Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Análise de Fourier para sinais de tempo discreto

Objetivos

- Introduzir a
  - **série de Fourier**; e
  - **transformada de Fourier**

  para realizar a análise de sinais e sistemas de tempo discreto.
- Estabelecer as devidas condições de existência.
- Apresentar as principais propriedades associadas.
- Determinar o espectro de sinais e/ou a resposta em frequência de sistemas.
- **Estabelecer uma relação entre a Transformada z e a Transformada de Fourier.**
- **Aqui, refere-se como "Série/Transformada de Fourier" a "Série/Transformada de Fourier de tempo discreto"!**

Série de Fourier
para sinais de tempo discreto

Considerações iniciais

- A série de Fourier permite **representar sinais periódicos de tempo discreto**, i.e.,

$$x(n) = x(n + N_0), \quad \forall n \quad \text{e} \quad N_0 \in \mathbb{Z}$$

- Com respeito a sinais senoidais/cossenoidais,

$$x(n) = \text{sen}(\omega_0 n) \quad \text{e} \quad x(n) = \cos(\omega_0 n) \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N_0} \in \mathbb{Q}$$

- Nesse contexto, a k-ésima harmônica é dada por

$$x(n) = \text{sen}(k\omega_0 n) \quad \text{e} \quad x(n) = \cos(k\omega_0 n) \quad \rightarrow \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Vale destacar que
  - As harmônicas ocorrem em múltiplos inteiros de ω_0.
  - Obviamente, são também funções periódicas.
  - A soma das harmônicas resulta em um sinal periódico.

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Para um sinal $x(n)$ **periódico e com período fundamental** N_0, define-se a série de Fourier como

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}}$$

e

$$\boxed{c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}}$$

Observações:

- c_0 caracteriza o valor médio do sinal (nível DC)
- c_1 e c_{-1} caracterizam a amplitude da componente ω_0
- c_k e c_{-k} caracterizam a amplitude da k-ésima harmônica
- Apenas N_0 coeficientes distintos precisam ser determinados.

Definições matemáticas

Demonstração: A partir de

$$\begin{aligned} c_{k\pm mN_0} &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-j(k\pm mN_0)\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \\ &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}e^{\pm jmN_0\omega_0 n} \\ &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=0}^{N_0-1} x(n)e^{-jk\omega_0 n}\underbrace{e^{\pm j2\pi mn}}_{=1,\ m\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

verifica-se que

$$\boxed{c_k = c_{k+N_0}}$$

Portanto, ao contrário do caso de tempo contínuo, **tem-se apenas N_0 coeficientes c_k distintos (i.e., N_0 harmônicas distintas), sendo o espectro periódico e com período N_0.**

Espectro do sinal

Espectro do sinal

Os coeficientes da série de Fourier podem ser expressos como

$$c_k = |c_k| e^{j\angle c_k}$$

onde

$\lvert c_k \rvert$	$\longrightarrow$	Espectro de magnitude (discreto)
$\angle c_k$	$\longrightarrow$	Espectro de fase (discreto)

O espectro é discreto já que é definido apenas em múltiplos (inteiros) de ω_0.

Espectro do sinal

Para um sinal $x(n) \in \mathbb{R}$, os coeficientes da Série de Fourier satisfazem a seguinte relação:

$$c_k = c_{-k}^*$$

onde $(\,\cdot\,)^*$ denota o complexo conjugado. Consequentemente,

$$\boxed{|c_k| = |c_{-k}| \quad \text{e} \quad \angle c_k = -\angle c_{-k}}$$

Portanto,

- o espectro de magnitude é uma função par/simétrica em k; e
- o espectro de fase é uma função ímpar/anti-simétrica em k.

As demonstrações seguem como na transformada de Fourier de tempo contínuo.

Exemplos

Exemplos

Exemplo: Para

$$x(n) = \operatorname{sen}(0,1\pi n)$$

determine:

(a) Os coeficientes da série de Fourier.
(b) O espectro de magnitude do sinal.
(c) O espectro de fase do sinal.

Lembrete:

$$x(n) = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\omega_0 n}$$

e

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Exemplos

Resposta: Primeiramente, determina-se o período fundamental como

$$\omega_0 = 0,1\pi \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi m}{N_0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{N_0 = 20}$$

Em seguida, obtém-se os coeficientes c_k (por inspeção) como

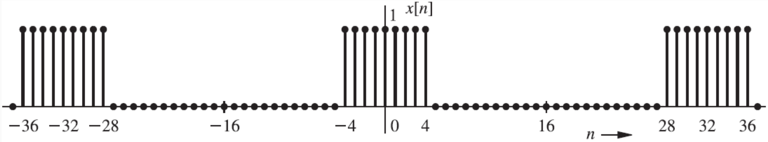
$$\boxed{c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2j} = \dfrac{e^{-j\pi/2}}{2}, & k = 1 \\ -\dfrac{1}{2j} = \dfrac{e^{j\pi/2}}{2}, & k = -1 \\ 0, & -\dfrac{N_0}{2} \leq k < \dfrac{N_0}{2} \end{cases}}$$

Portanto,

$$\boxed{|c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \angle c_{\pm 1} = \mp\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{N_0}{2} \leq k < \frac{N_0}{2}}$$

Exemplos

Exemplo: Para



determine:

(a) Os coeficientes da série de Fourier.
(b) O espectro de magnitude do sinal.
(c) O espectro de fase do sinal.

Lembrete:

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Exemplos

Resposta: Primeiramente, nota-se que

$$N_0 = 20 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

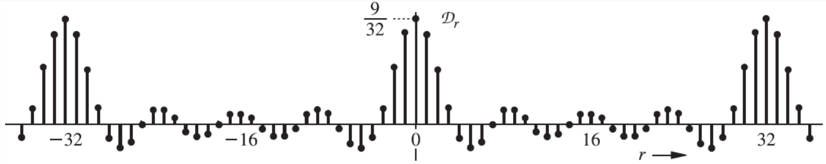
Então, os coeficientes podem ser obtidos como

$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0 \rangle} x(n) e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{32} \sum_{n=-16}^{15} x(n) e^{-jk\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{32} \sum_{n=-4}^{4} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{32} \frac{(e^{-j5k\omega_0} - e^{+j4k\omega_0})}{(e^{-jk\omega_0} - 1)}, \quad k \neq 0 \\
&= \frac{1}{32} \frac{1}{e^{-jk\omega_0/2}} \frac{(e^{-j5k\omega_0} - e^{+j4k\omega_0})}{(e^{-jk\omega_0/2} - e^{+jk\omega_0/2})} \\
&= \frac{1}{32} \frac{(e^{-j9k\omega_0/2} - e^{+j9k\omega_0/2})}{-2j\mathrm{sen}(k\omega_0/2)} \quad \Rightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{32} \frac{\mathrm{sen}(9k\omega_0/2)}{\mathrm{sen}(k\omega_0/2)}}
\end{aligned}$$

Aplicando L'Hopital, obtém-se $c_0 = 9/32$.

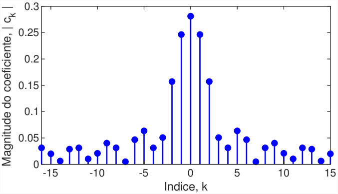
Exemplos

⇒ Coeficientes da série de Fourier:

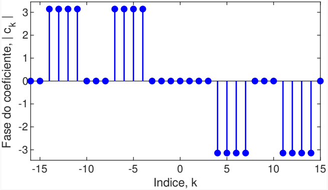


⇒ Decomposição módulo/fase:

Módulo



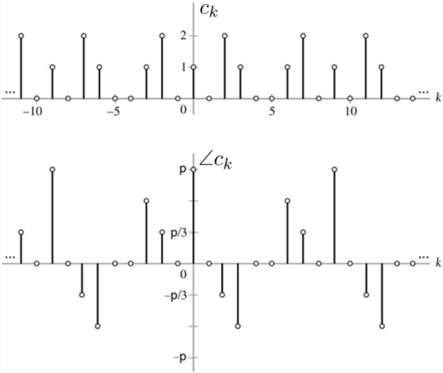
Fase



Lembrete: $c_k = |c_k| e^{j\angle c_k}$ e $e^{\pm jm\pi} = (-1)^{|m|}$.

Exemplos

Exemplo: Determine o sinal $x(n)$ considerando que



Lembrete:

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Exemplos

Resposta: A partir da figura, verifica-se que

$$N_0 = 9 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{9}$$

Logo, são necessários 9 coeficientes. Por exemplo,

$$\begin{cases} c_0 = e^{+j\pi} \\ c_1 = c_{-1}^* = 0 \\ c_2 = c_{-2}^* = 2e^{-j\pi/3} \\ c_3 = c_{-3}^* = e^{-j2\pi/3} \\ c_4 = c_{-4}^* = 0 \end{cases}$$

Então, substituindo os coeficientes em

$$x(n) = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\omega_0 n}$$

Exemplos

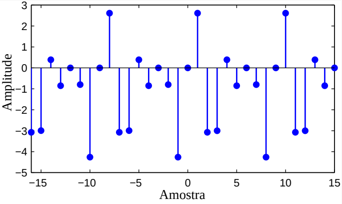
é possível mostrar que

$$x(n) = \sum_{k=-4}^{4} c_k e^{jk\omega_0 n}$$

$$= e^{j\pi} + e^{j(3\omega_0 n - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(3\omega_0 n - \frac{2\pi}{3})} + 2e^{j(2\omega_0 n - \frac{\pi}{3})} + 2e^{-j(2\omega_0 n - \frac{\pi}{3})}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = -1 + 4\cos\left(2\omega_0 n - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3\omega_0 n - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Portanto, o sinal $x(n)$ pode ser ilustrado como



Propriedades

Propriedades

1) Linearidade

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow a_k \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow b_k$$

então

$$\boxed{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 a_k + c_2 b_k}$$

2) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{x(n - n_0) \quad \Longleftrightarrow \quad a_k e^{-jk(2\pi/N_0)n_0}}$$

Propriedades

3) Deslocamento em frequência

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{e^{+jM(2\pi/N_0)n}x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{k-M}}$$

4) Reversão no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{-k}}$$

Propriedades

5) Conjugação

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{x^*(n) \quad \Longleftrightarrow \quad a^*_{-k}}$$

6) Multiplicação no tempo

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow a_k \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow b_k$$

então

$$\boxed{x_1(n)x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{l=<N_0>} a_l b_{k-l}}$$

Propriedades

Demonstração: Levando em conta que

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

e

$$x(n) \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad x(n) = x^*(n)$$

observa-se que

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} x^*(n) e^{-jk\omega_0 n} = \left[\frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} x(n) e^{-j(-k)\omega_0 n} \right]^*$$

Portanto,

$$\boxed{x^*(n) \quad \Longleftrightarrow \quad a^*_{-k}}$$

Créditos: Otávio dos Santos Bonaparte (2018/2).

Propriedades

7) Convolução periódica

$$\boxed{\sum_{k=<N_0>} x_1(k)x_2(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad N_0 a_k b_k}$$

8) Teorema de Parseval

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} |x(n)|^2 = \sum_{k=<N_0>} |a_k|^2}$$

Transformada de Fourier para sinais de tempo discreto

Considerações iniciais

- **A transformada de Fourier possibilita**
  - representar um sinal no domínio da frequência
  - determinar a resposta em frequência de um sistema
  - extrair com maior facilidade a informação de interesse
  - identificar componentes indesejados em um sinal
- Permite caracterizar o espectro de sinais (não periódicos) e/ou a resposta em frequência de sistemas de tempo discreto.
- **Do ponto de vista de engenharia, sinais e/ou sistemas podem ser melhor caracterizados no domínio da frequência.**
- **Existe uma relação intrínseca entre a transformada z e a transformada de Fourier.**

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Para um **sinal $x(n)$ determinístico e não periódico**, define-se

- Transformada direta de Fourier

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

- Transformada inversa de Fourier

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

Atenção: Note que existe uma diferença na notação adotada, i.e.,

TF de tempo discreto		TF de tempo contínuo
$X(e^{j\omega})$	$\Longrightarrow$ $\Longleftarrow$	$X(\omega)$

Definições matemáticas

Equação de análise

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}}$$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Equação de síntese

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega}$$

Observações:

- O espectro $X(e^{j\omega})$ é periódico (período 2π).
- Por isso, considera-se um intervalo de integração finito na definição da transformada inversa de Fourier.
- Isso decorre do fato de que exponenciais discretas com frequência separada por 2π são idênticas.
- Note que a variável ω é continua; logo, o espectro $X(e^{j\omega})$ é uma função continua em ω.

Definições matemáticas

Equação de análise

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}}$$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Equação de síntese

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega}$$

Observações:

- A *frequência angular* é definida como $\omega = 2\pi f$ (rad/s).
- A transformada (direta e inversa) pode ser representada por

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)] \quad \text{e} \quad x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})]$$

- As funções $x(n)$ e $X(e^{j\omega})$ constituem um par de transformada de Fourier, i.e.,

$$x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})$$

- A função $X(e^{j\omega})$ mostra como a energia de $x(n)$ está distribuída no domínio da frequência.

Definições matemáticas

Para verificar a periodicidade do espectro $X(e^{j\omega})$, observe que

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Portanto, visto que o espectro $X(e^{j\omega})$ é uma função periódica e tem período 2π, **não é necessário apresentar o espectro para além da faixa de $(-\pi, \pi)$.**

Condição de existência

Condições de existência

A partir da definição, verifica-se que

$$
\begin{aligned}
|X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n) e^{-j\omega n}| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \underbrace{|e^{-j\omega n}|}_{=1} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty
\end{aligned}
$$

Portanto, a existência da transformada de Fourier de tempo discreto é garantida caso $x(n)$ seja absolutamente somável.

Espectro do sinal

Espectro do sinal

O espectro do sinal $x(n)$ pode ser decomposto como

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}}$$

onde

$$\boxed{\begin{array}{lcl} |X(e^{j\omega})| & \longrightarrow & \text{Espectro de magnitude} \\ \\ \angle X(e^{j\omega}) & \longrightarrow & \text{Espectro de fase} \end{array}}$$

Os espectros de magnitude e de fase são funções contínuas em ω, uma vez que $\omega \in \mathbb{R}$.

Espectro do sinal

Para um sinal $x(t) \in \mathbb{R}$, a transformada de Fourier de tempo discreto satisfaz

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})}$$

onde $(\,\cdot\,)^*$ denota o complexo conjugado. Como consequência,

$$\boxed{|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad \text{e} \quad \angle X(e^{-j\omega}) = -\angle X(e^{j\omega})}$$

Portanto,

- o espectro de magnitude é uma função par/simétrica de ω; e
- o espectro de fase é uma função ímpar/anti-simétrica de ω.

As demonstrações seguem como na transformada de Fourier de tempo contínuo.

Exemplos

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \delta(n-k)$$

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \delta(n-k)$$

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\delta(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-j\omega k}}$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^n u(n)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^n u(n)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\gamma e^{-j\omega}\right)^n \\ &= \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma e^{-j\omega}| < 1 \longrightarrow |\gamma| < 1 \end{aligned}$$

Exemplos

Portanto, o seguinte par de transformada pode ser estabelecido

$$\boxed{\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1}$$

A partir disso, é possível decompor $X(e^{j\omega})$ como

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

Para tal, reescreve-se $X(e^{j\omega})$ como

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{1-\gamma[\cos(\omega) - j\text{sen}(\omega)]} \\ &= \frac{1}{[1-\gamma\cos(\omega)] + j\gamma\text{sen}(\omega)} \end{aligned}$$

Exemplos

Logo,

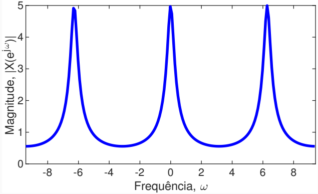
$$\boxed{|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{[1-\gamma\cos(\omega)]^2 + [\gamma \text{sen}(\omega)]^2}}}$$

e

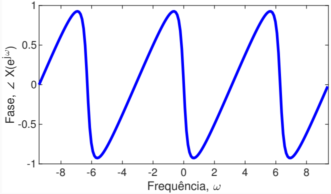
$$\boxed{\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\left[\frac{\gamma \text{sen}(\omega)}{1-\gamma\cos(\omega)}\right]}$$

Graficamente, para $\gamma = 0,8$, obtém-se

$|X(e^{j\omega})|$



$\angle X(e^{j\omega})$



Note a periodicidade do espectro de magnitude/fase...

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = u(n+4) - u(n-5)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r-1}, \quad r \neq 1$$

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = u(n+4) - u(n-5)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r-1}, \quad r \neq 1$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(n+4) - u(n-5)]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} (e^{-j\omega})^n$$

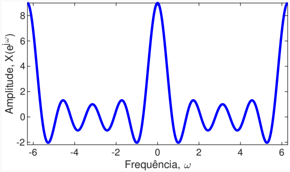
$$= \frac{e^{-j5\omega} - e^{j4\omega}}{e^{-j\omega} - 1} = \frac{(e^{-j9\omega/2} - e^{j9\omega/2})}{(e^{-j\omega/2} - e^{+j\omega/2})} = \frac{\operatorname{sen}(4,5\omega)}{\operatorname{sen}(0,5\omega)}$$

Exemplos

Portanto, é possível estabelecer que

$$\boxed{u(n+4) - u(n-5) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\operatorname{sen}(4,5\omega)}{\operatorname{sen}(0,5\omega)}}$$

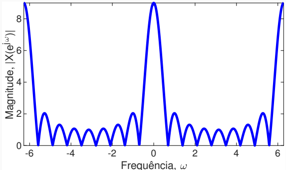
$\Rightarrow$ **Espectro do sinal:**

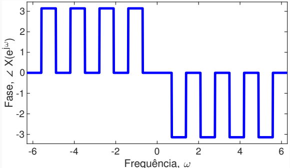


Lembrete:

$$e^{\pm jk\pi} = \begin{cases} +1, & k \text{ par} \\ -1, & k \text{ ímpar} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ **Decomposição do espectro em módulo/fase:**





Alguns outros pares conhecidos

$\delta(n-k)$	$e^{-jk\omega},\ k \in \mathbb{Z}$
$\gamma^n u(n)$	$\dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\gamma},\ \lvert\gamma\rvert < 1$
$\gamma^n u(-n-1)$	$\dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\gamma},\ \lvert\gamma\rvert > 1$
$n\gamma^n u(n)$	$\dfrac{\gamma e^{j\omega}}{(e^{j\omega}-\gamma)^2},\ \lvert\gamma\rvert < 1$
$\gamma^n \cos(\omega_0 n + \theta) u(n)$	$\dfrac{e^{j\omega}[e^{j\omega}\cos\theta - \gamma\cos(\omega_0 - \theta)]}{e^{2j\omega} - 2\gamma\cos\omega_0 e^{j\omega} + \gamma^2},\ \lvert\gamma\rvert < 1$
$u(n) - u(n-M)$	$\dfrac{\operatorname{sen}(M\omega/2)}{\operatorname{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$
$\dfrac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}(\omega_c n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right),\ \omega_c \leq \pi$

Uma lista expandida de pares está disponível em B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 751)

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_\mathrm{c}}\right), \quad \omega_\mathrm{c} = \frac{\pi}{4}$$

Lembrete:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \text{e} \quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right), \quad \omega_c = \frac{\pi}{4}$$

Lembrete:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \text{e} \quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}(e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4}) = \frac{1}{\pi n}\mathrm{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = \frac{1}{4}\mathrm{sinc}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

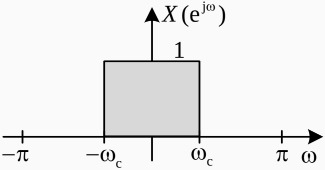
Exemplos

Portanto, é possível concluir que

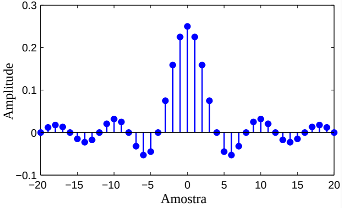
$$\boxed{\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(n\omega_c) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right)}$$

$\Rightarrow$ **Representação do sinal no domínio tempo/frequência:**

$X(e^{j\omega})$



$x(n)$



Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega$$

Então,

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega = 0, & n \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 1, & n = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\boxed{x(n) = \delta(n)}$$

Propriedades

Propriedades

1) Linearidade

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{c_1x_1(n) + c_2x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad c_1X_1(e^{j\omega}) + c_2X_2(e^{j\omega})}$$

2) Conjugação

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x^*(n) \Longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})}$$

Propriedades

3) Multiplicação por n

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{nx(n) \quad \Longleftrightarrow \quad j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})}$$

4) Reversão no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\omega})}$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^{|n|}, \quad |\gamma| < 1$$

Lembrete:

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1 \quad \text{e} \quad x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\omega})$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^{|n|}, \quad |\gamma| < 1$$

Lembrete:

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1 - \gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1 \quad \text{e} \quad x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\omega})$$

Resposta: Primeiramente, observe que

$$x(n) = \gamma^{|n|} \quad \longrightarrow \quad x(n) = \gamma^n u(n) + \gamma^{-n} u(-n) - \delta(n)$$

Logo,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - \gamma e^{-j\omega}} + \frac{1}{1 - \gamma e^{j\omega}} - 1 = \frac{1 - \gamma^2}{1 - \gamma(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) + \gamma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1 - \gamma^2}{1 - 2\gamma \cos(\omega) + \gamma^2}}$$

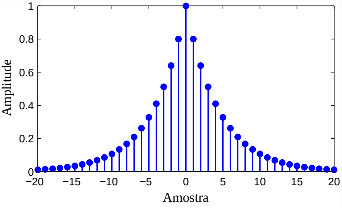
Exemplos

Portanto, é possível concluir que

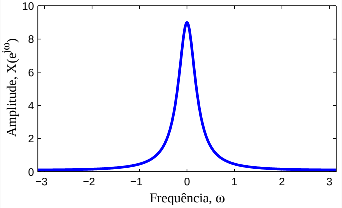
$$\boxed{\gamma^{|n|} \quad \longrightarrow \quad \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos(\omega)+\gamma^2}}$$

⇒ **Representação do sinal no domínio tempo/frequência:**

$x(n)$



$X(e^{j\omega})$



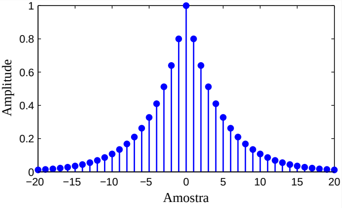
A partir das figuras, observe que

- $x(n)$ par $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ real
- $x(n)$ real $\Rightarrow |X(e^{j\omega})|$ par

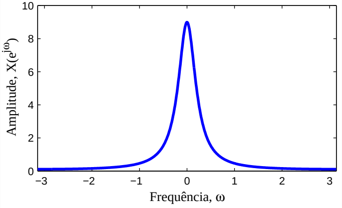
Exemplos

⇒ Representação do sinal no domínio tempo/frequência:

$x(n)$

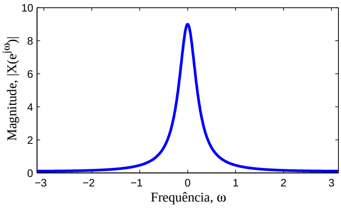


$X(e^{j\omega})$

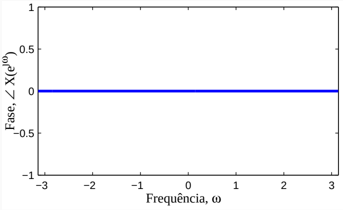


⇒ Decomposição módulo/fase:

$X(e^{j\omega})$



$\angle X(e^{j\omega})$



Propriedades

5) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

então

$$\boxed{x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})e^{-jk\omega}}$$

Deslocamento no tempo provoca atraso de fase linear.

6) Deslocamento na frequência

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{e^{j\omega_0 n}x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega-\omega_0)})}$$

É realizada uma modulação do sinal.

Propriedades

Demonstração: Para $y(n) = x(n-k)$, observa-se que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega(l+k)} \\ &= X(e^{j\omega})e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})e^{-jk\omega}}$$

Créditos: Eduardo Eugenio Rodrigues Sartor (2018/2).

Propriedades

Demonstração: Para $y(n) = x(n)e^{j\omega_0 n}$, observa-se que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n} \\ &= X(e^{j(\omega-\omega_0)}) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{e^{j\omega_0 n}x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega-\omega_0)})}$$

Créditos: Elias Junior Biondo (2018/2).

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de

$$x(n) = \mathrm{sinc}(\omega_0 n)\cos(\omega_{\mathrm{c}} n), \quad \omega_{\mathrm{c}} > \omega_0$$

Lembrete:

$$\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_0 n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_0}\right)$$

$$e^{j\omega_{\mathrm{c}} n} x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega - \omega_{\mathrm{c}})})$$

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de

$$x(n) = \mathrm{sinc}(\omega_0 n)\cos(\omega_\mathrm{c} n), \quad \omega_\mathrm{c} > \omega_0$$

Lembrete:

$$\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_0 n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_0}\right)$$

$$e^{j\omega_\mathrm{c} n} x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega - \omega_\mathrm{c})})$$

Resposta: Como

$$x(n) = \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\omega_0 n) e^{j\omega_\mathrm{c} n} + \frac{1}{2}\mathrm{sinc}(\omega_0 n) e^{-j\omega_\mathrm{c} n}$$

obtém-se

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2\omega_0}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega - \omega_\mathrm{c}}{2\omega_0}\right) + \frac{\pi}{2\omega_0}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega + \omega_\mathrm{c}}{2\omega_0}\right)}$$

Transformada de Fourier: Propriedades

7) Convolução no tempo

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})}$$

8) Convolução na frequência

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x_1(n)x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})}$$

Atenção: Aqui, considera-se a convolução periódica/circular.

Propriedades

Demonstração: A partir de

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

verifica-se que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right] e^{-j\omega n}$$

Então, fazendo $l = n - k$,

$$Y(e^{j\omega}) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)e^{-j\omega k}\right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_2(l)e^{-j\omega l}\right]$$

Portanto,

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})}$$

Créditos: Mateus Zeferino de Carvalho (2018/2).

Propriedades

Demonstração: Para $y(n) = x_1(n)x_2(n)$, verifica-se que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right] x_2(n)e^{-j\omega n}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta}) \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j(\omega-\theta)n}\right] d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

Portanto,

$$\boxed{x_1(n)x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta}$$

Créditos: Matheus Bogo Polidorio (2018/2).

Transformada de Fourier: Exemplos

Exemplo: Considerando um sistema descrito pela seguinte relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n)$$

determine $y(n)$ quando $x(n) = (0,8)^n u(n)$.

Lembrete:

$$x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})e^{-jk\omega}$$

$$x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1$$

Transformada de Fourier: Exemplos

Resposta: Primeiramente, observe que

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) - 0,5Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} &= X(e^{j\omega}) \\ Y(e^{j\omega})(1 - 0,5e^{-j\omega}) &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}}}$$

Além disso, a partir das tabelas, tem-se que

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$$

Logo,

$$\begin{aligned} Y(e^{j\omega}) &= H(e^{j\omega})X(e^{j\omega}) \\ &= \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}} \end{aligned}$$

Transformada de Fourier: Exemplos

Então, realizando a expansão em frações parciais modificada, i.e.,

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{e^{j\omega}} = -\frac{5}{3}\frac{1}{e^{j\omega} - 0,5} + \frac{8}{3}\frac{1}{e^{j\omega} - 0,8}$$

tem-se que

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{5}{3}\frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} + \frac{8}{3}\frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$$

Finalmente, levando em conta que

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1 - \gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1$$

a saída do sistema é obtida como

$$\boxed{y(n) = \left[-\frac{5}{3}(0,5)^n + \frac{8}{3}(0,8)^n\right] u(n)}$$

9) Teorema de Rayleigh

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

Uma tabela contendo todas as propriedades é apresentada em B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 765 e 766).

Exemplo: Determine a energia de

$$x(n) = \mathrm{sinc}(\omega_{\mathrm{c}} n), \quad \omega_{\mathrm{c}} < \pi.$$

Transformada de Fourier: Propriedades

Exemplo: Determine a energia de

$$x(n) = \mathrm{sinc}(\omega_\mathrm{c} n), \quad \omega_\mathrm{c} < \pi.$$

Resposta: Dado que

$$\mathrm{sinc}(\omega_\mathrm{c} n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\pi}{\omega_\mathrm{c}} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_\mathrm{c}}\right), \quad |\omega| \le \pi$$

verifica-se, a partir do Teorema de Rayleigh, que

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi} \int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\pi}{\omega_\mathrm{c}} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_\mathrm{c}}\right) \right|^2 d\omega \\ &= \frac{\pi}{2\omega_\mathrm{c}^2} \int_{-\omega_\mathrm{c}}^{\omega_\mathrm{c}} d\omega \quad \Longrightarrow \quad \boxed{E_x = \frac{\pi}{\omega_\mathrm{c}}} \end{aligned}$$

Relação entre a transformada z e a transformada de Fourier

Relação entre a transformada z e a transformada de Fourier

Primeiramente, é importante lembrar que

$$z = re^{j\omega}$$

A partir disso, observa-se que

$$z\Big|_{r=1} \longrightarrow e^{j\omega}$$

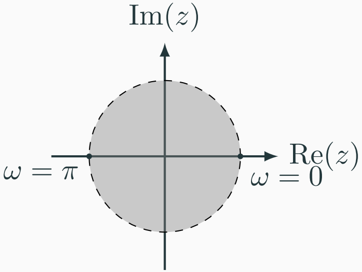
Logo, a transformada z se reduz a transformada de Fourier fazendo

$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})}$$

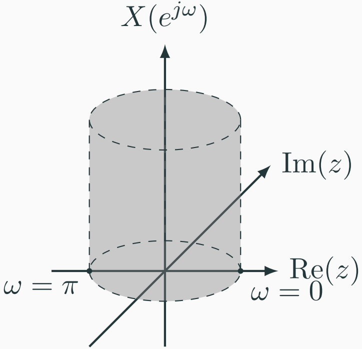
A RDC de $X(z)$ deve incluir o círculo de raio unitário.

Relação entre a transformada z e a transformada de Fourier

⇒ **Plano z:**



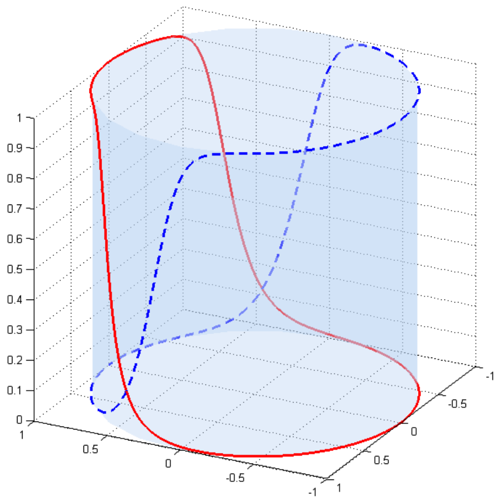
⇒ **Resposta em frequência:**



Para detalhes, veja A. Antoniou, *Digital Signal Processing: Signals, systems, and filters*, New York, NY: McGraw-Hill, 2006 ⟶ (Sec. 5.5).

Relação entre a transformada z e a transformada de Fourier

Resposta em frequência de um filtro
passa-baixas *versus* **passa-alta**.



Resumo e discussão

Resumo e discussão

- A Série/Transformada de Fourier de tempo discreto permite caracterizar sinais/sistemas de tempo discreto no domínio da frequência.
- **Série de Fourier:**
  - Sinais de tempo discreto **periódicos**.
  - O **espectro é discreto, periódico** e tem período N_0.
- **Transformada de Fourier:**
  - Sinais de tempo discreto **não periódicos**.
  - O **espectro é contínuo, periódico** e tem período 2π.
- A transformada de Fourier de tempo discreto é um caso particular da transformada z.
- É possível relacionar a posição dos polos com a resposta em frequência de um sistema.

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 775)

Até a próxima aula... =)