de la diagonal principal sea mayor que la suma de los valores de todos los demás elementos de la misma fila. Considerar valores absolutos.

El margen de error (ε) es de 0.001.

Pasos a seguir:

1) **Del sistema de ecuaciones se despeja una variable de cada una de ellas.**

2) **Considerar valores iniciales para dichas variables.**

3) **Iniciar con un valor de uno todas las variables.**

4) **Obtener el valor de la variable despejada de la 1era. ecuación considerando las variables restantes con valores de uno.**

5) **Calcular el valor de la variable despejada de la 2da. ecuación. Considerando el valor de la variables de la 1era. y 3er. ecuación. Igual a uno.**

6) **Para obtener el valor de la variable despejada de la 3er. ec. Considerar los valores de uno en las variables de la 1era. y 2da. ec.**

7) **Obtener el nuevo valor de la variable despejada de la 1era. ec., se consideran los valores de las variables obtenidos en los pasos 4 y 5.**

8) **Calcular el nuevo valor de la variable despejada de la 2da ec., considerando los valores obtenidos en los pasos 3 y 5.**

9) **Para obtener el nuevo valor de la variable despejada de la 3era. ec. Considerar los valores anteriormente obtenidos en los pasos 3 y 4.**

Y así sucesivamente hasta que el margen de error es de 0.001 en todas las variables.

Por lo cual, se realiza una tabla de valores para el análisis del margen de error.

Nota: Se ha considerado un sistema de ecuaciones lineales de 3x3.

Ejemplo.

1) $x - 3y + 5z = 5$
2) $8x - y - z = 8$
3) $-2x + 4y + z = 4$

Diagonal Dominante

4) $8x - y - z = 8$
5) $-2x + 4y + z = 4$
6) $x - 3y + 5z = 5$

$\boxed{\varepsilon = 0.001}$

Despejando "x" de la ec.4, "y" de la ec.5 y "z" de la ec.6.

7) $x = \dfrac{8 + y + z}{8}$

8) $y = \dfrac{4 + 2x - z}{4}$

9) $z = \dfrac{5 - x + 3y}{5}$

Utilizar las ecuaciones 7, 8 y 9 para las iteraciones.

Se les asigna un valor de uno a todas las variables al iniciar. $x_0 = y_0 = z_0 = 1$

1era. Iteración. Con $y_0 = 1$ y $z_0 = 1$, obtener "x_1"

$x_1 = \dfrac{8 + 1 + 1}{8}$ $\boxed{x_1 = 1.25}$

Considerando $x_0 = 1$ y $z_0 = 1$, obtener "y_1"

$y_1 = \dfrac{4 + 2(1) - 1}{4}$ $\boxed{y_1 = 1.25}$

Siendo $x_0 = 1$ y $y_0 = 1$, obtener "z_1"

$z_1 = \dfrac{5 - 1 + 3(1)}{5}$ $\boxed{z_1 = 1.4}$

2da. Iteración. Con $y_1 = 1.25$ y $z_1 = 1.4$, obtener "x_2"

$x_2 = \dfrac{8 + 1.25 + 1.4}{8}$ $\boxed{x_2 = 1.33125}$

Considerando $x_1 = 1.25$ y $z_1 = 1.4$, obtener "y_2"

$y_2 = \dfrac{4 + 2(1.25) - 1.4}{4}$ $\boxed{y_2 = 1.275}$

Siendo $x_1 = 1.25$ y $y_1 = 1.25$, obtener "z_2"

$z_2 = \dfrac{5 - 1.25 + 3(1.25)}{5}$ $\boxed{z_2 = 1.5}$

3era. Iteración. Con $y_2 = 1.275$ y $z_2 = 1.5$, obtener "x_3"

$x_3 = \dfrac{8 + 1.275 + 1.5}{8}$ $\boxed{x_3 = 1.346875}$

Considerando $x_2 = 1.33125$ y $z_2 = 1.5$, obtener "y_3"

$y_3 = \dfrac{4 + 2(1.33125) - 1.5}{4}$ $\boxed{y_3 = 1.290625}$

Siendo $x_2 = 1.33125$ y $y_2 = 1.275$, obtener "z_3"

$z_3 = \dfrac{5 - 1.33125 + 3(1.275)}{5}$ $\boxed{z_3 = 1.49875}$

4a. Iteración. Con $y_3 = 1.290625$ y $z_3 = 1.49875$, obtener "x_4"

$$x_4 = \frac{8 + 1.290625 + 1.49875}{8}$$

$$\boxed{x_4 = 1.348671875}$$

Considerando $x_3 = 1.346875$ y $z_3 = 1.49875$, obtener "y_4"

$$y_4 = \frac{4 + 2(1.49875) - 1.49875}{4}$$

$$\boxed{y_4 = 1.29875}$$

Siendo $x_3 = 1.346875$ y $y_3 = 1.290625$, obtener "z_4"

$$z_4 = \frac{5 - 1.346875 + 3(1.290625)}{5}$$

$$\boxed{z_4 = 1.505}$$

5a. Iteración. Con $y_4 = 1.29875$ y $z_4 = 1.505$, obtener "x_5"

$$x_5 = \frac{8 + 1.29875 + 1.505}{8}$$

$$\boxed{x_5 = 1.35046875}$$

Considerando $x_4 = 1.348671875$ y $z_4 = 1.505$, obtener "y_5"

$$y_5 = \frac{4 + 2(1.348671875) - 1.505}{4}$$

$$\boxed{y_5 = 1.298085938}$$

Siendo $x_4 = 1.348671875$ y $y_4 = 1.29875$, obtener "z_5"

$$z_5 = \frac{5 - 1.348671875 + 3(1.29875)}{5}$$

$$\boxed{z_5 = 1.509515625}$$

6a. Iteración. Con $y_5 = 1.298085938$ y $z_5 = 1.509515625$, obtener "x_6"

$$x_6 = \frac{8 + 1.298085938 + 1.509515625}{8}$$

$$\boxed{x_6 = 1.350950195}$$

Considerando $x_5 = 1.35046875$ y $z_5 = 1.509515625$, obtener "y_6"

$$y_6 = \frac{4 + 2(1.35046875) - 1.509515625}{4}$$

$$\boxed{y_6 = 1.297855469}$$

Siendo $x_5 = 1.35046875$ y $y_5 = 1.298085938$, obtener "z_6"

$$z_6 = \frac{5 - 1.35046875 + 3(1.298085938)}{5}$$

$$\boxed{z_6 = 1.508757813}$$

I	x	y	z
0	1	1	1
1	1.25	1.25	1.4
2	1.33125	1.275	1.5
3	1.346875	1.290625	1.49875
4	1.348671875	1.29875	1.505
5	1.35046875	1.298085938	1.509515625
6	1.350950195	1.297855469	1.508757813

$\varepsilon_x = |x_6 - x_5|$ $\varepsilon_y = |y_6 - y_5|$ $\varepsilon_z = |z_6 - z_5|$

$\boxed{\varepsilon_x = 0.000481445}$ $\boxed{\varepsilon_y = 0.000230468}$ $\boxed{\varepsilon_z = 0.000757812}$

Raíces de Polinomios

Polinomio.

Es una ecuación que contiene más de tres términos.

Grado.

El grado de un polinomio es igual al exponente mayor de la variable de la ecuación.

Por ejemplo: $3x^3 - 2x - 3$ **es un polinomio de grado 3.**

Los polinomios se escriben en orden decreciente con respecto al grado de cada término.

Raíces de un polinomio.- Es un número tal que hace que el polinomio sea igual a cero.

Cuando se resuelve un polinomio a cero, las respuestas son las raíces del mismo.

Ejemplo. $f(x) = x^2 + x - 6$

Entonces:

$x^2 + x - 6 = 0$ **función** $f(x) = 0$

$(x + 3)(x - 2) = 0$ **Factorizando.**

$$\left.\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array}\right\} \text{Respuestas}$$

Al sustituir cada valor de "x" en f(x) y es igual a cero. Esto indica que son las raíces de este polinomio.

La raíz se puede obtener por medio de:

- **Factorización.**
- **División Sintética.**
- **Fórmula general.**
- **Obteniendo los divisores del término independiente y evaluar en el polinomio cada uno ellos; y el que de un valor de cero, entonces este divisor es una raíz.**

Resolver por todos los métodos numéricos posibles.

1) $x = 3.75$

i	x	f(x)
1	3	3.03
2	3.5	3.48
3	4	4.08
4	4.5	4.87

2) $f(x) = 2x^2 - 6x - 3$

3)
$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 3 \\ 2x - y - z &= 4 \\ -x - y + 2z &= -5 \end{aligned}$$

4) $x = 3.3$

i	x	f(x)
1	2.4	2.35
2	3.0	2.76
3	3.6	3.09
4	4.2	3.33
5	4.8	3.75

5) $f(x) = e^{4x} - 4$

6)
$$\begin{aligned} 3a - b + 4c &= 2 \\ -5a + 3b - 7c &= 0 \\ 7a - 4b + 4c &= 12 \end{aligned}$$

Formulario

$$En = Ea - Eccp * Ecfp$$

$$x_{i+1} = x_i - \left(\frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \right)$$

$$g(x) = y_1 \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \Delta' f(x_i) \begin{pmatrix} S \\ 1 \end{pmatrix} + \Delta^2 f(x_i) \begin{pmatrix} S \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\epsilon = | x_{i+1} - x_i |$$

$$En = \frac{Ea - Eccp * Ecfp}{Ep}$$

$$En = \frac{Ea * Ep - Eccp * Ectp}{Piv}$$

$$x_{i+1} = x_{i+1} - \left(\frac{f(x_{i+1})\,(x_{i+1} - x_i)}{f(x_{i+1}) - f(x_i)} \right)$$

$$g(x) = D^0 + D^1 (x - x_1) + D^2 (x - x_1)(x - x_2)$$

$$g(x) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) + f(a)$$

$$g(x) = y_1 \begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} + \nabla' f(x_i) \begin{pmatrix} S \\ 1 \end{pmatrix} + \nabla^2 f(x_i) \begin{pmatrix} S \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$X = a - \left(\frac{f(a) - (b - a)}{f(b) - f(a)} \right)$$

$$\begin{pmatrix} S \\ n \end{pmatrix} = \frac{S\,(S-1)\,(S-2) \ldots\ldots [\,S - (n+1)]}{n!}$$

$$h = | x_{i+1} - x_i |$$

$$\begin{pmatrix} S \\ 0 \end{pmatrix} = 1$$

$$g(x) = y_1 \frac{(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)(x_1 - x_4)}$$

$$+ y_2 \frac{(x - x_1)(x - x_3)(x - x_4)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)(x_2 - x_4)}$$

$$+ y_3 \frac{(x - x_1)(x - x_2)(x - x_4)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)(x_3 - x_4)}$$

$$S = \frac{x - x_i}{h}$$

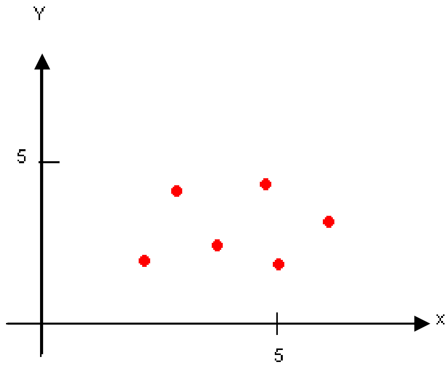
$$\epsilon = | f(x) - g(x) |$$

$$X = \frac{a + b}{2}$$

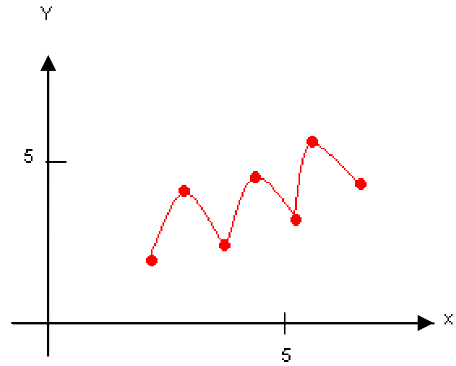
$$\begin{pmatrix} S \\ 1 \end{pmatrix} = S$$

Mínimos Cuadrados

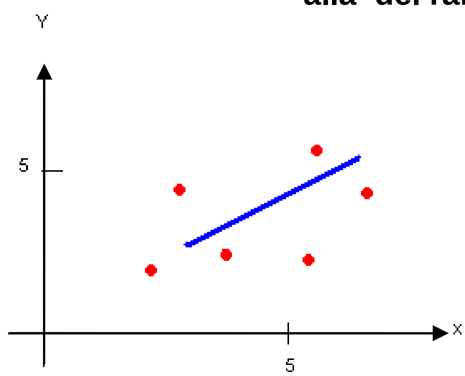
Se utiliza para cuando los datos tienen errores sustanciales.



Datos que muestran un error significativo



Ajuste polinomial oscilando más allá del rango de datos.



Resultados más satisfactorios mediante el ajuste de Polinomios.

La estrategia apropiada es obtener una función aproximada con tendencia general o ajuste a la forma de datos.

Sin implicar todos los puntos hay que considerar un criterio para establecer una base para el ajuste.

Esto se puede lograr por medio de una técnica de Mínimos Cuadrados, es decir, se obtiene una curva que minimiza la dispersión entre la curva y los puntos.

Ajuste a:

- **Línea Recta**
- **Cuadrática**
- **Cúbica**
- **Lineal con Función**
- **Cuadrática con Función**

Línea Recta

Ajustar una línea recta o varias observaciones por puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2) ……(X_n, y_n)

Ecuación: $g(x) = a_0 + a_1 x$

Donde a_0 y a_1 son coeficientes representativos de la intersección de la pendiente y el eje x.

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 x & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{bmatrix} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x\,y \end{bmatrix}$$

n.- es el número de valores dados a "x".

Ejemplo.

x	y
1.1	2.5
1.9	2.7
2.4	3.7
4.8	5.2
5.1	6.0
10.5	8.3

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1 x & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x\,y \end{pmatrix}$$

n.- es el número de valores dados a x

	x	y	x^2	x y
n = 6	1.1	2.5	$(1.1)^2 = 1.21$	$(1.1)(2.5) = 2.75$
	1.9	2.7	$(1.9)^2 = 3.61$	$(1.9)(2.7) = 5.13$
	2.4	3.7	$(2.4)^2 = 5.76$	$(2.4)(3.7) = 8.88$
	4.8	5.2	$(4.8)^2 = 23.04$	$(4.8)(5.2) = 24.96$
	5.1	6.0	$(5.1)^2 = 26.01$	$(5.1)(6.0) = 30.6$
	10.5	8.3	$(10.5)^2 = 110.25$	$(10.5)(8.3) = 87.15$
	$\sum x = 25.8$	$\sum y = 28.4$	$\sum x^2 = 169.88$	$\sum x\,y = 159.47$
	a_0	$a_1 x$	$g(x)$	

Ecuaciones:

1) $6\,a_0 + 25.8\,a_1 = 28.4$

2) $25.8\,a_0 + 169.88\,a_1 = 159.47$

$$\begin{pmatrix} 6 & 25.8 & 28.4 \\ 25.8 & 169.88 & 159.47 \end{pmatrix}$$

Multiplicar la ecuación 1 por el factor de - 4.3 y se obtiene la siguiente ecuación 3.

3) $-25.8\,a_0 - 110.94a_1 = -122.12$
Sumar las ecuaciones 2 y 3.

$$\begin{array}{rcr} -25.8\,\cancel{a_0} - 110.94a_1 & = & -122.12 \\ \underline{\cancel{25.8}\,a_0 + 169.88a_1} & \underline{=} & \underline{159.47} \\ 0\,a_0 + 58.94\,a_1 & = & 37.35 \\ a_1 & = & \dfrac{37.35}{58.94} \end{array}$$

$\boxed{a_1 = 0.633695283}$

Entonces en la ecuación 1, se sustituye el valor de a_1 obtenido anteriormente para encontrar el de a_0.

$6a_0 + 25.8\,a_1 = 28.4$
$6a_0 + 25.8\,(0.633695283) = 28.4$
$6a_0 + 16.34933831 = 28.4$
$6a_0 = 28.4 - 16.4018663$
$6a_0 = 12.05066169$
$a_0 = 12.05066169\,/6$

$\boxed{a_0 = 2.008443615}$

Encontrar g(x) con los valores de a_0, y a_1 así como con cada valor de x.

$a_0 \quad + \quad a_1 \quad x \quad = \quad g(x)$

$2.008443615 + 0.633695283\ (1.1) = 2.705508427$
$2.008443615 + 0.633695283\ (1.9) = 3.212464653$
$2.008443615 + 0.633695283\ (2.4) = 3.529312295$
$2.008443615 + 0.633695283\ (4.8) = 5.050180975$
$2.008443615 + 0.633695283\ (5.1) = 5.240289560$
$2.008443615 + 0.633695283(10.5) = 8.662244090$

Por último se gráfica en el mismo plano con las siguientes coordenadas:

1) [x, y]
2) [x, g(x)]

Para analizar el ajuste de la función original con respecto a la obtenida con la aplicación del método de Línea Recta.

Cuadrática

Ecuación $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1 x & a_2 x^2 & g(x) \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cccc} n & \sum x & \sum x^2 & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x y \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^2 y \end{array}\right]$$

Cúbica

Ecuación $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1 x & a_2 x^2 & a_3 x^3 & g(x) \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{ccccc} n & \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x y \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^2 y \\ \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^6 & \sum x^3 y \end{array}\right]$$

Lineal con Función

Ecuación $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2[\text{función}(x)]$

Función (x)

- e^x
- **sen (x)**
- **cos (x)**
- **tg (x)**
- **Ln (x), etc.**

$$
\begin{array}{cccc}
a_0 & a_1 x & a_2 f(x) & g(x) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
n & \sum x & \sum f(x) & \sum y \\
\sum x & \sum x^2 & \sum x f(x) & \sum x y \\
\sum f(x) & \sum x f(x) & \sum f(x)^2 & \sum y f(x)
\end{pmatrix}
$$

Cuadrática con Función

Ecuación $g(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3[\text{función}(x)]$

Función (x)

- e^x
- **sen (x)**
- **cos (x)**
- **tg (x)**
- **Ln (x), etc.**

$$
\begin{array}{ccccc}
a_0 & a_1 x & a_2 x^2 & a_3 f(x) & g(x) \\
\end{array}
$$

$$
\begin{pmatrix}
n & \sum x & \sum x^2 & \sum f(x) & \sum y \\
\sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x f(x) & \sum x y \\
\sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^2 f(x) & \sum x^2 y \\
\sum f(x) & \sum x f(x) & \sum x^2 f(x) & \sum f(x)^2 & \sum y f(x)
\end{pmatrix}
$$

Aplicaciones

Las funciones de Bessel tienen forma de armónicos cilíndricos y sirven para estudiar y modelar la propagación de ondas. La tabla siguiente muestra los valores de la función de Bessel de primera clase de orden cero en varios puntos.

x	***f*(*x*)**
1.0	0.7651977
1.3	0.6200860
1.6	0.4554022
1.9	0.2818186
2.2	0.1103623

a) Construir la tabla de diferencias divididas hasta orden tres.

Las diferencias divididas obtenidas:

I	x_i	$f[x_i]$	$f[x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-2}, x_{i-1}, x_i]$	$f[x_{i-3}, \cdots, x_i]$	$f[x_{i-4}, \cdots, x_i]$
0	1.0	0.7651977				
			-0.4837057			
1	1.3	0.62200860		-0.1087339		
			-0.5489460		0.0658784	
2	1.6	0.4554022		-0.0494433		0.0018251
			-0.5786120		0.0680685	
3	1.9	0.2818186		0.0118183		
			-0.5715210			
4	2.2	0.1103623				

b) Utilizar la información del apartado anterior para construir el polinomio interpolador de Newton de la función de Bessel que pasa por los puntos anteriores.

Los coeficientes del polinomio interpolador de Newton se encuentran en la diagonal de la tabla, por tanto el polinomio buscado es:

$$\boldsymbol{p_4(x) = 0.7651977 - 0.4837057\,(x - 1.0) - 0.1087339\,(x - 1.0)(x - 1.3) + 0.0658784\,(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6) + 0.0018251(x - 1.0)(x - 1.3)(x - 1.6)(x - 1.9)}$$

c) Obtener el valor aproximado de la función de Bessel en el punto 1.5.

Y el valor de $\boldsymbol{p_4(1.5) = 0.5118200}$, que es una buena aproximación a $\boldsymbol{f(1.5) = 0.5118277}$

Ejercicios

1.- Luis, Javier, Enrique y Fermín acuden a una plaza para reunir una colección entera de cromos. Fermín tiene 5 cromos más que la suma de Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier, y Javier tiene 90 cromos menos que Enrique y Fermín juntos.

¿Cuántos cromos tiene la colección?

2.- Una población de 35,000 aves vive en tres islas cada año el 10% de la población de la isla A emigra a la isla B; el 20% de la población de la isla B, a la isla C, y el 5% de la isla C, a la isla A.

¿Cuál es el número de aves de cada isla si el conteo de la población de cada isla no varía en cada año?

3.- En una planta química se sintetiza un producto que es utilizado posteriormente como conservante de productos enlatados.

El rendimiento del proceso depende de la temperatura.

Se dispone de los siguientes datos:

T(C)	150	160	170	180	190	200	210
R(%)	35.5	37.8	43.6	45.7	47.3	50.1	51.2

Se considera un rendimiento óptimo el que va de 38.5 a 45, por lo que la planta trabaja a 175 °C. Obtenga el rendimiento a esa temperatura mediante interpolación.

4.- De acuerdo al Banco Mundial, las emisiones de dióxido de carbono por habitante en México han ocurrido de la siguiente manera:

Año	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Emisiones de CO2 (toneladas métricas per capita)	1.6709	2.2152	3.9617	3.7933	4.0281	4.0695

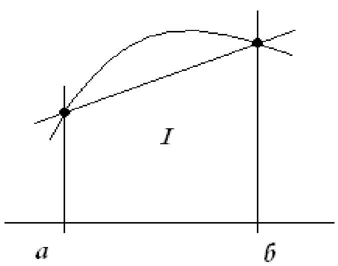
Utilizando los métodos de interpolación estime las emisiones de dióxido de carbono per capita en 1985 y 1995. Repita el cálculo anterior sin considerar los datos de 1990 y compare ambas respuestas.

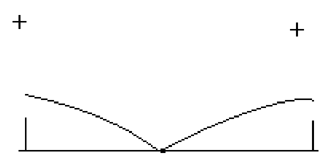
Integración

Considerando la derivada como media de cambio puntual o instantánea y la suma de los mismos como la integral.

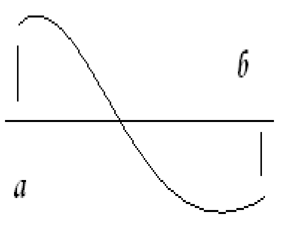
Las siguientes técnicas son fundamentales en actividades de ingeniería o ciencias pues con ellas se pueden integrar funciones analíticas y complejas.

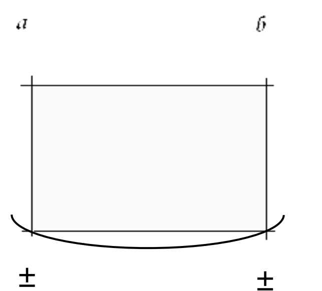
$$\int_a^b f(x)\,dx$$





Dada por el área bajo la curva de f(x)





Método:

- **Regla Trapezoidal**
- **Newton – Cotes Cerradas y Abiertas**
- **Regla de 1/3 Simpson**
- **Regla de 3/8 Simpson**

Regla Trapezoidal

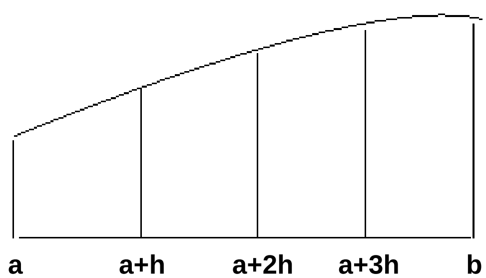
Es un método de integración numérico sencillo y óptimo para la solución de integrales impropias.

Corresponde al caso donde el polinomio es de primer grado.

Para obtener una precisión eficiente se requiere de un gran número de subintervalos.

$$I = \underbrace{\frac{h}{2}}_{\text{Ancho}} \underbrace{\left(f(a) + 2\sum_{i=1}^{n} f(a + ih) + f(b) \right)}_{\text{Altura promedio}}$$

n.- siempre impar



$$h = \frac{b - a}{n}$$

(Siempre van a ser positivos los valores)

Ejemplo.

$$\int_{2}^{3} \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \qquad n = 4$$

Solución:

a = 2 y b = 3

$$h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{4} = \frac{1}{4} \qquad \boxed{h = \frac{1}{4}}$$

$$I = \frac{1/4}{2}\left\{ f(x=2) + 2\left(f(x=9/4) + f(x=5/2) + f(x=11/4)\right) + f(x=3)\right\}$$

$$I = \frac{1/4}{2}\left\{ \frac{1}{1+(2)^2} + 2\left(\frac{1}{1+(9/4)^2} + \frac{1}{1+(5/2)^2} + \frac{1}{1+(11/4)^2} + \frac{1}{1+(3)^2}\right)\right\}$$

$$I = \frac{1/4}{2}\left(0.2 + (32/97) + (8/29) + (32/137) + 0.1\right)$$

$$I = \frac{1}{8}\left(1.139335619\right)$$

$$\boxed{I = 0.142416952}$$

Newton – Cotes Cerradas y Abiertas

Los métodos de integración numérica que se obtienen al integrar las fórmulas de interpolación de Newton reciben el nombre de fórmulas de Newton – Cotes.

La regla del trapecio o trapezoidal y las dos reglas de Simpson son casos de las fórmulas de Newton – Cotes, las cuales se dividen en fórmulas cerradas y abiertas.

La ecuación recibe el nombre de fórmula cerrada, debido a que el dominio de integración está cerrado por el primer y último dato.

$$I = \alpha h \sum_{i=0}^{n} wi \; f(a + ih) \qquad h = \frac{b - a}{n}$$

Las fórmulas abiertas de Newton - Cotes se obtienen al extender la integración hasta un intervalo a la izquierda del primer dato y un intervalo a la derecha del último dato.

$$I = \alpha h \sum_{i=0}^{n+2} wi \; f(a + ih) \qquad h = \frac{b - a}{n + 2}$$

Ventajas de las fórmulas

Utilizan puntos con igual operación. Se dispone de fórmulas abiertas y cerradas.

Desventajas.

Las fórmulas de orden superior no necesariamente son precisas.

Newton – Cotes (Cerradas)

$$I = \alpha h \sum_{i=0}^{n} w_i \ f(a + ih) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

Newton – Cotes (Abiertas)

$$I = \alpha h \sum_{i=0}^{n+2} w_i \ f(a + ih) \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

Ejemplo.- Newton Cotes (Abiertas).

$$\int_{-2}^{2} (3x^3 - 10)\,dx \qquad n = 4$$

Entonces a = -2 y b =2

$$h = \frac{b-a}{n+2} = \frac{2-(-2)}{4+2} = \frac{2}{3} \qquad \boxed{h = \frac{2}{3}} \qquad \boxed{\alpha = \frac{6}{20}}$$

$$I = \left(\frac{6}{20}\right)\left(\frac{2}{3}\right)\left\{ \begin{array}{l} [(0)\ f(x=-2)] + [(11)\ f(x=-4/3)] + [(-14)\ f(x=-2/3)] + [(26)\ f(x=0)] \\ + [(-14)\ f(x=2/3)] + [(11)\ f(x=4/3)] + [(0)\ f(x=2)] \end{array} \right\}$$

$$I = \left(\frac{1}{5}\right)\left\{ \begin{array}{l} (0)[3(-2)^3 - 10] + (11)[3(-4/3)^3 - 10] + (-14)[3(-2/3)^3 - 10] + \\ (26)[3(0)^3 - 10] + (-14)[3(2/3)^3 - 10] + (11)[3(4/3)^3 - 10] + \\ (0)[3(2)^3 - 10] \end{array} \right\}$$

$$I = \left(\frac{1}{5}\right)\left\{ \left(\frac{-1694}{9}\right) + \left(\frac{1372}{9}\right) + 260 + \left(\frac{1148}{9}\right) - \left(\frac{289}{9}\right) \right\}$$

$$I = \left(\frac{1}{5}\right)(-200)$$

$$\boxed{I = -40}$$

Nota. Resolver este mismo ejemplo por el método de Newton Cotes Cerradas.

Constantes para las fórmulas Cerradas de Newton – Cotes

n	α	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8	i = 9	i = 10
1	1/2	1	1									
2	1/3	1	4	1								
3	3/8	1	3	3	1							
4	2/45	7	32	12	32	7						
5	5/288	19	75	50	50	75	19					
6	1/140	41	216	27	272	27	216	41				
7	7/17280	751	3577	1323	2989	2989	1323	3577	751			
8	14/14175	989	5888	-928	10946	-4540	10946	-928	5888	989		
9	9/89600	2857	15741	1080	19344	5788	5788	19344	1080	15741	2857	
10	5/299376	16067	106300	- 48525	272400	-260550	427368	-260550	272400	-48525	106300	16067

Constantes para las fórmulas Abiertas de Newton – Cotes

n	α	i = 0	i = 1	i = 2	i = 3	i = 4	i = 5	i = 6	i = 7	i = 8
1	3/2	0	1	1	0					
2	4/3	0	2	-1	2	0				
3	5/24	0	11	1	1	11	0			
4	6/20	0	11	-14	26	-14	11	0		
5	7/1440	0	611	-453	562	562	-453	611	0	
6	8/945	0	460	-954	2196	-2459	2196	-954	460	0

Regla de 1/3 Simpson

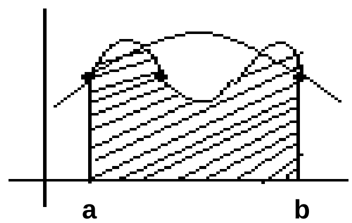
Resulta al realizar la integración de un polinomio de interpolación de 2° grado.

Es otra forma de obtener la estimación exacta de la integral usando polinomios de grado superior para la unión de puntos.

Consiste en considerar el área bajo una parábola que une puntos. Se puede aplicar a un número par de intervalos.

$$I = \frac{h}{3}\ f(a) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + 2\sum_{i=2}^{n-2} f(a+ih) + f(b)$$

$$h = \frac{b-a}{n}$$



n.- siempre par

Ejemplo.

$$\int_2^3 \left(\frac{1}{1+x^2}\right) dx \qquad n = 10 \qquad \text{Entonces } a = 2 \text{ y } b = 3$$

$$\boxed{h = \frac{b-a}{n} = \frac{3-2}{10} = \frac{1}{10}}$$

$$I = \frac{1/10}{3}\left\{ \begin{aligned} &f(x{=}2) + 4f(x{=}21/10) + 2f(x{=}11/5) + 4f(x{=}23/10) + 2f(x{=}12/5) + 4f(x{=}5/2) \\ &+ 2f(x{=}13/5) + 4f(x{=}27/10) + 2f(x{=}14/5) + 4f(x{=}29/10) + f(x{=}3) \end{aligned} \right\}$$

$$I = \frac{1/10}{3}\left\{ \begin{aligned} &\left(\frac{1}{1+(2)^2}\right) + 4\left(\frac{1}{1+(21/10)^2}\right) + 2\left(\frac{1}{1+(11/5)^2}\right) + 4\left(\frac{1}{1+(23/10)^2}\right) + 2\left(\frac{1}{1+(12/5)^2}\right) \\ &+ 4\left(\frac{1}{1+(5/2)^2}\right) + 2\left(\frac{1}{1+(13/5)^2}\right) + 4\left(\frac{1}{1+(27/10)^2}\right) + 2\left(\frac{1}{1+(14/5)^2}\right) \\ &+ 4\left(\frac{1}{1+(29/10)^2}\right) + \left(\frac{1}{1+(3)^2}\right) \end{aligned} \right\}$$

$$I = 1/30 \left(\begin{aligned} &0.2 + 400/541 + 25/73 + 400/629 + 50 + 169 + 16 / 29 + 25/97 + 400/829 + \\ &50/221 + 400/941 + 0.1 \end{aligned} \right)$$

$$I = 1/30\ (4.256914514)$$

$$\boxed{I = 0.14189715}$$

Regla de 3/8 Simpson

Se ajusta el polinomio de Lagrange de 3er. grado a cuatro puntos e integrar.

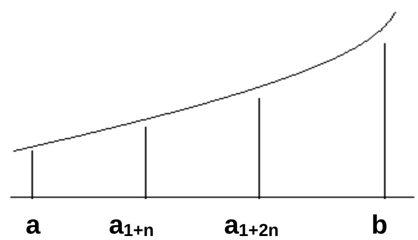
Como "h" se multiplica por 3/8 recibe el nombre de 3/8 de Simpson, por lo cual los puntos tienen un peso de tres octavos.

Es más exacta que la regla de 1/3 de Simpson. Cuando el número de segmentos es impar es muy útil.

Se va aplicar esta regla cuando es un número de intervalos múltiplos de tres.

$$I = \frac{3}{8} h \left(f(a) + 3\sum_{i=1}^{n-1} f(a + ih) + f(b) \right)$$

$$h = \frac{b - a}{n}$$



n.- siempre impar

Ejemplo.

$$\int_0^1 x^3 e^x \, dx \qquad n = 3$$

Por lo tanto $a = 0$ y $b = 1$ $\qquad h = \frac{b - a}{n} = \frac{1 - 0}{3} = \frac{1}{3}$

$$I = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left\{ f(x = 0) + 3\left[f(x = 1/3) + f(x = 2/3) \right] + f(x = 1) \right\}$$

$$I = \left(\frac{3}{8}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left\{ \left[(0)^3 e^0\right] + 3\left[(1/3)^3 e^{1/3} + (2/3)^3 e^{2/3}\right] + \left[(1)^3 e^1\right] \right\}$$

$$I = \left(\frac{1}{8}\right)\left(0 + 0.155068047 + 1.731319148 + 2.718281828 \right)$$

$$I = \left(\frac{1}{8}\right)\left(4.604669023 \right)$$

$$\boxed{I = 0.575583627}$$

Aplicaciones

Un agricultor desea conocer la superficie aproximada de un prado limitado por una carretera, dos caminos perpendiculares a ella y la ribera de un río, de manera que si se colocan unos ejes cartesianos sobre la carretera (eje X) y uno de los caminos (eje Y, abscisa x = 0).

El segundo camino será la recta vertical x = 2 (unidades en cientos de metros). Se consideran varias medidas desde la carretera hasta la ribera.

Obteniéndose las siguientes coordenadas para los puntos de la ribera: (0, 1.5), (0.5, 1.8), (1, 2.1), (1.5, 1.75), (2, 1.3).

Calcular aproximadamente el área de dicho terreno utilizando la Regla del Trapecio.

Determinar el área si se extiende el terreno hasta la abscisa x = 2.5 considerando que el río en tal caso pasa por el punto (2.5, 1.1).

En este caso se desconoce la función de forma explícita, considerando tan sólo los valores de la tabla que se ha sido facilitada. Se tiene:

Xi	0	0.5	1.0	1.5	2.0
F(Xi)	1.5	1.8	2.1	1.75	1.3

Utilizando el método de trapecio:

$$\begin{aligned} I_1 &\approx \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\left(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3)\right) + f(x_4)\right] \\ &\approx \frac{0.5}{2}\left[1.5 + 2(1.8 + 2.1 + 1.75) + 1.3\right] \\ &\approx 3.4333 \end{aligned}$$

Ejercicios

1.- Un automóvil con masa M = 5,400 kg se mueve a una velocidad de 30 m/seg.

El motor se apaga súbitamente a los t = 0 seg.

Se supone que la ecuación de movimiento después de = 0 está dada por

$$5,400v = -8.276v^2 - 2,000dx$$

Donde v = v(1) es la velocidad (m/seg) del automóvil al tiempo t.

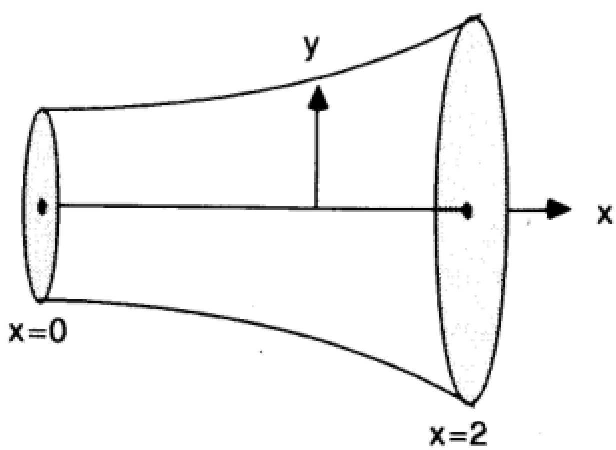
El lado izquierdo representa Mv(dv/dx).

El primer término del lado derecho es la fuerza aerodinámica y el segundo es la resistencia de las llantas al rodaje.

Calcule la distancia que recorre el automóvil hasta que la velocidad se reduce a 15 m/seg. La ecuación de movimiento se puede integrar como:

$$L = \int_0^{30} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx$$

2.- El cuerpo de revolución que se muestra en la figura se obtiene al girar a curva dada por
$y = -1 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$**, 0 ≤ X ≤ 2 en torno al eje x. Calcule el volumen.**



Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO)

Son ecuaciones compuestas por: una función desconocida y derivadas.

La clasificación de las mismas en los problemas depende:

- **Condiciones iniciales. Los problemas con condiciones iniciales estos dependen del tiempo, es decir, sus condiciones iniciales se basan en el tiempo inicial para la solución.**

- **Condiciones en la frontera. Son diferentes los métodos numéricos en forma significativa de los que se usa para problemas con condiciones iniciales.**

Aquí solo se analizan los problemas con condiciones iniciales por medio de métodos de solución numérica.

También se clasifican de acuerdo a su orden:

✓ **(EDO) de primer orden**
✓ **(EDO) de segundo orden**

Entonces una ecuación de n-ésimo orden tiene una n-ésima derivada.

Un sistema de ecuaciones de primer orden es la reducción de las ecuaciones de orden superior.

Euler

Por sencillo se considera óptimo para una rápida programación.

Entre más complicado sea el sistema de ecuaciones se recomienda el método Euler, frecuentemente se le conoce como Cauchy ó punto pendiente.

En él se basan para la solución de ecuaciones parciales parabólicas e hiperbólicas que son muy complicadas.

Tiene tres versiones Euler:

- **Hacia Adelante**
- **Modificado**
- **Hacia Atrás**

Euler hacia Adelante

Con la primera derivada se obtiene en forma directa la estimación de una pendiente.

Es decir divide el intervalo de x= 0 en n subintervalos de ancho h.

Ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\,(y_n,\, t_n)$$

t = 0, siempre es "0" pues parte del origen.

- **Este se obtiene por diferencias hacia adelante y así rescribiendo la aproximación.**
- **Se calcula y_{n+1} en forma recursiva.**

Ejemplo.

$3y' - 5yt + 1 = 0 \qquad y_0 = 2 \qquad h = 0.2$

$$y' = \frac{5yt - 1}{3}$$

$$y_1 = y_0 + h\left\{\frac{5\,y_0\,t_0 - 1}{3}\right\}$$

$$y_1 = 2 + (0.2)\left\{\frac{5(2)(0) - 1}{3}\right\}$$

$$\boxed{y_1 = 1.933333333}$$

Para encontrar y_2 se consideran los siguientes datos:

$y_0 = y_1 = 1.933333333 \qquad h = 0.2$

El tiempo se incrementa con respecto al valor de h.

$t_1 = t_0 + h;\ t_1 = 0 + 0.2 \qquad t_1 = 0.2$

Por lo tanto:

$$y_2 = y_1 + h\left\{\frac{5\,y_1\,t_1 - 1}{3}\right\}$$

$$y_2 = 1.933333333 + (0.2)\left\{\frac{5\,(1.933333333)(0.2) - 1}{3}\right\}$$

$$\boxed{y_2 = 1.995555556}$$

Euler hacia Atrás

Se basa en la aproximación de diferencias hacia atrás, es tan preciso como el método anterior.

Tiene como ventaja que es estable para problemas rígidos y proporciona una solución positiva si también esta anterior es exacta.

El intervalo lo divide n subintervalos de ancho h.

Ecuación:

$$y_{n+1} = y_n + h\, f\,(y_{n+1},\, t_{n+1})$$

t=0, siempre es "0" pues parte del origen.

- **Este se obtiene por diferencias hacia atrás y así reescribiendo la aproximación.**

Se calcula y_{n+1} en forma recursiva.

$y_{n+1} = y_n + n\,hf\,(t_{n+1},\, y_{n+1})$ $\qquad 0 \leq n \leq N$

$y_0 = n\,h = 0;$ $\qquad n = 0, 1, 2, \ldots, N - 1$

Donde "n h" va a representar una aproximación al valor inicial n.

Ejemplo.

$f(x, y) = x\,\text{sen}\,(y)$

Euler Modificado

Características:

1. **Es más exacto que el método Euler hacia Adelante.**
2. **Su estabilidad es excelente.**
3. **Se obtiene aplicando la regla trapezoidal para integrar.**

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left(f(y_n, t_n) + f(y_{n+1}, t_{n+1}) \right)$$

$$y'_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left(f(y_0, t_0) + f(y_1, t_1) \right)$$

Ejemplo.

$2y' + 3yt + y = 0$ $\quad y_0 = 1.2 \quad h = 0.3 \quad y_1 = 1.2$

Despejar y´

$$y' = \frac{-3yt - y}{2}$$

$$y'_1 = y_0 + \frac{h}{2}\left\{ \left(\frac{-3y_0t_0 - y_0}{2} \right) + \left(\frac{-3y_1t_1 - y_1}{2} \right) \right\}$$

Considerando $t_0 = 0$ y $t_1 = 0.3$

$$y'_1 = 1.2 + \left(\frac{0.3}{2} \right)\left\{ \left(\frac{-3(1.2)(0) - (1.2)}{2} \right) + \left(\frac{-3(1.2)(0.3) - (1.2)}{2} \right) \right\}$$

$$y'_1 = 1.2 + (0.15)\,(-0.6 - 1.14)$$

$$\boxed{y'_1 = 0.939}$$

Encontrar: y'_2

Método Runge – Kutta

Se utiliza para resolver problemas de valor inicial (PVI) sin utilizar el cálculo de derivadas de orden superior.

Obtienen la exactitud de la serie Taylor, siendo el resultado basado en un número finito de términos de la misma.

Su precisión se incrementa al utilizar puntos intermedios en cada intervalo.

Al ser la precisión más exacta, los errores disminuyen al reducir "h" en un corto tiempo.

Son varios métodos iterativos implícitos y explícitos, para aproximar las soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En estos métodos se llama etapas a las sucesivas evaluaciones de la función "f".

El número de etapas es la cantidad de veces que la función es evaluada en cada iteración.

Se prefieren el menor número posible de etapas para que al evaluar la función sea mínimo el costo computacional.

Método Runge – Kutta:

- **2º orden**
- **3er. Orden**
- **4to. Orden por:**
  - **1/3 de Simpson**
  - **3/8 de Simpson**
- **Orden Superior**

Runge – Kutta de 2º orden

Se tienen dos pasos de iteración.

$k_1 = h\ f\ (y_n, t_n)$
$k_2 = h\ f\ (y_n + k_1, t_n + h)$
$y_{n+1} = y_n + ½\ (k_1 + k_2)$

k.- son las relaciones de recurrencia.

Entonces:
k_1 aparece en la ecuación de k_2
k_2 en la ecuación de k_3

Siendo, cada k una evolución funcional por lo cual los métodos Runge – Kutta son más eficientes debido a esta recurrencia.

Ejemplo. $y' - 2ty + 1 = 0 \quad y_0 = 1 \quad h = 0.6$

Despejar: y'
$y' = 2ty – 1 \qquad t_0 = 0$

$k_1 = h\ f\ (y_n, t_n)$

$k_1 = 0.6\left(2\ (0)(1) - 1\right)$

$\boxed{k_1 = -\ 0.6}$

$k_2 = h\ f\ (y_n + k_1, t_n + h)$

$k_2 = 0.6\left\{\left(2(0+0.6)\ (1 + (-0.6))\right) - 1\right\}$

$k_2 = 0.6\left\{\left(2\ (0.6)(0.4)\right) - 1\right\}$

$\boxed{k_2 = 0.303265329}$

$y_{n+1} = y_n + ½\ (k_1 + k_2)$

$y_1 = 1 + 1/2(-1 + 0.30326529)$

$\boxed{y_1 = 0.651632664}$ **Encontrar: y_2**

Runge – Kutta de 3er. Orden

$k_1 = h\,f\,(y_n,\ t_n)$
$k_2 = h\,f\,(y_n + k_1/2,\ t_n + h/2)$
$k_3 = h\,f\,(y_n - k_1 + 2\,k_2\,,\ t_n + h)$
$y_{n+1} = y_n + 1/6\,(k_1 + 4k_2 + k_3)$

Ejemplo.

$$y' = \frac{2yt + 1}{y^2} \qquad y_0 = 1 \qquad h = 0.25$$

$$k_1 = 0.25\left(\frac{2(1)\,(0) + (1)}{(1)^2}\right) \qquad \boxed{k_1 = 0.25}$$

$$k_2 = 0.25\left\{\frac{2\left(1 + \frac{0.25}{2}\right)\left(0 + \frac{0.25}{2}\right) + 1}{\left(1 + \frac{0.25}{2}\right)^2}\right\}$$

$$\boxed{k_2 = 0.253086419}$$

$$k_3 = 0.25\left\{\frac{2\,[1 - 0.25 + 2(0.253086419)][0 + 0.25] + 1}{[1 - 0.25 + 2\,(0.253086419]^2}\right\}$$

$$\boxed{k_3 = 0.257939981}$$

$$y_1 = 1 + 1/6 \quad [0.25 + 4(0.253086419) + 0.257993981]$$

$$\boxed{y_1 = 1.211723276}$$

Encontrar: y_2

Runge – Kutta de 4to. Orden

Utiliza múltiples estimaciones de la pendiente y así se obtiene un promedio de la misma en el intervalo más exacto.

En este caso k representa la pendiente.

Método Runge – Kutta de 4to. Orden por 1/3 de Simpson.

$k_1 = h\, f\,(y_n,\, t_n)$
$k_2 = h\, f\,(y_n + k_1/2,\, t_n + h/2)$
$k_3 = h\, f\,(y_n + k_2/2,\, t_n + h/2)$
$k_4 = h\, f\,(y_n + k_3,\, t_n + h)$
$y_{n+1} = y_n + 1/6\,(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

Ejemplo.

$y' = \dfrac{(y + t)^2}{1 - y}$ $\quad y = 0.4 \qquad h = 0.2$

$k_1 = (0.2)\left\{\dfrac{[0.4 + 0]^2}{1 - 0.4}\right\} = (0.2)\left\{\dfrac{(0.4)^2}{0.6}\right\}$ $\quad \boxed{k_1 = 0.053333333}$

$k_2 = (0.2)\left\{\dfrac{[0.4 + (0.053333333/2) + (0 + (0.2/2))]^2}{1 - [0.4 + (0.053333333/2)]}\right\}$ $\quad \boxed{k_2 = 0.096759689}$

$k_3 = (0.2)\left\{\dfrac{[0.4 + (0.096759688/2) + (0 + (0.2/2))]^2}{1 - [0.4 + (0.096759688/2)]}\right\}$ $\quad \boxed{k_3 = 0.109031713}$

$k_4 = (0.2)\left\{\dfrac{[0.4 + 0.109031713 + (0 + 0.2)]^2}{1 - (0.4 + 0.109031713)}\right\}$ $\quad \boxed{k_4 = 0.2047895890}$

$y_1 = 0.4 + 1/6(0.053333333 + 2\,(0.096759688) + 2\,(0.109031713) + 0.204789589)$

$\boxed{y_1 = 0.511617621}$ $\qquad$ **Encontrar:** y_2

Runge – Kutta de 4to. Orden por 3/8 de Simpson

$k_1 = h\, f\,(y_n,\, t_n)$
$k_2 = h\, f\,(y_n + k_1/3,\, t_n + h/3)$
$k_3 = h\, f\,(y_n + k_1/3 + k_2/3,\, t_n + 2/3h)$
$k_4 = h\, f\,(y_n + k_1 - k_2 + k_3,\, t_n + h)$
$y_{n+1} = y_n + 1/8\,(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$

Ejemplo.

$$y' = \frac{-y}{y^2 + t} \qquad y_0 = 1 \qquad h = 0.5$$

$$k_1 = 0.5\left\{\frac{-1}{(1)^2 + 0}\right\} \qquad \boxed{k_1 = -0.5}$$

$$k_2 = 0.5\left\{\frac{-1 + (-0.5/3)}{[1 + (-0.5/3)]^2 + [0 + (0.5/3)]}\right\} \qquad \boxed{k_2 = -0.483870959}$$

$$k_3 = 0.5\left\{\frac{-1 + (-0.5/3) + (-0.483870959/3)}{[1 + (-0.5/3) + (-0.483870959/3)]^2 + [0 + 2/3(0.5)]}\right\} \qquad \boxed{k_3 = -0.428066426}$$

$$k_4 = 0.5\left\{\frac{-1 + (-0.5) - (-0.483870959 + (-0.428066428)]}{[1 + (-0.5) - (-0.483870959) + (-0.428066428)]^2 + (0+0.5)}\right\}$$

$$\boxed{k_4 = -0.343547869}$$

$y_1 = 1 + 1/8\,(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4)$

$y_1 = 1 + 1/8\,[-0.5 + 3(-0.483870959) + 3\,(-0.428066426) + (-0.343547869)]$

$y_1 = 1 + (-0.447420003)$

$\boxed{y_1 = 0.552579997}$ **Encontrar:** y_2

Runge – Kutta de Orden Superior

La mayor exactitud se ve afectada por un excesivo trabajo computacional así como de complejidad.

$k_1 = h\,V_n$
$m_1 = h\,[\pm a\,V_n \pm b\,U_n,\ q_n]$
$k_2 = h\,(V_n + m_1)$
$m_2 = h\,[\pm a\,(V_n + m_1) \pm b\,(U_n + k_1),\ q_n + h]$

$y_{n+1} = y_n + ½\,(k_1 + k_2)$
$y'_{n+1} = y'_n + ½\,(m_1 + m_2)$

$V_n = y'$ $\qquad U_n = y$ $\qquad q_n = t$

Ejemplo.

$2y'' - 4y't - 2y = 0 \qquad y_0 = 1.1 \qquad h = 0.2 \qquad y'_0 = 1.2$

Entonces

$y'' = \dfrac{4y't - 2y}{2} \qquad\qquad y'' = 2y't - y$

Por lo tanto.

$a = 2,\ b = 1,\ V_n = y'_0 = 1.2,\ U_n = y_0 = 1.1,\ q_n = t = 0$

$k_1 = h\,(y'_0) \qquad\qquad k_1 = h\,(V_n)$

$k_1 = 0.2\,(1.2)$

$\boxed{k_1 = 0.24}$

$m_1 = h\left\{2y't - y\right\} \qquad\qquad m_1 = h\left\{2\,V_n\,q_n - U_n\right\}$

$m_1 = 0.2\left\{\left(2(1.2)\,(0)\right) - 1.1\right\}$

$\boxed{m_1 = -\,0.22}$

$k_2 = h\,(y'_0 + m_1)$ $\qquad$ **$k_2 = h\,(V_n + m_1)$**

$k_2 = 0.2\left(1.2 + (-0.22)\right) = 0.2\,(1.2 - 0.22)$

$$\boxed{k_2 = 0.196}$$

$m_2 = h\left\{a\,(y'_0 + m_1)\,(t + h) - b\,(y_0 + k_1)\right\}$

$m_2 = h\left\{a\,(V_n + m_1)\,(q_n + h) - b\,(U_n + k_1)\right\}$

$m_2 = 0.2\left\{2\left(1.2 + (-0.22)\,(0{+}0.2)\right) - (1.1 + 0.24)\right\}$

$$\boxed{m_2 = -\,0.1892}$$

$y_1 = y_0 + 1/2\,(k_1 + k_2)$ $\qquad$ **$y_1 = U_n + 1/2\,(k_1 + k_2)$**

$y_1 = 1.1 + 1/2\,(0.24 + 0.196)$

$$\boxed{y_1 = 1.318}$$

$y'_1 = y_0' + 1/2\,(m_1 + m_2)$ $\qquad$ **$y'_1 = V_n + 1/2\,(m_1 + m_2)$**

$y'_1 = 1.2 + 1/2\left((-0.22) + (-0.1896)\right)$

$$\boxed{y'_1 = 0.9952}$$

Encontrar: y_2, y'_2

Aplicaciones

Un paracaidista de masa M kg salta desde un avión en t = 0. Considere que la velocidad vertical inicial del paracaidista es cero en t = 0 y que la caída es vertical.

Si el arrastre aerodinámico está dado por Faire = cv^2, donde c es una constante y v es la velocidad vertical (positiva hacia abajo), se asume M = 70 kg, c = 0.27 kg/m y h = 0.05.

Encontrar la velocidad del paracaidista para t ≤ 1seg.

Solución.
Por la primera ley de Newton, el equilibrio de fuerzas satisface:

$$M\frac{dv(t)}{dt} = -F_{aire} + gM$$

Considerando que v es la velocidad del paracaidista en m/s (positiva hacia abajo) y g es la aceleración debida a la gravedad, $9.8 m/s^2$.

La ecuación puede reescribirse como:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{c}{M^2}v^2 + g, \; v(0) = 0$$

Donde:

$$v' = f(t, v), \; v(0) = 0$$

Por lo tanto:

$$f(t, v) = -\frac{0.27}{70}v^2 + 9.8$$

Mediante el método de Euler se obtiene:

t_i(s)	v_i(m/s)
0	0
0.05	0.48999952
0.1	0.97999759
0.15	1.46999325
0.2	1.95998554
0.25	2.44997348
0.3	2.93995613
0.35	3.4299325
0.4	3.91990164
0.45	4.40986259
0.5	4.89981438
0.55	5.38975604
0.6	5.87968661
0.65	6.36960513
0.7	6.85951063
0.75	7.34940214
0.8	7.83927871
0.85	8.32913938
0.9	8.81898316
0.95	9.30880911
1	9.79861625

Ejercicios

1.- En un circuito de voltaje impreso E que tiene la resistencia R, la inductancia L y la capacitancia C en paralelo, la corriente i satisface la ecuación diferencial

$$\frac{di}{dt} = C\frac{d^2E}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{dE}{dt} + \frac{1}{L}E$$

Se supone que C = 0.3 faradios, R = 1.4 ohm, L = 1.7 henrios y el voltaje está dado por:

$$E(t) = e^{-0.06t}sen(2t - \pi)$$

Si i(0) = 0, calcule la corriente i con los valores t = 0.1j, donde j = 0, 1,... 100.

2.- Una pieza metálica con una masa de 0.1kg y 25 °C se calienta internamente de forma eléctrica a razón de q = 3000W. La ecuación diferencial de la temperatura que se obtiene es:

$$\frac{dT}{dt} = 20 - t^2,\ \text{si } T(0) = 298$$

Calcule T (1).

3.- En el estudio del campo eléctrico inducido por dos líneas de transmisión cercanas, surge una ecuación de la forma:

$$\frac{dz}{dx} + g(x)z^2 = f(x)$$

Sean

$$f(x) = 5x + 2 \text{ y } g(x) = z^2. \text{ Si } z(0) = 1,$$

Utilice el algoritmo de Runge - Kutta de cuarto orden para aproximar z (1), con una tolerancia ε = 0.0001.

Resolver por todos los métodos posibles.

1) ctg x

x	y
1. 9	2. 5
2. 4	2. 7
4. 8	3. 7
5. 2	5. 2

2) tg x

x	y
4. 8	3. 7
5. 1	5. 2
10. 5	6. 0
10. 9	8. 3

3) $\int_0^1 [\text{sen}(2x) + 3x^3]\, dx \qquad n = 5$

4) $\int_1^2 [\cos(2x) + x^2]\, dx \qquad n = 3$

5) $y' - y' \,\text{sen}(2t) + y\cos(t) = 0 \qquad y_0 = 3 \qquad y_0' = 2 \qquad h = 0.2$

6) $2y'' - 2y' \,\text{tg}(t) + y\,\text{ctg}(t) = 0 \qquad y_0 = 1 \qquad y_0' = 2 \qquad h = 0.3$

Formulario

$K_1 = hf(y_n, t_n)$

$K_2 = hf(y_n + K_1, t_n + h)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}(K_1 + K_2)$

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1\,x & a_2\,f(x) & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} n & \sum x & \sum f(x) & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x\,f(x) & \sum x\,y \\ \sum f(x) & \sum x\,f(x) & \sum f(x)^2 & \sum y\,f(x) \end{pmatrix}$$

$K_1 = hf(y_n, t_n)$

$K_2 = hf(y_n + \frac{K}{2}, t_n + \frac{h}{2})$

$K_3 = hf(y_n - K_1 + 2K_2, t_n + h)$

$y_{n+1} = y_{n+1} + \frac{1}{6}(K_1 + 4K_2 + K_3)$

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1\,x & a_2\,x^2 & a_3\,f(x) & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \sum f(x) & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x\,f(x) & \sum x\,y \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^2\,f(x) & \sum x^2\,y \\ \sum f(x) & \sum x\,f(x) & \sum x^2\,f(x) & \sum f(x)^2 & \sum y\,f(x) \end{pmatrix}$$

$K_1 = hf\,(y_n, t_n)$

$K_2 = hf\,(y_n + k_1/2, t_n + h/2)$

$K_3 = hf(\,y_n + k_2\,/2\,, t_n + h/2)$

$K_4 = hf(\,y_n + k_3.\,, t_n + h)$

$y_{n+1} = y_n + 1/6\,(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$

$$\begin{array}{ccccc} a_0 & a_1\,x & a_2\,x^2 & a_3\,x^3 & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x\,y \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^2 y \\ \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^5 & \sum x^6 & \sum x^3 y \end{pmatrix}$$

$K_1 = hf\,(y_n, t_n)$

$K_2 = hf\,(y_n + K_1/3, t_n + h/3)$

$K_3 = hf(\,y_n + K_1\,/3 + K_2/3, t_n + 2/3h)$

$K_4 = hf(\,y_n + K_1 - K_2 + K_3\,, t_n + h)$

$y_{n+1} = y_n + 1/8\,(K_1 + 3K_2 + 3K_3 + K_4)$

$$\begin{array}{cccc} a_0 & a_1\,x & a_2\,x^2 & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} n & \sum x & \sum x^2 & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x\,y \\ \sum x^2 & \sum x^3 & \sum x^4 & \sum x^2 y \end{pmatrix}$$

$K_1 = h\,V_n$

$m_1 = h(\pm\, a\,V_n \pm b\,U_n, q_n)$

$K_2 = h(V_n + m_1).$

$m_2 = h(\pm\, a\,(V_n + m_1) \pm b\,(U_n + k_1), q_n + h)$

$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{2}\,(k_1 + k_2)$

$y'_{n+1} = y'_n + \frac{1}{2}\,(m_1 + m_2)$

$V_n = y' \quad U_n = y \quad q_n = t$

$$\begin{array}{ccc} a_0 & a_1\,x & g(x) \\ \end{array}$$
$$\begin{pmatrix} n & \sum x & \sum y \\ \sum x & \sum x^2 & \sum x\,y \end{pmatrix}$$

$$I = \frac{h}{3}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + 2\sum_{i=1}^{n-2} f(a+ih) + f(b) \right)$$

$$I = \alpha\,h \sum_{i=0}^{n} w_i\,F\,(a+ih) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}\left\{ [f(y_n\,, t_n\,) + f(\,y_{n+1}\,, t_{n+1}\,)] \right\}$$

$$I = \alpha\,h \sum_{i=0}^{n+2} w_i\,F(a+ih) \qquad h = \frac{b-a}{n+2}$$

$$y_{n+1} = y_n + hf\,(y_n\,, t_n) \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

$$I = \frac{3}{8}\,h\left(f(a) + 3\sum_{i=1}^{n-1} f(a+ih) + f(b) \right)$$

Bibliografía

Burden, Richard L.; Douglas, Faires J. Análisis Numérico, 6ª ed. International Thomson Editores, 1998.

Cont, S.D.; De Boor, Carl. Análisis Numérico, 2ª ed. McGraw Hill, 1974.

Chapra, Steven C.; Canale, Raymond P. Métodos Numéricos para Ingenieros. Con programas de aplicación, 4ª ed. McGraw Hill, 2002.

Maron, Melvin J.; López, Robert J. Análisis Numérico. Un enfoque práctico, 3ª ed. CECSA, 1995.

Nakamura, Shoichiro. Métodos Numéricos Aplicados con Software, Prentice Hall, 1992.

Nakamura, Shoichiro. Análisis Numérico y Visualización Gráfica con Matlab, Prentice Hall, 1997.

Nieves Hurtado, Antonio; Domínguez Sánchez, Federico C. Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería, 4ª ed. Grupo Editorial Patria, 2012.

Sauer, Timothy. Análisis Numérico, 2ª ed. Pearson Educación, 2013.

DR. ARNULFO TREVIÑO CUBERO
DIRECTOR

DR. FERNANDO BANDA MUÑOZ
SUBDIRECTOR ACADÉMICO

M.C. ROBERTO ALBERTO MIRELES PALOMARES
SECRETARÍA DE PROGRAMAS EDUCATIVOS

DR. JESÚS ADOLFO MELÉNDEZ GUEVARA
COORDINADOR GENERAL ACADÉMICO DE
ADMINISTRACIÓN Y SISTEMAS

UANL
UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE NUEVO LEÓN

FIME
FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA Y ELÉCTRICA

www.fime.uanl.mx **2da. Edición 2020**