3ª LISTA DE EXERCÍCIOS

1) Para cada uma das integrais dadas a seguir, especifique os valores do parâmetro σ tal que garanta a convergência da integral.

a) $\int_0^\infty e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$ b) $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-5|t|} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$ c) $\int_{-5}^{5} e^{-5t} e^{-(\sigma+j\omega)t} dt$

2) Através da integração direta, determine a transformada de Laplace e a região de convergência das seguintes funções:

a) $x(t) = e^{-t}u(t+2)$ b) $x(t) = u(-t+3)$

3) Através da integração direta, determine a transformada de Laplace e a região de convergência das seguintes funções:

a) $x(t) = u(t) - u(t-1)$ b) $x(t) = t\cos(\omega_0 t)u(t)$

4) Através da integração direta, determine a transformada de Laplace dos sinais mostrados na Figura 1.

Figura 1.

5) Com o auxílio das propriedades e da tabela contendo pares elementares, determine a transformada de Laplace dos seguintes sinais:

a) $x(t) = e^{-t}u(t) * \mathrm{sen}(3\pi t)u(t)$ b) $x(t) = \frac{d}{dt} tu(t)$

6) Demonstre a validade da propriedade da convolução da transformada de Laplace, i.e.,

$$x(t) * h(t) \Leftrightarrow X(s)H(s)$$

7) A partir do teorema do valor inicial e do valor final, determine $x(0)$ e $x(\infty)$ para

a) $X(s) = \frac{1}{s+2}$ b) $X(s) = \frac{s+1}{(s+2)(s+3)}$

Em seguida, verifique a resposta computando a transformada inversa de Laplace das referidas funções.

8) Levando em conta as propriedades e os pares elementares conhecidos, determine a transformada inversa de Laplace (bilateral) de

a) $X(s) = e^{5s}\frac{1}{(s+2)}, \quad \mathrm{Re}(s) < -2$ b) $X(s) = \frac{-s-4}{s^2+3s+2}, \quad -2 < \mathrm{Re}(s) < -1$

9) Determine a transformada inversa de Laplace (unilateral) de

a) $X(s) = \frac{2s+5}{s^2+5s+6}$ b) $X(s) = \frac{2s+1}{(s+1)(s^2+2s+2)}$ c) $X(s) = \frac{(s+2)}{s(s+1)^2}$

10) Utilizando a transformada de Laplace, resolva a equação diferencial dada por

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+4\frac{d}{dt}y(t)+4y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+x(t)$$

para $y(0^-)=\dot{y}(0^-)=1$ e $x(t)=25u(t)$.

11) Determine a função de transferência do sistema descrito pela equação diferencial

$$\frac{d^3y}{dt^3}+6\frac{d^2y}{dt^2}-11\frac{dy}{dt}+6y(t)=3\frac{d^2x}{dt^2}+7\frac{dx}{dt}+5x(t)$$

12) Para um sistema cuja função de transferência é dada por

$$H(s)=\frac{2s+3}{s^2+2s+5}$$

encontre:
a) a resposta (assumindo estado nulo) para $x(t)=u(t-5)$; e
b) a equação diferencial que relaciona a saída $y(t)$ com a entrada $x(t)$, considerando que o sistema é controlável e observável.

13) Considerando que entrada $x(t)=u(t)$ produz a saída $y(t)=e^{-t}\cos(2t)u(t)$, encontre a função de transferência e a resposta ao impulso do sistema estável correspondente utilizando a transformada de Laplace.

14) Assumindo que os sistemas são controláveis e observáveis, analise a estabilidade assintótica e a BIBO estabilidade para os sistemas representados pelas seguintes funções de transferência:

a) $H(s)=\dfrac{s+5}{s^2+3s+2}$ b) $H(s)=\dfrac{s(s+2)}{s+5}$

15) Para um sistema descrito pela relação de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$

$$\frac{d^2}{dt^2}y(t)+\frac{d}{dt}y(t)-6y(t)=\frac{d^2}{dt^2}x(t)-\frac{d}{dt}x(t)-2x(t)$$

determine:
a) uma descrição via equação diferencial para o sistema equivalente de ordem mínima;
b) se é possível obter um sistema inverso (de ordem mínima) estável e causal (justifique); e
c) uma descrição via equação diferencial para o sistema inverso (de ordem mínima).

16) Considere que um dado sistema LIT causal S pode ser representado em função de seus subsistemas S_1 e S_2 conforme ilustrado na Figura 2. Então, assumindo que a resposta ao impulso do subsistema S_1 é obtida como $h_1(t)=u(t)$ e do subsistema S_2 como $h_2(t)=e^{-t}u(t)-2e^{-2t}u(t)$, determine:
a) a função de transferência $H(s)$ do sistema equivalente S; e
b) a resposta ao impulso $h(t)$ do sistema equivalente S.

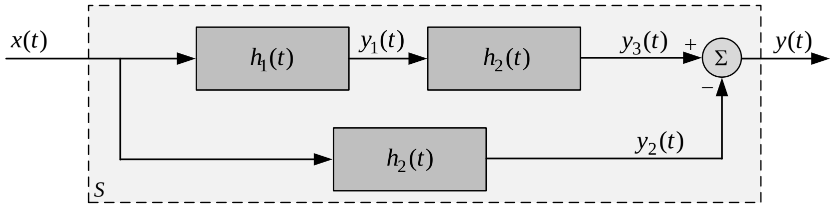

Figura 2.

17) Considere que a função de transferência $H(s)$ de um sistema linear e invariante no tempo (LIT) causal pode ser expressa em função de variáveis de estado como

$$H(s) = \mathbf{c}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{b} + D$$

onde $\mathbf{I}$ caracteriza uma matriz identidade de dimensão apropriada,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{c} = [1 \quad 2]$$

e

$$D = 0.$$

Diante disso, determine
a) a função de transferência $H(s)$ como uma razão de polinômios de s;
b) a equação diferencial que caracteriza a relação de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$; e
c) a resposta ao impulso $h(t)$.
Vale ressaltar que o desenvolvimento matemático deve ser apresentado e devidamente justificado.

18) Tendo em vista o circuito eletrônico apresentado na Figura 3, determine
a) a equação diferencial que descreve o comportamento do circuito no domínio do tempo;
b) a função de transferência do circuito em função de seus componentes; e
c) o diagrama de Bode para $C_1 = 6{,}9$ nF, $C_2 = 3{,}3$ nF e $R_1 = R_2 = 10$ kΩ (via MATLAB®).
Aqui, sugere-se que a função de transferência seja expressa como

$$H(s) = \frac{K\omega_c^2}{s^2 + \frac{\omega_c}{Q}s + \omega_c^2}$$

com K, ω_c e Q determinados em função dos componentes do circuito. Também, recomenda-se o uso do MATLAB na obtenção do diagrama de Bode a partir da função de transferência obtida.

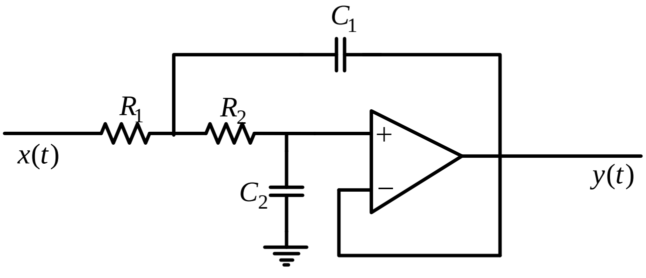

Figura 3.

19) Assuma que a equação diferencial que descreve a relação de entrada $x(t)$ e saída $y(t)$ de um dado sistema S_1 pode ser expressa como

$$\frac{d}{dt^2}y(t) + 8\frac{d}{dt}y(t) + 116y(t) = 116x(t)$$

e de um dado sistema S_2, como

$$\frac{d}{dt^2}y(t)+8\frac{d}{dt}y(t)+12y(t)=12x(t).$$

A partir disso,
a) determine a função de transferência dos sistemas S_1 e S_2;
b) esboce o diagrama de polos e zeros dos sistemas S_1 e S_2;
c) calcule e esboce a resposta do sistema $y(t)$ ao degrau para os sistemas S_1 e S_2; e
d) explique a diferença observada no comportamento das respostas dos sistemas S_1 e S_2 (justifique a partir da alocação dos polos).
Note que o MATLAB® pode ser utilizado para facilitar o esboço da resposta $y(t)$ dos sistemas S_1 e S_2; todavia, as linhas de código utilizadas devem também ser fornecidas.

20) Para o circuito eletrônico apresentado na Figura 4,
a) obtenha a função de transferência do sistema em função de seus elementos;
b) compute a resposta do sistema $y(t)$ para uma entrada degrau; e
c) esboce $y(t)$ assumindo que $C_1 = C_2 = 100\ \mu\text{F}$ e $R_1 = R_2 = 2\ \text{k}\Omega$ (via MATLAB®).
Vale salientar que a análise do circuito deve ser conduzida no domínio s, isto é, utilizando a transformada de Laplace. Também, é importante mencionar que as linhas de código utilizadas para obter o esboço da resposta $y(t)$ do sistema devem ser fornecidas.

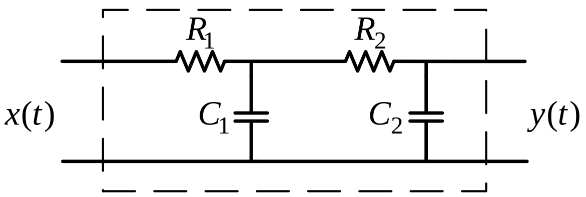

Figura 4.

21) O teorema do valor inicial estabelece que

$$x(0^+) = \lim_{s\to\infty} sX(s).$$

Então, assumindo que $x(t)=0$ para $t<0$, demonstre a validade do teorema do valor inicial realizando a expansão em série de Taylor de $x(t)$ em torno de $t=0^+$ e aplicando a transformada de Laplace.

22) Assumindo que a função de transferência de um sistema linear e invariante no tempo (LIT) causal é dada por

$$H(s)=\frac{\mathrm{e}^{-s}(s^2+3s+2)}{s^3+3s^2+12s+10}$$

determine
a) a função de transferência do sistema inverso $H_{\text{inv}}(s)$ de ordem mínima;
b) se o sistema inverso $H_{\text{inv}}(s)$ é causal e estável (justifique); e
c) a resposta ao impulso do sistema inverso $h_{\text{inv}}(t)$.

23) Considere que um dado sistema S pode ser representado em função de seus subsistemas S_1, S_2, S_3 e S_4 conforme ilustrado na Figura 5. Então, assumindo que a resposta ao impulso do subsistema S_1 é dada por

$$h_1(t)=2\delta(t)$$

do subsistema S_2, por

$$h_2(t)=10u(t)$$

do subsistema S_3, por

$$h_3(t) = 0{,}1\mathrm{e}^{-20t}u(t)$$

e do subsistema S_4, por

$$h_4(t) = 2\mathrm{e}^{-4t}u(t)$$

determine

a) a função de transferência e o diagrama de blocos simplificado do sistema S;
b) a resposta ao impulso e ao degrau do sistema S; e
c) se o sistema é internamente estável e BIBO estável (justifique).

Vale salientar que o desenvolvimento deve ser realizado utilizando a transformada de Laplace. Também, é importante destacar que as respostas apresentadas devem ser adequadamente justificadas.

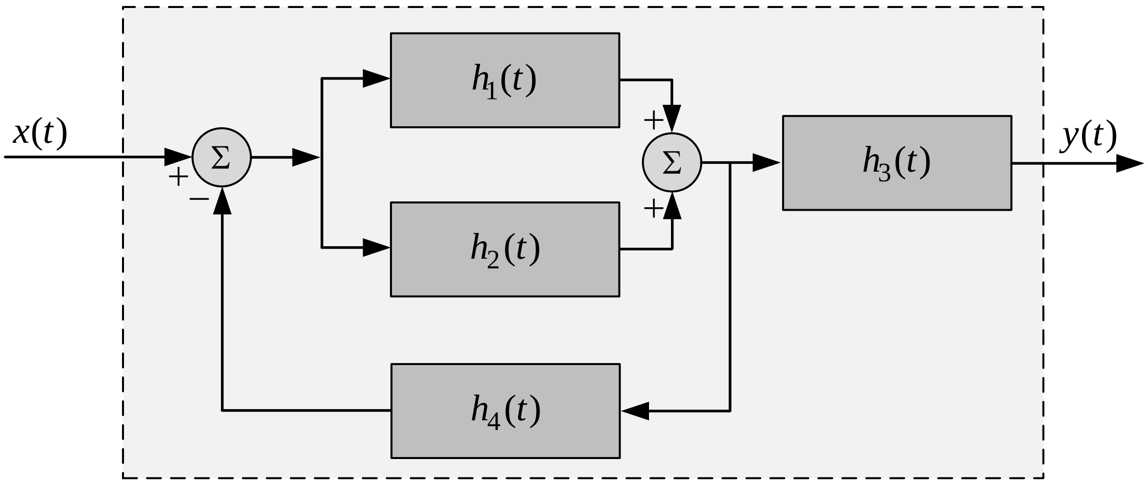

Figura 5.

RESPOSTAS

1) a) $\sigma > -5$ b) $-5 < \sigma < 5$ c) Integral converge se σ for um valor finito.

2) a) $X(s) = \dfrac{e^{2(s+1)}}{(s+1)}, \quad \text{Re}(s) > -1$ b) $X(s) = -\dfrac{e^{-3s}}{s}, \quad \text{Re}(s) < 0$

3) a) $X(s) = \dfrac{1}{s}(1 - \text{e}^{-s})$, $\text{Re}(s) > 0$ b) $X(s) = \dfrac{s^2 - \omega_0{}^2}{(s^2 + \omega_0{}^2)^2}$, $\text{Re}(s) > 0$

4) a) $X(s) = \dfrac{1}{s^2}(-s\,\text{e}^{-s} - \text{e}^{-s} + 1)$ b) $X(s) = \dfrac{e^{-s\pi} + 1}{s^2 + 1}$

5) a) $X(s) = \dfrac{3\pi}{(s^2 + 9\pi^2)(s+1)}$ b) $X(s) = \dfrac{1}{s}$

7) a) $x(0) = 1$ e $x(\infty) = 0$ b) $x(0) = 1$ e $x(\infty) = 0$

8) a) $x(t) = -e^{-2(t+5)}u(-t-5)$ b) $x(t) = 3e^{-t}u(-t) + 2e^{-2t}u(t)$

9) a) $x(t) = (\text{e}^{-2t} + \text{e}^{-3t})u(t)$ b) $x(t) = [-e^{-t} + e^{-t}\cos(t) + 3e^{-t}\text{sen}(t)]u(t)$
c) $x(t) = (2 - te^{-t} - 2e^{-t})u(t)$

10) $y(t) = \left[\dfrac{25}{4} + \dfrac{31}{2}te^{-2t} - \dfrac{21}{4}e^{-2t}\right]u(t)$

11) $H(s) = \dfrac{3s^2 + 7s + 5}{s^3 + 6s^2 - 11s + 6}$

12) a) $y(t) = \left\{\dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}\text{e}^{-(t-5)}\cos[2(t-5)] + \dfrac{7}{10}\text{e}^{-(t-5)}\text{sen}[2(t-5)]\right\}u(t-5)$
b) $\dfrac{d^2y}{dt^2} + 2\dfrac{dy}{dt} + 5y(t) = 2\dfrac{dx}{dt} + 3x(t)$

13) $H(s) = \dfrac{s(s+1)}{(\text{s}+1)^2 + 4}$ $h(t) = [-\text{e}^{-t}\cos(2t) - 2\,\text{e}^{-t}\text{sen}(2t)]u(t) + \delta(t)$

14) a) Visto que os polos (raízes características) de $H(s)$ estão localizados no SPLE do plano s, infere-se que o sistema é internamente/assintoticamente estável (todos os seus modos característicos tendem para zero conforme $t \to \infty$). Também, como a estabilidade interna garante estabilidade externa (se $M \le N$), o sistema é BIBO estável.
b) Como o polo (raiz característica) de $H(s)$ está localizado no SPLE do plano s, o sistema é internamente/assintoticamente estável (todos os modos característicos tendem para zero conforme $t \to \infty$). Todavia, visto que $M > N$ (ordem do polinômio do numerador é maior do que a do denominador), o sistema é BIBO instável.

15) a) $\dfrac{d}{dt}y(t) + 3y(t) = \dfrac{d}{dt}x(t) + x(t)$

b) Devido ao cancelamento polo-zero, $H^{-1}(s)$ tem apenas um polo localizado no SPLE do plano s; logo, é possível obter um sistema inverso (de ordem mínima) tanto causal quanto estável (para detalhes, pesquise sobre "sistemas de fase mínima").

c) $\frac{d}{dt}y(t)+y(t)=\frac{d}{dt}x(t)+3x(t)$

16) a) $H(s)=\frac{(s-1)}{(s+1)(s+2)}$ b) $h(t)=3e^{-2t}u(t)-2e^{-t}u(t)$

17) Veja o material complementar.

18) Veja o material complementar.

19) Veja o material complementar.

20) Veja o material complementar.

21) Veja o material complementar.

22) Veja o material complementar.

23) Veja o material complementar.