Sinais e Sistemas

ET45A

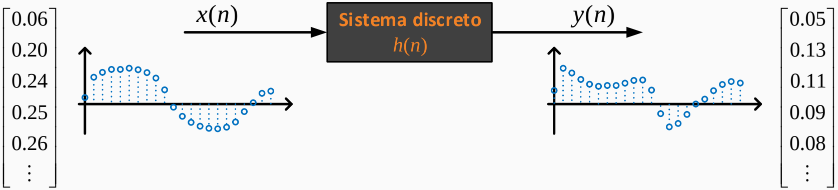
Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Transformada z

Considerações iniciais



Sobre a transformada z:

- simplifica a análise envolvendo sinais e sistemas em tempo discreto; e
- pode ser vista como a contrapartida da transformada de Laplace para sistemas em tempo discreto.

Considerações iniciais

O que ocorre quando $x(n) = z^n$, com $z = re^{j\theta} \in \mathbb{C}$, é aplicado à entrada de um sistema?

Dado que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

verifica-se que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{(n-k)} \quad \Rightarrow \quad y(n) = z^n H(z)$$

sendo

$$H(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)z^{-k}$$

Portanto, **assumindo que o somatório converge**,

$$\boxed{x(n) = z^n \qquad \longrightarrow \qquad y(n) = z^n H(z)}$$

Considerações iniciais

Como

$$x(n) = z^n \qquad \longrightarrow \qquad y(n) = z^n H(z)$$

z^n é uma autofunção de sistemas LIT de tempo discreto enquanto $H(z)$ representa o autovalor associado. Logo, para

$$x(n) = a_1 z_1^n + a_2 z_2^n + \ldots + a_N z_N^n$$

tem-se (devido a linearidade e invariância no tempo) que

$$\boxed{y(n) = a_1 z_1^n H(z_1) + a_2 z_2^n H(z_2) + \ldots + a_N z_N^n H(z_N)}$$

onde

$$H(z_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z_k^{-n}, \qquad k = 1,\ 2, \ldots, N.$$

Uma autofunção é um sinal que passa pelo sistema sem sofrer alterações em seu formato, exceto pela multiplicação por um escalar.

Considerações iniciais

Portanto, visto que

$$x(n) = a_1 z_1^n + a_2 z_2^n + \ldots + a_N z_N^n$$

produz

$$y(n) = a_1 z_1^n H(z_1) + a_2 z_2^n H(z_2) + \ldots + a_N z_N^n H(z_N)$$

em que

$$H(z_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z_k^{-n}, \qquad k = 1,\ 2, \ldots, N$$

exponenciais discretas podem ser empregadas como base para a análise de sistemas LIT de tempo discreto; logo, resta

- expressar $x(n)$ como a soma de exponenciais discretas; e
- determinar a função de transferência $H(z)$.

Considerações iniciais

Objetivos:

- Introduzir a transformada z a fim de facilitar a análise de sinais e sistemas de tempo discreto.
- Estabelecer a condição de existência da transformada z.
- Apresentar as principais propriedades da transformada z.
- Determinar a resposta de sistemas descritos por equações lineares de diferenças.
- Discutir sobre a estabilidade de sistemas de tempo discreto baseado na função de transferência.
- Estabelecer uma relação entre o plano s (transformada de Laplace) e o plano z (transformada z).

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Para um sinal $x(n)$ determinístico, define-se

- Transformada z direta

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

- Transformada z inversa

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz}$$

onde $z \in \mathbb{C}$ e $\oint$ indica uma integração no sentido anti-horário em um caminho fechado no plano complexo.

Note que o sinal $x(n)$ é expresso como a soma de exponenciais discretas (de duração infinita) na forma de z^n, com $z = re^{j\theta}$.

Definições matemáticas

Transformada z direta

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

$$\Longrightarrow$$
$$\Longleftarrow$$

Transformada z inversa

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz}$$

Observações:

- Convenciona-se o uso de letra minúscula [e.g., $x(n)$] para representação no tempo.
- Convenciona-se o uso de letra maiúscula [e.g., $X(z)$] para representação no domínio z.
- As funções $x(n)$ e $X(z)$ compõem um par de transformada z, i.e.,

$$\boxed{x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(z)}$$

- Os símbolos $\mathcal{Z}(\cdot)$ e $\mathcal{Z}^{-1}(\cdot)$ denotam operadores lineares da transformada z direta e inversa, respectivamente.

Condição de existência

Condição de existência

Visto que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

a existência da transformada z é garantida se o somatório convergir para um valor finito, i.e.,

$$\begin{aligned} |X(z)| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} \right| \\ &\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|x(n)|}{|z|^n} \\ &< \infty \end{aligned}$$

para um dado $|z|$. **Portanto, qualquer sinal $x(n)$ que não cresce a uma taxa mais rápida do que $|z|^n$ satisfaz a condição.**

Condição de existência

Quanto a existência da transformada z

$$|X(z)| \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{|x(n)|}{|z|^n} < \infty$$

vale destacar que

- **Tipicamente, sinais de interesse prático satisfazem a condição para um dado $|z|$; logo, têm transformada z.**
- Sinais que crescem mais rapidamente que $|z|^n$ não satisfazem a condição [e.g., $x(n) = \gamma^{n^2}$]; felizmente, tais sinais são de pouco interesse prático.
- Sinais que crescem mais rapidamente que $|z|^n$, quando avaliados sobre um intervalo finito, possuem transformada z.

Portanto, resta determinar a restrição sobre $|z|$ tal que a convergência seja assegurada (i.e., a região de convergência).

Exemplos

Exemplo: Transformada z

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = \gamma^n u(n)$$

Exemplo: Transformada z

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = \gamma^n u(n)$$

Resposta: A partir da definição, tem-se que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n u(n) z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n$$

Então, como

$$1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \quad = \quad \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1$$

obtém-se

$$\boxed{X(z) = \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma|}$$

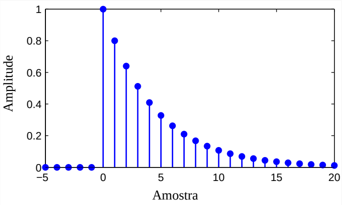
Logo, $X(z)$ existe apenas para $|z| > |\gamma|$.

Exemplo: Transformada z

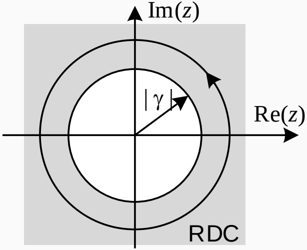
Portanto, estabelece-se o seguinte par de transformada z:

$$\boxed{\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma|}$$

$x(n)$



RDC



A RDC engloba somente a região do plano z em que $|z| > |\gamma|$.

Exemplo: Transformada z

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = -\gamma^n u(-n-1)$$

Exemplo: Transformada z

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = -\gamma^n u(-n-1)$$

Resposta: Da definição, tem-se

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} -\gamma^n u(-n-1) z^{-n} = -\sum_{n=-\infty}^{-1} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^n$$

Então, considerando

$$m = -n \quad \rightarrow \quad \begin{cases} n = -\infty & \rightarrow m = +\infty \\ n = -1 & \rightarrow m = +1 \end{cases}$$

obtém-se

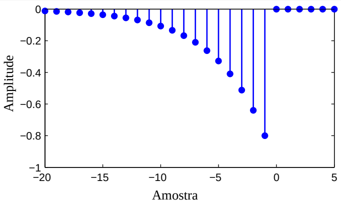
$$X(z) = -\sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{\gamma}{z}\right)^{-m} = 1 - \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\gamma}\right)^m = \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma|$$

Exemplo: Transformada z

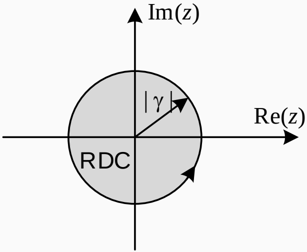
Portanto, estabelece-se o seguinte par de transformada z:

$$\boxed{-\gamma^n u(-n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma|}$$

$x(n)$



RDC



A RDC engloba somente a região do plano z em que $|z| < |\gamma|$.

Exemplo: Transformada z

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = \gamma_1^n u(n) - \gamma_2^n u(-n-1), \quad |\gamma_2| > |\gamma_1|$$

Lembrete:

$$\begin{aligned} \gamma^n u(n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma| \\ -\gamma^n u(-n-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma| \end{aligned}$$

Exemplo: Transformada z

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = \gamma_1^n u(n) - \gamma_2^n u(-n-1), \quad |\gamma_2| > |\gamma_1|$$

Lembrete:

$$\gamma^n u(n) \iff \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma|$$

$$-\gamma^n u(-n-1) \iff \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma|$$

Resposta: A partir dos pares já estabelecidos, tem-se que

$$X(z) = \underbrace{\frac{z}{z-\gamma_1}}_{|z|>|\gamma_1|} + \underbrace{\frac{z}{z-\gamma_2}}_{|z|<|\gamma_2|}$$

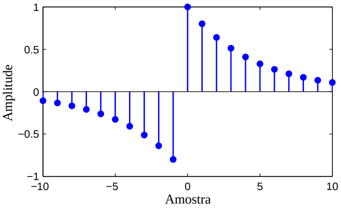
$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{z[(z-\gamma_2)+(z-\gamma_1)]}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)}, \quad |\gamma_1| < |z| < |\gamma_2|}$$

Exemplo: Transformada z

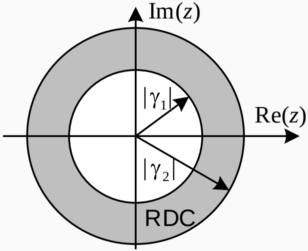
Portanto, estabelece-se o seguinte par de transformada z:

$$\boxed{\gamma_1^n u(n) - \gamma_2^n u(-n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z[(z-\gamma_2)+(z-\gamma_1)]}{(z-\gamma_1)(z-\gamma_2)}}$$

$x(n)$

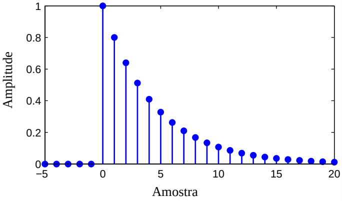


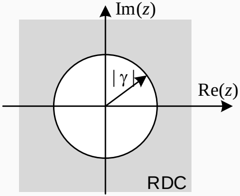
RDC

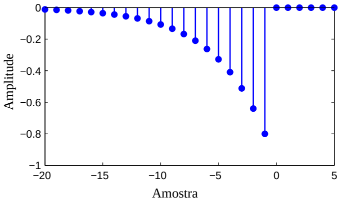


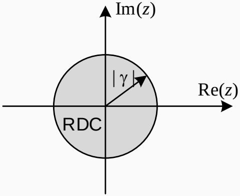
A RDC engloba a região do plano z em que $|\gamma_1| < |z| < |\gamma_2|$.

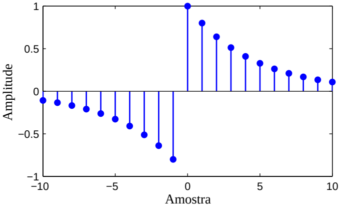
Exemplo: Transformada z

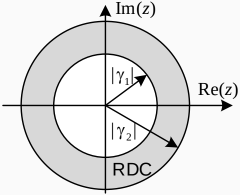












Propriedades da transformada z bilateral

Propriedades da transformada z bilateral

1) Linearidade (superposição)

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(z),\ \mathrm{RDC}_1 \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(z),\ \mathrm{RDC}_2$$

então

$$\boxed{c_1x_1(n) + c_2x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad c_1X_1(z) + c_2X_2(z)}$$

Note que a RDC é obtida da interseção de RDC_1 e RDC_2.

2) Deslocamento

Seja

$$x(n) \Longleftrightarrow X(z),\ \mathrm{RDC}$$

então

$$\boxed{x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k}X(z)}$$

A RDC não se alterada exceto pela adição/remoção de $z = 0/\infty$.

Propriedades da transformada z bilateral

3) Convolução

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(z),\ \mathrm{RDC}_1 \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(z),\ \mathrm{RDC}_2$$

então

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(z)X_2(z)}$$

Note que a RDC é obtida como a interseção de RDC_1 e RDC_2.

4) Multiplicação por γ^n

Seja

$$x(n) \Longleftrightarrow X(z), \quad |\gamma_1| < |z| < |\gamma_2| \ (\mathrm{RDC})$$

então

$$\boxed{\gamma^n x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X\left(\frac{z}{\gamma}\right)}$$

Note que a RDC é escalonada para $|\gamma\gamma_1| < |z| < |\gamma\gamma_2|$.

Propriedades da transformada z bilateral

Exemplo: Para o sistema causal especificado por

$$H(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

determine a resposta ao estado nulo quando

$$x(n) = (0,8)^n u(n) + 2(2)^n u(-n-1).$$

Lembrete:

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma|$$

e

$$-\gamma^n u(-n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma|$$

Propriedades da transformada z bilateral

Resposta: Primeiro, pela propriedade da linearidade,

$$\begin{aligned} x(n) &= (0,8)^n u(n) + 2(2)^n u(-n-1) \\ &= x_1(n) + x_2(n) \end{aligned}$$

Então, como uma parcela é causal e a outra anticausal, tem-se

$$X_1(z) = \frac{z}{z-0,8}, \quad |z| > 0,8$$

e

$$X_2(z) = \frac{-2z}{z-2}, \quad |z| < 2$$

o que resulta em

$$\begin{aligned} X(z) &= X_1(z) + X_2(z) \\ &= \frac{-z(z+0,4)}{(z-0,8)(z-2)}, \quad 0,8 < |z| < 2 \end{aligned}$$

Propriedades da transformada z bilateral

Agora, dado que

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

obtém-se

$$Y(z) = \frac{-z^2(z+0,4)}{(z-0,5)(z-0,8)(z-2)}, \quad 0,8 < |z| < 2$$

Logo, realizando a expansão em frações parciais modificada, verifica-se que

$$Y(z) = -\frac{z}{z-0,5} + \frac{8}{3}\frac{z}{z-0,8} - \frac{8}{3}\frac{z}{z-2}, \quad 0,8 < |z| < 2$$

Finalmente, tomando a transformada z inversa e usando os pares de transformada já conhecidos, tem-se

$$\boxed{y(n) = [-(0,5)^n + (8/3)(0,8)^n]u(n) + (8/3)(2)^n u(-n-1)}$$

Propriedades da transformada z bilateral

5) Multiplicação por n

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X_1(z), \ \mathrm{RDC}$$

então

$$\boxed{nx(n) \quad \Longleftrightarrow \quad -z\frac{d}{dz}X(z)}$$

Note que a RDC permanece inalterada.

6) Reversão no tempo

Seja

$$x(n) \Longleftrightarrow X(z), \quad |\gamma_1| < |z| < |\gamma_2| \ (\mathrm{RDC})$$

então

$$\boxed{x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Note que a RDC é escalonada para $|1/\gamma_1| > |z| > |1/\gamma_2|$.

Propriedades da transformada z unilateral

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = u(-n)$$

Propriedades da transformada z unilateral

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = u(-n)$$

Resposta: Levando em conta que

$$u(n) \iff \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \quad \text{e} \quad x(-n) \iff X\left(\frac{1}{z}\right)$$

tem-se

$$X(z) = \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1 \Big|_{z=z^{-1}} = \frac{z^{-1}}{z^{-1}-1}, \quad |z^{-1}| > 1$$

Portanto,

$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1-z}, \quad |z| < 1}$$

Note que a RDC também é invertida, i.e., $|z| < |1|$.

Transformada z unilateral

Transformada z unilateral

Para o **caso particular de sinais causais**, i.e.,

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

a **transformada z <u>unilateral</u>** pode ser utilizada. Assim,

$$\boxed{X(z) = \sum_{n=0}^{\infty} x(n) z^{-n}}$$

Observações:

- Para sinais causais, a transformada z (unilateral) possui uma única inversa. Dessa forma, não é necessário especificar explicitamente a RDC [está implícito em $X(z)$].
- Geralmente, a terminologia transformada z refere-se particularmente a transformada z <u>unilateral</u>.

Transformada z unilateral

Exemplo: Determine a transformada z dos seguintes sinais:

(a) $x(n) = \delta(n-k),\ \ k > 0$

(b) $x(n) = u(n)$

(c) $x(n) = \gamma^{n-1}u(n-1)$

(d) $x(n) = u(n) - u(n-5)$

Transformada z unilateral

Exemplo: Determine a transformada z dos seguintes sinais:

(a) $x(n) = \delta(n-k),\ \ k > 0$

Resposta: $X(z) = z^{-k}$

(b) $x(n) = u(n)$

Resposta: $X(z) = \dfrac{z}{z-1}$

(c) $x(n) = \gamma^{n-1}u(n-1)$

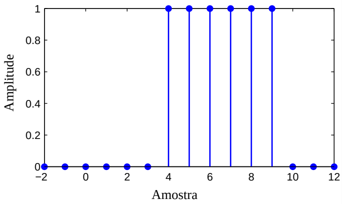
Resposta: $X(z) = \dfrac{1}{z-\gamma}$

(d) $x(n) = u(n) - u(n-5)$

Resposta: $X(z) = \dfrac{z}{z-1}(1-z^{-5})$

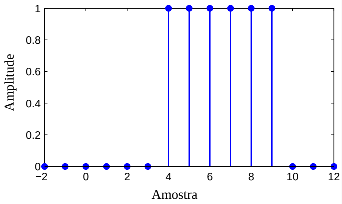
Transformada z unilateral

Exemplo: Obtenha a transformada z do seguinte sinal:



Transformada z unilateral

Exemplo: Obtenha a transformada z do seguinte sinal:



Resposta: Primeiramente, lembre-se que

$$\delta(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k}$$

Então, dado que

$$x(n) = \delta(n-4) + \delta(n-5) + \delta(n-6) + \delta(n-7) + \delta(n-8) + \delta(n-9)$$

é possível concluir que

$$\boxed{X(z) = z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} + z^{-8} + z^{-9}}$$

Transformada z unilateral

Analogamente, a transformada z do sinal pode também ser obtida observando que

$$x(n) = u(n-4) - u(n-10)$$

Assim, a partir da definição da transformada z, tem-se

$$\begin{aligned}
X(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(n-4) - u(n-10)] z^{-n} \\
&= \sum_{n=4}^{\infty} z^{-n} - \sum_{n=10}^{\infty} z^{-n} = \sum_{n_1=0}^{\infty} z^{-n-4} - \sum_{n_2=0}^{\infty} z^{-n-10} \\
&= z^{-4} \sum_{n_1=0}^{\infty} z^{-n_1} - z^{-10} \sum_{n_2=0}^{\infty} z^{-n_2} \\
&\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{z}{z-1}(z^{-4} - z^{-10}), \quad |z| > 1}
\end{aligned}$$

Transformada z unilateral

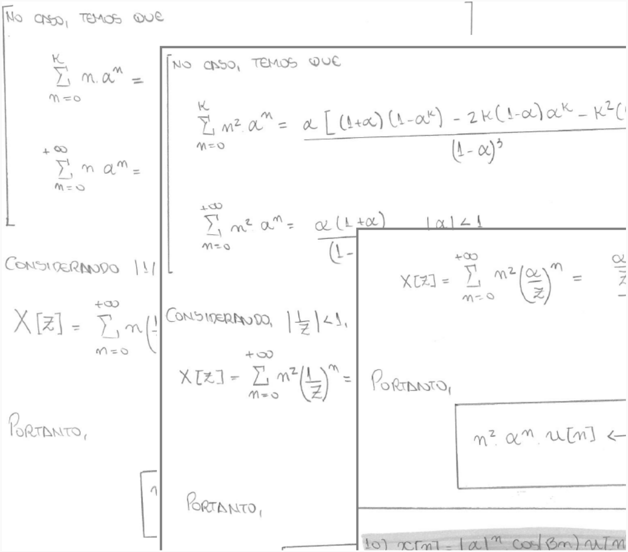
Para mostrar a equivalência das transformadas, lembre-se que

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Logo,

$$\begin{aligned}
X(z) &= z^{-4} + z^{-5} + z^{-6} + z^{-7} + z^{-8} + z^{-9} \\
&= \sum_{k=4}^{9} (z^{-1})^k \\
&= \frac{(z^{-1})^{10} - (z^{-1})^4}{(z^{-1}) - 1} \\
&= \frac{z(z^{-10} - z^{-4})}{1 - z} \\
&\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{z}{z-1}(z^{-4} - z^{-10}), \quad |z| > 1}
\end{aligned}$$

Derivação de pares da transformada z



Créditos: Prof. Marcos Vinicius Matsuo (UFSC - Blumenau).

Propriedades da transformada z unilateral

Propriedades da transformada z unilateral

1) Linearidade (superposição)

Considerando

$$x_1(n)u(n) \Longleftrightarrow X_1(z) \quad \text{e} \quad x_2(n)u(n) \Longleftrightarrow X_2(z)$$

então

$$\boxed{c_1x_1(n)u(n) + c_2x_2(n)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad c_1X_1(z) + c_2X_2(z)}$$

sendo c_1 e c_2 constantes de valor arbitrário.

Demonstração: Para $y(n) = c_1x_1(n)u(n) + c_2x_2(n)u(n)$,

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}[c_1x_1(n) + c_2x_2(n)]z^{-n} \\ &= c_1\sum_{n=0}^{\infty} x_1(n)z^{-n} + c_2\sum_{n=0}^{\infty} x_2(n)z^{-n} = c_1X_1(z) + c_2X_2(z) \end{aligned}$$

Propriedades da transformada z unilateral

2) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(n)u(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

então

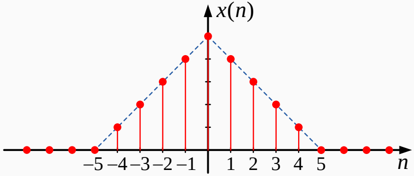
$$\boxed{x(n-k)u(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k}X(z), \quad k > 0}$$

Demonstração: Para $y(n) = x(n-k)u(n-k)$, tem-se que

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)u(n-k)z^{-n} \\
&= \sum_{n=k}^{\infty} x(n-k)z^{-n} = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{-(l+k)} \\
&= z^{-k}X(z)
\end{aligned}$$

Propriedades da transformada z unilateral

Exemplo: Considerando



determine:

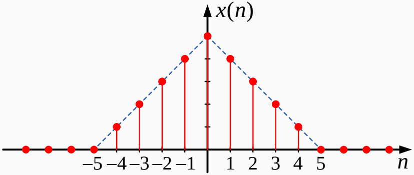
(a) $y(n) = x(n-1)u(n-1)$

(b) $y(n) = x(n-1)u(n)$

(c) $y(n) = x(n-2)u(n)$

Propriedades da transformada z unilateral

Exemplo: Considerando



determine:

(a) $y(n) = x(n-1)u(n-1)$

Resposta: $Y(z) = z^{-1}X(z)$

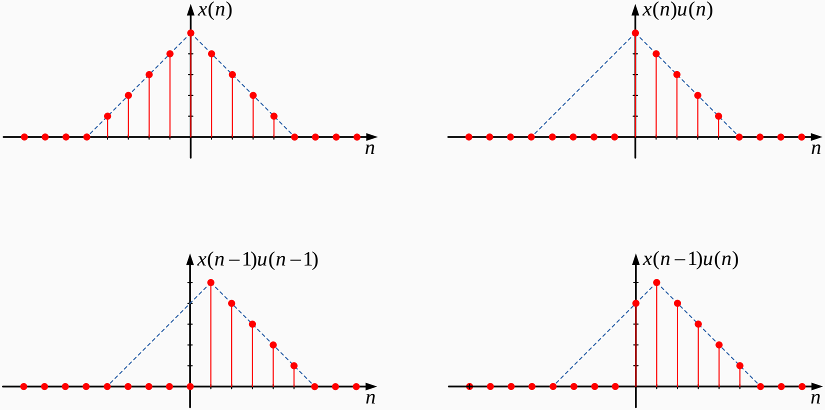
(b) $y(n) = x(n-1)u(n)$

Resposta: $Y(z) = z^{-1}X(z) + x(-1)$

(c) $y(n) = x(n-2)u(n)$

Resposta: $Y(z) = z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$

Propriedades da transformada z unilateral



Propriedades da transformada z unilateral

Portanto, levando em conta que

$$x(n-1)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-1}X(z) + x(-1)$$

e

$$x(n-2)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

é possível concluir que

$$\boxed{x(n-k)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k}X(z) + \sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n-k}}$$

Propriedades da transformada z unilateral

3) Convolução

Considerando

$$x_1(n)u(n) \Longleftrightarrow X_1(z) \quad \text{e} \quad x_2(n)u(n) \Longleftrightarrow X_2(z)$$

então

$$\boxed{x_1(n)u(n) * x_2(n)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(z)X_2(z)}$$

Demonstração: Para $y(n) = x_1(n)u(n) * x_2(n)u(n)$,

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\sum_{k=0}^{n} x_1(k)x_2(n-k)\right] z^{-n} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) \sum_{n=k}^{\infty} x_2(n-k)z^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} x_1(k) \sum_{l=0}^{\infty} x_2(l)z^{-(l+k)} \\
&= X_1(z)X_2(z)
\end{aligned}$$

4) Multiplicação por γ^n

Considerando

$$x(n)u(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

então

$$\boxed{\gamma^n x(n)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X\left(\frac{z}{\gamma}\right)}$$

Demonstração: Para $y(n) = \gamma^n x(n)u(n)$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n x(n)u(n)z^{-n} = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma^n x(n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\left(\frac{z}{\gamma}\right)^{-n} = X\left(\frac{z}{\gamma}\right) \end{aligned}$$

Propriedades da transformada z unilateral

5) Multiplicação por n

Considerando

$$x(n)u(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

então

$$\boxed{nx(n)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad -z\frac{d}{dz}X(z)}$$

Demonstração: Para $y(n) = nx(n)u(n)$, tem-se

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} nx(n)u(n)z^{-n} = z\sum_{n=0}^{\infty} x(n)(nz^{-n-1})$$

$$= -z\sum_{n=0}^{\infty} x(n)\frac{d}{dz}z^{-n} = -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Créditos: João J. T. Coelho e Matheus A. G. Fiorentin (2016/2).

Propriedades da transformada z unilateral

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = nu(n)$$

levando em conta que

$$nx(n)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Propriedades da transformada z unilateral

Exemplo: Determine a transformada z de

$$x(n) = nu(n)$$

levando em conta que

$$nx(n)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad -z\frac{d}{dz}X(z)$$

Resposta: Visto que

$$u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-1}, \quad |z| > 1$$

é possível concluir que

$$X(z) = -z\frac{d}{dz}\left[\frac{z}{z-1}\right] = -z\left[\frac{(z-1)-z}{(z-1)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{X(z) = \frac{z}{(z-1)^2}}$$

Propriedades da transformada z unilateral

6) Reversão no tempo

Considerando

$$x(n)u(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

então

$$\boxed{x(-n)u(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X\left(\frac{1}{z}\right)}$$

Demonstração: Para $y(n) = x(-n)u(-n)$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(z) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(-n)u(-n)z^{-n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{0} x(-n)z^{-n} = \sum_{l=0}^{\infty} x(l)z^{l} = X\left(\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

7) Valor inicial e final

Considerando

$$x(n)u(n) \Longleftrightarrow X(z)$$

então

$$\boxed{\begin{array}{ccc} x(0) & \Longleftrightarrow & \lim\limits_{z\to\infty} X(z) \\ x(\infty) & \Longleftrightarrow & \lim\limits_{z\to 1}(z-1)X(z) \end{array}}$$

Demonstração: Para $y(n) = x(n)u(n)$, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\infty} Y(z) &= \lim_{z\to\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x(n)z^{-n} \\ &= \lim_{z\to\infty} \frac{x(0)}{z^0} + \frac{x(1)}{z^1} + \cdots + \frac{x(\infty)}{z^{\infty}} \\ &= x(0) \end{aligned}$$

Propriedades da transformada z unilateral

Analogamente, observa-se ainda que

$$
\begin{aligned}
\lim_{z\to 1}(z-1)Y(z) &= \lim_{z\to 1}\left(\frac{z-1}{z}\right)\sum_{n=0}^{\infty}x(n)z^{-n} \\
&= \lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}(1-z^{-1})x(n)z^{-n} \\
&= \lim_{z\to 1}\sum_{n=0}^{\infty}[x(n)-x(n-1)]z^{-n} \\
&= \lim_{z\to 1}\lim_{N\to\infty}\left\{\frac{[x(0)-x(-1)]}{z^{0}}+\frac{[x(1)-x(0)]}{z^{1}}+\cdots\right. \\
&\quad \left.\cdots+\frac{[x(N-1)-x(N-2)]}{z^{N-1}}+\frac{[x(N)-x(N-1)]}{z^{N}}\right\} \\
&= \lim_{N\to\infty}x(N)
\end{aligned}
$$

Créditos: João A. Braun Neto e William E. Gonçalves (2016/2).

Transformada z inversa

Transformada z inversa

Por definição, a transformada z inversa é dada por

$$x(n) = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z) z^{n-1} dz$$

onde $\oint$ indica a integral de contorno. Todavia, **visando evitar a integração no plano complexo**,

1) **Realiza-se a expansão em frações parciais de $X(z)$**, uma vez que a maioria das transformadas de interesse são funções racionais, i.e.,

$$X(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$$

2) **Determina-se a transformada inversa utilizando os pares de transformada já estabelecidos**, i.e.,

$$X(z) \quad \longrightarrow \quad x(n)$$

Transformada z inversa

Exemplo: Assumindo que o sinal é causal, determine a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{8z - 19}{(z-2)(z-3)}$$

Transformada z inversa

Exemplo: Assumindo que o sinal é causal, determine a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{8z - 19}{(z-2)(z-3)}$$

Resposta: Realizando a expansão em frações parciais,

$$X(z) = \frac{3}{z-2} + \frac{5}{z-3}$$

e lembrando que

$$\gamma^{n-1}u(n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z-\gamma}$$

obtém-se

$$\boxed{x(n) = [3(2)^{n-1} + 5(3)^{n-1}]u(n-1)}$$

Decorrente da expansão direta de $X(z)$, a resposta obtida está em função de $u(n-1)$, o que não é elegante.

Transformada z inversa

No intuito de obter a transformada z inversa de $X(z)$ em função de $u(n)$ ao invés de $u(n-1)$, **considera-se agora a expansão em frações parciais modificada**, a qual resulta em

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{8z-19}{z(z-2)(z-3)}$$
$$= \frac{(-19/6)}{z} + \frac{(3/2)}{z-2} + \frac{(5/3)}{z-3}$$

Então, multiplicando ambos os lados por z e lembrando que

$$\delta(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k} \quad \text{e} \quad \gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}$$

obtém-se

$$\boxed{x(n) = -\frac{19}{6}\delta(n) + \frac{3}{2}(2)^n u(n) + \frac{5}{3}(3)^n u(n)}$$

Transformada z inversa

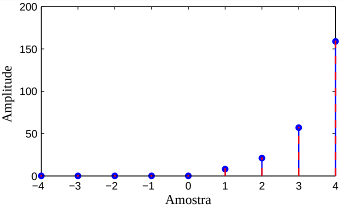
⇒ **Expansão em frações parciais direta:**

$$x(n) = [3(2)^{n-1} + 5(3)^{n-1}]u(n-1)$$

⇒ **Expansão em frações parciais modificada:**

$$x(n) = -\frac{19}{6}\delta(n) + \frac{3}{2}(2)^n u(n) + \frac{5}{3}(3)^n u(n)$$

⇒ **Sinal $x(n)$:**



Transformada z inversa

Exemplo: Considerando que o sinal é causal, determine a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

Transformada z inversa

Exemplo: Considerando que o sinal é causal, determine a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z(2z^2 - 11z + 12)}{(z-1)(z-2)^3}$$

Resposta: Primeiro, realizando a expansão em frações parciais modificada, obtém-se

$$\frac{X(z)}{z} = \frac{K}{(z-1)} + \frac{A_0}{(z-2)^3} + \frac{A_1}{(z-2)^2} + \frac{A_2}{(z-2)}$$

onde

$$K = (z-1)\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=1} \rightarrow K = -3$$

e

$$A_0 = (z-2)^3\left.\frac{X(z)}{z}\right|_{z=2} \rightarrow A_0 = -2$$

Transformada z inversa

Agora, multiplicando ambos os lados por z, A_1 e A_2 são obtidos fazendo $z \to 0$ e $z \to \infty$, respectivamente. Dessa forma,

$$\lim_{z\to\infty} z\left[\frac{X(z)}{z}\right] \to 0 = -3 - 0 + 0 + A_2 \to A_2 = 3$$

e

$$\lim_{z\to 0} \left[\frac{X(z)}{z}\right] \to \frac{3}{2} = 3 + \frac{1}{4} + \frac{A_1}{4} - \frac{3}{2} \to A_1 = -1$$

Logo,

$$X(z) = -3\frac{z}{z-1} - 2\frac{z}{(z-2)^3} - \frac{z}{(z-2)^2} + 3\frac{z}{(z-2)}$$

Finalmente, a partir dos pares de transformada conhecidos, tem-se

$$\boxed{x(n) = -\left[3 + \frac{1}{4}(n^2 + n - 12)2^n\right] u(n)}$$

Transformada z inversa

Exemplo: Determine a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z}{z - 0,8} - 2\frac{z}{z - 2}$$

assumindo que a RDC seja

(a) $|z| > 2$

(b) $|z| < 0,8$

(c) $0,8 < |z| < 2$

Lembrete:

$$\begin{aligned} \gamma^n u(n) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma| \\ -\gamma^n u(-n-1) \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| < |\gamma| \end{aligned}$$

Transformada z inversa

Exemplo: Determine a transformada z inversa de

$$X(z) = \frac{z}{z - 0,8} - 2\frac{z}{z - 2}$$

assumindo que a RDC seja

(a) $|z| > 2$

Respostas: $x(n) = [(0,8)^n - 2(2)^n]u(n)$

(b) $|z| < 0,8$

Respostas: $x(n) = [-(0,8)^n + 2(2)^n]u(-n-1)$

(c) $0,8 < |z| < 2$

Respostas: $x(n) = (0,8)^n u(n) + 2(2)^n u(-n-1)$

Solução de equações de diferenças

Solução de equações de diferenças

Assim como a transformada de Laplace em sistemas contínuos, **a transformada z permite converter equações de diferenças em expressões algébricas**. Dessa forma, a partir de

$$x(n-k)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k}X(z) + z^{-k}\sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}$$

é possível resolver equações de diferenças de forma simples. Para tal,

- Determina-se primeiro a transformada z do sistema descrito pela relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$.
- Após realizar as operações necessárias, a solução no domínio do tempo é obtida tomando a transformada z inversa.

É necessário que a equação de diferenças relacionado $x(n)$ e $y(n)$ seja linear e tenha coeficientes constantes.

Solução de equações de diferenças

Exemplo: Determine a saída $y(n)$ do sistema cuja relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ é dada por

$$y(n+2) - 5y(n+1) + 6y(n) = 3x(n+1) + 5x(n)$$

para $y(-1) = 11/6$, $y(-2) = 37/36$ e $x(n) = (2)^{-n}u(n)$.

Lembrete:

$$x(n-k)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k}X(z) + z^{-k}\sum_{n=1}^{k} x(-n)z^{n}$$

$$x(n-1)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-1}X(z) + x(-1)$$

$$x(n-2)u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-2}X(z) + z^{-1}x(-1) + x(-2)$$

Solução de equações de diferenças

Resposta: Primeiro, visto que o sistema é LIT, a relação de entrada e saída pode ser reescrita como

$$y(n) - 5y(n-1) + 6y(n-2) = 3x(n-1) + 5x(n-2)$$

Em seguida, a partir da propriedade do deslocamento, tem-se

$$\begin{aligned} Y(z) - 5z^{-1}Y(z) - 5y(-1) + 6z^{-2}Y(z) + 6z^{-1}y(-1) + 6y(-2) \\ = 3z^{-1}X(z) + 3x(-1) + 5z^{-2}X(z) + 5z^{-1}x(-1) + 5x(-2) \end{aligned}$$

Então, como $x(n) = 0$ para $n < 0$,

$$Y(z)(1-5z^{-1}+6z^{-2}) + (6z^{-1}-5)y(-1) + 6y(-2) = (3z^{-1}+5z^{-2})X(z)$$

o que resulta em

$$Y(z) = \frac{(3z^{-1} + 5z^{-2})}{(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})}X(z) - \frac{[-5y(-1) + 6z^{-1}y(-1) + 6y(-2)]}{(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})}$$

Solução de equações de diferenças

$$Y(z) = \underbrace{\overbrace{\frac{(3z^{-1} + 5z^{-2})}{(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})}}^{\text{Resp. ao estado nulo}}}_{H(z)} X(z) - \overbrace{\frac{[-5y(-1) + 6z^{-1}y(-1) + 6y(-2)]}{(1 - 5z^{-1} + 6z^{-2})}}^{\text{Resp. à entrada nula}}$$

Agora, substituindo as condições iniciais e considerando que

$$x(n) = (2)^{-n}u(n) \quad \Longrightarrow \quad X(z) = \frac{z}{z - 0,5}$$

obtém-se

$$Y(z) = \frac{3z + 5}{z^2 - 5z + 6}\left(\frac{z}{z - 0,5}\right) + \frac{z(3z - 11)}{z^2 - 5z + 6}$$

ou, equivalentemente,

$$\boxed{Y(z) = \frac{z(3z^2 - 9,5z + 10,5)}{(z - 0,5)(z^2 - 5z + 6)}}$$

Solução de equações de diferenças

Logo, realizando a expansão em frações parciais modificada, tem-se

$$\frac{Y(z)}{z} = \frac{(26/15)}{z-0,5} - \frac{(7/3)}{z-2} + \frac{(18/5)}{z-3}$$

ou ainda

$$Y(z) = \frac{26}{15}\frac{z}{z-0,5} - \frac{7}{3}\frac{z}{z-2} + \frac{18}{5}\frac{z}{z-3}$$

Finalmente, levando em conta que

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}, \quad |z| > |\gamma|$$

a saída do sistema no domínio do tempo (discreto) é obtida como

$$\boxed{y(n) = \left[\frac{26}{15}(0,5)^n - \frac{7}{3}(2)^n + \frac{18}{5}(3)^n\right] u(n)}$$

Solução de equações de diferenças

Note ainda que

$$Y(z) = Y_{\mathrm{zs}}(z) + Y_{\mathrm{zi}}(z)$$

sendo a resposta ao estado nulo dado por

$$Y_{\mathrm{zs}}(z) = \frac{26}{15}\frac{z}{z-0,5} - \frac{22}{3}\frac{z}{z-2} + \frac{28}{5}\frac{z}{z-3}$$

e a resposta à entrada nula, por

$$Y_{\mathrm{zi}}(z) = 5\frac{z}{z-2} - 2\frac{z}{z-3}.$$

Portanto,

$$\boxed{\begin{aligned} y(n) &= y_{\mathrm{zs}}(n) + y_{\mathrm{zi}}(n) \\ &= \left\{\left[\frac{26}{15}(0,5)^n - \frac{22}{3}(2)^n + \frac{28}{5}(3)^n\right] + [5(2)^n - 2(3)^n]\right\}u(n) \end{aligned}}$$

Função de transferência

Função de transferência

No contexto de sistemas de tempo discreto, verifica-se que

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) z^{-n}$$

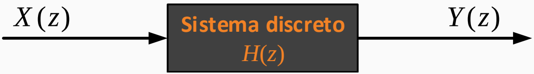
e

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) z^{-n}$$

sendo **a função de transferência do sistema** dada por

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n) z^{-n}$$

Logo, pode-se representar o sistema como



Função de transferência

Para determinar a função de transferência, considere que

$$a_0 y(n) + \cdots + a_N y(n-N) = b_0 x(n) + \cdots + b_M x(n-M)$$

Então, **dado que o estado do sistema é assumido zero/nulo**,

$$y(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k} Y(z) \quad \text{e} \quad x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad z^{-k} X(z)$$

é possível mostrar que

$$a_0 Y(z) + \cdots + a_N z^{-N} Y(z) = b_0 X(z) + \cdots + b_M z^{-M} X(z)$$

Consequentemente, **a função de transferência** (razão de polinômios em z) do sistema é obtida como

$$\boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{b_0 + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + \cdots + a_N z^{-N}}}$$

Função de transferência

⇒Função de transferência:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

⇒Resposta ao impulso versus função de transferência:

$$h(n) \quad \Longleftrightarrow \quad H(z)$$

⇒Resposta do sistema:

$$y(n) = h(n) * x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad Y(z) = H(z)X(z)$$

Função de transferência

Exemplo: Determine a resposta ao impulso $h(n)$ do sistema causal cuja relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ é dada por

$$y(n+1) - 0,8y(n) = x(n+1)$$

Função de transferência

Exemplo: Determine a resposta ao impulso $h(n)$ do sistema causal cuja relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ é dada por

$$y(n+1) - 0,8y(n) = x(n+1)$$

Resposta: Primeiro, tomando a transformada z de ambos os lados

$$zY(z) - 0,8Y(z) = zX(z) \quad \rightarrow \quad Y(z)(z-0,8) = zX(z)$$

tem-se

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z}{z-0,8}$$

Então, dado que

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma}$$

obtém-se

$$\boxed{h(n) = (0,8)^n u(n)}$$

Estabilidade

Estabilidade

Dada a função de transferência em z

$$H(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{b_0 + \cdots + b_M z^{-M}}{a_0 + \cdots + a_N z^{-N}}$$

é possível tratar da estabilidade da seguinte forma:

- **Estabilidade interna:** Análise conduzida a partir dos polos de $H(z)$ [i.e., raízes de $Q(z)$] **sem/antes de realizar qualquer cancelamento polo-zero**.

- **Estabilidade externa (BIBO):** Análise conduzida sobre os polos remanescentes de $H(z)$ [i.e., raízes de $Q(z)$] **após realizar os cancelamentos polo-zero possíveis**.

Se todos os polos estão dentro do círculo unitário,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| < \infty$$

Estabilidade

Considere

$$h(n) = \gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma} = H(z)$$

Então, com respeito a estabilidade BIBO, observe que

- Para $|\gamma| < 1$,
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\gamma^n u(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} (|\gamma|)^n = \frac{1}{1-|\gamma|} < \infty$$
- Para $|\gamma| = 1$,
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{\infty} 1 \to \infty$$
- Para $|\gamma| > 1$,
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \frac{|\gamma|^{\infty} - 1}{|\gamma| - 1} \to \infty$$

Estabilidade

Considere

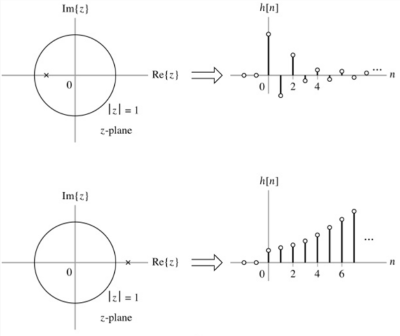
$$h(n) = -\gamma^n u(-n-1) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{z}{z-\gamma} = H(z)$$

Então, com respeito a estabilidade BIBO, observe que

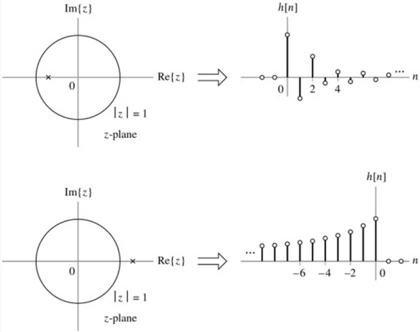
- Para $|\gamma| > 1$, tem-se que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} (|\gamma|)^n = \frac{|\gamma|}{|\gamma|-1} < \infty$$
- Para $|\gamma| = 1$, tem-se que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} 1 \to \infty$$
- Para $|\gamma| < 1$, tem-se que
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{-1} (|\gamma|)^n = \frac{1-|\gamma|^{-\infty}}{|\gamma|-1} \to \infty$$

Estabilidade

⇒Assumindo causalidade:



⇒Assumindo estabilidade:



Causalidade e estabilidade são alcançadas (simultaneamente) apenas quando os polos de $H(z)$ estão localizados dentro do circulo unitário.

Estabilidade

Um sistema causal é

1) **assintoticamente estável se, e somente se, os polos de $H(z)$ estiverem <u>dentro</u> do círculo unitário.**
2) marginalmente estável se, e somente se, existirem polos simples sobre o círculo unitário (nenhum fora).
3) instável se
   - um polo de $H(z)$ estiver fora do círculo unitário; ou
   - polos repetidos de $H(z)$ estiverem sobre o círculo unitário.

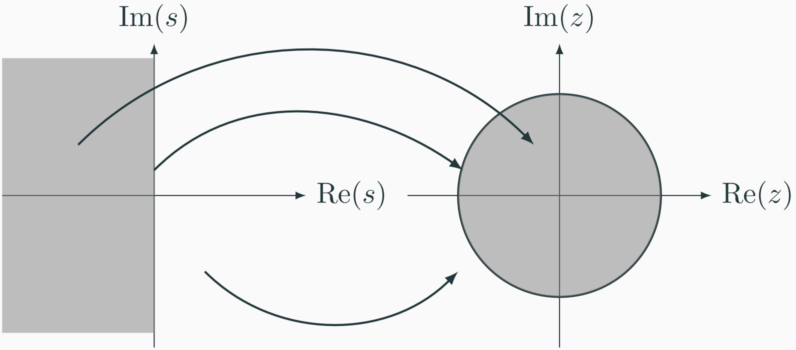
Um sistema anti-causal é

1) **assintoticamente estável se, e somente se, os polos de $H(z)$ estiverem <u>fora</u> do círculo unitário.**
2) marginalmente estável se, e somente se, existirem polos sobre o círculo unitário (nenhum fora).
3) instável se
   - um polo de $H(z)$ estiver dentro do círculo unitário; ou
   - polos repetidos de $H(z)$ estiverem sobre o círculo unitário.

Relação entre o plano s e o plano z

Relação entre o plano s e o plano z

⇒**Plano s** ⇒**Plano z**



Observações:

- O SPLE é "mapeado" dentro do circulo de raio unitário.
- O eixo $j\omega$ é "mapeado" sobre o circulo de raio unitário.
- O SPLD é "mapeado" fora do circulo de raio unitário.

Sistema inverso

Sistema inverso

Considerando que a função de transferência de um sistema é dada por

$$H_{\text{dir}}(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

é possível concluir que **a função de transferência do sistema inverso** pode ser obtida como

$$\boxed{H_{\text{inv}}(z) = \frac{1}{H_{\text{dir}}(z)}}$$

Consequentemente,

$$H_{\text{dir}}(z)H_{\text{inv}}(z) = 1$$

o que implica

$$h_{\text{dir}}(n) * h_{\text{inv}}(n) = \delta(n)$$

Sistema inverso

Exemplo: Dada a função de transferência

$$H_{\mathrm{dir}}(z) = \frac{z - 0,4}{z - 0,7}$$

determine:

(a) a função de transferência do sistema inverso $H_{\mathrm{inv}}(z)$; e
(b) a estabilidade do sistema inverso $H_{\mathrm{inv}}(z)$.

Sistema inverso

Exemplo: Dada a função de transferência

$$H_{\mathrm{dir}}(z) = \frac{z - 0,4}{z - 0,7}$$

determine:

(a) a função de transferência do sistema inverso $H_{\mathrm{inv}}(z)$; e
(b) a estabilidade do sistema inverso $H_{\mathrm{inv}}(z)$.

Resposta: Primeiramente, a função de transferência do sistema inverso é obtida como

$$H_{\mathrm{inv}}(z) = \frac{z - 0,7}{z - 0,4}$$

Note que o polo de $H_{\mathrm{inv}}(z)$ ocorre em $z = 0,4$ (dentro do círculo unitário); logo, o sistema inverso é também BIBO estável.

Resumo e discussão

Resumo e discussão

- **A transformada z pode ser utilizada para lidar com sinais e sistemas de tempo discreto.**
- No caso de sinais/sistemas não causais, a transformada z bilateral deve ser utilizada.
- A região de convergência indica se o sinal/sistema é
  - causal (RDC externa ao polo de maior valor);
  - anticausal (RDC interna ao polo de menor valor); e
  - não-causal (RDC compreende um anel/interseção).
- A transformada z permite resolver equações de diferenças de maneira simplificada.
- Um sistema de tempo discreto é estável se os polos de $H(z)$ são
  - internos ao circulo unitário no caso de sistemas causais; e
  - externos ao circulo unitário no caso de sistemas anti-causais.

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 508)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 9)

Até a próxima aula... =)