Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

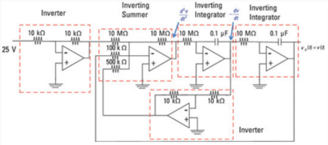
Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Teoria da amostragem

Considerações iniciais

⇒ Sistemas de tempo contínuo:

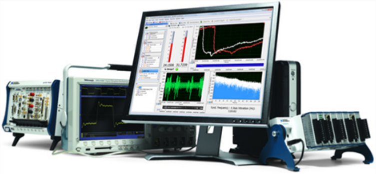
- Sinais analógicos medidos através de sensores e convertidos em tensões ou correntes
- Tratamento realizado através de circuitos contendo resistores, capacitores, indutores, amplificadores operacionais e outros.
- **Desvantagens:**
  - Precisão/exatidão dependem da qualidade dos componentes
  - Reprodutibilidade limitada
  - Baixa imunidade ao ruído
  - Pouca flexibilidade para alterações.



Considerações iniciais

⇒ Sistemas de tempo discreto:

- Sinais analógicos medidos através de sensores e convertidos em informação "digital"
- Tratamento realizado através de processadores, microcontroladores, DSPs e/ou computadores.
- **Vantagens:**
  - Precisão/exatidão quase ilimitada (depende do número de bits)
  - Reprodutibilidade ilimitada e elevada imunidade ao ruído
  - Grande flexibilidade (alterações no programa)
  - Maior integração

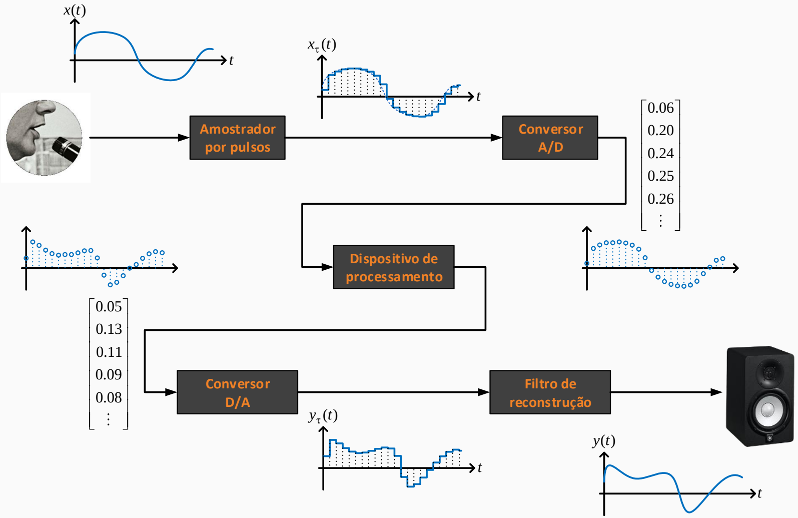


Considerações iniciais

Como converter/tratar a informação?

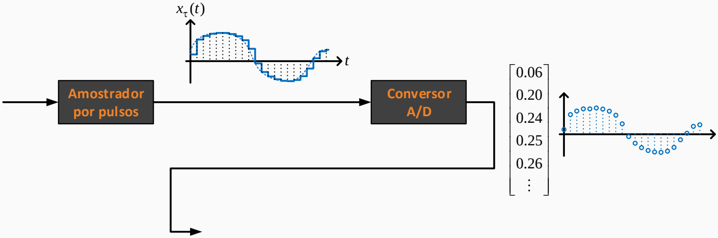
Considerações iniciais

Como converter/tratar a informação?



Considerações iniciais

Para prosseguir, é importante entender **o que ocorre com o sinal/informação durante o processo de amostragem...**



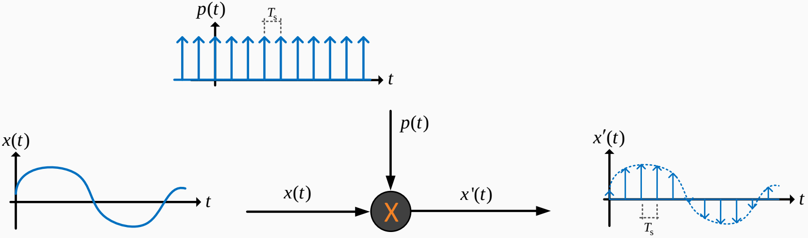
- Digitalização é crescente de sistemas de comunicações, controle, instrumentação e processamento de sinais...
- No mundo real, os sinais são de tempo contínuo.

Objetivos

- Introduzir os conceitos relacionados ao processo de amostragem de sinais.
- **Descrever a amostragem instantânea (ou amostragem ideal).**
- Derivar o teorema da amostragem (Teorema de Nyquist).
- **Apresentar a amostragem por pulsos (ou amostragem prática).**
- Tratar sobre os filtros anti-recobrimento e de reconstrução.
- Discutir as dificuldades inerentes à amostragem de sinais.
- Comentar sobre a conversão A/D e D/A.

Amostragem instantânea
(ou amostragem ideal)

Amostragem instantânea



Neste contexto, a amostragem pode ser representada como

$$
\begin{aligned}
x'(t) &= x(t)p(t) \\
&= x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_\mathrm{s})
\end{aligned}
$$

sendo $p(t)$ periódico com período T_s.

Amostragem instantânea

Então, tomando a transformada de Fourier, obtém-se

$$\boxed{X'(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * P(\omega)]}$$

Assim, visto que

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_\mathrm{s}) \quad \Longleftrightarrow \quad P(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \delta(\omega - k\omega_\mathrm{s})$$

onde

$$c_k = \frac{1}{T_\mathrm{s}} \int_{-T_\mathrm{s}/2}^{T_\mathrm{s}/2} p(t)\, e^{-jk\omega_\mathrm{s} t}\, dt = \frac{1}{T_\mathrm{s}} \int_{-T_\mathrm{s}/2}^{T_\mathrm{s}/2} \delta(t)\, e^{-jk\omega_\mathrm{s} t}\, dt = \frac{1}{T_\mathrm{s}}$$

Portanto,

$$\boxed{P(\omega) = \omega_\mathrm{s} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_\mathrm{s})}$$

Amostragem instantânea

Finalmente, substituindo $P(\omega)$ em

$$X'(\omega) = \frac{1}{2\pi}[X(\omega) * P(\omega)]$$

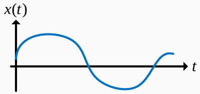
conclui-se que

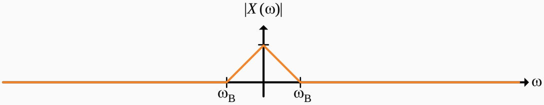
$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)P(\omega-\eta)d\eta \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\eta)\left[\frac{2\pi}{T_\mathrm{s}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\eta-k\omega_\mathrm{s})\right]d\eta \\ &\Rightarrow \boxed{X'(\omega) = \frac{1}{T_\mathrm{s}}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega-k\omega_\mathrm{s})} \end{aligned}$$

Portanto, a amostragem do sinal acarreta a repetição periódica do espectro de $x(t)$ em múltiplos de $\pm k\omega_\mathrm{s}$.

Amostragem instantânea

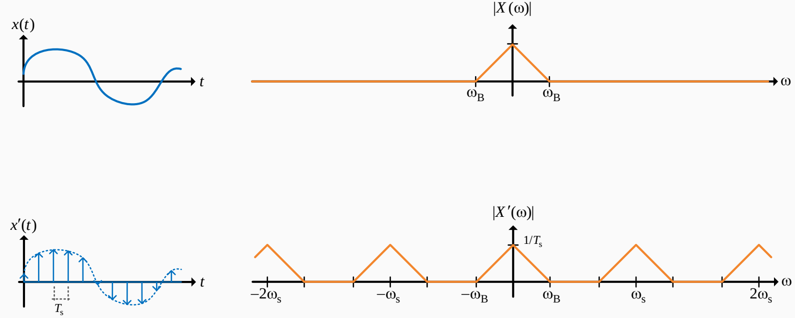
Para ilustrar, considere a amostragem do seguinte sinal:





Amostragem instantânea

Para ilustrar, considere a amostragem do seguinte sinal:



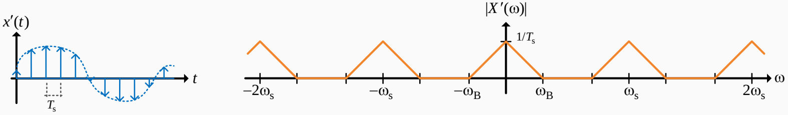
Observações:

- Note o surgimento de réplicas de $X(\omega)$ em múltiplos de ω_s.
- Quanto maior a frequência de amostragem ω_s (i.e., $T_\mathrm{s} \to 0$), maior o afastamento entre as réplicas de $X(\omega)$.

Amostragem instantânea

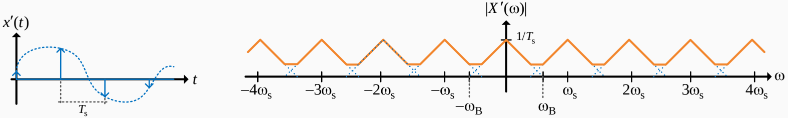
Para clarificar o impacto de T_s, observe o que ocorre quando

⇒**Condição 1:** $\omega_s \gg 2\omega_B$



Nessa condição, a informação contida no sinal é preservada.

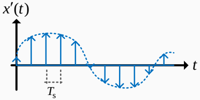
⇒**Condição 2:** $\omega_s \ll 2\omega_B$

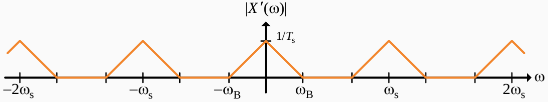


Nessa condição, a informação contida no sinal não é preservada.

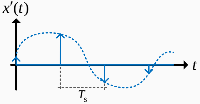
Amostragem instantânea

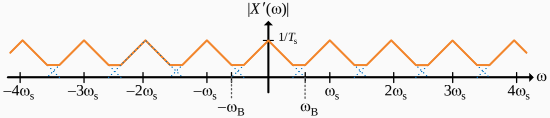
$\Rightarrow$**Condição 1:** $\omega_s \gg 2\omega_B$





$\Rightarrow$**Condição 2:** $\omega_s \ll 2\omega_B$





Diante do exposto,

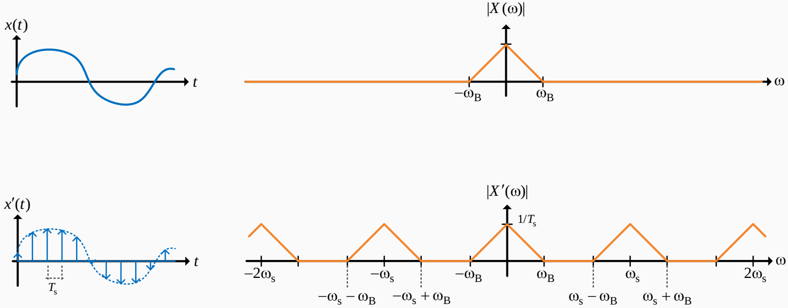
- Como recuperar $x(t)$ a partir de $x'(t)$?
- Qual é o valor mínimo de ω_s para não ocorrer sobreposição?

Teorema da amostragem

Teorema da amostragem

Objetivo

Determinar uma regra para o ajuste do período de amostragem T_s (ou frequência de amostragem ω_s) de forma que seja possível reconstruir o sinal $x(t)$ a partir das amostras obtidas $x'(t)$.



Teorema da amostragem

Teorema de Nyquist

Seja $x(t)$ um sinal cujo espectro é limitado em banda a $B\,\mathrm{Hz}$, i.e.,

$$X(\omega) = 0, \quad |\omega| > \omega_\mathrm{B} = 2\pi B$$

Então, a frequência de amostragem mínima é obtida como

$$\omega_\mathrm{s} > 2\omega_\mathrm{B} \quad \longrightarrow \quad T_\mathrm{s} < \frac{1}{2B}$$

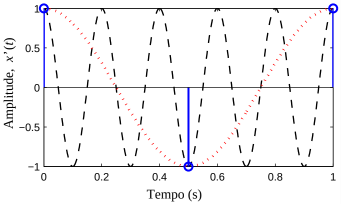
Dessa forma, $x(t)$ pode ser reconstruído a partir de suas amostras utilizando um filtro passa-baixa ideal com largura de banda ω_B.

- A frequência de Nyquist é a menor taxa de amostragem necessária para que não ocorra sobreposição espectral.
- Embora sejam consideradas amostras uniformemente espaçadas, destaca-se que tal condição não é necessária.

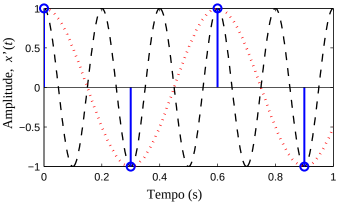
Exemplo: Teorema da amostragem

1) Considere a amostragem de $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, $\omega_0 = 2\pi 5$ (rad/s).

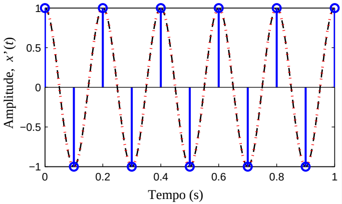
Subamostragem $5T_{\mathrm{s}}$



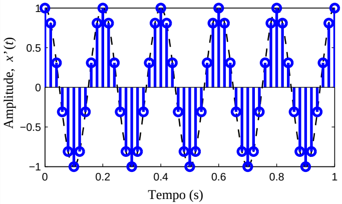
Subamostragem $3T_{\mathrm{s}}$



Taxa de Nyquist T_{s}



Superamostragem $T_{\mathrm{s}}/5$



Exemplo: Teorema da amostragem

1) **Subamostragem:**
   - Ocorre sobreposição de réplicas adjacentes no espectro do sinal
   - Não é possível reconstruir o sinal a partir das amostras obtidas
   - Um sinal de alta frequência aparenta ser de baixa frequência

2) **Taxa de Nyquist:**
   - Não ocorrem sobreposições no espectro do sinal
   - A informação contida no sinal é preservada
   - O sinal pode ser reconstruído por um filtro passa-baixa ideal

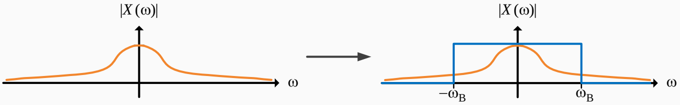
3) **Superamostragem:**
   - As réplicas no espectro do sinal estão afastadas umas das outras
   - Logo, não ocorre sobreposição espectral
   - A reconstrução do sinal é possível através de um filtro passa-baixa prático

Conversão A/D

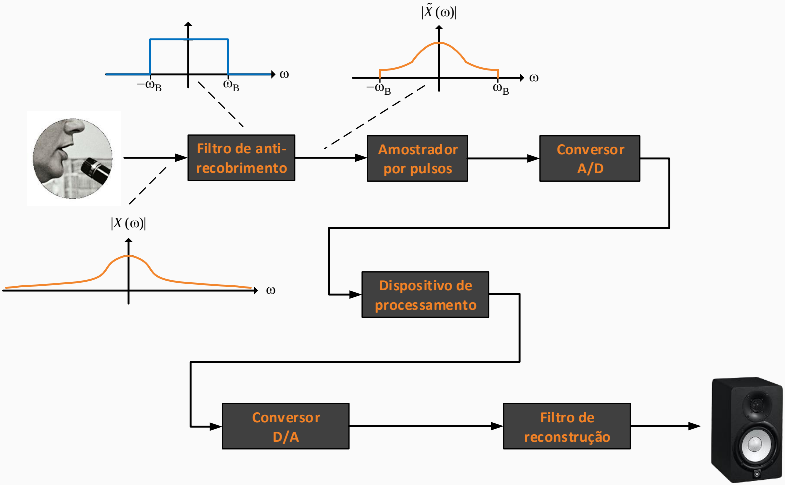
Filtro anti-recobrimento

Filtro anti-recobrimento

- Conhecendo o espectro do sinal a ser amostrado, determina-se a maior frequência $B\,(\mathrm{Hz})$ que compõe o sinal; **então, adota-se $f_s > 2B\,(\mathrm{Hz})$.**
- **Contudo, sinais práticos não são limitados em frequência.**
- Componentes de frequência $> B\,(\mathrm{Hz})$ devem ser "eliminadas" antes da amostragem para evitar sobreposição e/ou perda de informação na banda principal do sinal.
- **Filtro anti-recobrimento:**
  - Filtro analógico utilizado na entrada do sistema.
  - Perde-se informação fora da banda principal!
  - Busca-se minimizar a sobreposição espectral/ *"aliasing"*.



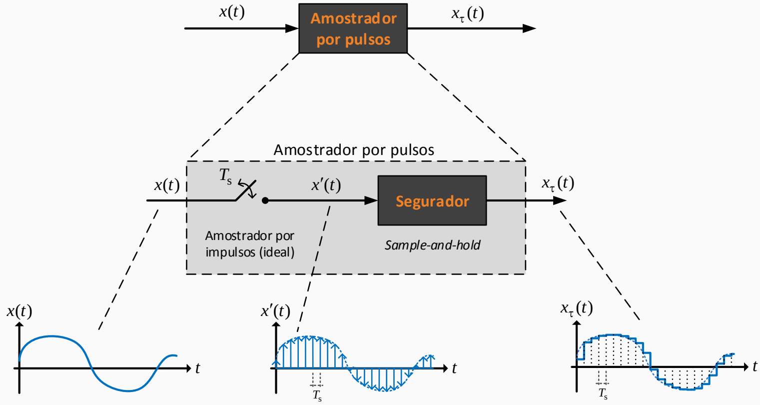
Filtro anti-recobrimento



Amostragem por pulsos
(ou amostragem prática)

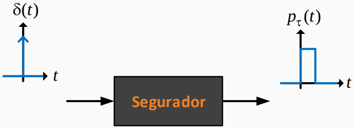
Amostragem por pulsos

Como o trem de impulsos não é realizável na prática, considera-se um amostrador por pulsos. Nesse contexto, pode-se utilizar o seguinte modelo:



Amostragem por pulsos

Dessa forma, é possível modelar o segurador como



Particularmente, a resposta ao impulso do segurador é dada por

$$\boxed{h_\tau(t) = u(t) - u(t - \tau)}$$

Portanto, o segurador converte cada impulso em um pulso de largura τ e amplitude igual à área do impulso. Logo,

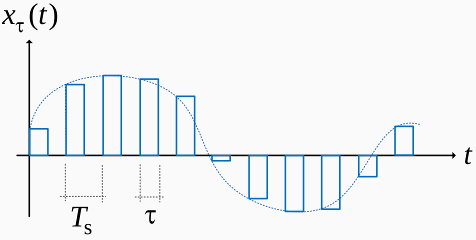
$$\boxed{\begin{aligned} x_\tau(t) &= x'(t) * h_\tau(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_\mathrm{s}) h_\tau(t - kT_\mathrm{s}) \end{aligned}}$$

Amostragem por pulsos

A partir de

$$\boxed{\begin{aligned} x_\tau(t) &= x'(t) * h_\tau(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_\mathrm{s}) h_\tau(t - kT_\mathrm{s}), \quad h_\tau(t) = u(t) - u(t-\tau) \end{aligned}}$$

observa-se que



Amostragem por pulsos

Para entender o efeito da amostragem por pulsos, toma-se a transformada de Fourier de ambos os lados de

$$x_\tau(t) = x'(t) * h_\tau(t) \quad \Longrightarrow \quad X_\tau(\omega) = X'(\omega)\, H_\tau(\omega)$$

Então, visto que

$$x'(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT_\mathrm{s}) \quad \Rightarrow \quad \boxed{X'(\omega) = \frac{1}{T_\mathrm{s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_\mathrm{s})}$$

tem-se

$$\boxed{X_\tau(\omega) = H_\tau(\omega) \left[\frac{1}{T_\mathrm{s}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_\mathrm{s}) \right]}$$

Agora, resta determinar o impacto de $H_\tau(\omega)$ sobre $X'(\omega)$...

Amostragem por pulsos

Para tal, tomando a transformada de Fourier de

$$h_\tau(t) = u(t) - u(t-\tau)$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} H_\tau(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} h_\tau(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= e^{-j\omega\tau/2} \left[\frac{e^{j\omega\tau/2} - e^{-j\omega\tau/2}}{j\omega} \right] \times \left(\frac{2\tau}{2\tau} \right) \\ &= \tau \left[\frac{\operatorname{sen}(\omega\tau/2)}{\omega\tau/2} \right] e^{-j\omega\tau/2} \\ &\Rightarrow \boxed{H_\tau(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau/2}} \end{aligned}$$

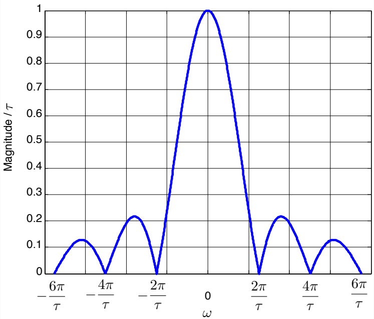
Portanto, a resposta em frequência do segurador é caracterizada por uma função $\operatorname{sinc}(\,.\,)$, com nulos em múltiplos de $\pm k2\pi/\tau$.

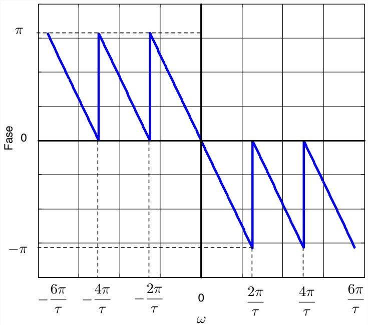
Amostragem por pulsos

Para ilustrar, a partir de

$$\boxed{H_\tau(\omega) = \tau \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right) e^{-j\omega\tau/2}}$$

observa-se que





Amostragem por pulsos

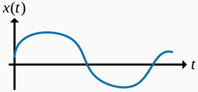
Finalmente, a saída do amostrador por pulsos é obtida como

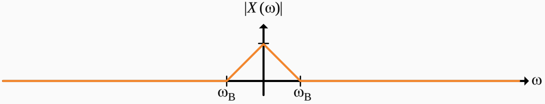
$$\boxed{\begin{aligned} X_\tau(\omega) &= H_\tau(\omega)X'(\omega) \\ &= \underbrace{\left[\frac{\tau}{T_\mathrm{s}}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau/2}\right]}_{\text{Distorções de magnitude e atrasos introduzidos por } H_\tau(\omega)\ldots} \quad \underbrace{\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_\mathrm{s})\right]}_{\text{Repetição periódica de } X(\omega) \text{ em múltiplos de } \pm k\omega_\mathrm{s},\ k=1,2,\ldots} \end{aligned}}$$

- Na maioria das implementações práticas, $\tau = T_\mathrm{s}$; logo, tem-se a máxima distorção no espectro do sinal.
- Essa distorção diminui conforme $\tau \to 0$.
- Contudo, fazendo $\tau < T_\mathrm{s}$, perde-se energia do sinal amostrado, o que pode levar a uma baixa razão sinal-ruído.

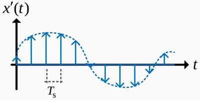
Amostragem por pulsos

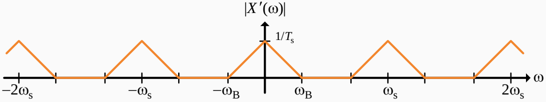
⇒ **Espectro de $x(t)$:** Sinal "original"



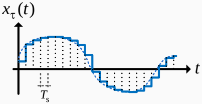


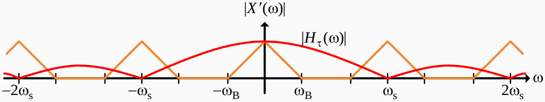
⇒ **Espectro de $x'(t)$:** Sinal amostrado por impulsos





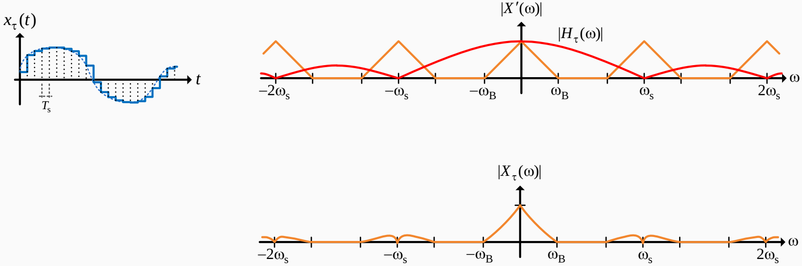
⇒ **Espectro de $x_\tau(t)$:** Sinal amostrado por pulsos ($\tau = T_\mathrm{s}$)





Amostragem por pulsos

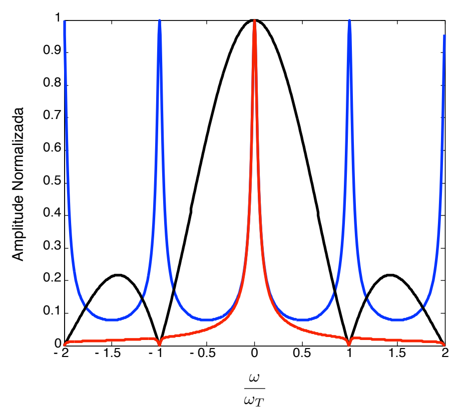
Portanto, o sinal amostrado por pulsos (considerando $\tau = T_\mathrm{s}$) sofre distorções no espectro como ilustrado através de



Além de atenuar as réplicas do espectro do sinal em múltiplos de $\pm\omega_\mathrm{s}$, a resposta em frequência do segurador $H_\tau(\omega)$ afeta também o espectro de $X'(\omega)$ centrado na origem.

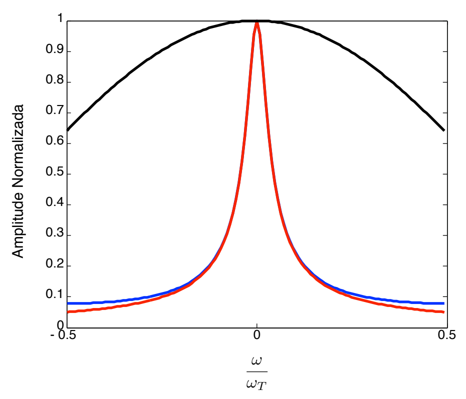
Exemplo: Amostragem por pulsos

Sinal:	$x(t) = e^{-2t}\,u(t)$
Tempo de duração:	10 s
Período de amostragem:	$T = 10/128 = 0,0781$ s
Largura do pulso:	$\tau = T$



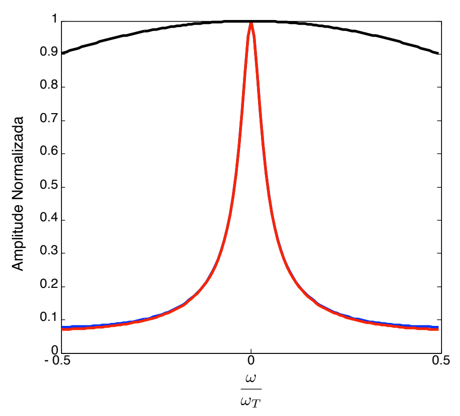
Exemplo: Amostragem por pulsos

⇒ Detalhe da faixa $-\omega_T/2 < \omega < \omega_T/2$ para $\tau = T_\mathrm{s}$



Exemplo: Amostragem por pulsos

$\Rightarrow$ Detalhe da faixa $-\omega_T/2 < \omega < \omega_T/2$ para $\tau = T_s/2$

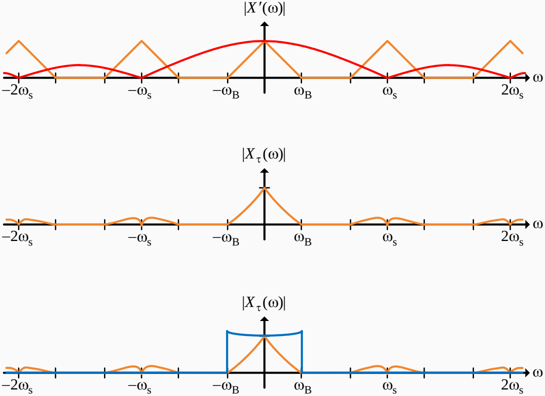


Filtro de reconstrução

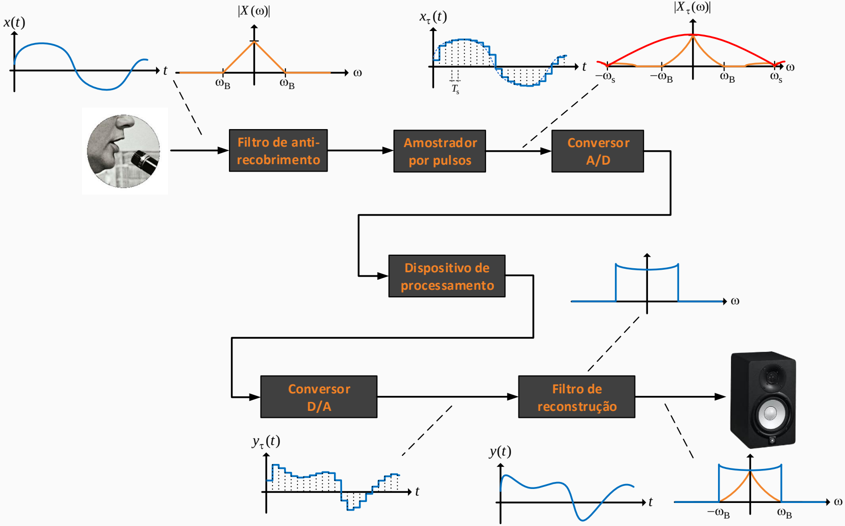
Filtro de reconstrução

Visto que ocorre uma distorção no espectro de $x_\tau(t)$, introduz-se um filtro na saída do sistema visando

- **compensar as distorções relacionadas ao sinal pulsado;**
- selecionar a banda do sinal original $x(t)$; e
- suavizar as variações na saída do conversor D/A.

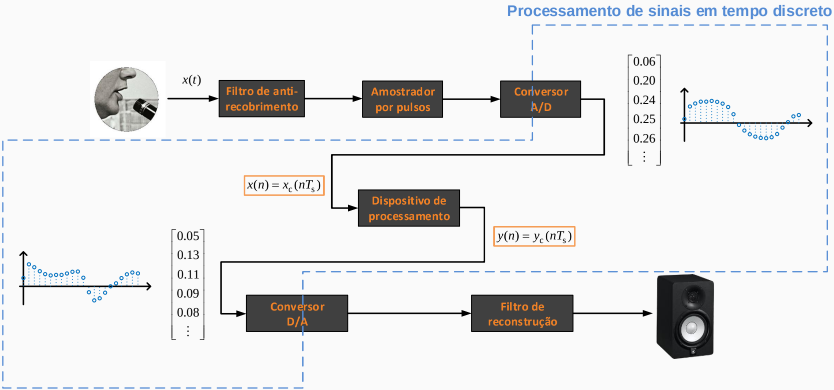


Filtro de reconstrução



Processamento de sinais em tempo discreto

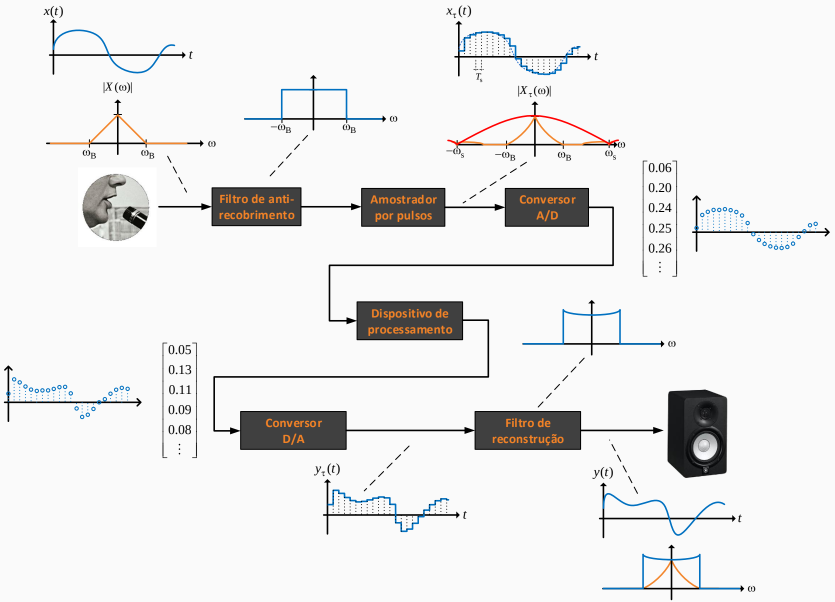
Processamento de sinais em tempo discreto



- Daqui em diante, torna-se fundamental tratar da análise de sinais e sistemas de tempo discreto.
- Note que $x(n)$ caracteriza uma "sequência de números".
- Processamento de sinais de tempo discreto (em DSP).

Resumo e discussão

Resumo e discussão



Resumo e discussão

- Amostragem → Repetição do espectro de $x(t)$

$$X_\tau(\omega) = \left[\frac{\tau}{T_s}\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)e^{-j\omega\tau/2}\right]\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(\omega - k\omega_s)\right]$$

- O teorema de Nyquist estabelece o limite teórico mínimo de f_s para que não ocorra sobreposição espectral.
- Na prática, $f_s \gg 2B$ Hz (i.e., $\omega_s \gg \omega_B$ rad/s)!
  - Dessa forma, reduz-se a sobreposição espectral (*aliasing*).
  - Além disso, simplifica-se o projeto do filtro de reconstrução.
- **Filtro anti-recobrimento**
  - Sinais práticos não são limitados em frequência!
  - Assim, reduz-se o efeito da sobreposição espectral.
- **Filtro de reconstrução**
  - Minimizar a distorção introduzida pela amostragem por pulsos.
  - Suavizar as variações do sinal de saída do conversor D/A.
- Amostragem → Processamento de tempo discreto...

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 723)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 3)

Até a próxima aula... =)