Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Transformada de Laplace

Considerações iniciais

Objetivos:

- Introduzir a transformada de Laplace a fim de facilitar a análise de sinais e sistemas
- Apresentar as principais propriedades da transformada de Laplace
- Resolver equações diferenciais
- Estudar o comportamento de circuitos utilizando a transformada de Laplace
- Esboçar o diagrama de BODE de um circuito/função de transferência

Considerações iniciais

Visto que a resposta de um sistema LIT pode ser expressa como

$$y(t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{N} c_k e^{\lambda_k t}}_{\text{Resp. à entrada zero}} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Resp. ao estado zero}}$$

Com eventuais alterações na resposta à entrada zero no caso de frequências naturais múltiplas/raízes repetidas.

Dificuldades/desafios:

- Determinar as raízes do polinômio característico conforme N aumenta.
- Calcular a integral de convolução especialmente se $h(t)$ e $x(t)$ são funções "complexas"

Considerações iniciais

O que ocorre quando $x(t) = e^{st}$, $\underline{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}}$?

Considerações iniciais

O que ocorre quando $x(t) = e^{st}$, $\underline{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}}$?

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau$$

Como s e t são constantes para a integração em τ,

$$y(t) = e^{st}\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^{st}H(s)$$

sendo

$$\boxed{H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau} \quad \Longleftarrow \text{Função de transferência}$$

Portanto, assumindo que a integral converge,

$$\boxed{x(t) = e^{st} \quad \longrightarrow \quad y(t) = H(s)e^{st}}$$

Considerações iniciais

Como

$$e^{st} \quad \longrightarrow \quad H(s)e^{st}$$

e^{st} é uma autofunção de sistemas LIT e $H(s)$ o autovalor associado. Logo, para

$$x(t) = a_1 e^{s_1 t} + a_2 e^{s_2 t} + \ldots + a_N e^{s_N t}$$

tem-se (devido a linearidade e invariância no tempo) que

$$\boxed{y(t) = a_1 H(s_1)e^{s_1 t} + a_2 H(s_2)e^{s_2 t} + \ldots + a_N H(s_N)s^{s_N t}}$$

onde

$$H(s_k) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-s_k t}dt, \qquad k = 1, \ldots, N$$

Uma autofunção é um sinal que passa pelo sistema sem sofrer alterações com a exceção da multiplicação por um escalar.

Considerações iniciais

Conclusões:

Sinais exponenciais complexos podem ser empregados como base para o estudo de sistemas LIT. Para tal, é necessário

- expressar $x(t)$ como a soma de exponenciais complexas; e
- determinar a função de transferência $H(s)$.

A resposta a um sinal genérico $x(t) = e^{st}$ (s parâmetro) caracteriza o comportamento do sistema LIT.

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Para um sinal $x(t)$ determinístico, define-se

- Transformada direta de Laplace

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

- Transformada inversa de Laplace

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s) e^{st} ds}$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ e $\underline{s = \sigma + j\omega \in \mathbb{C}}$.

Portanto, estabelece-se que

$$\boxed{x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(s)}$$

Definições matemáticas

Transformada direta

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$$\Longrightarrow$$
$$\Longleftarrow$$

Transformada inversa

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

Observações:

- A transformada de Laplace bilateral permite tratar sinais causais e não causais, visto que $-\infty < t < \infty$.
- A transformada de Laplace da resposta ao impulso $h(t)$ resulta na função de transferência do sistema $H(s)$, i.e.,

$$\boxed{h(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H(s)}$$

Definições matemáticas

Transformada direta

$$\boxed{X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt}$$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Transformada inversa

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

Observações:

- Da transformada inversa de Laplace, observa-se que $x(t)$ é expresso como a superposição ponderada de e^{st}.
- Na prática, a transformada inversa de Laplace geralmente não é determinada, pois requer a solução de integrais de contorno.
- Ao invés disso, utiliza-se a relação de um-para-um estabelecida através da transformada de direta, i.e.,

$$\boxed{x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(s)}$$

Condição de existência

Condição de existência

Levando em conta que $s = \sigma + j\omega$, tem-se

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt$$

Então, considerando a desigualdade de Cauchy-Schwarz

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(x)dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)||g(x)|dx$$

e observando que $|e^{j\omega t}| = 1$, verifica-se que a integral converge se

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty}$$

Portanto, a existência da transformada de Laplace é garantida se $x(t)e^{-\sigma t}$ for absolutamente integrável.

Condição de existência

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)e^{-\sigma t}|dt < \infty}$$

Observações:

- Qualquer sinal que não cresce a uma taxa mais rápida do que $Me^{-\sigma t}$ satisfaz a condição, i.e.,

$$|x(t)| \leq Me^{-\sigma t}$$

- Como um exemplo de sinal que cresce a uma taxa mais rápida, tem-se

$$x(t) = e^{t^2}$$

- Se considerar uma versão truncada de $x(t) = e^{t^2}$ (duração finita), a transformada de Laplace existe.
- Felizmente, sinais que não satisfazem tal condição são de pouca aplicabilidade do ponto de vista prático.

Condição de existência

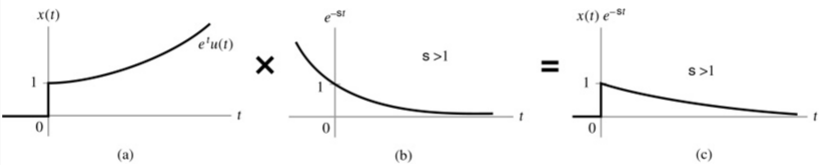
Exemplo: Determine a condição de existência da transformada de Laplace para

$$x(t) = e^{t}u(t)$$

Condição de existência

Exemplo: Determine a condição de existência da transformada de Laplace para

$$x(t) = e^t u(t)$$



- Mesmo que $x(t)$ não seja absolutamente integrável, a transformada de Laplace pode existir.
- Basta que $x(t)e^{-\sigma t}$ seja absolutamente integrável, o que é alcançado limitando σ a um intervalo de valores (e.g., $\sigma > 1$).

Exemplos:
Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Transformada de Laplace (bilateral)

1) Determine a transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Exemplo: Transformada de Laplace (bilateral)

1) Determine a transformada de Laplace de $x(t) = e^{-at}u(t)$.

Resposta: A partir da definição, tem-se que

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)\, e^{-st}dt$$
$$= \int_{0}^{\infty} e^{-(s+a)t}dt = \frac{-1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_0^{\infty}$$

Então, como $s = \sigma + j\omega$, observa-se que a integral converge se

$$\sigma + a > 0 \quad \longrightarrow \quad \sigma > -a$$

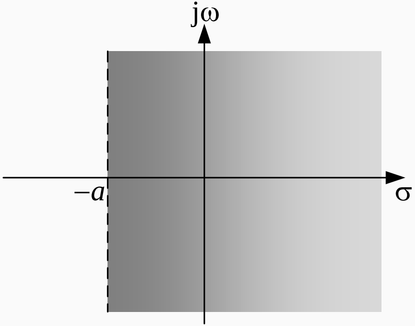
Portanto,

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a}, \qquad \mathrm{Re}(s) > -a}$$

Exemplo: Transformada de Laplace (bilateral)

Dessa forma, o seguinte par de transformada pode ser estabelecido:

$$\boxed{e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) > -a}$$



Para valores de s fora da RC, $X(s)$ não representa a transformada de Laplace de $x(t)$.

Exemplo: Transformada de Laplace (bilateral)

2) Determine a transformada de Laplace de $x(t) = -e^{-at}u(-t)$.

Exemplo: Transformada de Laplace (bilateral)

2) Determine a transformada de Laplace de $x(t) = -e^{-at}u(-t)$.

Resposta: A partir da definição, tem-se que

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(-t)\, e^{-st}dt$$
$$= - \int_{-\infty}^{0} e^{-(s+a)t}dt = \frac{1}{s+a}\left[e^{-(s+a)t}\right]_{-\infty}^{0}$$

Então, para $s = \sigma + j\omega$, nota-se agora que a integral converge se

$$\sigma + a < 0 \longrightarrow \sigma < -a$$

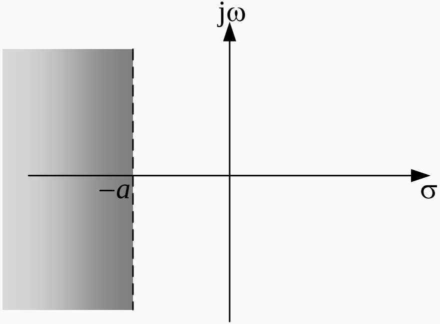
Portanto,

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+a}, \qquad \mathrm{Re}(s) < -a}$$

Exemplo: Transformada de Laplace (bilateral)

Dessa forma, o seguinte par de transformada pode ser estabelecido:

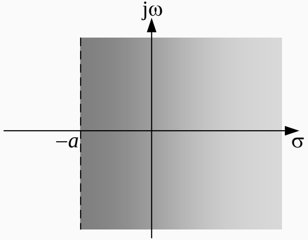
$$\boxed{-e^{-at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) < -a}$$

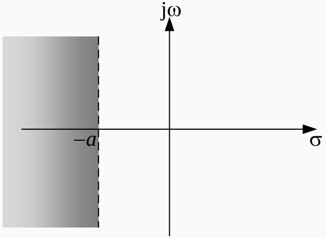


Para valores de s fora da RC, $X(s)$ não representa a transformada de Laplace de $x(t)$.

Exemplo: Considerações sobre a região de convergência

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) > -a$$





$$-e^{-at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) < -a$$

A transformada de Laplace $X(s)$ não caracteriza unicamente um sinal $x(t)$, a menos que a região de convergência seja fornecida!!!

Região de convergência

Portanto, conclui-se que:

- A região de convergência deve ser especificada quando operando <u>indistintamente</u> com sinais causais e não causais.
- Caso contrário, pode existir uma ambiguidade entre a representação no domínio de Laplace e no domínio do tempo.

Contudo, <u>restringindo</u> a análise apenas à sinais causais, esta ambiguidade desaparece.

Propriedades da transformada de Laplace (bilateral)

Transformada de Laplace (bilateral)

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt$$

Embora as seguintes propriedades sejam válidas:

- Linearidade
- Deslocamento no tempo
- Deslocamento no domínio s
- Escalamento
- Convolução
- Diferenciação no tempo
- Diferenciação no domínio s
- Integração no tempo

Alterações na região de convergência podem ocorrer!

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

1) Linearidade

Considerando

$$x_1(t) \Longleftrightarrow X_1(s),\ \mathrm{RC}_1 \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(s),\ \mathrm{RC}_2$$

tem-se que

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s),\ \mathrm{RC}_1 \cap \mathrm{RC}_2$$

A RC pode ser maior se houver cancelamento polo-zero.

Demonstração: Dado que $y(t) = ax_1(t) + bx_2(t)$, tem-se

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} [ax_1(t) + bx_2(t)]e^{-st}dt$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-st}dt + b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = aX_1(s) + bX_2(s),\ \mathrm{RC}_1 \cap \mathrm{RC}_2}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a RDC de $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ para

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$

e

$$x_2(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t).$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a RDC de $y(t) = x_1(t) - x_2(t)$ para

$$x_1(t) = e^{-2t}u(t)$$

e

$$x_2(t) = e^{-2t}u(t) - e^{-3t}u(t).$$

Resposta: Dado que

$$y(t) = x_1(t) - x_2(t) \Longleftrightarrow Y(s) = X_1(s) - X_2(s)$$

obtém-se

$$\boxed{Y(s) = \frac{1}{(s+3)},\ \mathrm{Re}(s) > -3}$$

Portanto, a RC é maior devido ao cancelamento polo-zero.

Propriedades de região de convergência

Exemplo: Determine a transformada de Laplace e a RDC de

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(-t)$$

Propriedades de região de convergência

Exemplo: Determine a transformada de Laplace e a RDC de

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}u(-t)$$

Resposta: É evidente que

$$e^{-2t}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s+2},\ \mathrm{Re}(s) > -2$$

e

$$e^{-t}u(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{s+1},\ \mathrm{Re}(s) < -1$$

Consequentemente,

$$\boxed{\begin{aligned} X(s) &= \frac{1}{s+2} - \frac{1}{s+1} \\ &= -\frac{1}{(s+1)(s+2)},\ -2 < \mathrm{Re}(s) < -1 \end{aligned}}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

2) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(t) \leftrightarrow X(s), \ \mathrm{RC}$$

tem-se que

$$x(t-t_0) \leftrightarrow e^{-st_0}X(s), \ \mathrm{RC}$$

Portanto, a RDC permanece inalterada.

Demonstração: Dado que $y(t) = x(t-t_0)$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t-t_0)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-s(t'+t_0)}dt' = e^{-st_0}\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-st'}dt' \\ &\Rightarrow \boxed{Y(s) = e^{-st_0}X(s), \ \mathrm{RC}} \end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

3) Deslocamento no domínio s

Seja

$$x(t) \leftrightarrow X(s),\ \mathrm{RC}_1$$

então

$$e^{s_0 t}x(t) \leftrightarrow X(s - s_0),\ \mathrm{RC}_1 + \mathrm{Re}(s_0)$$

Demonstração: Dado que $y(t) = e^{s_0 t}x(t)$, tem-se

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} e^{s_0 t}x(t)e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(s-s_0)t}x(t)dt$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = X(s - s_0),\ \mathrm{RC}_1 + \mathrm{Re}(s_0)}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de $y(t) = e^t\, x(t)$, dado que

$$x(t) \quad \rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)},\; -2 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

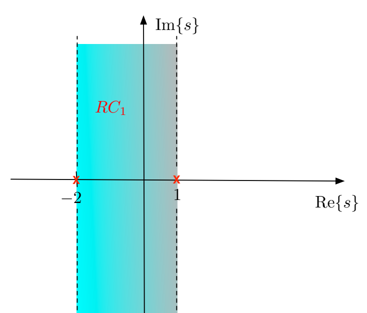
Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

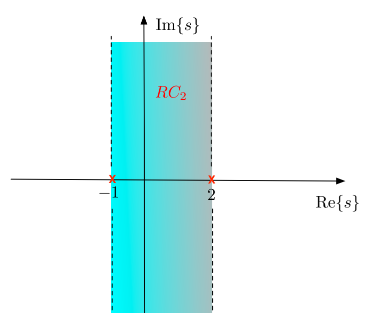
Exemplo: Determine a transformada de Laplace de $y(t) = e^t\, x(t)$, dado que

$$x(t) \quad \rightarrow \quad X(s) = \frac{1}{(s-1)(s+2)},\ -2 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

Resposta:

$$y(t) \quad \rightarrow \quad Y(s) = X(s-1) = \frac{1}{(s-2)(s+1)},\ -1 < \mathrm{Re}(s) < 2$$





Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

4) Escalamento da variável independente

Considerando

$$x(t) \leftrightarrow X(s),\ \mathrm{RC}_1$$

tem-se que

$$x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right),\ \ \frac{\mathrm{RC}_1}{a}$$

Demonstração: Dado que $y(t) = x(at)$ com $a > 0$, tem-se

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-st} dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at) e^{-st} dt$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-\frac{st'}{a}} dt' \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right),\ \ \frac{\mathrm{RC}_1}{a}}$$

Ao avaliar para $a < 0$, justifica-se a inclusão do operador $|\cdot|$.

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de $y(t) = x(-t)$, dado que

$$x(t) = u(t)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de $y(t) = x(-t)$, dado que

$$x(t) = u(t)$$

Resposta: Primeiramente, tem-se que

$$X(s) = \frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s) > 0$$

Logo, visto que

$$y(t) = x(-t) = u(-t) \quad \longrightarrow \quad Y(s) = X(-s)$$

obtém-se

$$\boxed{Y(s) = -\frac{1}{s},\ \mathrm{Re}(s) < 0}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

5) Convolução

Considerando

$$x_1(t) \leftrightarrow X_1(s),\ \mathrm{RC}_1 \quad \text{e} \quad x_2(t) \leftrightarrow X_2(s),\ \mathrm{RC}_2$$

tem-se que

$$y(t) = x_1(t) * x_2(t) \leftrightarrow Y(s) = X_1(s)X_2(s),\ \mathrm{RC}$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \leftrightarrow Y(s) = X_1(s)X_2(s),\ \mathrm{RC}$$

onde

$$\mathrm{RC} \supseteq \mathrm{RC}_1 \cap \mathrm{RC}_2$$

Observações:

- A RC pode ser maior se houver cancelamento polo-zero.
- A RC pode ser menor dependendo de RC_1 e RC_2.

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Demonstração: Dado que $y(t) = x(t) * h(t)$, tem-se

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] e^{-st}dt$$

Então, realizando uma troca de variáveis, i.e.,

$$\tau' = t - \tau \quad \longrightarrow \quad \frac{d\tau'}{dt} = 1 \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} t = -\infty & \to \tau' = -\infty \\ t = +\infty & \to \tau' = +\infty \end{cases}$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\tau')e^{-s(\tau'+\tau)}d\tau d\tau' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau')e^{-s\tau'}d\tau' \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = X(s)H(s), \quad \mathrm{RC} \supseteq \mathrm{RC}_1 \cap \mathrm{RC}_2}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de

$$y(t) = e^{-at}u(t) * u(-t), \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de

$$y(t) = e^{-at}u(t) * u(-t), \quad \mathrm{Re}(a) > 0$$

Resposta: Primeiro, observa-se que

$$e^{-at}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

e

$$u(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad -\frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) < 0.$$

Portanto,

$$\boxed{Y(s) = \frac{-1}{s(s+a)}, \quad -a < \mathrm{Re}(s) < 0}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Para exemplificar a resposta no domínio do tempo, considere que

$$Y(s) = -\frac{1}{as} + \frac{1}{a(s+a)}, \quad -a < \mathrm{Re}(s) < 0$$

Logo, da transformada inversa de Laplace, tem-se

$$\boxed{y(t) = \frac{1}{a}[u(-t) + e^{-at}u(t)]}$$

Analogamente, é possível mostrar que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)u(\tau-t)d\tau \\ &= \underbrace{\int_{0}^{\infty} e^{-a\tau}d\tau}_{t<0} + \underbrace{\int_{t}^{\infty} e^{-a\tau}d\tau}_{t\geq 0} \quad \Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{1}{a}[u(-t) + e^{-at}u(t)]} \end{aligned}$$

*Créditos: Khaled Jamal Bakri (Monitor de 2016/1 - 2017/2).

6) Diferenciação no domínio do tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(s),\ \mathrm{RC}_1$$

tem-se que

$$\frac{d}{dt}x(t) \Longleftrightarrow sX(s),\ \mathrm{RC}_2 \supseteq \mathrm{RC}_1$$

Demonstração: Dado que $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, tem-se

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt$$

$$= \underbrace{e^{-st}x(t)\big|_{-\infty}^{+\infty}}_{\to 0} - \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt \quad \leftarrow \text{Integração por partes!}$$

$$= s\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad \Rightarrow \boxed{Y(s) = sX(s), \quad \mathrm{RC}_2 \supseteq \mathrm{RC}_1}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

7) Diferenciação no domínio s

Seja

$$x(t) \Longleftrightarrow X(s), \quad \mathrm{RC}_1$$

então

$$-t\,x(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s),\ \mathrm{RC}_2 \supseteq \mathrm{RC}_1$$

Demonstração: Dado que $y(t) = -tx(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} -tx(t)e^{-st}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\left(\frac{d}{ds}e^{-st}\right)dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{ds}[x(t)e^{-st}]dt \\
&= \frac{d}{ds}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt \quad \Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{d}{ds}X(s), \quad \mathrm{RC}_2 \supseteq \mathrm{RC}_1}
\end{aligned}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de

$$y(t) = -te^{-at}u(t)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

Exemplo: Determine a transformada de Laplace de

$$y(t) = -te^{-at}u(t)$$

Resposta: Visto que

$$-t\,x(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s),\ \mathrm{RC}_2 \supseteq \mathrm{RC}_1$$

tem-se

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{d}{ds}X(s) \\ &= \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+a}\right) \end{aligned}$$

o que resulta em

$$\boxed{Y(s) = -\frac{1}{(s+a)^2},\ \ \mathrm{Re}(s) > -a}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (bilateral)

8) Integração no domínio do tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(s), \text{ RC}_1$$

tem-se que

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau \Longleftrightarrow \frac{X(s)}{s}, \text{ RC}_1 \cap \{\text{Re}(s) > 0\}$$

Demonstração: Dado que $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$, tem-se

$$Y(s) = \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau\right] e^{-st}dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau\right] e^{-st}dt$$

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = \frac{1}{s}X(s), \text{ RC}_1 \cap \text{Re}(s) > 0}$$

Propriedades de região de convergência

1) A RC consiste de faixas paralelas ao eixo $j\omega$
(As partes reais dos polos de $X(s)$ delimitam a RC!)

2) A RC não contém polos de $X(s)$

3) Se $x(t)$ tem duração limitada e é absolutamente integrável, a RC de $X(s)$ compreende todo o plano s

4) Se $x(t) = 0$ para $t < 0$, a RC de $X(s)$ é à direita do polo de $X(s)$ com maior parte real

5) Se $x(t) = 0$ para $t > 0$, a RC de $X(s)$ é à esquerda do polo de $X(s)$ com menor parte real

6) A RC é delimitada pelos polos de $X(s)$ ou estende-se até infinito.

Transformada de Laplace (unilateral)

Transformada de Laplace (unilateral)

Para o caso particular de sinais causais, tem-se

$$\boxed{X_u(s) = \int_{0^-}^{\infty} x(t) e^{-st} dt}$$

- A transformada bilateral e a unilateral são equivalentes quando $x(t) = 0$, $t < 0$
- Não é possível analisar sinais/sistemas não causais com a transformada unilateral.
- Em problemas práticos, os sinais e sistemas são causais.
- Nessa condição, existe uma relação de um-para-um entre $x(t)$ e $X_u(s)$, não havendo a necessidade de especificar a RC
- RC $\Rightarrow$ semi-plano à direita do polo com maior parte real!

Exemplos: Transformada de Laplace (unilateral)

1) Determine a transformada de Laplace (unilateral) de

(a) $x(t) = u(t)$

(b) $x(t) = u(t-3)$

(c) $x(t) = \delta(t)$

(d) $x(t) = \delta(t-t_0),\ \ t_0 > 0$

(e) $x(t) = u(t+3)$

Exemplos: Transformada de Laplace (unilateral)

1) Determine a transformada de Laplace (unilateral) de

(a) $x(t) = u(t)$

Resposta: $X(s) = \dfrac{1}{s}$

(b) $x(t) = u(t-3)$

Resposta: $X(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s}$

(c) $x(t) = \delta(t)$

Resposta: $X(s) = 1$

(d) $x(t) = \delta(t - t_0), \;\; t_0 > 0$

Resposta: $X(s) = e^{-st_0}$

(e) $x(t) = u(t+3)$

***Resposta*:** $X(s) = \dfrac{1}{s} \Leftarrow$ (Resposta para um sinal causal)

Exemplos: Transformada de Laplace (unilateral)

2) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$$

Exemplos: Transformada de Laplace (unilateral)

2) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$$

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$\begin{aligned} x(t) &= \cos(\omega_0 t)u(t) \\ &= \frac{1}{2}e^{+j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t) \end{aligned}$$

Então, dado que

$$e^{-at}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

obtém-se

$$\boxed{X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0}$$

Exemplos: Transformada de Laplace (unilateral)

2) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$$

Exemplos: Transformada de Laplace (unilateral)

2) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)u(t)$$

Resposta: Alternativamente, observe inicialmente que

$$x(t) = \frac{1}{2}e^{+j\omega_0 t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-j\omega_0 t}u(t)$$

Então, levando em conta que

$$u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s}$$

e

$$e^{s_0 t}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(s - s_0)$$

obtém-se

$$\boxed{X(s) = \frac{s}{s^2 + \omega_0^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0}$$

Tabela de pares da transformada de Laplace (unilateral)

$x(t)$	$X(s)$	RC
$t^n u(t)$	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\delta(t - t_0),\ t_0 \geq 0$	e^{-st_0}	para todo s
$t^n e^{-at} u(t)$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
$\cos(\omega_0 t) u(t)$	$\dfrac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$\mathrm{sen}(\omega_0 t) u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > 0$
$e^{-at} \cos(\omega_0 t) u(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$
$e^{-at} \mathrm{sen}(\omega_0 t) u(t)$	$\dfrac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\mathrm{Re}(s) > -a$

Transformada de Laplace (unilateral)

Propriedades

1) Linearidade:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \Longleftrightarrow aX_1(s) + bX_2(s)$$

2) Escalonamento no tempo:

$$x(at) \Longleftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{s}{a}\right), \quad a > 0$$

3) Deslocamento no tempo:

$$x(t - t_0) \Longleftrightarrow e^{-st_0} X(s), \quad t_0 \geq 0$$

4) Deslocamento no domínio s:

$$e^{s_0 t} x(t) \Longleftrightarrow X(s - s_0)$$

Transformada de Laplace (unilateral)

Propriedades:

5) Convolução:

$$x(t) * y(t) \Longleftrightarrow X(s)Y(s)$$

6) Diferenciação no domínio s:

$$-tx(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$$

7) Diferenciação no domínio do tempo:

$$\frac{d}{dt}x(t) \Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

8) Integração no domínio do tempo:

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Longleftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (unilateral)

Propriedades:

9) Teorema do valor inicial:

Se $x(t) = 0$ para $t < 0$ e $M < N$, tem-se que

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s)$$

10) Teorema do valor final:

Se $\lim_{t \to \infty} x(t) < \infty$, tem-se que

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s)$$

Propriedades da Transformada de Laplace (unilateral)

Demonstração: Dado que $y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
Y(s) &= \int_0^\infty y(t)e^{-st}dt \\
&= \int_0^\infty \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \\
&= e^{-st}x(t)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^\infty x(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt \quad \leftarrow \text{Integração por partes!} \\
&= [e^{-\infty}x(\infty) - e^0x(0)] - \int_0^\infty x(t)\frac{d}{dt}e^{-st}dt \\
&= -x(0^-) + s\int_0^\infty x(t)e^{-st}dt \quad \leftarrow \text{Assumindo convergência!}
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Rightarrow \boxed{Y(s) = sX(s) - x(0^-)}$$

Propriedades da Transformada de Laplace (unilateral)

Demonstração: Primeiramente, observa-se que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau + \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau$$

Então, da transformada de Laplace (unilateral), tem-se

$$Y(s) = \int_{0}^{\infty} y(t)e^{-st}dt = \int_{0}^{\infty} \Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}_{\text{Constante em } t} + \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau \Bigg] e^{-st}dt$$

$$= \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s} + \int_{0}^{\infty} \left[\int_{0}^{\infty} x(\tau)u(t-\tau)d\tau \right] e^{-st}dt$$

Portanto,

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \Longleftrightarrow \frac{X(s)}{s} + \frac{\int_{-\infty}^{0^-} x(\tau)d\tau}{s}}$$

*Créditos: Emilly Zucunelli Krepkij (2019/1).

Propriedades da Transformada de Laplace (unilateral)

Demonstração: De

$$\frac{d}{dt}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad sX(s) - x(0^-)$$

tem-se

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \\ &= \int_{0^-}^{0^+} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \\ &= e^{-st}x(t)\Big|_{0^-}^{0^+} + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Rightarrow \boxed{x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s)}$$

*Créditos: Mateus Zeferino de Carvalho (2018/2).

Propriedades da Transformada de Laplace (unilateral)

Demonstração: De

$$\frac{d}{dt}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad sX(s) - x(0^-)$$

tem-se

$$\begin{aligned} sX(s) - x(0^-) &= \int_{0^-}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \\ &= x(0^+) - x(0^-) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt \end{aligned}$$

Logo, fazendo

$$\begin{aligned} \lim_{s\to 0} sX(s) &= \lim_{s\to 0}\left[x(0^+) + \int_{0^+}^{\infty} \frac{d}{dt}x(t)e^{-st}dt\right] \\ &= x(0^+) + x(\infty) - x(0^+) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\Rightarrow \boxed{x(\infty) = \lim_{s\to 0} sX(s)}$$

*Créditos: Eduardo Eugenio Rodrigues Sartor (2018/2).

Exemplo: Tabela e propriedades

1) Determine a transformada de Laplace (unilateral) de

$$x(t) = -e^{3t}u(t) * tu(t)$$

Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-tx(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$$

$$u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$x(t) * y(t) \Longleftrightarrow X(s)Y(s)$$

Exemplo: Tabela e propriedades

1) Determine a transformada de Laplace (unilateral) de

$$x(t) = -e^{3t}u(t) * tu(t)$$

Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-tx(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$$

$$u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0$$

$$x(t) * y(t) \Longleftrightarrow X(s)Y(s)$$

Resposta:

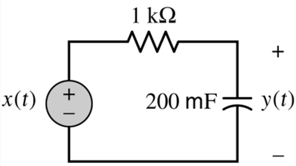
$$\boxed{X(s) = \frac{-1}{s^2(s-3)}}$$

Exemplo: Tabela e propriedades

2) Determine $Y(s)$ através da transformada de Laplace (unilateral).

$$x(t) = te^{2t}u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$



Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-tx(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$$

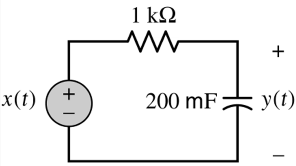
$$x(t) * y(t) \Longleftrightarrow X(s)Y(s)$$

Exemplo: Tabela e propriedades

2) Determine $Y(s)$ através da transformada de Laplace (unilateral).

$$x(t) = te^{2t}u(t)$$

$$h(t) = \frac{1}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}u(t)$$



Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-tx(t) \Longleftrightarrow \frac{d}{ds}X(s)$$

$$x(t) * y(t) \Longleftrightarrow X(s)Y(s)$$

Resposta:

$$\boxed{Y(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{(s-2)^2(s+\frac{1}{RC})}}$$

Exemplo: Teorema do valor inicial e final

3) Determine o valor inicial e final de $x(t)$ a partir de

$$X(s) = \frac{7s + 10}{s(s + 2)}$$

Lembrete:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s) \quad \longleftarrow (N > M)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) \quad \longleftarrow \text{(polos no SPLE)}$$

Exemplo: Teorema do valor inicial e final

3) Determine o valor inicial e final de $x(t)$ a partir de

$$X(s) = \frac{7s + 10}{s(s+2)}$$

Lembrete:

$$x(0^+) = \lim_{s \to \infty} sX(s) \quad \longleftarrow (N > M)$$

$$x(\infty) = \lim_{s \to 0} sX(s) \quad \longleftarrow (\text{polos no SPLE})$$

Resposta:

$$\boxed{x(0^+) = 7 \quad \text{e} \quad x(\infty) = 5}$$

Nota: O resultado obtido pode ser verificado através de

$$\mathcal{L}^{-1}[X(s)] \Longrightarrow x(t) = 5u(t) + 2e^{-2t}u(t)$$

Exemplo: Tabela e propriedades

4) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = e^{-2t}u(t-1)$$

Exemplo: Tabela e propriedades

4) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = e^{-2t}u(t-1)$$

Resposta:

$$\begin{aligned}
e^{-2t}u(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2 \\
e^{-2}e^{-2(t-1)}u(t-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{-s}}{s+2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2 \\
e^{-2(t-1)}u(t-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{-(s+2)}}{s+2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -2
\end{aligned}$$

Exemplo: Tabela e propriedades

5) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = -te^{-2t}\frac{d}{dt}u(t-1)$$

Exemplo: Tabela e propriedades

5) Determine a transformada de Laplace de

$$x(t) = -te^{-2t}\frac{d}{dt}u(t-1)$$

Resposta:

$$\begin{aligned}
u(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \\
u(t-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{e^{-s}}{s}, \quad \mathrm{Re}(s) > 0 \\
\frac{d}{dt}u(t-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad s\left(\frac{e^{-s}}{s}\right) = e^{-s}, \quad \text{(todo plano } s\text{)} \\
e^{-2t}\left[\frac{d}{dt}u(t-1)\right] \quad &\Longleftrightarrow \quad e^{-(s+2)}, \quad \text{(todo plano } s\text{)} \\
-te^{-2t}\left[\frac{d}{dt}u(t-1)\right] \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{d}{ds}e^{-(s+2)} = -e^{-(s+2)}, \quad \text{(todo plano } s\text{)}
\end{aligned}$$

Transformada inversa de Laplace

Transformada de Laplace inversa

$\Rightarrow$ **Definição da transformada de Laplace inversa:**

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}ds}$$

- Integral de contorno no plano complexo.
- Pode ser calculada usando integração pelo método dos resíduos (variáveis complexas).
- A constante σ deve ser escolhida para que o contorno de integração pertença à RC de $X(s)$
- **Todavia, tal estudo está fora do escopo da disciplina.**

Transformada de Laplace inversa

A abordagem considerada leva em conta que:

- A transformada de Laplace é linear, i.e.,

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &\Longleftrightarrow X_1(s) \\
x_2(t) &\Longleftrightarrow X_2(s) \\
a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) &\Longleftrightarrow a_1\, X_1(s) + a_2\, X_2(s)
\end{aligned}
$$

- Existe uma relação de um-para-um entre $x(t)$ e $X(s)$.

Portanto, basta expressar a função desejada, i.e.,

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0}$$

na forma de pares já conhecidos.

Transformada de Laplace inversa

Função polinomial em s:

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0}$$

- Se $M \geq N$ (função imprópria),

$$X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

- Se $M < N$ (função própria),

$$X(s) = \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

Para detalhes, veja: B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 39-48)

Transformada de Laplace inversa

Como realizar a decomposição?

$$X(s) = \frac{b_M s^M + b_{M-1} s^{M-1} + \cdots + b_0}{a_N s^N + a_{N-1} s^{N-1} + \cdots + a_0} \longrightarrow X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

Expansão em frações parciais:

- Método de eliminação de frações
- Método de Heaviside
- Outras variações

Atenção: A expansão difere se $X(s)$ contiver

- Fatores distintos
- Fatores complexos
- Fatores quadráticos
- Fatores repetidos

***Para detalhes, veja:** B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 39-48)

Transformada de Laplace inversa

Realizando a expansão em frações parciais em $X(s)$, tem-se

$$X(s) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

Fatores distintos:

$$A_k e^{p_k t} u(t) \Longleftrightarrow \frac{A_k}{s - p_k}$$

Fatores repetidos:

$$\frac{A_k t^{n-1}}{(n-1)!} e^{p_k t} u(t) \Longleftrightarrow \frac{A_k}{(s - p_k)^n}$$

No caso de polos complexos conjugados em $X(s)$, considera-se fatores quadráticos na expansão em frações parciais.

Exemplo: Expansão em frações parciais

1) Determine a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

1) Determine a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{s+2}{(s+1)(s+3)}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

Resposta: Considerando fatores distintos, tem-se que

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{s+3}$$

onde

$$A_1 = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = \frac{1}{2}$$

$$A_2 = (s+3)X(s)\Big|_{s=-3} = \frac{1}{2}$$

Portanto,

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+3}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1}$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

Então, levando em conta que

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

obtém-se a partir de

$$X(s) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+1} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{s+3}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

que

$$e^{-t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+1}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

e

$$e^{-3t}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+3}, \quad \mathrm{Re}(s) > -3$$

Portanto,

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2}e^{-t}u(t) + \frac{1}{2}e^{-3t}u(t)}$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

2) Determine a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

2) Determine a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{3s+4}{(s+1)(s+2)^2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1$$

Resposta: Considerando fatores repetidos, tem-se que

$$X(s) = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+2)^2} + \frac{A_2'}{s+2}$$

Então, determinando

$$A_1 = (s+1)X(s)\Big|_{s=-1} = 1$$

$$A_2 = (s+2)^2 X(s)\Big|_{s=-2} = 2$$

$$A_2' = \frac{d}{ds}\left[(s+2)^2 X(s)\right]\Big|_{s=-2} = -1$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

obtém-se

$$\boxed{X(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{2}{(s+2)^2} - \frac{1}{s+2}, \quad \mathrm{Re}(s) > -1}$$

Finalmente, dado que

$$t^n e^{-at} u(t) \Longleftrightarrow \frac{n!}{(s+a)^{n+1}}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

a transformada de Laplace inversa é determinada como

$$\boxed{x(t) = (e^{-t} + 2te^{-2t} - e^{-2t})u(t)}$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

3) Determine a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{-5s - 7}{(s+1)(s-1)(s+2)}, \quad -1 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

Exemplo: Expansão em frações parciais

3) Determine a transformada de Laplace inversa de

$$X(s) = \frac{-5s - 7}{(s+1)(s-1)(s+2)}, \quad -1 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

Resposta: Primeiramente, realizando a expansão em frações parciais obtém-se

$$X(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{2}{s-1} + \frac{1}{s+2}, \quad -1 < \mathrm{Re}(s) < 1$$

Logo, considerando

$$e^{-at}u(t) \leftrightarrow \frac{1}{s+a}, \quad \mathrm{Re}(s) > -a$$

é possível concluir que

$$\boxed{x(t) = e^{-t}u(t) + 2e^{t}u(-t) + e^{-2t}u(t)}$$

Solução de equações diferenciais através da transformada de Laplace

Solução de equações diferenciais

Como já discutido, a relação de entrada e saída de um sistema pode ser descrita por

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

Logo, assumindo condições iniciais não nulas, tem-se a partir da transformada de Laplace (unilateral) que

$$A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s)$$

onde

$$A(s) = s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \longleftarrow \text{Coeficientes de } Y(s)$$

$$B(s) = b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \longleftarrow \text{Coeficientes de } X(s)$$

$$C(s) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} \frac{d^l}{dt^l} y(t) \Big|_{t=0^-} \longleftarrow \text{Condições iniciais}$$

Solução de equações diferenciais

A partir de

$$A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s)$$

observa-se que:

- Condições iniciais nulas $\longrightarrow C(s) = 0$
- Entrada zero $\longrightarrow B(s)X(s) = 0$

Portanto, a resposta completa do sistema é dada por

$$Y(s) = Y_{\text{zs}}(s) + Y_{\text{zi}}(s)$$

sendo a resposta ao estado zero obtida como

$$Y_{\text{zs}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)}X(s)$$

e a resposta a entrada zero como

$$Y_{\text{zi}}(s) = \frac{C(s)}{A(s)}$$

Solução de equações diferenciais

Então, a partir de

$$Y(s) = \overbrace{\underbrace{\frac{B(s)}{A(s)}}_{H(s)} X(s)}^{\text{Resp. ao estado zero}} + \overbrace{\frac{C(s)}{A(s)}}^{\text{Resp. à entrada zero}}$$

realiza-se a expansão em frações parciais, i.e.,

$$Y(s) = \sum_{k=0}^{M-N} c_k s^k + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{s - p_k}$$

Finalmente, determina-se a resposta do sistema no domínio do tempo utilizando os pares de transformada já estabelecidos.

Solução de equações diferenciais

Resumindo, a solução pode ser obtida da seguinte forma:

1) Aplica-se a transformada de Laplace à equação diferencial.
   (Transformada unilateral no caso de condições iniciais $\neq 0$.)

2) Explicita-se $Y(s)$ em função dos parâmetros da equação diferencial $A(s)$ e $C(s)$ como também de $X(s)$, i.e.,

$$Y(s) = \frac{B(s)}{A(s)}X(s) + \frac{C(s)}{A(s)}$$

3) Se necessário, realiza-se a expansão em frações parciais de $Y(s)$

4) Determina-se a transformada de Laplace inversa de $Y(s)$ para encontrar $y(t)$, utilizando os pares já conhecidos.

Exemplo: Solução de equações diferenciais

1) Determine $y(t)$ para

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 5\,\frac{d}{dt}y(t) + 6\,y(t) = \frac{d}{dt}x(t) + x(t)$$

com

$$x(t) = e^{-4t}\,u(t), \qquad y(0^-) = 2 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}(0^-) = 1$$

Lembrete:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \Longleftrightarrow s^2\,X(s) - s\,x(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

Aplicando a transformada de Laplace (unilateral), tem-se que

$$\underbrace{(s^2+5s+6)}_{\text{polinômio característico}} Y(s) - s\,y(0^-) - \dot{y}(0^-) - 5\,y(0^-) = s\,X(s) + X(s)$$

Então, explicitando $Y(s)$, obtém-se

$$Y(s) = \underbrace{\frac{s+1}{s^2+5s+6}}_{H(s)} X(s) + \frac{y(0^-)s + [5y(0^-) + \dot{y}(0^-)]}{s^2+5s+6}$$

Agora, considerando que

$$X(s) = \frac{1}{s+4}, \quad \mathrm{Re}(s) > -4$$

a saída do sistema é obtida como

$$Y(s) = \overbrace{\frac{s+1}{\underbrace{(s^2+5s+6)}_{\text{modos naturais}} \; \underbrace{(s+4)}_{\text{modo forçado}}}}^{\text{Resposta ao Estado Zero}} + \overbrace{\frac{y(0^-)s + [5y(0^-) + \dot{y}(0^-)]}{\underbrace{s^2+5s+6}_{\text{modos naturais}}}}^{\text{Resposta à Entrada Zero}}$$

Então, substituindo os valores numéricos de $y(0^-)$ e $\dot{y}(0^-)$,

$$Y(s) = \overbrace{\frac{s+1}{(s+2)(s+3)(s+4)}}^{\text{Resposta ao Estado Zero}} + \overbrace{\frac{2s+11}{(s+2)(s+3)}}^{\text{Resposta à Entrada Zero}}$$

e realizando a expansão em frações parciais,

$$Y(s) = \overbrace{\frac{-\frac{1}{2}}{s+2} + \frac{2}{s+3} + \frac{-\frac{3}{2}}{s+4}}^{\text{Resposta ao Estado Zero}} + \overbrace{\frac{7}{s+2} + \frac{-5}{s+3}}^{\text{Resposta à Entrada Zero}}$$

$Y(s)$ reduz-se a

$$Y(s) = \overbrace{\frac{13/2}{s+2} + \frac{-3}{s+3}}^{\text{Resp. natural}} + \overbrace{\frac{-3/2}{s+4}}^{\text{Resp. forçada}}$$

Finalmente, determinando a transformada de Laplace inversa,

$$\boxed{y(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)}$$

Formas de decompor a resposta do sistema:

1a) Resposta ao estado zero:

$$y_{\mathrm{zs}}(t) = \left[-\frac{1}{2}e^{-2t} + 2e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-4t}\right]u(t)$$

1b) Resposta à entrada zero:

$$y_{\mathrm{zi}}(t) = [7e^{-2t} - 5e^{-3t}]u(t)$$

2a) Resposta natural (composta por modos naturais):

$$y_{\mathrm{n}}(t) = \left[\frac{13}{2}e^{-2t} - 3e^{-3t}\right]u(t)$$

2b) Resposta forçada (composta por modos forçados):

$$y_{\mathrm{f}}(t) = -\frac{3}{2}e^{-4t}u(t)$$

Para detalhes, veja B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 185)

Exemplo: Solução de equações diferenciais

2) Determine $y(t)$ para

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + y(t) = 8x(t)$$

com

$$x(t) = e^{-t}\,u(t), \qquad y(0^-) = 0 \qquad \text{e} \qquad \dot{y}(0^-) = 2$$

Lembrete:

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t) \Longleftrightarrow s^2\,X(s) - s\,x(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{d}{dt}x(t) \Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

$$\cos(\omega_1 t)u(t) \Longleftrightarrow \frac{s}{s^2 + \omega_1^2}$$

$$\mathrm{sen}(\omega_1 t)u(t) \Longleftrightarrow \frac{\omega_1}{s^2 + \omega_1^2}$$

Exemplo: Solução de equações diferenciais

A partir da transformada de Laplace (unilateral), tem-se

$$Y(s) = \underbrace{\frac{8}{s^2+1}X(s)}_{\text{Resp. ao estado zero}} + \underbrace{\frac{sy(0^-)+\dot{y}(0^-)}{s^2+1}}_{\text{Resp. à entrada zero}}$$

Então, substituindo $X(s)$ e as condições iniciais, obtém-se

$$Y(s) = \frac{8}{(s^2+1)(s+1)} + \frac{2}{s^2+1}$$

Agora, realizando a expansão em frações parciais,

$$Y(s) = \frac{As+B}{(s^2+1)} + \frac{C}{(s+1)} + \frac{2}{s^2+1}$$

o que implica (tomando o MMC) que

$$8 = (As+B)(s+1) + C(s^2+1)$$

Exemplo: Solução de equações diferenciais

De

$$8 = (As + B)(s + 1) + C(s^2 + 1)$$

obtém-se

$$\begin{cases} C = 4, & s = -1 \\ B = 4, & s = 0 \\ A = -4, & \dfrac{d}{ds}(.)\Big|_{s=0} \end{cases}$$

Portanto,

$$\boxed{Y(s) = \frac{-4s}{(s^2+1)} + \frac{4}{(s^2+1)} + \frac{4}{(s+1)} + \frac{2}{s^2+1}}$$

Finalmente, a reposta do sistema $y(t)$ é obtida tomando a transformada inversa de Laplace (como mostrado a seguir).

*Créditos: Rafael Hickmann Albarello (2018/1).

Exemplo: Solução de equações diferenciais

$$y(t) = [4e^{-t} + 6\text{sen}(t) - 4\cos(t)]u(t)$$

1a) Resposta ao estado zero:

$$y_{\text{zs}}(t) = 4[e^{-t} + \text{sen}(t) - \cos(t)]u(t)$$

1b) Resposta à entrada zero:

$$y_{\text{zi}}(t) = 2\text{sen}(t)u(t)$$

2a) Resposta natural (composta por modos naturais):

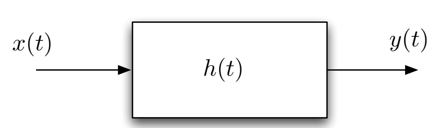
$$y_{\text{n}}(t) = [6\text{sen}(t) - 4\cos(t)]u(t)$$

2b) Resposta forçada (composta por modos forçados):

$$y_{\text{f}}(t) = 4e^{-t}u(t)$$

Função de transferência

Função de transferência



No domínio do tempo,

$$y(t) = h(t) * x(t) \longrightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

Então, tomando a transformada de Laplace, tem-se

$$Y(s) = H(s)X(s) \longrightarrow \boxed{H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}}$$

Observações:

- A função de transferência é a razão entre a transformada de Laplace da saída pela entrada (para condições iniciais nulas).
- Como $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$, $H(s)$ é a transformada de Laplace da resposta ao impulso, i.e., $H(s) = \mathcal{L}[h(t)]$

Função de transferência

Analogamente, a partir da equação diferencial,

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)$$

tem-se que

$$A(s)Y(s) - C(s) = B(s)X(s)$$

$$A(s) = s^N + a_{N-1}s^{N-1} + \cdots + a_1 s + a_0 \longleftarrow \text{Coeficientes de } Y(s)$$

$$B(s) = b_M s^M + b_{M-1}s^{M-1} + \cdots + b_1 s + b_0 \longleftarrow \text{Coeficientes de } X(s)$$

$$C(s) = \sum_{k=1}^{N} \sum_{l=0}^{k-1} a_k s^{k-1-l} \frac{d^l}{dt^l} y(t)\Big|_{t=0^-} \longleftarrow \text{Condições iniciais}$$

Portanto, a função de transferência do sistema é dada por

$$\boxed{H(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

Função de transferência

Portanto, a partir da equação diferencial, tem-se

$$\boxed{H(s) = \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\displaystyle\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}}$$

Observações:

- Polinômio do numerador de $H(s) \longrightarrow$ coeficientes b_k
- Polinômio do denominador de $H(s) \longrightarrow$ coeficiente a_k
- Dada a função de transferência $H(s)$, uma equação diferencial também pode ser obtida.

Exemplo: Função de transferência

Determine a função de transferência do sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) - 3x(t)$$

Lembrete:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Longleftrightarrow s^2\,X(s) - s\,x(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

Exemplo: Função de transferência

Determine a função de transferência do sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2\frac{d}{dt}x(t) - 3x(t)$$

Lembrete:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \Longleftrightarrow s^2\,X(s) - s\,x(0^-) - \dot{x}(0^-)$$

$$\frac{dx(t)}{dt} \Longleftrightarrow sX(s) - x(0^-)$$

Resposta:

$$\boxed{H(s) = \frac{2s-3}{s^2+3s+2}}$$

Estabilidade e causalidade

Estabilidade e causalidade

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \quad \Longrightarrow H(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M} (s - z_k)}{a_M \prod_{k=1}^{N} (s - p_k)}$$

- Os polos e zeros da função de transferência oferecem muitos *insights* sobre o comportamento do sistema.
- A estabilidade é determinada pelos modos naturais do sistema
  $\Rightarrow$ É função da localização das raízes características.
  $\Rightarrow$ As raízes características são os polos p_k de $H(s)$.
  $\Rightarrow$ A estabilidade é ditada pela localização dos polos de $H(s)$.
- A resposta ao impulso é caracterizada pela soma ponderada dos modos naturais do sistema.

Estabilidade e causalidade

$$H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k} \quad \Longrightarrow H(s) = \frac{b_M \prod_{k=1}^{M}(s - z_k)}{a_M \prod_{k=1}^{N}(s - p_k)}$$

A partir dos polos de $H(s)$, os modos naturais do sistema podem assumir as seguintes formas:

$$\textbf{Sistemas causais} \begin{cases} e^{\sigma_k t}\, u(t), & p_k = \sigma_k \quad \text{reais} \\ e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k\, t)\, u(t), & \begin{cases} p_k = \sigma_k + j\omega_k \\ p_k^* = \sigma_k - j\omega_k \end{cases} \end{cases}$$

$$\textbf{Sistemas anti-causais} \begin{cases} e^{\sigma_k t}\, u(-t), & p_k = \sigma_k \quad \text{reais} \\ e^{\sigma_k t} \cos(\omega_k\, t)\, u(-t), & \begin{cases} p_k = \sigma_k + j\omega_k \\ p_k^* = \sigma_k - j\omega_k \end{cases} \end{cases}$$

Estabilidade e causalidade

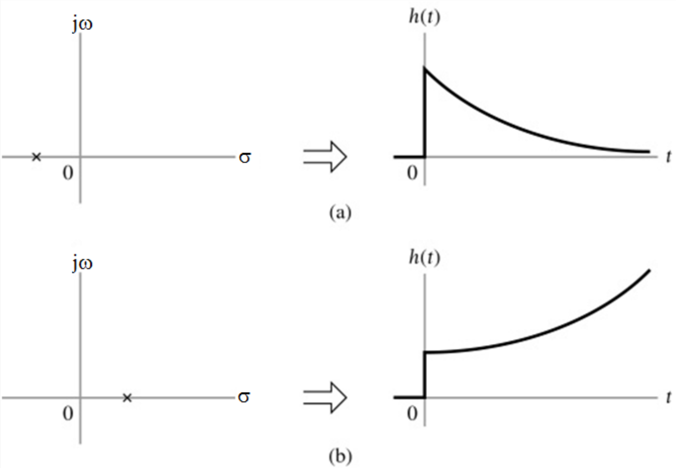
Como condição para estabilidade, tem-se que $h(t)$ deve ser absolutamente integrável. Consequentemente,

- **Sistemas causais** $\longrightarrow \mathrm{Re}(p_k) < 0$
- **Sistemas anti-causais** $\longrightarrow \mathrm{Re}(p_k) > 0$
- **Sistemas não causais [$h(t)$ existe de $-\infty$ a $+\infty$]:**
  (a) Parte causal de $h(t) \longrightarrow \mathrm{Re}(p_k) < 0$
  (b) Parte anti-causal de $h(t) \longrightarrow \mathrm{Re}(p_k) > 0$
- Estabilidade $\Rightarrow$ RC de $H(s)$ deve conter o eixo $s = j\omega$.

Os polos e zeros comuns devem ser cancelados em $H(s)$ antes da análise (BIBO estabilidade).

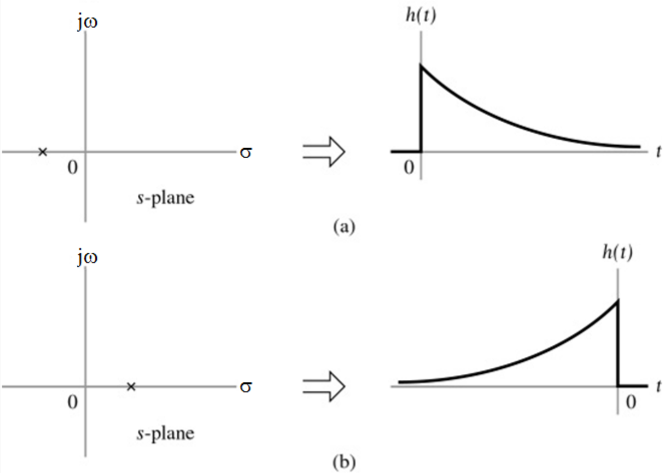
Estabilidade e causalidade

⇒ **Considerando que o sistema é causal:**



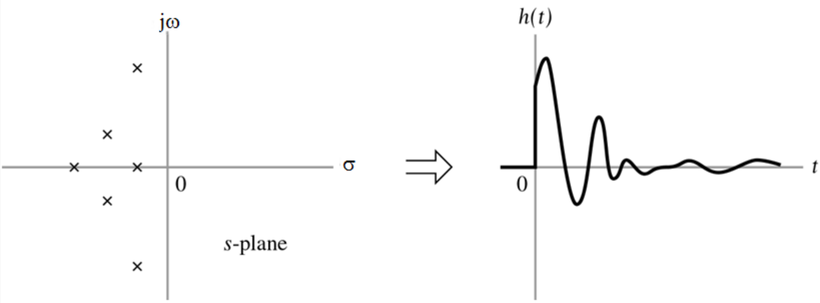
Estabilidade e causalidade

⇒ **Considerando que o sistema é estável:**



Estabilidade e causalidade

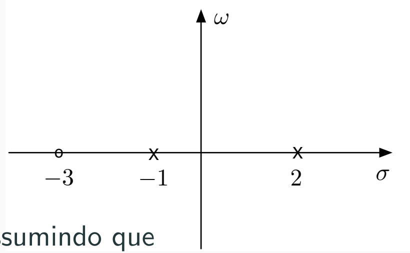
⇒ **Considerando que o sistema é estável e causal:**



Exemplo: Estabilidade e causalidade

1) Considerando

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$$



determine a resposta ao impulso assumindo que

(a) o sistema é estável; e
(b) o sistema é causal

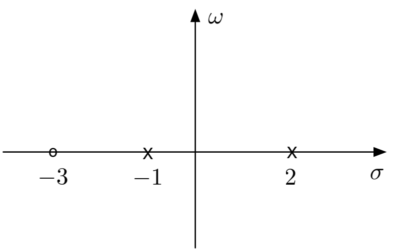
Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}(s) < -a$$

Exemplo: Estabilidade e causalidade

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$$



Resposta:

(a) Assumindo que o sistema é estável,

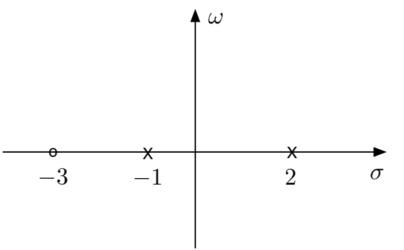
$$RC \quad -1 < \mathrm{Re}(s) < 2 \quad \leftarrow \text{Inclui o eixo } s = j\omega$$

tem-se que

$$H(s) = \frac{-\frac{2}{3}}{\underbrace{s+1}_{\mathrm{Re}(s)>-1}} + \frac{\frac{5}{3}}{\underbrace{s-2}_{\mathrm{Re}(s)<2}} \longrightarrow \boxed{h(t) = -\frac{2}{3}\,e^{-t}\,u(t) - \frac{5}{3}\,e^{2t}\,u(-t)}$$

Exemplo: Estabilidade e causalidade

$$H(s) = \frac{s+3}{(s+1)(s-2)}$$



Resposta:

(b) Assumindo que o sistema é causal,

$$\mathrm{Re}(s) > 2 \quad \leftarrow \text{Não inclui o eixo } s = j\omega$$

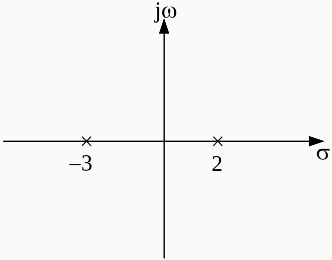
tem-se que

$$H(s) = \underbrace{\frac{-\frac{2}{3}}{s+1}}_{\mathrm{Re}(s)>2} + \underbrace{\frac{\frac{5}{3}}{s-2}}_{\mathrm{Re}(s)>2} \longrightarrow \boxed{h(t) = -\frac{2}{3}\,e^{t}\,u(t) + \frac{5}{3}\,e^{2t}\,u(t)}$$

Exemplo: Estabilidade e causalidade

2) Considerando

$$H(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-2}$$



determine a resposta ao impulso assumindo que

(a) o sistema é estável; e

(b) o sistema é causal

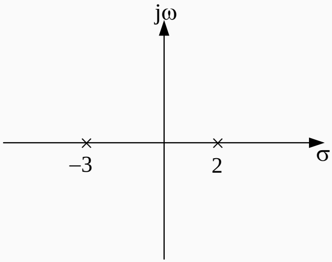
Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}(s) < -a$$

Exemplo: Estabilidade e causalidade

$$H(s) = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-2}$$



Resposta:

(a) Assumindo que o sistema é estável,

$$\boxed{h(t) = 2e^{-3t}u(t) - e^{2t}u(-t)}$$

(b) Assumindo que o sistema é causal,

$$\boxed{h(t) = 2e^{-3t}u(t) + e^{2t}u(t)}$$

Exemplo: Estabilidade e causalidade

3) Considerando

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

determine a resposta ao impulso assumindo que

(a) o sistema é estável; e

(b) o sistema é causal

Lembrete:

$$e^{-at}u(t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}(s) > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \Longleftrightarrow \frac{1}{s+a}, \mathrm{Re}(s) < -a$$

Exemplo: Estabilidade e causalidade

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

Resposta:

(a) Assumindo que o sistema é estável,

$$\boxed{h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)}$$

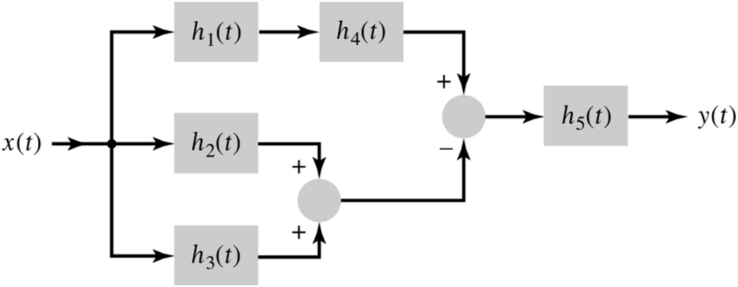
(b) Assumindo que o sistema é causal,

$$\boxed{h(t) = e^{-t}u(t) - e^{-2t}u(t)}$$

Note que esse sistema pode ser simultaneamente estável e causal!

Interconexão de sistemas

Interconexão de sistemas

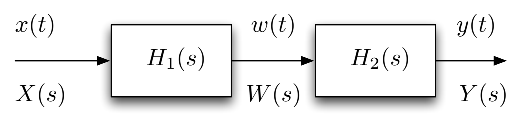


Como analisar sistemas complexos interconectados a luz da transformada de Laplace?

- Através da decomposição em subsistemas menores.
- Os subsistemas menores podem ser mais facilmente estudados.

Interconexão de sistemas

⇒ Conexão série



Note que,

$$\left.\begin{aligned} W(s) &= H_1(s)X(s) \\ Y(s) &= H_2(s)W(s) \end{aligned}\right\} \Rightarrow Y(s) = H_1(s)H_2(s)X(s)$$

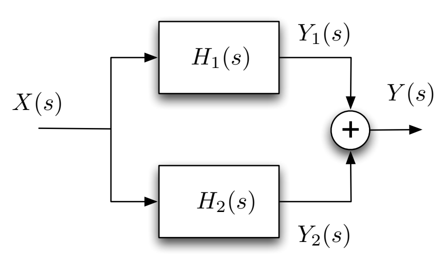
Portanto,

$$\boxed{H(s) = H_1(s)H_2(s)}$$

*O resultado pode ser verificado pela definição de convolução.

Interconexão de sistemas

⇒ Conexão paralela



Note que,

$$\left.\begin{array}{l} Y_1(s) = H_1(s)X(s) \\ Y_2(s) = H_2(s)X(s) \end{array}\right\} \Rightarrow Y(s) = \left[H_1(s) + H_2(s)\right] X(s)$$

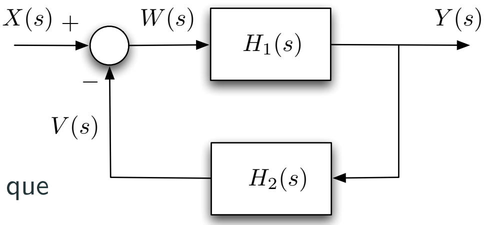
Logo,

$$\boxed{H(s) = H_1(s) + H_2(s)}$$

*O resultado pode ser verificado pela definição de convolução.

Interconexão de sistemas

⇒ Conexão paralela com realimentação



Considerando que

$$\left.\begin{aligned} Y(s) &= H_1(s)W(s) \\ W(s) &= X(s) - V(s) \\ V(s) &= H_2(s)Y(s) \end{aligned}\right\}$$

$$W(s) = X(s) - H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}X(s)$$

tem-se

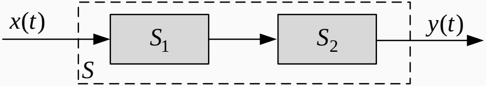
$$\boxed{H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}}$$

*O resultado pode ser verificado pela definição de convolução.

Estabilidade: Interna e BIBO

Estabilidade: Interna e BIBO

⇒ Considerações sobre estabilidade interna e BIBO:



$$S_1 \quad \Longrightarrow \quad H_1(s) = \frac{1}{(s-1)}$$

e

$$S_2 \quad \Longrightarrow \quad H_2(s) = \frac{(s-1)}{(s+1)}$$

Observações:

- S é internamente instável (veja S_1)
- S é assintoticamente estável (BIBO)
- Logo, a BIBO estabilidade não garante a estabilidade interna.

Análise de circuitos elétricos

Análise de circuitos elétricos

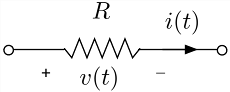
- Circuitos elétricos podem também ser analisados através da transformada de Laplace (domínio s).
- Para analisar um circuito elétrico no domínio s, deve-se
  1) Substituir todas as variáveis do circuito por suas transformadas
  2) Substituir todas as fontes por fontes "transformadas"
  3) Substituir os elementos do circuito por seus equivalentes "transformados", i.e., "resistências generalizadas/impedâncias"
- As leis de Kirchhoff permanecem válidas no domínio s, i.e.,

$$\sum_{j=1}^{k} v_j(t) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{k} V_j(s) \quad \text{e} \quad \sum_{j=1}^{k} i_j(t) \Longleftrightarrow \sum_{j=1}^{k} I_j(s)$$

- Consequentemente, as técnicas de simplificação já desenvolvidas podem também ser utilizadas, a saber:
  - Impedância equivalente série e paralelo
  - Regras de divisão de tensão ou corrente
  - Teoremas de Thévenin e Norton

Análise de circuitos elétricos

⇒ **Resistências** $\quad v(t) = R\,i(t)$

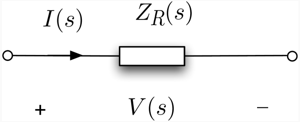


Aplicando a transformada de Laplace unilateral (ou "bilateral"),

$$V(s) = R\,I(s)$$

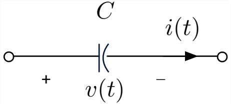
$$Z_R(s) = \frac{V(s)}{I(s)} = R \quad \rightarrow \text{impedância}$$

$$Y_R(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{R} \quad \rightarrow \text{admitância}$$



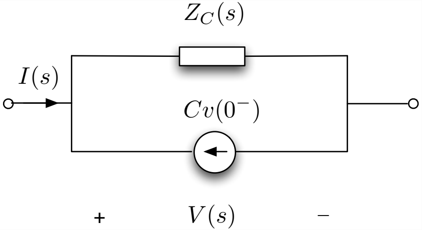
Análise de circuitos elétricos

$\Rightarrow$ **Capacitâncias** $$i(t) = C\,\frac{dv(t)}{dt}$$

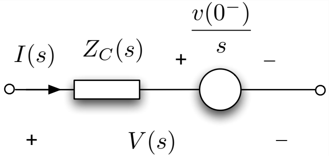


Aplicando a transformada de Laplace unilateral,

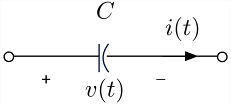
$$I(s) = sC\,V(s) - C\,v(0^-)$$



$$V(s) = \frac{1}{sC}\,I(s) + \frac{v(0^-)}{s}$$



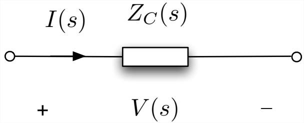
⇒ **Capacitâncias** $\quad i(t) = C\,\dfrac{dv(t)}{dt}$



Considerando tensão inicial no capacitor igual a zero,

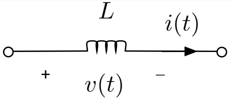
$$Z_C(s) = \left.\frac{V(s)}{I(s)}\right|_{v(0^-)=0} = \frac{1}{sC} \quad \to \text{impedância}$$

$$Y_C(s) = \left.\frac{I(s)}{V(s)}\right|_{v(0^-)=0} = sC \quad \to \text{admitância}$$



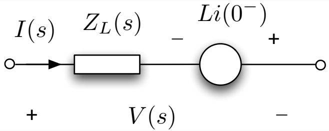
Análise de circuitos elétricos

$\Rightarrow$ **Indutâncias** $\quad v(t) = L\,\dfrac{di(t)}{dt}$

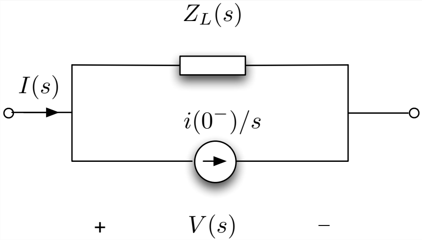


Aplicando a transformada de Laplace unilateral,

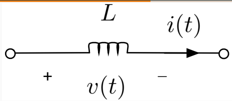
$$V(s) = sL\,I(s) - L\,i(0^-)$$



$$I(s) = \frac{1}{sL}\,V(s) + \frac{i(0^-)}{s}$$



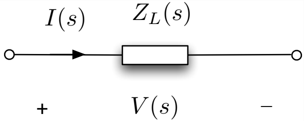
$\Rightarrow$ **Indutâncias** $\quad v(t) = L\,\dfrac{di(t)}{dt}$



Considerando corrente inicial no indutor igual a zero,

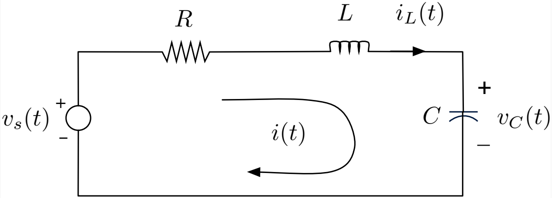
$$Z_L(s) = \left.\frac{V(s)}{I(s)}\right|_{i(0^-)=0} = sL \quad \rightarrow \text{impedância}$$

$$Y_L(s) = \left.\frac{I(s)}{V(s)}\right|_{i(0^-)=0} = \frac{1}{sL} \quad \rightarrow \text{admitância}$$

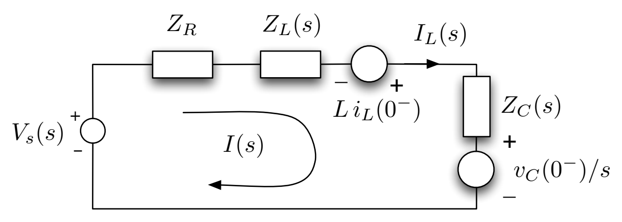


Exemplo: Análise de circuitos

Determine $i(t)$, $t \geq 0$ sabendo que $v_C(0^-) = 10$ V, $i_L(0^-) = 2$ A, $C = \frac{1}{5}$ F, $L = 1$ H, $R = 2\,\Omega$ e $v_s(t) = 5e^{-2t}\cos(3t)u(t)$.



Resposta: Primeiramente, determina-se o circuito equivalente, i.e.,



Exemplo: Análise de circuitos

Em seguida, realiza-se a análise

$$\Big[Z_R + Z_C(s) + Z_L(s)\Big] I(s) = V_s(s) + L\, i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}$$

$$\left[R + \frac{1}{sC} + sL\right] I(s) = V_s(s) + L\, i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}$$

$$\left[\frac{s^2LC + sRC + 1}{sC}\right] I(s) = V_s(s) + L\, i_L(0^-) - \frac{v_C(0^-)}{s}$$

obtendo-se

$$\boxed{I(s) = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1} V_s(s) + \frac{[sLi_L(0^-) - v_C(0^-)]sC}{s(s^2LC + sRC + 1)}}$$

*Note que a função de transferência do sistema é dada por

$$\boxed{H(s) = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1}}$$

Exemplo: Análise de circuitos

A partir de

$$I(s) = \frac{sC}{s^2LC + sRC + 1} V_s(s) + \frac{[sLi_L(0^-) - v_C(0^-)]C}{(s^2LC + sRC + 1)}$$

considerando

$$v_s(t) = 5e^{-2t}\cos(3t)u(t) \quad \Longrightarrow \quad V_s(s) = \frac{5(s+2)}{(s+2)^2 + 9}$$

e substituindo $v_C(0^-) = 10$ V, $i_L(0^-) = 2$ A, $C = \dfrac{1}{5}$ F, $L = 1$ H e $R = 2\,\Omega$, tem-se

$$I(s) = \underbrace{\frac{5s(s+2)}{\underbrace{\left[(s+1)^2 + 4\right]}_{\text{modos naturais}}\underbrace{\left[(s+2)^2 + 9\right]}_{\text{modos forçados}}}}_{\text{Resp. ao estado zero } \{I_1(s)\}} + \underbrace{\frac{2s - 10}{\underbrace{(s+1)^2 + 4}_{\text{modos naturais}}}}_{\text{Resp. à entrada zero } \{I_2(s)\}}$$

Exemplo: Análise de circuitos

Resposta ao estado zero:

$$
\begin{aligned}
I_1(s) &= \frac{5s(s+2)}{\left[(s+1)^2+4\right]\left[(s+2)^2+9\right]} \longleftarrow \text{Exp. em frações parciais} \\
&= \frac{0,962\,s+1,923}{(s+1)^2+4} - \frac{0,962\,s-5}{(s+2)^2+9} \longleftarrow \text{Frações parciais} \\
&= \frac{0,962\,(s+1)}{(s+1)^2+4} + 0,4805\;\frac{2}{(s+1)^2+4} \\
&\quad - \frac{0,962\,(s+2)}{(s+2)^2+9} + 2,308\;\frac{3}{(s+2)^2+9}
\end{aligned}
$$

Como o sistema é causal e $v_s(t) = 0$ para $t < 0$, a resposta ao estado zero é obtida como

$$
\boxed{
\begin{aligned}
i_1(t) = {} & 0,962\,e^{-t}\,\cos(2t)\,u(t) + 0,4805\,e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)\,u(t) \\
& - 0,962\,e^{-2t}\,\cos(3t)\,u(t) + 2,308\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,u(t)
\end{aligned}
}
$$

Exemplo: Análise de circuitos

Resposta à entrada zero:

$$\begin{aligned} I_2(s) &= \frac{2s-10}{(s+1)^2+4} \\ &= \frac{2(s+1)}{(s+1)^2+4} - 6\frac{2}{(s+1)^2+4} \end{aligned}$$

Logo, a resposta a entrada zero é dada por

$$\boxed{i_2(t) = 2\,e^{-t}\,\cos(2t)\,u(t) - 6\,e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)\,u(t)}$$

Portanto, a resposta completa do sistema é obtida como

$$\boxed{\begin{aligned} i(t) = & \overbrace{2,962\,e^{-t}\,\cos(2t)\,u(t) - 7,4425\,e^{-t}\,\mathrm{sen}(2t)\,u(t)}^{\text{Resposta natural}} \\ & \underbrace{-0,962\,e^{-2t}\,\cos(3t)\,u(t) + 2,308\,e^{-2t}\,\mathrm{sen}(3t)\,u(t)}_{\text{Resposta forçada}} \end{aligned}}$$

Análise de circuitos elétricos

Com respeito a análise de <u>circuitos ativos</u> utilizando a transformada de Laplace, veja

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 354-357)

Diagramas de Bode

Diagramas de Bode

Como já discutido,

- Sistemas LIT podem ser interpretados como filtros no domínio da frequência.
- Filtros modificam/conformam sinais de forma diferente para cada componente de frequência.

Então, dado um sistema descrito por

$$H(s) = \frac{K(s+a_1)(s+a_2)}{s(s+b_1)(s^2+b_2 s+b_3)}$$

pergunta-se:

(a) Como o sistema se comporta no domínio da frequência?
(b) Como o sistema afeta/modifica/conforma o sinal de entrada?
(c) Como ilustrar o comportamento do sistema graficamente?

Diagramas de Bode

⇒Diagramas/gráficos de Bode permitem ilustrar a resposta do sistema como função de ω (em escala logarítmica).

- Magnitude da resposta em frequência (dB)
- Resposta de fase

⇒ Aproximação por assíntotas

- Permite traçado aproximado de forma simples
- Facilita a interpretação da resposta em frequência associada a uma função de transferência
- Facilita o projeto de sistemas com respostas em frequência desejadas
- Útil para o entendimento do comportamento do sistema sem o uso de recursos computacionais

Diagramas de Bode

$$H(s) = \frac{K(s+a_1)(s+a_2)}{s(s+b_1)(s^2+b_2s+b_3)}$$

⇒**Uma função de transferência genérica contém usualmente**

a) Constante K
b) Polo ou zero na origem [fator s]
c) Polo ou zero de primeira ordem

$$(s+a)$$

d) Polo ou zero de segunda ordem (complexo conjugados)

$$(s^2+b_2s+b_3)$$

***Lembrete:**

- Raízes do numerador $\longrightarrow$ zeros
- Raízes do denominador $\longrightarrow$ polos

Diagramas de Bode

Considerando que o sistema é estável e fazendo $s = j\omega$, tem-se

$$H(j\omega) = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}\frac{\left(1+\dfrac{j\omega}{a_1}\right)\left(1+\dfrac{j\omega}{a_2}\right)}{j\omega\left(1+\dfrac{j\omega}{b_1}\right)\left[1+j\omega\dfrac{b_2}{b_3}+\dfrac{(j\omega)^2}{b_3}\right]}$$

A partir de tal equação, verifica-se que a resposta em frequência do sistema $H(j\omega)$ é uma função complexa.

Logo, a resposta do sistema pode ser expressa como

- Magnitude da resposta em frequência: $|H(j\omega)|$
- Resposta de fase: $\theta(\omega) = \angle H(j\omega)$
- Consequentemente,

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\theta(\omega)}$$

Diagramas de Bode

$\Rightarrow$ **Magnitude da resposta em frequência:** Caracteriza o ganho/atenuação introduzido pelo sistema sobre um sinal senoidal de frequência ω.

$$|H(j\omega)| = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}\frac{\left|1+\dfrac{j\omega}{a_1}\right|\left|1+\dfrac{j\omega}{a_2}\right|}{|j\omega|\left|1+\dfrac{j\omega}{b_1}\right|\left|1+j\omega\dfrac{b_2}{b_3}+\dfrac{(j\omega)^2}{b_3}\right|}$$

Como esboçar a resposta em frequência do sistema?

Diagramas de Bode

$\Rightarrow$ **Magnitude da resposta em frequência:** Caracteriza o ganho/atenuação introduzido pelo sistema sobre um sinal senoidal de frequência ω.

$$|H(j\omega)| = \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}\frac{\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right|\left|1+\frac{j\omega}{a_2}\right|}{|j\omega|\left|1+\frac{j\omega}{b_1}\right|\left|1+j\omega\frac{b_2}{b_3}+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|}$$

Como esboçar a resposta em frequência do sistema?

$$\begin{aligned}|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} = 20\log_{10}\left(\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}\right) + 20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{a_1}\right|\right)\\ + 20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{a_2}\right|\right) - 20\log_{10}(|j\omega|)\\ - 20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{b_1}\right|\right) - 20\log_{10}\left[\left|1+j\omega\frac{b_2}{b_3}+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|\right]\end{aligned}$$

Diagramas de Bode

⇒ Motivação para o uso da escala logarítmica:

- Propriedades:

$$\log_x(AB) = \log_x(A) + \log_x(B)$$
$$\log_x\left(\frac{A}{B}\right) = \log_x(A) - \log_x(B)$$

- Unidades logarítmicas são úteis quando as variáveis consideradas possuem grande faixa de variação.
- O estudo de Weber-Fechner (1834) afirma que os sentidos humanos respondem de forma logarítmica.
- **Exemplo:** O ouvido julga um som como duas vezes mais alto do que outro quando a potência do segundo é 10 vezes maior.
- Em engenharia, utiliza-se comumente a escala *debibel* (dB), i.e., $\log_{10}(.)$. Logo,

$$\begin{aligned}|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} &= 10\log_{10}[|H(j\omega)|^2] \\ &= 20\log_{10}[|H(j\omega)|]\end{aligned}$$

Diagramas de Bode

Observações sobre o gráfico em dB:

Considerando que

$$H(j\omega) = H_1(j\omega)H_2(j\omega)$$

tem-se

$$\boxed{|H(j\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(j\omega)|_{\text{dB}} + |H_2(j\omega)|_{\text{dB}}}$$

Similarmente, assumindo que

$$H(j\omega) = \frac{H_1(j\omega)}{H_2(j\omega)}$$

tem-se

$$\boxed{|H(j\omega)|_{\text{dB}} = |H_1(j\omega)|_{\text{dB}} - |H_2(j\omega)|_{\text{dB}}}$$

Facilita o traçado e a visualização.

Diagramas de Bode

$\Rightarrow$ **Resposta de fase:** Caracteriza a defasagem adicionada pelo sistema a um sinal senoidal de frequência ω.

$$\theta(\omega) = \overbrace{\angle\left(1+\frac{j\omega}{a_1}\right)+\angle\left(1+\frac{j\omega}{a_2}\right)}^{\text{Termos do numerador }(+)}$$
$$\underbrace{-\angle j\omega-\angle\left(1+\frac{j\omega}{b_1}\right)-\angle\left[1+j\omega\frac{b_2}{b_3}+\frac{(j\omega)^2}{b_3}\right]}_{\text{Termos do denominador }(-)}$$

A fase é composta por

(i) Um termo $j\omega$ causa uma defasagem de 90

(ii) Termos de primeira ordem $\longrightarrow \left(1+\dfrac{j\omega}{a}\right)$

(iii) Um termo de segunda ordem $\longrightarrow \left[1+j\omega\dfrac{b_2}{b_3}+\dfrac{(j\omega)^2}{b_3}\right]$

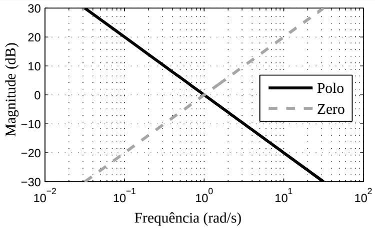
Diagramas de Bode: Análise dos termos

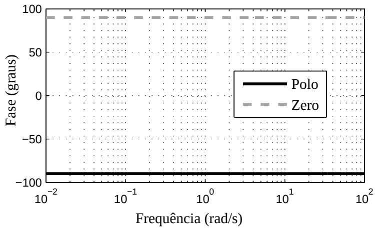
⇒ Termo constante:

$$20\log_{10}\left(\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3}\right) \quad \text{e} \quad \angle\frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} = \begin{cases} 0, & \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} > 0 \\ 180, & \frac{Ka_1a_2}{b_1b_3} < 0 \end{cases}$$

⇒ Polo (ou zero) na origem:

$$-20\log_{10}(|j\omega|) = -20\log_{10}(\omega) \quad \text{e} \quad \angle j\omega = -90$$





Decaimento de $20\,\mathrm{dB/década}$ e defasagem de 90 na origem.

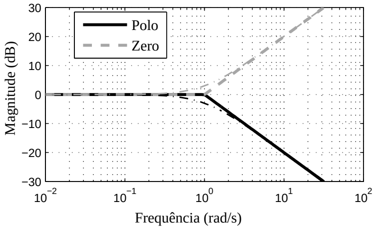
Diagramas de Bode: Análise dos termos

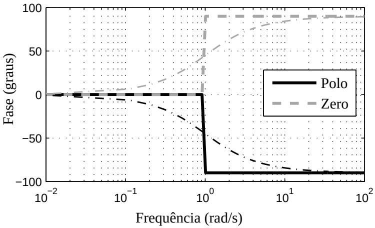
⇒ Polo (ou zero) de primeira ordem:

$$-20\log_{10}\left(\left|1+\frac{j\omega}{a}\right|\right) \approx \begin{cases} \omega \ll a, & -20\log_{10}(1) = 0 \\ \omega \gg a, & -20\log_{10}\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{cases}$$

e

$$-\angle\left(1+\frac{j\omega}{a}\right) = -\tan^{-1}\left(\frac{\omega}{a}\right) \approx \begin{cases} \omega \ll a, & 0 \\ \omega \gg a, & -90 \end{cases}$$





Da curva exata, tem-se $\mp 3\,\mathrm{dB}$ e ∓ 45 para $\omega = a$.

Diagramas de Bode: Análise dos termos

⇒ Polo (ou zero) de segunda ordem:

Definindo $2\zeta = b_2$ e $\omega_n = b_3$, tem-se

$$-20\log_{10}\left[\left|1 + j\omega\frac{b_2}{b_3} + \frac{(j\omega)^2}{b_3}\right|\right] = -20\log_{10}\left[\left|1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n}\right|\right]$$

$$\approx \begin{cases} \omega \ll \omega_n, & -20\log_{10}(1) = 0 \\ \omega \gg \omega_n, & -40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) \end{cases}$$

e

$$-\angle\left[1 + j\omega\frac{b_2}{b_3} + \frac{(j\omega)^2}{b_3}\right] = -\angle\left[1 + 2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n} + \frac{(j\omega)^2}{\omega_n}\right]$$

$$= -\tan^{-1}\left[\frac{2\zeta\dfrac{\omega}{\omega_n}}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right)^2}\right] \approx \begin{cases} \omega \ll \omega_n, & 0 \\ \omega \gg \omega_n, & -180 \end{cases}$$

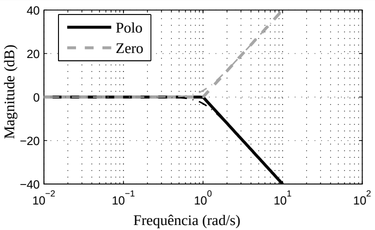
Diagramas de Bode: Análise dos termos

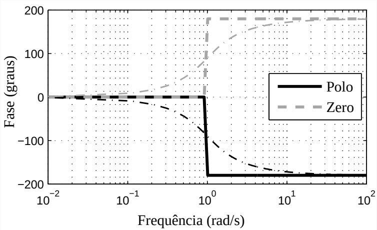
⇒ Polo (ou zero) de segunda ordem:

$$-20\log_{10}\left[\left|1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n}\right|\right] \approx \begin{cases} \omega \ll \omega_n, & -20\log_{10}(1)=0 \\ \omega \gg \omega_n, & -40\log_{10}\left(\dfrac{\omega}{\omega_n}\right) \end{cases}$$

e

$$-\angle\left[1+2\zeta\frac{j\omega}{\omega_n}+\frac{(j\omega)^2}{\omega_n}\right] \approx \begin{cases} \omega \ll \omega_n, & 0 \\ \omega \gg \omega_n, & -180 \end{cases}$$





Decaimento de $40\,\mathrm{dB/déc.}$ e defasagem de 90 para $\omega=\omega_n$.

Exemplo: Diagrama de Bode

Esboce o diagrama de Bode do sistema representado por

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Exemplo: Diagrama de Bode

Esboce o diagrama de Bode do sistema representado por

$$H(s) = \frac{1}{s+1}$$

Resposta: Considerando que o sistema é estável, tem-se que

$$H(s)|_{s=j\omega} = \frac{1}{j\omega + 1}$$

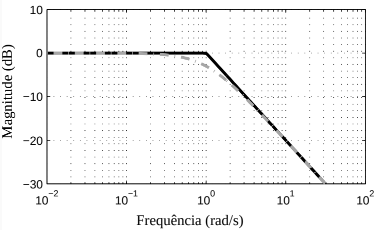
Logo, a magnitude da resposta em frequência é obtido como

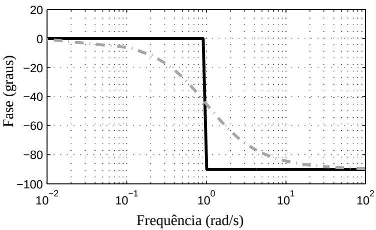
$$\begin{aligned}
|H(j\omega)|_{\mathrm{dB}} &= 10\log_{10}(1) - 10\log_{10}(|j\omega+1|^2) \\
&= -10\log_{10}(1+\omega^2) \\
&= -20\log_{10}(\sqrt{1+\omega^2}) \\
&\approx \begin{cases} \omega \ll 1, & -20\log_{10}(1) = 0 \\ \omega \gg 1, & -20\log_{10}(\omega)\ \mathrm{dB/dec} \end{cases}
\end{aligned}$$

Exemplo: Diagramas de Bode

Por sua vez, a resposta de fase é dado por

$$\begin{aligned}\theta(\omega) &= \angle H(j\omega) \\ &= -\angle j\omega + 1 \\ &= -\tan^{-1}(\omega) \\ &\approx \begin{cases} \omega \ll 1, & 0 \\ \omega \gg 1, & -\dfrac{\pi}{2} \end{cases}\end{aligned}$$





*Decaimento de $20\,\mathrm{dB/déc.}$ e defasagem de 45 em $\omega = 1$.

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 417-418)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 7)

Até a próxima aula... =)