Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

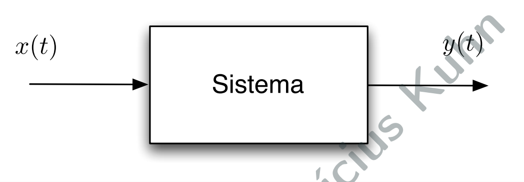
kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Análise de sistemas LIT no domínio do tempo

Objetivos

- Estudar métodos para descrever a relação de entrada e saída de sistemas LIT, focando sobre representações no domínio do tempo.
    - Equações diferenciais lineares com coeficientes constantes
    - **Integral de convolução $\Leftarrow$ Resposta ao impulso**
- Determinar a saída de sistemas LIT dada uma entrada arbitrária a partir de
    - Equações diferenciais
    - Integral de convolução
- Descrever **sistemas interconectados**
    - Conexão em série (cascata)
    - Conexão em paralelo
- Relacionar as propriedades de sistemas com a resposta ao impulso.



- **Equação diferencial com coeficientes constantes:**

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)}$$

- **Integral de convolução:**

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

Equações diferenciais com coeficientes constantes

Equações diferenciais com coeficientes constantes

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)}$$

- Possibilitam descrever o comportamento de um grande número de sistemas práticos (de tempo contínuo)
- Ordem $(N, M) \longrightarrow$ número de elementos de memória
- Embora N e M possam assumir qualquer valor,
  - $M > N$ não é desejável!
  - Casos de interesse prático $\longrightarrow N \geq M$.
- Note que N condições iniciais são necessárias para caracterizar a equação.

Para $M > N$, tem-se que

- $y(t)$ será função de $\dfrac{dx(t)}{dt}$ e suas derivadas
- Sistemas diferenciadores
  (a) Entrada limitada $\longrightarrow$ saída não limitada

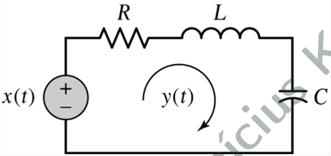
$$\boxed{\frac{du(t)}{dt} \longrightarrow \delta(t)} \implies \underline{\text{Sistema instável!}}$$

  (b) Amplificam ruído de alta frequência

$$\boxed{\text{Sinais rápidos} \implies \text{Saídas elevadas}}$$

- Portanto, o caso de $M > N$ não é de interesse prático.

Exemplo: Para o seguinte circuito RLC



determine uma expressão que relacione $x(t)$ e $y(t)$.

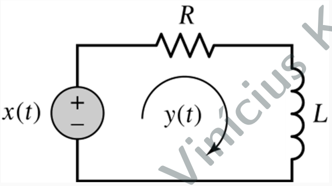
R: Note que o comportamento desse circuito pode ser descrito por

$$Ry(t) + L\frac{d}{dt}y(t) + \frac{1}{C}\int_{-\infty}^{t} y(\tau)d\tau = x(t)$$

Então, diferenciando-se ambos os lados com respeito a t, obtém-se

$$\boxed{\frac{1}{C}y(t) + R\frac{d}{dt}y(t) + L\frac{d^2}{dt^2}y(t) = \frac{d}{dt}x(t)} \quad \Longrightarrow \quad N = 2$$

Exemplo: Para o circuito RL dado por

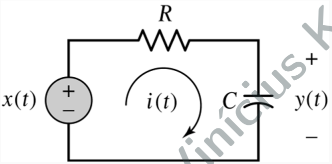


encontre uma expressão que relacione $x(t)$ e $y(t)$.

R: A partir do circuito, obtém-se que

$$\boxed{Ry(t) + L\frac{d}{dt}y(t) = x(t)} \quad \Longrightarrow \quad N = 1$$

Exemplo: Para o circuito RC definido como



obtenha uma expressão que relacione $x(t)$ e $y(t)$.

R: A partir do circuito, obtém-se que

$$\boxed{y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t)} \quad \Longrightarrow \quad N = 1$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k}{dt^k} x(t)}$$

Decomposição:

A solução de equações diferenciais pode ser expressa como

$$\boxed{y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t)}$$

Solução homogênea:

$$x(t) = 0 \longrightarrow y_{\mathrm{h}}(t)$$

Solução particular:

$$x(t) \text{ arbitrário} \longrightarrow y_{\mathrm{p}}(t)$$

Solução homogênea:

Considerando que todos os termos envolvendo a entrada são zero, tem-se

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k}{dt^k} y_\mathrm{h}(t) = 0, \quad \forall t$$

Para satisfazer essa relação, $y_\mathrm{h}(t)$ deve ter a mesma forma de suas derivadas. Então, observando que

$$y_\mathrm{h}(t) = ce^{\lambda t} \quad \text{e} \quad \frac{d^k}{dt^k} y_\mathrm{h}(t) = c\lambda^k e^{\lambda t}$$

infere-se que

$$c\left(\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k\right) e^{\lambda t} = 0.$$

Para se obter uma solução não trivial,

$$\boxed{\sum_{k=0}^{N} a_k \lambda^k = 0} \quad \longleftarrow \text{(Polinômio característico)}$$

Portanto, a solução homogênea tem a seguinte forma:

$$\boxed{y_{\mathrm{h}}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t}}$$

onde

$$\boxed{\begin{array}{lll} \lambda_i & \longrightarrow & \text{raízes do polinômio característico} \\ c_i & \longrightarrow & \text{constantes arbitrárias (condições auxiliares).} \end{array}}$$

Sobre o polinômio característico:

$$a_N\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0 = 0$$

- Raízes λ_k
  - Valores característicos
  - Autovalores
  - Raízes características

  ... do sistema
- Exponenciais $e^{\lambda_k t}$
  - Modos característicos
  - Modos naturais

  ... do sistema

Observações:

(a) Existe um modo característico para cada raiz do sistema.

(b) Resposta do sistema é igual a combinação linear dos modos.

Sobre o polinômio característico:

$$a_N\lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \cdots + a_0 = 0$$

Se as N raízes são distintas:

$$y_{\mathrm{h}}(t) \longleftarrow e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_N t}$$

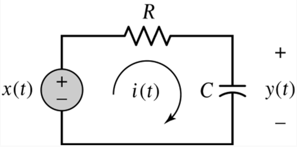
Se existem p raízes repetidas:

$$y_{\mathrm{h}}(t) \longleftarrow e^{\lambda_j t},\ te^{\lambda_j t}, \ldots,\ t^{p-1}e^{\lambda_j t}$$

Natureza da solução:

- Raízes reais $\Longrightarrow$ Exponenciais reais
- Raízes imaginárias $\Longrightarrow$ Exponenciais complexas (Sinusoidais)
- Raízes complexas $\Longrightarrow$ Exponenciais sinusoidais "amortecidas"

Exemplo: Determine a solução homogênea do circuito RC



$$\Longrightarrow \boxed{y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t)}$$

R: Considerando $N = 1$, tem-se que

$$y_{\mathrm{h}}(t) = \sum_{i=1}^{N} c_i e^{\lambda_i t} \quad \longrightarrow \quad y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t}$$

sendo λ_1 determinado através de

$$1 + RC\lambda = 0 \quad \longrightarrow \quad \lambda_1 = \frac{-1}{RC}$$

Portanto,

$$\boxed{y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Solução particular:

Para uma entrada arbitrária, obtém-se

$$x(t) \quad \longrightarrow \quad y_\mathrm{p}(t)$$

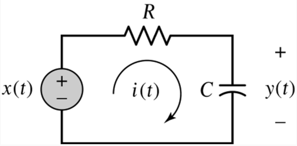
Geralmente, assume-se que $y_\mathrm{p}(t)$ tem a mesma forma da entrada, e.g.,

Entrada $x(t)$		**Solução particular** $y_\mathbf{p}(t)$
1	$\longrightarrow$	c
t	$\longrightarrow$	$c_1 t + c_2$
e^{-at}	$\longrightarrow$	ce^{-at}
$\cos(\omega t + \phi)$	$\longrightarrow$	$c_1 \cos(\omega t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega t)$

***Se $x(t) = 0$ para $t < 0$, $y_\mathrm{p}(t)$ é válida apenas para $t > 0$.

Bastando então determinar c_k tal que $y_\mathrm{p}(t)$ satisfaça a equação diferencial do sistema.

Exemplo: Determine a solução particular para $x(t) = \cos(\omega_0 t)$ se



$$\Longrightarrow \boxed{y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t)}$$

R: Da Tabela, tem-se que

$$y_{\mathrm{p}}(t) = c_1 \cos(\omega_0 t) + c_2 \mathrm{sen}(\omega_0 t).$$

Então, substituindo $y_{\mathrm{p}}(t)$ e $x(t)$ na equação diferencial,

$$(c_1 + RC\omega_0 c_2)\cos(\omega_0 t) + (c_2 - RC\omega_0 c_1)\mathrm{sen}(\omega_0 t) = \cos(\omega_0 t).$$

Logo, os coeficientes c_1 e c_2 são obtidos de

$$\boxed{\begin{aligned} c_1 + RC\omega_0 c_2 &= 1 \\ c_2 - RC\omega_0 c_1 &= 0 \end{aligned}}$$

Então, resolvendo o sistema de equações, tem-se que

$$c_1 = \frac{1}{1 + (RC\omega_0)^2}$$

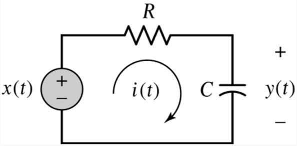
e

$$c_2 = \frac{RC\omega_0}{1 + (RC\omega_0)^2}$$

Portanto, a solução particular é dada por

$$\boxed{y_\mathrm{p}(t) = \frac{1}{1 + (RC\omega_0)^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{RC\omega_0}{1 + (RC\omega_0)^2}\mathrm{sen}(\omega_0 t)}$$

Exemplo: Determine a solução completa para



$$\Longrightarrow \boxed{y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t)}$$

Como mostrado,

$$y(t) = y_{\mathrm{h}}(t) + y_{\mathrm{p}}(t), \quad t > 0$$

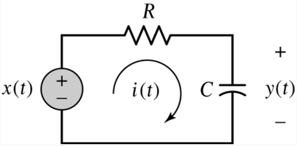
onde

$$y_{\mathrm{h}}(t) = c_1 e^{-\frac{t}{RC}}$$

e

$$y_{\mathrm{p}}(t) = \frac{1}{1+(RC\omega_0)^2}\cos(\omega_0 t) + \frac{RC\omega_0}{1+(RC\omega_0)^2}\mathrm{sen}(\omega_0 t)$$

Exemplo: Determine a solução completa para



$$\Longrightarrow \boxed{y(t) + RC\frac{d}{dt}y(t) = x(t)}$$

Agora, considerando $R = 1\,\Omega$, $C = 1\,\mathrm{F}$ e

$$y(0^-) = 2 \quad \longleftarrow \quad \text{(Tensão inicial no capacitor)}$$

a solução completa pode ser reescrita como

$$y(t) = c_1 e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(t), \quad t > 0$$

Finalmente, fazendo $t = 0$ e considerando $y(0^-) = y(0^+)$, tem-se

$$2 = c_1 e^{-0^+} + \frac{1}{2}\cos(0^+) + \frac{1}{2}\mathrm{sen}(0^+) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{c_1 = \frac{3}{2}}$$

Integral de convolução

Como mencionado, a saída de um sistema LIT pode ser também determinada a partir de $x(t)$ e da resposta ao impulso $h(t)$. Para demonstrar isso, considere inicialmente que

$$\boxed{x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau} \longleftarrow \text{(Superposição)}$$

Então,

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\text{Sistema } H} \longrightarrow y(t)$$

obtém-se

$$\begin{aligned} y(t) &= H[x(t)] \\ &= H\left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau\right] \end{aligned}$$

Visto que o sistema é linear,

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) H[\delta(t-\tau)] d\tau}$$

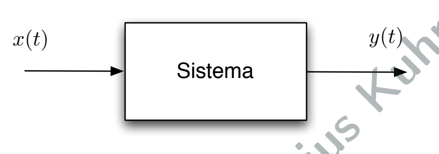
Portanto, a resposta do sistema a um trem de impulsos deslocados caracteriza completamente a sua relação de entrada e saída. Por fim, definindo a resposta ao impulso do sistema como

$$H[\delta(t-\tau)] = h(t-\tau)$$

tem-se (a integral de convolução)

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) h(t-\tau) d\tau}$$

A saída $y(t)$ é dada pela superposição de respostas ao impulso deslocadas por τ e ponderadas por $x(t)$.



$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t) \quad \text{(resposta ao impulso)}$$

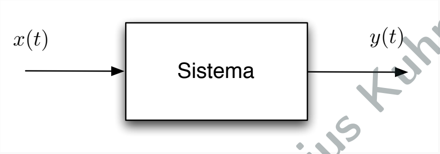
$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau) \quad \text{(inv. no tempo)}$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau) \quad \text{(linearidade)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{(linearidade)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \quad \rightarrow \quad \underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$



$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t) \quad \text{(resposta ao impulso)}$$

$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau) \quad \text{(inv. no tempo)}$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau) \quad \text{(linearidade)}$$

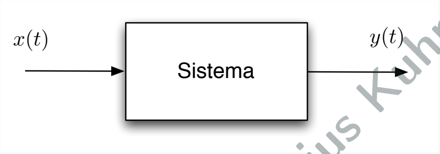
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \ \text{(linearidade)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \quad \rightarrow \quad \underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Integral de convolução



$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t) \quad \text{(resposta ao impulso)}$$

$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau) \quad \text{(inv. no tempo)}$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau) \quad \text{(linearidade)}$$

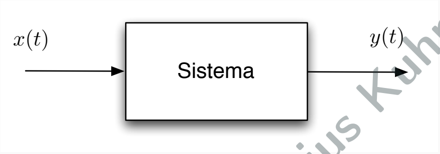
$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \ \text{(linearidade)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Integral de convolução



$$\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t) \quad \text{(resposta ao impulso)}$$

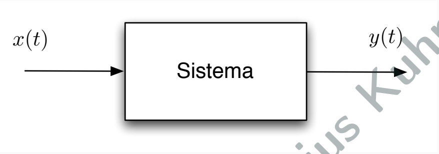
$$\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad h(t-\tau) \quad \text{(inv. no tempo)}$$

$$x(\tau)\delta(t-\tau) \quad \rightarrow \quad x(\tau)h(t-\tau) \quad \text{(linearidade)}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \text{(linearidade)}$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \quad \rightarrow \quad y(t) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$



$$
\begin{array}{lcll}
\delta(t) & \to & h(t) & \text{(resposta ao impulso)} \\
\delta(t-\tau) & \to & h(t-\tau) & \text{(inv. no tempo)} \\
x(\tau)\delta(t-\tau) & \to & x(\tau)h(t-\tau) & \text{(linearidade)} \\
\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau & \to & \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau & \text{(linearidade)}
\end{array}
$$

$$\Downarrow$$

$$x(t) \quad \to \quad \underbrace{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}_{\text{Integral de convolução}}$$

Integral de convolução:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau}$$

Notação compacta:

$$\boxed{y(t) = x(t) * h(t)}$$

Na representação por resposta ao impulso:

- É assumido que o sistema está em repouso.
- **Não são consideradas condições iniciais no sistema.**

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = u(t)$ e $h(t) = \delta(t)$.

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = u(t)$ e $h(t) = \delta(t)$.

R: A partir da definição, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t-\tau)\ \underbrace{\delta(\tau)}_{\neq 0, \tau=0}\ d\tau \\ &= u(t) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = u(t)}$$

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = u(t)$ e $h(t) = u(t)$.

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = u(t)$ e $h(t) = u(t)$.

R: A partir da definição, tem-se

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{u(\tau)}_{\neq 0 \text{ para } \tau > 0} \quad \underbrace{u(t-\tau)}_{\neq 0 \text{ para } \tau < t \text{ e } t > 0} \quad d\tau \\
&= \int_{0}^{t} d\tau, \quad t \geq 0 \\
&= t, \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = tu(t)}$$

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = e^{-at}u(t)$ e $h(t) = u(t)$.

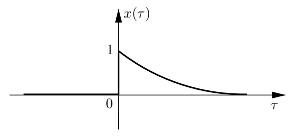
Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = e^{-at}u(t)$ e $h(t) = u(t)$.

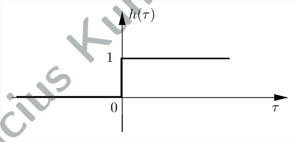
R: A partir da definição, tem-se

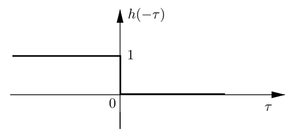
$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a\tau}u(\tau)u(t-\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-a\tau}u(\tau)}_{\neq 0 \text{ para } \tau > 0} \quad \underbrace{u(t-\tau)}_{\neq 0 \text{ para } \tau < t \text{ e } t > 0} \quad d\tau \\
&= \int_{0}^{t} e^{-a\tau}d\tau, \quad t \geq 0 \\
&= \frac{1}{a}(1-e^{-at}), \quad t \geq 0
\end{aligned}
$$

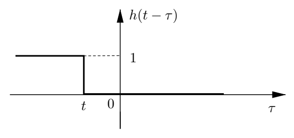
$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{1}{a}(1-e^{-at})u(t)}$$

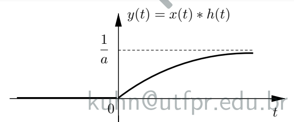
Análise gráfica:











$$\Longleftarrow y(t) = \frac{1}{a}(1 - e^{-at}), \quad t > 0.$$

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = \dfrac{t}{2}[u(t) - u(t-2)]$ e $h(t) = u(t)$.

Exemplo: Determine $y(t)$ quando $x(t) = \frac{t}{2}[u(t) - u(t-2)]$ e $h(t) = u(t)$.

R: A partir da definição, tem-se

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)}{2} \underbrace{u(t-\tau)}_{\tau\le t,\, t\ge 0} \underbrace{u(\tau)}_{\tau\ge 0} d\tau - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(t-\tau)}{2} \underbrace{u(t-2-\tau)}_{\tau\le t-2,\, t-2\ge 0} \underbrace{u(\tau)}_{\tau\ge 0} d\tau \\
&= \underbrace{\int_{0}^{t} \frac{(t-\tau)}{2} d\tau}_{t\ge 0} - \underbrace{\int_{0}^{t-2} \frac{(t-\tau)}{2} d\tau}_{t-2\ge 0}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{t^2}{4}u(t) - \frac{(t-2)(t+2)}{4}u(t-2)}
$$

Alternativamente, observe que $x(t)$ pode ser expresso como

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{t}{2}u(t) - \frac{t}{2}u(t-2) \\ &= \frac{t}{2}u(t) - \frac{(t-2)}{2}u(t-2) - u(t-2) \end{aligned}$$

Então, dado que

$$u(t) * u(t) \longrightarrow tu(t)$$

$$tu(t) * u(t) \longrightarrow \frac{1}{2}t^2 u(t)$$

obtém-se

$$y(t) = \frac{t}{2}u(t) * u(t) - \frac{(t-2)}{2}u(t-2) * u(t) - u(t-2) * u(t)$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(t) = \frac{t^2}{4}u(t) - \frac{(t-2)(t+2)}{4}u(t-2)}$$

Exemplo: A partir da integral de convolução, determine a saída do sistema para os seguintes pares:

(a) $h(t) = \delta(t - T)$ e $x(t) = u(t)$

(b) $h(t) = u(t)$ e $x(t) = e^{\lambda t}u(t)$

(c) $h(t) = u(t)$ e $x(t) = u(t)$

(d) $h(t) = e^{\lambda_1 t}u(t)$ e $x(t) = e^{\lambda_2 t}u(t)$ para $\lambda_1 \neq \lambda_2$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: A partir da integral de convolução, determine a saída do sistema para os seguintes pares:

(a) $h(t) = \delta(t - T)$ e $x(t) = u(t)$

R: $y(t) = u(t - T)$

(b) $h(t) = u(t)$ e $x(t) = e^{\lambda t}u(t)$

R: $y(t) = \dfrac{1 - e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$

(c) $h(t) = u(t)$ e $x(t) = u(t)$

R: $y(t) = tu(t)$

(d) $h(t) = e^{\lambda_1 t}u(t)$ e $x(t) = e^{\lambda_2 t}u(t)$ para $\lambda_1 \neq \lambda_2$

R: $y(t) = \dfrac{e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}}{\lambda_1 - \lambda_2}u(t)$

Exemplo: Dado que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau$$

determine:

(a) A resposta ao impulso $h(t)$ do sistema; e

(b) A resposta ao sistema para $x(t) = u(t + 1) - u(t - 2)$.

Exemplo: Dado que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau$$

determine:

(a) A resposta ao impulso $h(t)$ do sistema; e

(b) A resposta ao sistema para $x(t) = u(t+1) - u(t-2)$.

R:

(a)

$$\boxed{h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)}$$

(b)

$$\boxed{y(t) = [1 - e^{-(t-1)}] u(t-1) - [1 - e^{-(t-4)}] u(t-4)}$$

(a) **Abordagem 1:** Primeiramente, observa-se que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-\tau)} u(t-\tau) x(\tau - 2) d\tau$$

Então, realizando uma troca de variáveis onde $\tau' = \tau - 2$, tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{e^{-(t-\tau'-2)} u(t-\tau'-2)}_{h(t-\tau')} x(\tau') d\tau'$$

Consequentemente, obtém-se por inspeção que

$$\boxed{h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)}$$

(a) **Abordagem 2:** Considerando $x(t) = \delta(t)$, tem-se que

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau - 2) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} \delta(\tau - 2) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t-2} e^{-(t-\tau'-2)} \delta(\tau') d\tau'
\end{aligned}
$$

A partir disso, é possível concluir que

$$
y(t) = \begin{cases} 0, & t - 2 < 0 \\ e^{-(t-2)}, & t - 2 \geq 0 \end{cases}
$$

Portanto,

$$
\boxed{h(t) = e^{-(t-2)} u(t-2)}
$$

(b) **Abordagem 1:** De

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} x(\tau-2) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{t} e^{-(t-\tau)} [u(\tau-1) - u(\tau-4)] d\tau \\
&= \underbrace{\int_{1}^{t} e^{-(t-\tau)} d\tau}_{1\leq\tau\leq t \rightarrow t-1\geq 0} - \underbrace{\int_{4}^{t} e^{-(t-\tau)} d\tau}_{4\leq\tau\leq t \rightarrow t-4\geq 0} \\
&= \underbrace{e^{-t}\int_{1}^{t} e^{\tau} d\tau}_{t-1\geq 0} - \underbrace{e^{-t}\int_{4}^{t} e^{\tau} d\tau}_{t-4\geq 0}
\end{aligned}
$$

verifica-se que

$$
\boxed{y(t) = [1 - e^{-(t-1)}]u(t-1) - [1 - e^{-(t-4)}]u(t-4)}
$$

(b) **Abordagem 2:** Levando em conta que

$$e^{\lambda t}u(t) * u(t) \longrightarrow \frac{1-e^{\lambda t}}{-\lambda}u(t)$$

e tendo em vista que o sistema é LIT, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= [u(t+1) - u(t-2)] * e^{-(t-2)}u(t-2) \\ &= u(t+1) * e^{-(t-2)}u(t-2) - u(t-2) * e^{-(t-2)}u(t-2) \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{y(t) = [1-e^{-(t-1)}]u(t-1) - [1-e^{-(t-4)}]u(t-4)}$$

Relação entre resposta ao impulso e resposta ao degrau

Relação entre resposta ao impulso e ao degrau

Primeiramente, define-se

(Impulso unitário) $\delta(t) \quad \rightarrow \quad h(t)$ (Resposta ao impulso)

(Degrau unitário) $u(t) \quad \rightarrow \quad s(t)$ (Resposta ao degrau)

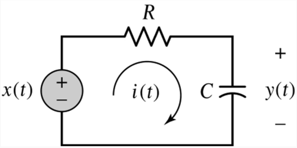
Logo, a relação entre $h(t)$ e $s(t)$ é obtida como

$$\begin{aligned} s(t) &= u(t) * h(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) \underbrace{u(t-\tau)}_{\neq 0,\, t>\tau\ (t>0)} d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \Longleftarrow *** \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\boxed{h(t) = \frac{d}{dt} s(t)}$$

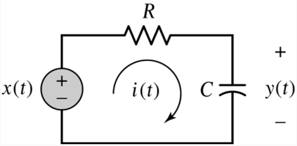
Exemplo: Para o seguinte circuito RC:



$$\Longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)}$$

determine a resposta ao degrau.

Exemplo: Para o seguinte circuito RC:



$$\Longrightarrow \boxed{h(t) = \frac{1}{RC} e^{-\frac{t}{RC}} u(t)}$$

determine a resposta ao degrau.

R: A partir da relação estabelecida, tem-se que

$$\begin{aligned} s(t) &= \int_{-\infty}^{t} h(\tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{RC} e^{-\frac{\tau}{RC}} u(\tau) d\tau \\ &= \frac{1}{RC} \int_{0}^{t} e^{-\frac{\tau}{RC}} d\tau \,,\ t > 0 \quad \Longrightarrow \boxed{s(t) = [1 - e^{-\frac{t}{RC}}] u(t)} \end{aligned}$$

Relações entre as propriedades de sistemas LIT e a resposta ao impulso

1) Sistema sem memória: A saída do sistema em um dado instante de tempo depende apenas de entradas naquele mesmo instante. Então, para que o sistema seja sem memória, é necessário que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)x(t-\tau)}_{\to h(\tau)=0,\ \forall \tau \neq 0} d\tau$$

Logo,

$$\boxed{h(t) = K\delta(t)}$$

Demonstração: Considerando $K = 1$ e $h(t) = \delta(t)$, tem-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau)x(t-\tau)d\tau$$
$$= x(t). \longleftarrow \text{(Sem memória)}$$

2) Sistema causal: A saída do sistema depende apenas de valores de entrada atuais e/ou passados. Então, para que o sistema seja causal, é necessário que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{h(\tau)x(t-\tau)}_{\rightarrow\, h(\tau)=0,\ \forall\tau<0} d\tau \end{aligned}$$

Logo, para que $y(t_0)$ independa de $x(t)$ para $t > t_0$ (futuro),

$$\boxed{h(t) = 0, \quad t < 0}$$

*Caso o sinal e o sistema sejam causais, simplifica-se

$$y(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

3) Sistema estável: A saída do sistema é limitada caso a entrada seja limitada (BIBO estabilidade). Então, considerando $x(t)$ limitado $(|x(t)| \leq B < \infty, \forall\, t)$, tem-se

$$\begin{aligned}|y(t)| &= \left|\int_{-\infty}^{\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau\right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)x(t-\tau)|d\tau \\ &\leq B\int_{-\infty}^{\infty} |h(\tau)|d\tau < \infty.\end{aligned}$$

Logo, para que o sistema seja estável, é necessário que

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty}$$

Exemplo: Levando em conta as seguintes respostas ao impulso, determine se o sistema é:

(i) Sem memória
(ii) Causal
(iii) Estável

(a) $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$

(b) $h(t) = u(t) - 2u(t-1)$

(c) $h(t) = e^{-2|t|}$

(d) $h(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0$

Exemplo: Levando em conta as seguintes respostas ao impulso, determine se o sistema é:

(i) Sem memória
(ii) Causal
(iii) Estável

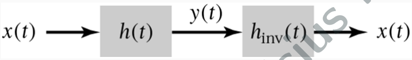
(a) $h(t) = u(t+1) - u(t-1)$
R: Com memória, não causal e estável

(b) $h(t) = u(t) - 2u(t-1)$
R: Com memória, causal e instável

(c) $h(t) = e^{-2|t|}$
R: Com memória, não causal e estável

(d) $h(t) = e^{at}u(t), \quad a > 0$
R: Com memória, causal e instável.

4)Sistema invertível: Caso a entrada do sistema possa ser recuperada a partir da sua saída, i.e.,



Logo, para que o sistema seja invertível, é necessário que

$$\boxed{h(t) * h_{\mathrm{inv}}(t) = \delta(t)}$$

- Na prática, determinar o sistema inverso através da relação apresentada é uma tarefa complexa.
- Nem todo sistema LIT causal e estável é invertível.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine o sistema inverso de

$$h(t) = c\,\delta(t)$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Sistema invertível

Exemplo: Determine o sistema inverso de

$$h(t) = c\,\delta(t)$$

R: Note que o sistema inverso é dado por

$$h_{\text{inv}}(t) = \frac{1}{c}\delta(t) \quad \longrightarrow \quad h(t) * h_{\text{inv}}(t) = \delta(t)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= cx(t) \end{aligned}$$

consequentemente,

$$\boxed{y(t) * h_{\text{inv}}(t) = x(t)}$$

A partir da **resposta ao impulso**, pode-se inferir se o sistema é

1) Sem memória:

$$h(t) = c\delta(t)$$

2) Causal:

$$h(t) = 0, \; t < 0$$

3) Estável:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$$

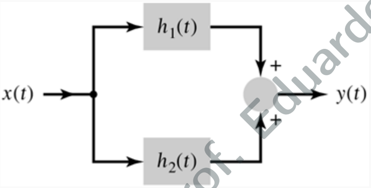
4) Invertível:

$$h(t) * h_{\text{inv}}(t) = \delta(t)$$

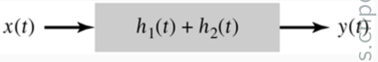
Interconexão de sistemas LIT

Conexão em paralelo $\Longrightarrow$ Propriedade distributiva

$$
\begin{aligned}
y(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\
&= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\
&= x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad \Longleftarrow
\end{aligned}
$$



$\equiv$



Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Demonstração da propriedade distributiva: A partir de

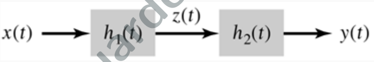
$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_1(t-\tau)d\tau + \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h_2(t-\tau)d\tau \end{aligned}$$

é possível mostrar que

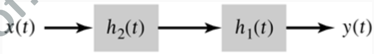
$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)[h_1(t-\tau) + h_2(t-\tau)]d\tau \\ &= x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \quad \Longleftarrow \star \end{aligned}$$

Conexão em série $\Longrightarrow$ Propriedades associativa e comutativa

$$
\begin{aligned}
y(t) &= [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \\
&= [x(t) * h_2(t)] * h_1(t) \\
&= x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \\
&= x(t) * [h_2(t) * h_1(t)]
\end{aligned}
$$



$\equiv$



$\equiv$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Demonstração da propriedade comutativa: Considerando

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \quad \Longleftarrow \star$$

e definindo $\tau' = t - \tau$, tem-se

$$\tau = \begin{cases} +\infty & \longrightarrow \tau' = -\infty \\ -\infty & \longrightarrow \tau' = +\infty \end{cases} \Bigg| \; \frac{d\tau'}{d\tau} = -1 \longrightarrow -d\tau' = d\tau$$

Logo,

$$\begin{aligned} y(t) &= -\int_{+\infty}^{-\infty} h(\tau')x(t-\tau')d\tau' \\ &= +\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')x(t-\tau')d\tau' \quad \Longleftarrow \star \end{aligned}$$

Demonstração da propriedade associativa: Definindo

$$z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)h_1(t-\nu)d\nu$$

e

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(\tau)h_2(t-\tau)d\tau$$

tem-se que

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)h_1(\tau-\nu)h_2(t-\tau)d\nu d\tau$$

Então, considerando $\eta = \tau - \nu$, obtém-se

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\nu)\left[\int_{-\infty}^{\infty} h_1(\eta)h_2(t-\nu-\eta)d\eta\right]d\nu. \qquad \Longleftarrow ***$$

Propriedade comutativa:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h(t) \\ &= h(t) * x(t) \end{aligned}$$

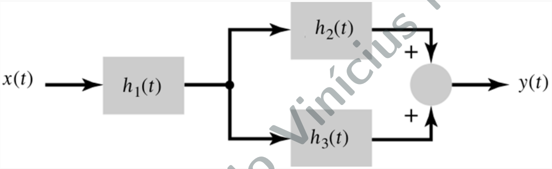
Propriedade distributiva:

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t) \\ &= x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] \end{aligned}$$

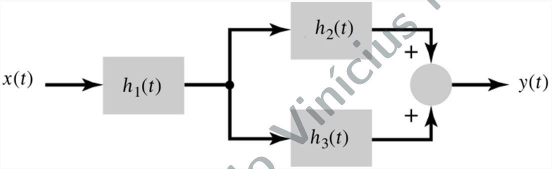
Propriedade associativa:

$$\begin{aligned} y(t) &= [x(t) * h_1(t)] * h_2(t) \\ &= x(t) * [h_1(t) * h_2(t)] \\ &= [x(t) * h_2(t)] * h_1(t) \end{aligned}$$

Exemplo: Determine a resposta ao impulso do sistema equivalente:



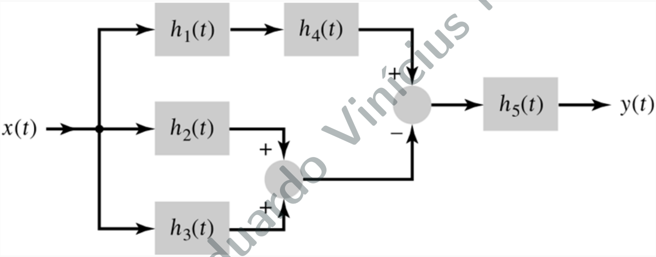
Exemplo: Determine a resposta ao impulso do sistema equivalente:



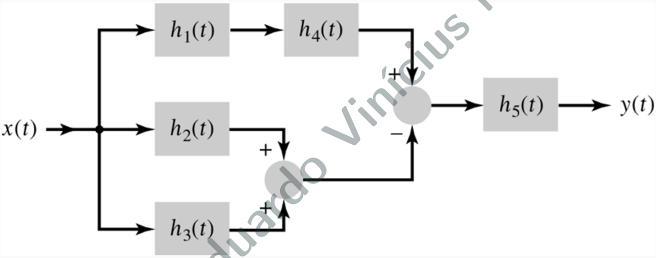
R:

$$h(t) = h_1(t) * h_2(t) + h_1(t) * h_3(t)$$

Exemplo: Determine a resposta ao impulso do sistema equivalente:



Exemplo: Determine a resposta ao impulso do sistema equivalente:



R:

$$h(t) = [h_1(t) * h_4(t) - h_2(t) - h_3(t)] * h_5(t)$$

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 206-208)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 4)

Até a próxima aula... =)