4ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) A partir da definição, determine e esboce a magnitude e a fase da transformada de Fourier de

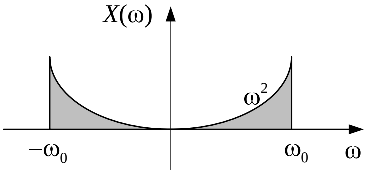
a) $x(t) = \delta(t+1) + \delta(t-1)$ b) $x(t) = \dfrac{d}{dt}[u(t-2) - u(-t-2)]$ c) $x(t) = \mathrm{e}^{-at}[u(t) - u(t-T)]$

Obs.: Se necessário, utilize o MATLAB®.

2) A partir da definição, calcule e esboce a transformada inversa de Fourier de

a) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\delta(\omega - 4\pi) + \pi\delta(\omega + 4\pi)$ b) $X(\omega) = \begin{cases} 2, & 0 \le \omega \le 2 \\ -2, & -2 \le \omega < 0 \\ 0, & |\omega| > 2. \end{cases}$

c)



3) Utilizando a propriedade da dualidade e os pares correspondentes, mostre que

a) $\dfrac{1}{2}\left[\delta(t) + \dfrac{\mathrm{j}}{\pi t}\right] \Leftrightarrow u(\omega)$ b) $\delta(t+T) + \delta(t-T) \Leftrightarrow 2\cos(T\omega)$

4) Levando em consideração a propriedade do deslocamento na frequência, determine a transformada inversa de Fourier do sinal cujo espectro é mostrado na Figura 1.

5) Seja a relação de entrada e saída de um sistema LIT causal e estável dada por

$$\frac{d}{dt}y(t) + 5y(t) = 2x(t)$$

determine o valor final $s(\infty)$ da resposta ao degrau $s(t)$.

6) Determine a resposta em frequência e a resposta ao impulso do sistema descrito pela seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t) + 3\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = 2x(t) + \frac{d}{dt}x(t)$$

7) Para um filtro LIT causal cuja resposta em frequência $H(\omega)$ é mostrada na Figura 2, determine o sinal de saída $y(t)$ caso a transforma de Fourier da entrada $x(t)$ seja

$$X(\omega) = \frac{1}{2 + \mathrm{j}\omega}.$$

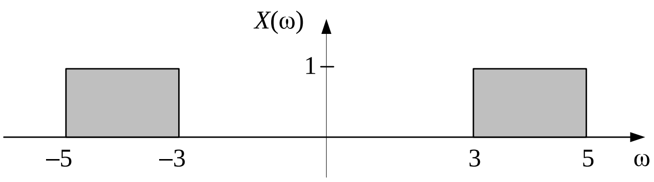


Figura 1.

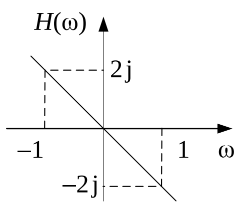


Figura 2.

8) Considerando que a relação de entrada e saída de um sistema LIT causal é dada por

$$\frac{d}{dt}y(t) + 2y(t) = x(t)$$

determine:
a) a resposta em frequência $H(\omega)$;
b) o diagrama de BODE (magnitude e fase) do sistema;
c) a transformada de Fourier da saída $Y(\omega)$ para

$$X(\omega) = \frac{1}{(1+\mathrm{j}\omega)(2+\mathrm{j}\omega)};$$

d) e o sinal de saída $y(t)$.

9) Determine a equação diferencial que descreve a relação de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ do sistema cuja resposta ao impulso é dada por

$$h(t) = 2\mathrm{e}^{-2t}u(t) - 2t\mathrm{e}^{-2t}u(t).$$

10) Para um sistema LIT cuja resposta ao impulso é dada por

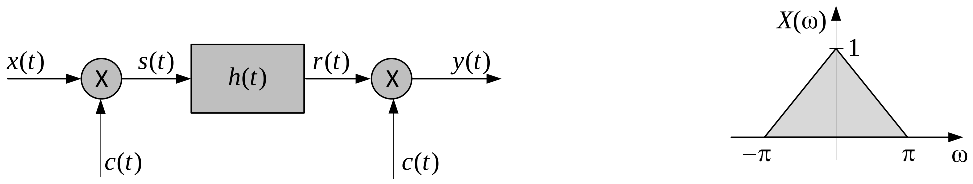
$$h(t) = 2\frac{\mathrm{sen}(\pi t)}{\pi t}\cos(4\pi t)$$

determine a saída do sistema $y(t)$ caso a entrada seja $x(t) = 1 + \cos(\pi t) + \mathrm{sen}(4\pi t)$.

11) Encontre a transformada de Fourier do seguinte sinal periódico:

$$x(t) = 1 + \cos\left(6\pi t + \frac{\pi}{8}\right)$$

12) Considerando o diagrama de blocos ilustrado na Figura 3(a), determine matematicamente e esboce $X(\omega)$, $C(\omega)$, $S(\omega)$, $H(\omega)$, $R(\omega)$ e $Y(\omega)$. Para tal, assuma que $c(t) = \cos(5\pi t)$, $h(t) = 6\,\mathrm{sinc}(6\pi t)$ e que o espectro de $x(t)$ é dado pela Figura 3(b).



(a) (b)

Figura 3.

13) A partir da definição, obtenha a transformada inversa de Fourier do sinal $x(t)$ cujo espectro de magnitude e fase é apresentado na Figura 4(a) e (b), respectivamente.

(a) (b)

Figura 4.

14) A partir da propriedade da dualidade, determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

15) Determine e esboce a transformada de Fourier de

$$x(t) = \mathrm{sinc}(100\pi t) + \mathrm{sinc}^2(100\pi t).$$

16) Assuma que a transformada de Fourier do pulso triangular $x(t)$ ilustrado na Figura 5 é dada por

$$X(\omega) = \frac{1}{\omega^2}(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - \mathrm{j}\omega\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega} - 1).$$

A partir disso e das propriedades conhecidas, determine a transformada de Fourier do
a) sinal $x_\mathrm{a}(t)$ ilustrado na Figura 6(a);
b) sinal $x_\mathrm{b}(t)$ ilustrado na Figura 6(b); e
c) sinal $x_\mathrm{c}(t)$ ilustrado na Figura 6(c).
Vale salientar que é obrigatório o uso das propriedades da transformada de Fourier na resolução do presente exercício, isto é, não pode ser realizada a integração direta das funções no domínio do tempo.

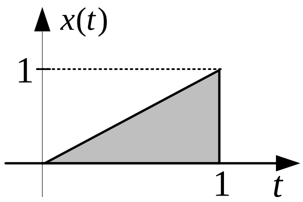
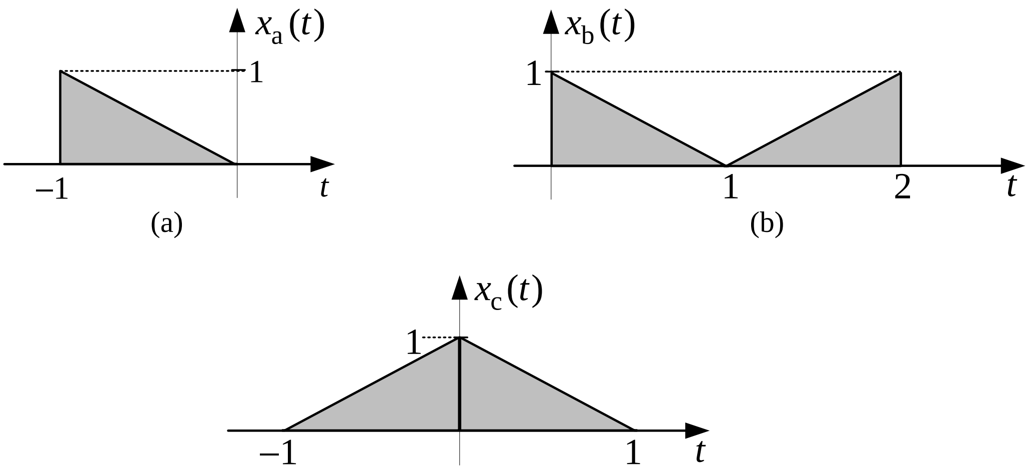


Figura 5.



(a) (b)
(c)
Figura 6.

17) Considere que a saída $y(t)$ de um sistema linear e invariante no tempo (LIT) causal é relacionada com a entrada $x(t)$ através de

$$\frac{d}{dt}y(t) + 10y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)z(t-\tau)d\tau - x(t)$$

sendo

$$z(t) = \mathrm{e}^{-t}u(t) + 3\delta(t).$$

A partir disso, determine

a) resposta em frequência $H(\omega)$ do sistema; e
b) a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema.

18) Considere que a correlação cruzada entre $x(t)$ e saída $y(t)$ é definida como

$$\phi_{xy}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t+\tau)y(\tau)d\tau.$$

Então, assumindo que $\Phi_{xy}(\omega)$ denota a transformada de Fourier de $\phi_{xy}(t)$,
a) determine uma relação entre $\Phi_{xy}(\omega)$ e $\Phi_{yx}(\omega)$;
b) obtenha uma expressão para $\Phi_{xy}(\omega)$ em função de $X(\omega)$ e $Y(\omega)$; e
c) demonstre que $\Phi_{xx}(\omega)$ é real e não-negativo para todo ω.

RESPOSTAS

1) a) $X(\omega) = 2\cos(\omega)$ b) $X(\omega) = 2\cos(2\omega)$ c) $X(\omega) = \dfrac{[1 - e^{-(a+\mathrm{j}\omega)T}]}{a + \mathrm{j}\omega}$

2) a) $x(t) = 1 + \cos(4\pi t)$ b) $x(t) = \dfrac{4\mathrm{j}}{t\pi}\mathrm{sen}^2(t)$

c) $x(t) = \dfrac{1}{\pi t^3}[(\mathrm{t}^2\,\omega_0{}^2 - 2)\,\mathrm{sen}(\omega_0 t) + 2\omega_0 t\cos(\omega_0 t)]$

3) a) ------------ b) ------------

4) $x(t) = \dfrac{2}{\pi}\cos(4t)\,\mathrm{sinc}(t)$

5) $s(\infty) = \dfrac{2}{5}$

6) $H(\omega) = \dfrac{1}{\mathrm{j}\omega + 1}$ $h(t) = \mathrm{e}^{-t}\,u(t)$

7) $y(t) = 4e^{-2t}u(t) - 2\delta(t)$

8) a) $H(\omega) = \dfrac{1}{2+\mathrm{j}\omega}$ b) ------------

c) $Y(\omega) = \dfrac{1}{(2+\mathrm{j}\omega)^2(1+\mathrm{j}\omega)}$ d) $y(t) = [\mathrm{e}^{-t} - (1+t)\,\mathrm{e}^{-2t}]u(t)$

9) $\dfrac{d^2}{dt^2}y(t) + 4\dfrac{d}{dt}y(t) + 4y(t) = 2\dfrac{d}{dt}x(t) + 2x(t)$

10) $y(t) = \mathrm{sen}(4\pi t)$

11) $X(\omega) = 2\pi\delta(\omega) + \pi\mathrm{e}^{\mathrm{j}\frac{\pi}{8}}\delta(\omega - 6\pi) + \pi\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\frac{\pi}{8}}\delta(\omega + 6\pi)$

12) $C(\omega) = \pi[\delta(\omega - 5\pi) + \delta(\omega + 5\pi)]$ $S(\omega) = \dfrac{1}{2}\left[\Delta\left(\dfrac{\omega - 5\pi}{2\pi}\right) + \Delta\left(\dfrac{\omega + 5\pi}{2\pi}\right)\right]$

$H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{12\pi}\right)$ $R(\omega) = \dfrac{1}{2}\left[\Delta\left(\dfrac{\omega - 5\pi}{2\pi}\right) + \Delta\left(\dfrac{\omega + 5\pi}{2\pi}\right)\right]\mathrm{rect}\left(\dfrac{\omega}{12\pi}\right)$

$Y(\omega) = \dfrac{1}{2}[R(\omega - 5\pi) + R(\omega + 5\pi)]$

13) $x(t) = \dfrac{1}{\pi t}[1 - \cos(\mathrm{W}t)]$

14) Veja o material complementar.

15) Veja o material complementar.

16) Veja o material complementar.

17) Veja o material complementar.

18) Veja o material complementar.