Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Série de Fourier

Considerações iniciais

- **A série de Fourier**
  - possibilita representar um sinal periódico como um somatório de exponenciais;
  - permite sintetizar sinais "arbitrários" através da soma de diferentes exponenciais; e
  - evidencia as diferentes harmônicas presentes em um sinal periódico.

- A partir dos coeficientes da série de Fourier, pode-se determinar a potência do sinal considerado.

- **A transformada de Fourier (de sinais periódicos) pode ser obtida a partir dos coeficientes da série de Fourier.**

Considerações iniciais

Objetivos:

- Introduzir a série de Fourier e apresentar as propriedades.
- Determinar o espectro de sinais periódicos e discutir o papel das harmônicas.
- Mostrar como sinais periódicos podem ser sintetizados (através da série de Fourier).
- Estudar/discutir o fenômeno de Gibbs.
- Estabelecer uma relação entre a transformada de Fourier e a série de Fourier.
- Aqui, refere-se como "série de Fourier" a "série de Fourier de tempo contínuo".

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Considerando que $x(t)$ é periódico e tem período fundamental T_0, i.e.,

$$x(t) = x(t + T_0), \quad \forall t \quad \text{e} \quad T_0 > 0$$

a série de Fourier estabelece que

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}}$$

onde

$$\boxed{c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Portanto, qualquer sinal periódico $x(t)$ pode ser representado por uma **soma de exponenciais complexas de frequências múltiplas de ω_0 ponderadas pelos coeficientes c_k**.

Definições matemáticas

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}} \qquad \text{e} \qquad \boxed{c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Observações:

- Quanto à notação, note que

$$\begin{aligned}\int_{a}^{a+T_0} x(t)d(t) &= \int_{b}^{b+T_0} x(t)d(t) \\ &= \int_{T_0} x(t)d(t).\end{aligned}$$

- Em outras palavras, c_k é calculado levando em conta um período de $x(t)$.

Definições matemáticas

$$\boxed{x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}} \quad \text{e} \quad \boxed{c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt}$$

Observações:

- Quanto ao significado das componentes espectrais, é possível estabelecer que
  - c_0 caracteriza o valor médio do sinal (nível DC);
  - c_1 e c_{-1} definem a amplitude da componente em ω_0 **(componente fundamental)**;
  - c_k e c_{-k} definem a amplitude da k**-ésima harmônica**; e
  - as harmônicas ocorrem em múltiplos inteiros de ω_0.
- A soma das harmônicas (que, naturalmente, são funções periódicas) resulta em um sinal periódico.

Condições de existência

Condições de existência

A convergência da série de Fourier de um sinal é garantida se as seguintes condições são satisfeitas (condições de Dirichlet):

1) A função $x(t)$ é absolutamente integrável , i.e.,

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} |x(t)|^2 dt < \infty$$

2) A função $x(t)$ tem um número finito de descontinuidades.
3) A função $x(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos.

A partir de tais condições, Dirichlet mostrou que

- a convergência da série é garantida para os trechos em que $x(t)$ é contínua; e
- a série converge para o valor médio (pela direita e pela esquerda) de $x(t)$ entre os pontos de descontinuidade.

Espectro do sinal

Espectro do sinal

Tal como na transformada de Fourier, os coeficientes da série de Fourier do sinal $x(t)$ podem também ser expressos como

$$c_k = |c_k| e^{j\angle c_k}$$

onde

$$\boxed{\begin{array}{ccc} |c_k| & \Rightarrow & \textit{Espectro de magnitude discreto} \\ \\ \angle c_k & \Rightarrow & \textit{Espectro de fase discreto} \end{array}}$$

Espectro discreto uma vez que tanto a amplitude quanto a fase são definidas apenas para múltiplos de ω_0.

Espectro do sinal

Para um sinal $x(t) \in \mathbb{R}$, os coeficientes da série de Fourier satisfazem

$$c_k = c_{-k}^*.$$

Como consequência,

$$\boxed{|c_k| = |c_{-k}|}$$

e

$$\boxed{\angle c_k = -\angle c_{-k}}$$

Portanto,

- o espectro de magnitude é uma função par/simétrica em k; e
- o espectro de fase é uma função ímpar/anti-simétrica em k.

A demonstração segue como na transformada de Fourier.

Relação entre a série de Fourier exponencial e trigonométrica

Relação entre a série de Fourier exponencial e trigonométrica

Analogamente, a série de Fourier pode ser expressa como

$$x(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} [a_k \cos(k\omega_0 t) + b_k \mathrm{sen}(k\omega_0 t)], \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

em que

$$a_0 = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \cos(k\omega_0 t)dt$$

e

$$b_k = \frac{2}{T_0} \int_{T_0} x(t) \mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

Na prática, a representação usando a série de Fourier exponencial é mais conveniente (do que a trigonométrica).

Relação entre a série de Fourier exponencial e trigonométrica

Para demonstrar a **relação entre a representação da série de Fourier exponencial e trigonométrica**, observe que

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k[\cos(k\omega_0 t) + j\text{sen}(k\omega_0 t)] \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} c_k[\cos(k\omega_0 t) + j\text{sen}(k\omega_0 t)] + c_0 \\
&+ \sum_{k=1}^{\infty} c_k[\cos(k\omega_0 t) + j\text{sen}(k\omega_0 t)] \\
&= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty}[(c_k + c_{-k})\cos(k\omega_0 t) + j(c_k - c_{-k})\text{sen}(k\omega_0 t)]
\end{aligned}
$$

Relação entre a série de Fourier exponencial e trigonométrica

Logo,

$$c_0 = a_0$$

$$\begin{aligned} c_k + c_{-k} &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{+jk\omega_0 t}dt \\ &= a_k \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} j(c_k - c_{-k}) &= j\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt - \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{+jk\omega_0 t}dt\right] \\ &= b_k \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{a_k - jb_k = 2c_k}$$

ou

$$\boxed{a_k + jb_k = 2c_{-k}}$$

Relação entre a série de Fourier exponencial e trigonométrica

Considerando que existe uma relação entre os coeficientes da série de Fourier exponencial $\{c_k\}$ e trigonométrica $\{a_k,\ b_k\}$, i.e.,

$$a_k - jb_k = 2c_k$$

verifica-se que

$$\boxed{|c_k| = \frac{1}{2}\sqrt{a_k^2 + b_k^2}, \quad k \neq 0}$$

e

$$\boxed{\angle c_k = \tan^{-1}\left(\frac{-b_k}{a_k}\right), \quad \{a_k, b_k, k\} \neq 0}$$

Relação entre a série de Fourier exponencial e trigonométrica

Casos particulares:

- Caso $a_k = 0 \ \forall k$,

$$c_k = -j\frac{b_k}{2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\angle c_k = \begin{cases} +\frac{\pi}{2}, & b_k > 0 \\ -\frac{\pi}{2}, & b_k < 0 \end{cases}}$$

- Caso $b_k = 0 \ \forall k$,

$$c_k = \frac{a_k}{2} \quad \longrightarrow \quad \boxed{\angle c_k = \begin{cases} -\pi, & a_k > 0 \\ +\pi, & a_k < 0 \end{cases}}$$

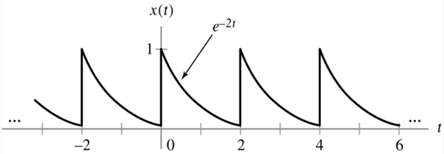
- Para $x(t) \in \mathbb{R}$, o espectro de fase é uma função ímpar.

Créditos: Emilly Zucunelli Krepkij (2019/1).

Exemplos
Determinação dos coeficientes

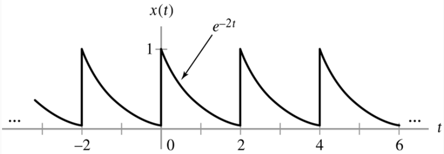
Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

1) Determine os coeficientes da série de Fourier de



Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

1) Determine os coeficientes da série de Fourier de



Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$T_0 = 2 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \pi$$

Então, a partir da definição, tem-se que

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-(2+jk\pi)t} dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{c_k = \frac{1 - e^{-4}}{4 + j2\pi k}, \quad \forall k}$$

***Lembrete:** $e^{-jk2\pi} = 1, \ \forall k$

Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

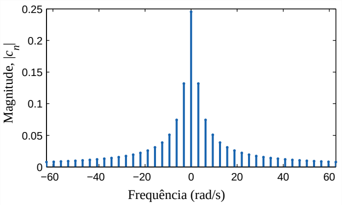
Logo, obtém-se o espectro de magnitude de $x(t)$ como

$$\boxed{|c_k| = \frac{1 - e^{-4}}{2\sqrt{4 + (\pi k)^2}}, \quad \forall k}$$

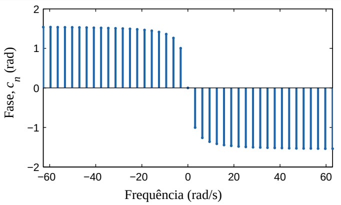
e o espectro de fase como

$$\boxed{\angle c_k = -\tan^{-1}\left(\frac{\pi k}{2}\right), \quad \forall k}$$

Espectro de magnitude



Espectro de fase



Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

Considerando a série de Fourier trigonométrica, tem-se

$$a_0 = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)dt = \left.\frac{-1}{4}e^{-2t}\right|_0^2 \quad \Rightarrow \boxed{a_0 = \frac{1-e^{-4}}{4}}$$

$$a_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\cos(k\omega_0 t)dt = \int_0^2 e^{-2t}\cos(k\omega_0 t)dt$$

$$= \left.\frac{e^{-2t}[-2\cos(k\pi t) + k\pi \mathrm{sen}(k\pi t)]}{(2)^2 + (k\pi)^2}\right|_0^2 \quad \Rightarrow \boxed{a_k = \frac{2(1-e^{-4})}{(2)^2 + (k\pi)^2}}$$

e

$$b_k = \frac{2}{T_0}\int_{T_0} x(t)\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt = \int_0^2 e^{-2t}\mathrm{sen}(k\omega_0 t)dt$$

$$= \left.\frac{e^{-2t}[-2\mathrm{sen}(k\pi t) - k\pi\cos(k\pi t)]}{(2)^2 + (k\pi)^2}\right|_0^2 \quad \Rightarrow \boxed{b_k = \frac{(k\pi)(1-e^{-4})}{(2)^2 + (k\pi)^2}}$$

Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

Visando mostrar a equivalência na representação seja através de $\{c_k\}$ ou de $\{a_k,\, b_k\}$, observe que

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{2}(a_k - jb_k) \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{2(1-e^{-4})}{(2)^2+(k\pi)^2} - \frac{(k\pi)(1-e^{-4})}{(2)^2+(k\pi)^2}\right\} \\
&= \frac{(1-e^{-4})(2-jk\pi)}{2[(2)^2+(k\pi)^2]} \times \frac{(2+jk\pi)}{(2+jk\pi)} \\
&= \frac{(1-e^{-4})[(2)^2+(k\pi)^2]}{2[(2)^2+(k\pi)^2](2+jk\pi)} \\
&\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{(1-e^{-4})}{(4+j2\pi k)}}
\end{aligned}
$$

Consequentemente, os espectros de magnitude e fase podem ser obtidos equivalentemente de $\{a_k,\, b_k\}$.

Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

2) Determine os coeficientes da série de Fourier de

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4l)$$

Exemplo: Cálculo direto dos coeficientes

2) Determine os coeficientes da série de Fourier de

$$x(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta(t - 4l)$$

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$T_0 = 4 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{\pi}{2}$$

o que implica em

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{4} \int_{T_0} \delta(t) e^{-jk\frac{\pi}{2}t} dt \\ &\Rightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{4}, \quad \forall k} \end{aligned}$$

Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

3) Determine os coeficientes da série de Fourier de

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

3) Determine os coeficientes da série de Fourier de

$$x(t) = 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$\omega_0 = \frac{\pi}{2} \quad \longrightarrow \quad T_0 = 4$$

Então, dado que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

verifica-se que

$$x(t) = \frac{3e^{j\frac{\pi}{4}}}{2} e^{j\frac{\pi}{2}t} + \frac{3e^{-j\frac{\pi}{4}}}{2} e^{-j\frac{\pi}{2}t} \quad \Rightarrow \boxed{c_1 = c_{-1}^* = \frac{3e^{j\frac{\pi}{4}}}{2}}$$

Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

Para verificar o desenvolvimento anterior,

$$
\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{1}{4}\int_{-2}^{2} 3\cos\left(\frac{\pi}{2}t + \frac{\pi}{4}\right) e^{-jk\omega_0 t}dt \\
&= \frac{3}{8}\left[e^{+j\frac{\pi}{4}}\int_{-2}^{2} e^{+j\frac{\pi}{2}(1-k)t}dt + e^{-j\frac{\pi}{4}}\int_{-2}^{2} e^{-j\frac{\pi}{2}(1+k)t}dt\right] \\
&= \frac{3}{2}\left\{\frac{e^{+j\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}[\pi(1-k)]}{\pi(1-k)} + \frac{e^{-j\frac{\pi}{4}}\operatorname{sen}[\pi(1+k)]}{\pi(1+k)}\right\} \\
\Rightarrow &\boxed{c_k = \frac{3}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}}\operatorname{sinc}[\pi(1-k)] + \frac{3}{2}e^{-j\frac{\pi}{4}}\operatorname{sinc}[\pi(1+k)]}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\boxed{c_1 = c_{-1}^* = \frac{3}{2}e^{+j\frac{\pi}{4}} \quad \text{e} \quad c_k = 0,\ |k| \neq 1}
$$

Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

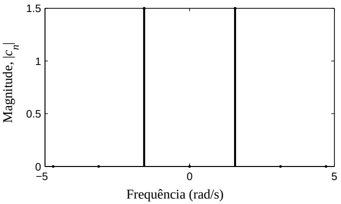
Portanto,

$$\boxed{|c_k| = \frac{3}{2}, \quad |k| = 1}$$

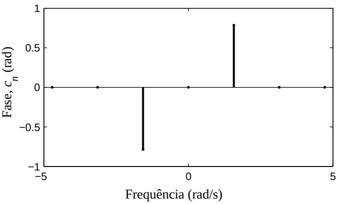
e

$$\boxed{\angle c_k = \begin{cases} -\dfrac{\pi}{4}, & k = -1 \\ +\dfrac{\pi}{4}, & k = 1 \end{cases}}$$

Espectro de magnitude



Espectro de fase



Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

4) Determine os coeficientes da série de Fourier de

$$x(t) = 2\text{sen}(2\pi t - 3) + \text{sen}(6\pi t)$$

Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

4) Determine os coeficientes da série de Fourier de

$$x(t) = 2\mathrm{sen}(2\pi t - 3) + \mathrm{sen}(6\pi t)$$

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$\omega_1 = 2\pi \quad \longrightarrow \quad T_1 = 1 \quad \text{e} \quad \omega_2 = 6\pi \quad \longrightarrow \quad T_2 = 1/3$$

Logo, o período fundamental de $x(t)$ é dado por

$$T_0 = 1 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = 2\pi$$

Então, verifica-se (por inspeção) que

$$\boxed{c_k = \begin{cases} c_k = c^*_{-k} = -je^{-j3}, & |k| = 1 \\ c_k = c^*_{-k} = -\frac{j}{2}, & |k| = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}}$$

Exemplo: Determinação dos coeficientes por inspeção

Agora, lembrando que

$$\pm j = e^{\pm j \dfrac{\pi}{2}}$$

é possível reescrever os coeficientes da série de Fourier como

$$\boxed{c_k = \begin{cases} c_k = c_{-k}^* = e^{-j\left(3+\frac{\pi}{2}\right)}, & |k| = 1 \\ c_k = c_{-k}^* = \frac{e^{-j\frac{\pi}{2}}}{2}, & |k| = 3 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}}$$

Portanto,

$$\boxed{|c_k| = \begin{cases} 1, & |k| = 1 \\ \frac{1}{2}, & |k| = 3 \end{cases}}$$

e

$$\boxed{\angle c_k = \begin{cases} \mp\left(3 + \frac{\pi}{2}\right), & |k| = 1 \\ \mp\frac{\pi}{2}, & |k| = 3 \end{cases}}$$

Distorção harmônica
(ou distorção não linear)

Distorção harmônica

A distorção harmônica é relacionada a linearidade do sistema, i.e.,

- Sistema linear $\Rightarrow$ não introduz distorção harmônica;
- Sistema não linear $\Rightarrow$ introduz distorção harmônica.

Formalmente, a distorção introduzida na $k-$ésima harmônica é definida como

$$D_k = \frac{\mathrm{Re}(c_k)}{\mathrm{Re}(c_1)}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Por sua vez, a distorção harmônica total (THD) é dada por

$$\boxed{\mathrm{THD} = \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} D_k^2}}$$

Portanto, sistemas "quase" lineares resultam em THD $\rightarrow 0$, i.e., menor a distorção harmônica introduzida no sinal.

Exemplo: Cálculo da distorção harmônica total

1) Aplicando

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

a entrada de um amplificador (não linear), obtém-se

$$y(t) = 20\cos(\omega_0 t) + 5\cos(2\omega_0 t) + 2\cos(3\omega_0 t) + \cos(4\omega_0 t)$$

Logo, determine a distorção harmônica total do sistema.

Exemplo: Cálculo da distorção harmônica total

1) Aplicando

$$x(t) = \cos(\omega_0 t)$$

a entrada de um amplificador (não linear), obtém-se

$$y(t) = 20\cos(\omega_0 t) + 5\cos(2\omega_0 t) + 2\cos(3\omega_0 t) + \cos(4\omega_0 t)$$

Logo, determine a distorção harmônica total do sistema.

Resposta:

$$\begin{aligned}
\text{THD} &= \sqrt{\sum_{k=2}^{\infty} D_k^2} \\
&= \sqrt{\left(\frac{5}{20}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{20}\right)^2} \\
&= 0,27 \quad \Rightarrow \boxed{\text{THD} = 27\%}
\end{aligned}$$

Exemplos
Síntese de sinais

Exemplo: Síntese de sinais

1) Determine o sinal $x(t)$ correspondente aos seguintes coeficientes da série de Fourier:

$$c_k = \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{20}}, \quad \forall k \qquad \text{e} \qquad T_0 = 2$$

Lembrete:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

e

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^m - r^{n+1}}{1-r}, \quad r \neq 1$$

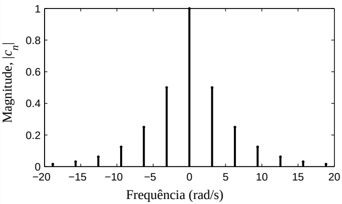
Exemplo: Síntese de sinais

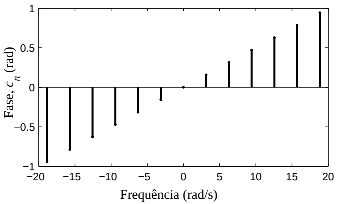
Resposta: A partir da definição, tem-se que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{20}} e^{jk\pi t} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} e^{jk(\pi t + \frac{\pi}{20})} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{jk(\pi t + \frac{\pi}{20})} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l} e^{-jl(\pi t + \frac{\pi}{20})} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{jk(\pi t + \frac{\pi}{20})} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{j(\pi t + \frac{\pi}{20})}} + \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j(\pi t + \frac{\pi}{20})}} - 1 \\
\Rightarrow &\boxed{x(t) = \frac{3}{5 - 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{20})}}
\end{aligned}$$

Exemplo: Síntese de sinais

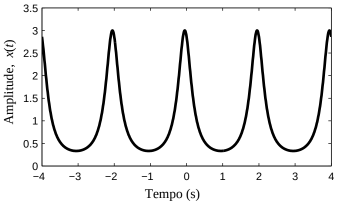
Espectro de magnitude e de fase:





Representação do sinal no domínio do tempo:

$$\boxed{x(t) = \frac{3}{5 - 4\cos(\pi t + \frac{\pi}{20})}}$$



Exemplo: Síntese de sinais

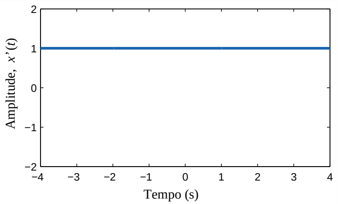
Alternativamente, o sinal pode ser representado no domínio do tempo por

$$
\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{|k|} e^{jk\frac{\pi}{20}} e^{jk\pi t} \\
&= \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l} e^{-jl(\pi t + \frac{\pi}{20})} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{jk(\pi t + \frac{\pi}{20})} \\
&= 1 + \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{l} e^{-jl(\pi t + \frac{\pi}{20})} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} e^{jk(\pi t + \frac{\pi}{20})} \\
&\Rightarrow \boxed{x(t) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cos\left(k\pi t + k\frac{\pi}{20}\right)}
\end{aligned}
$$

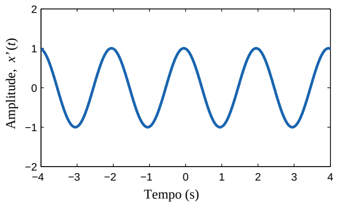
Exemplo: Síntese de sinais

Contribuições individuais dos diferentes termos:

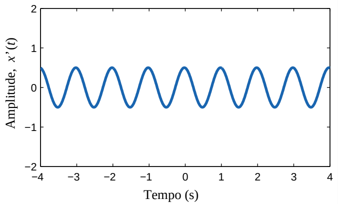
$k = 0$



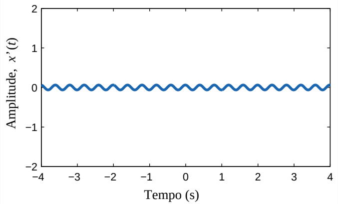
$|k| = 1$



$|k| = 2$

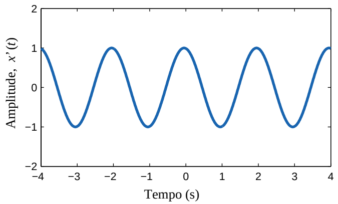


$|k| = 5$

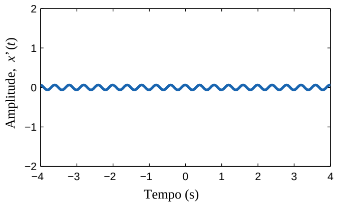


Exemplo: Síntese de sinais

$|k| = 1$



$|k| = 5$



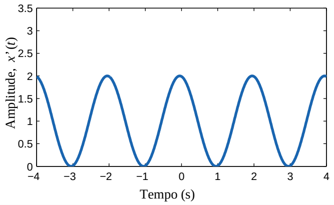
Com respeito a síntese/reconstrução de sinais,

- Variações lentas $\Rightarrow$ Componentes de baixa frequência
- Variações rápidas $\Rightarrow$ Componentes de alta frequência
- Taxa de decaimento dos coeficientes da série
  - Onda triangular $\rightarrow 1/k^2$
  - Onda quadrada $\rightarrow 1/k$

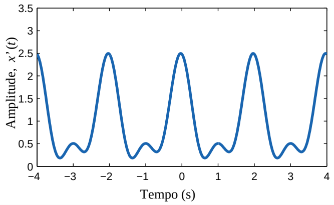
Exemplo: Síntese de sinais

Aproximação por um número menor de termos:

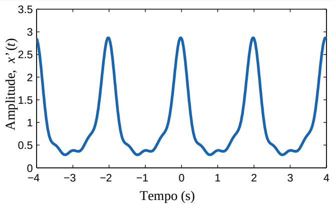
$$|k| = 0, 1$$



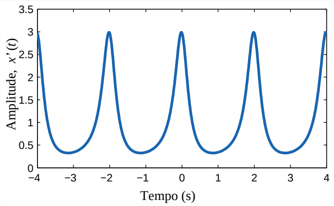
$$|k| = 0, 1, 2$$



$$|k| = 0, 1, \cdots, 4$$



$$|k| = 0, 1, \cdots, 9$$



Exemplo: Síntese de sinais

2) Determine o sinal $x(t)$ correspondente a partir de

$$c_k = 2\delta(k-3) - j\delta(k-2) + j\delta(k+2) + 2\delta(k+3), \quad \omega_0 = \pi$$

Exemplo: Síntese de sinais

2) Determine o sinal $x(t)$ correspondente a partir de

$$c_k = 2\delta(k-3) - j\delta(k-2) + j\delta(k+2) + 2\delta(k+3), \quad \omega_0 = \pi$$

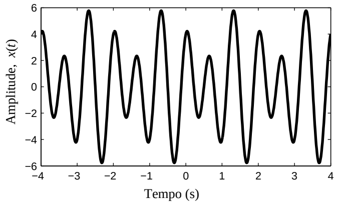
Resposta: A partir da definição, tem-se que

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} [2\delta(k-3) - j\delta(k-2) + j\delta(k+2) + 2\delta(k+3)] e^{jk\pi t} \\
&= 2e^{j3\pi t} - je^{j2\pi t} + je^{-j2\pi t} + 2e^{-j3\pi t} \\
&\Rightarrow \boxed{x(t) = 2\mathrm{sen}(2\pi t) + 4\cos(3\pi t)}
\end{aligned}$$

Exemplo: Síntese de sinais

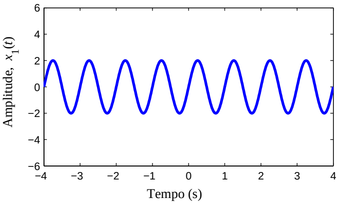
Representação do sinal no tempo:

$$x(t) = \underbrace{2\text{sen}(2\pi t)}_{x_1(t)} + \underbrace{4\cos(3\pi t)}_{x_2(t)}$$

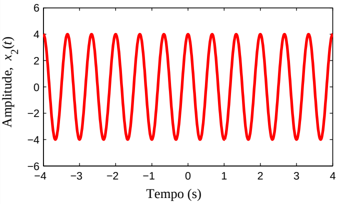


Individualmente, $x_1(t)$ e $x_2(t)$ contribuem da seguinte forma para a construção de $x(t)$,

$x_1(t)$



$x_2(t)$



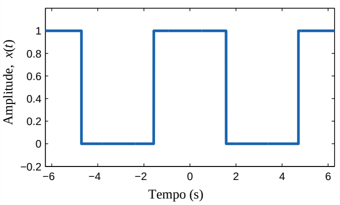
Fenômeno de Gibbs

Fenômeno de Gibbs

Com respeito a síntese de funções com descontinuidades,

- Gibbs (em 1899) demonstrou que existe um comportamento anômalo próximo aos pontos de descontinuidades.
- O problema é relacionado à convergência da série de Fourier.
- Foi mostrado que existe um sobressinal de $\pm 9\%$ em torno das descontinuidades (variações abruptas).
- Nas regiões continuas de $x(t)$, a série converge para o valor exato do sinal a medida que $|N| \to \infty$.

Para entender o fenômeno de Gibbs, considere que



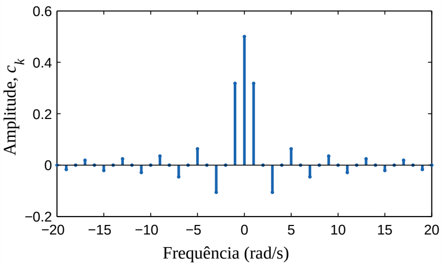
$$\boxed{T_0 = 2\pi \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = 1}$$

Fenômeno de Gibbs

A partir da definição de série de Fourier, tem-se

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sinc}\left(\frac{k\pi}{2}\right)\cos(kt)}$$

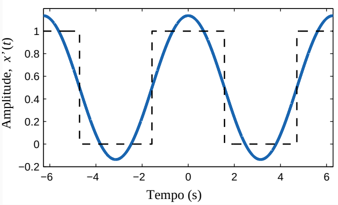
Portanto, o espectro de $x(t)$ pode ser representado por



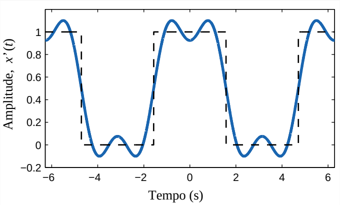
Fenômeno de Gibbs

Síntese de sinais com descontinuidades (variações abruptas):

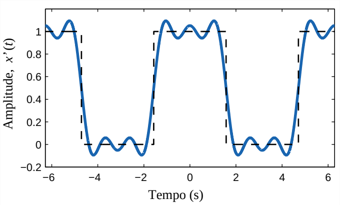
$$|k| = 0, 1 \rightarrow \hat{x}(t)$$



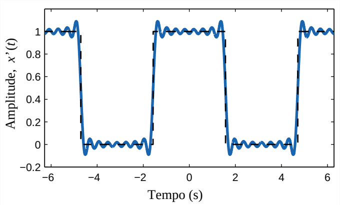
$$|k| = 0, 1, 2 \rightarrow \hat{x}(t)$$



$$|k| = 0, \cdots, 3 \rightarrow \hat{x}(t)$$



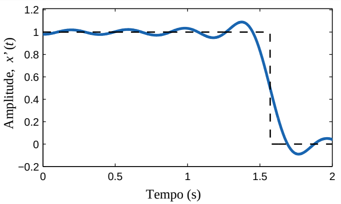
$$|k| = 0, \cdots, 8 \rightarrow \hat{x}(t)$$



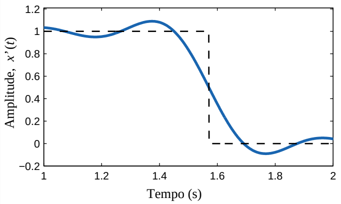
Fenômeno de Gibbs

Síntese de sinais com descontinuidades (variações abruptas):

Nos **trechos contínuos**, a série de Fourier converge para o valor exato de $x(t)$ conforme $N \to \infty$...



Nas **descontinuidades**, a série de Fourier converge para o valor médio (pela direita e pela esquerda)...

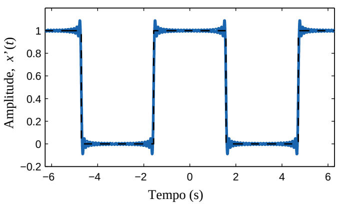


Portanto, existe um sobressinal de $\pm 9\%$ em $t = k\,\pi/2$.

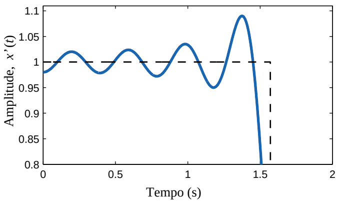
Fenômeno de Gibbs

Síntese de sinais com descontinuidades (variações abruptas):

O sobressinal e sub-sinal observado **independe do número de termos** considerados.



O período do sinal (em torno da descontinuidade) é igual a $1/Nf_0$.



Propriedades

Propriedades

1) Linearidade (superposição)

Considerando

$$x_1(t) \Longleftrightarrow d_k,\ \omega_0 \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow e_k,\ \omega_0$$

então

$$\boxed{Ax_1(t) + Bx_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad Ad_k + Be_k,\ \omega_0}$$

sendo A e B constantes de valor arbitrário.

Propriedades

Demonstração: Para $y(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$, tem-se que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} [Ax_1(t) + Bx_2(t)]e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{A}{T_0}\int_{T_0} x_1(t)e^{-jk\omega_0 t}dt + \frac{B}{T_0}\int_{T_0} x_2(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{aligned}$$

Então, como

$$x_1(t) \Longleftrightarrow d_k \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow e_k$$

verifica-se que

$$c_k = Ad_k + Be_k$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

2) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então (para $t_0 > 0$)

$$\boxed{x(t - t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad c_k e^{-jkw_0 t_0}}$$

Propriedades

Demonstração: Para $y(t) = x(t - t_0)$, tem-se

$$d_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t-t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Então, fazendo

$$t' = t - t_0 \longrightarrow \frac{dt'}{dt} = 1 \qquad \text{onde} \qquad t = \pm\frac{T_0}{2} \longrightarrow t' = \pm\frac{T_0}{2}$$

observa-se que

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t')e^{-jk\omega_0(t_0+t')}dt' \\ &= \left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t')e^{-jk\omega_0 t'}dt'\right]e^{-jk\omega_0 t_0} \\ &= c_k e^{-jk\omega_0 t_0} \end{aligned}$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

3) Escalamento no tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então

$$\boxed{x(at) \quad \Longleftrightarrow \quad c_k, \quad \omega_0' = \frac{\omega_0}{a}}$$

Propriedades

Demonstração: Para $y(t) = x(at)$, tem-se

$$d_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(at)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Então, fazendo

$$t' = at \longrightarrow \frac{dt'}{dt} = a \quad \text{onde} \quad t = \pm\frac{T_0}{2} \longrightarrow t' = \pm a\frac{T_0}{2}$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{aT_0}\int_{aT_0} x(t')e^{-jk(\frac{\omega_0}{a})t'}dt' \\ &= \frac{1}{T_0'}\int_{T_0'} x(t')e^{-jk\omega_0' t'}dt' \\ &= c_k, \quad \omega_0' = \frac{\omega_0}{a} \quad \text{ou} \quad T_0' = aT_0 \end{aligned}$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

4) Deslocamento em frequência

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então (para $M \in \mathbb{Z}$)

$$\boxed{e^{jM\omega_0 t}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad c_{k-M}}$$

Propriedades

Demonstração: Para $y(t) = e^{+jM\omega_0 t}x(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} d_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{+jM\omega_0 t}x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-j(k-M)\omega_0 t}dt \end{aligned}$$

Portanto, por inspeção, é possível verificar que

$$d_k = c_{k-M}.$$

Créditos: Gabriel Saatkamp Lazaretti (2018/1).

5) Conjugação

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então

$$\boxed{x^*(t) \quad \Longleftrightarrow \quad c^*_{-k}}$$

Propriedades

Demonstração: Tomando o complexo-conjugado de ambos os lados de

$$c_k = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

obtém-se

$$\begin{aligned} c_k^* &= \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right]^* \\ &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{jk\omega_0 t} dt \end{aligned}$$

A partir disso, verifica-se que

$$c_{-k}^* = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x^*(t) e^{-jk\omega_0 t} dt.$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

6) Reflexão no tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então

$$\boxed{x(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad c_{-k}}$$

Propriedades

Demonstração: Para $y(t) = x(-t)$,

$$d_k = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} y(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}} x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Então, considerando

$$t' = -t \longrightarrow \frac{dt'}{dt} = -1 \quad \text{onde} \quad t = \pm\frac{T_0}{2} \longrightarrow t' = \mp\frac{T_0}{2}$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} d_k &= -\frac{1}{T_0}\int_{+\frac{T_0}{2}}^{-\frac{T_0}{2}} x(t')e^{+jk\omega_0 t'}dt' \\ &= c_{-k} \end{aligned}$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

7) Convolução periódica

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow d_k \quad \text{e} \quad y(t) \Longleftrightarrow e_k$$

então

$$\boxed{\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad T_0 d_k e_k}$$

Propriedades

Demonstração: Para $z(t) = x(t) * y(t)$, tem-se

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} z(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\left[\int_{T_0} x(\tau)y(t-\tau)d\tau\right]e^{-jk\omega_0 t}dt$$

Logo, fazendo

$$\eta = t - \tau \longrightarrow \frac{d\eta}{dt} = 1 \quad \text{onde} \quad t = \pm\frac{T_0}{2} \longrightarrow \eta = \pm\frac{T_0}{2}$$

observa-se que

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0}\int_{T_0} x(\tau)y(\eta)d\tau e^{-jk\omega_0(\eta+\tau)}d\eta \\ &= T_0\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(\tau)e^{-jk\omega_0\tau}d\tau\right]\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} y(\eta)e^{-jk\omega_0\eta}d\eta\right] \\ &= T_0 d_k e_k \end{aligned}$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

8) Multiplicação no tempo

Considerando

$$x_1(t) \Longleftrightarrow d_k,\ \omega_0 \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow e_k,\ \omega_0$$

então

$$\boxed{x_1(t)x_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l e_{k-l},\ \omega_0}$$

Propriedades

Demonstração: Considere que

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l e_{k-l} \right] e^{jk\omega_0 t}$$

Então, fazendo

$$m = k - l \quad \text{onde} \quad k = \pm\infty \longrightarrow m = \pm\infty$$

observa-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} d_l e^{jl\omega_0 t} \sum_{m=-\infty}^{\infty} e_m e^{jm\omega_0 t} \\ &= x_1(t) x_2(t) \end{aligned}$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

9) Diferenciação

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então

$$\boxed{\frac{d}{dt}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad jk\omega_0 c_k}$$

Propriedades

Demonstração: Dado que

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{e} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} y(t) = \frac{d}{dt}x(t) &= \frac{d}{dt}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}\right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \frac{d}{dt} e^{jk\omega_0 t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} jk\omega_0 c_k e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Portanto, é possível concluir (por inspeção) que

$$d_k = jk\omega_0 c_k$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

10) Integração no domínio do tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{jk\omega_0}c_k}$$

Propriedades

Demonstração: Dado que

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{e} \quad x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{t} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 \tau} d\tau \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \int_{-\infty}^{t} e^{jk\omega_0 \tau} d\tau = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{c_k}{jk\omega_0} e^{jk\omega_0 t} \end{aligned}$$

Portanto, é possível concluir (por inspeção) que

$$d_k = \frac{c_k}{jk\omega_0}$$

Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

11) Simetria do conjugado

Para $x(t) \in \mathbb{R}$,

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k \quad \text{e} \quad c_k = c_{-k}^*$$

então

$$\boxed{\begin{cases} \mathrm{Re}(c_k) = \mathrm{Re}(c_{-k}) \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}(c_k) = -\mathrm{Im}(c_{-k}) \\ |c_k| = |c_{-k}| \quad \text{e} \quad \angle c_k = -\angle c_{-k} \end{cases}}$$

12) Decomposição par-ímpar

Para $x(t) \in \mathbb{R}$,

$$x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

então

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}\{x(t)\} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Re}(c_k) \\ \text{Ímpar}\{x(t)\} & \Longleftrightarrow & j\,\mathrm{Im}(c_k) \end{array}}$$

Propriedades

Demonstração: Para

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad \text{e} \qquad x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} c'_k &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x_{\text{par}}(t)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \frac{x(t)+x(-t)}{2}e^{-jk\omega_0 t}dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt\right] \\ &= \frac{c_k + c_{-k}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, visto que $x(t) \in \mathbb{R}$ implica $c_k = c^*_{-k}$, conclui-se

$$c'_k = \frac{c_k + c^*_k}{2} = \frac{[\text{Re}(c_k) + j\text{Im}(c_k)] + [\text{Re}(c_k) - j\text{Im}(c_k)]}{2} = \text{Re}(c_k).$$

Créditos: Dyorgyo Pompermaier Valesan (2019/1).

Propriedades

Analogamente, para

$$x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad \text{e} \qquad x(t) \Longleftrightarrow c_k$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} c_k' &= \frac{1}{T_0} \int_{T_0} x_{\text{ímpar}}(t) e^{-jk\omega_0 t} dt = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} \frac{x(t) - x(-t)}{2} e^{-jk\omega_0 t} dt \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] - \frac{1}{2} \left[\frac{1}{T_0} \int_{T_0} x(-t) e^{-jk\omega_0 t} dt \right] \\ &= \frac{c_k - c_{-k}}{2} \end{aligned}$$

Portanto, visto que $x(t) \in \mathbb{R}$ implica $c_k = c_{-k}^*$, conclui-se

$$c_k = \frac{c_k - c_k^*}{2} = \frac{[\text{Re}(c_k) + j\text{Im}(c_k)] - [\text{Re}(c_k) - j\text{Im}(c_k)]}{2} = j\text{Im}(c_k).$$

Créditos: Dyorgyo Pompermaier Valesan (2019/1).

Teorema de Parseval

Teorema de Parseval

Considerando que a potência de um sinal é dada por

$$P_x = \frac{1}{T_0} \int_{T_0} |x(t)|^2 dt$$

Então, levando em conta que sinais periódicos podem ser representados através da série de Fourier como

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

o teorema de Parseval estabelece que

$$\boxed{P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$$

onde c_k denota os coeficientes da série de Fourier de $x(t)$.

Teorema de Parseval

Demonstração: Dado que

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t}$$

obtém-se

$$\begin{aligned}
P_x &= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right|^2 dt \\
&= \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \right] \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_l e^{jl\omega_0 t} \right]^* dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k c_l^* \frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{-jl\omega_0 t} dt \\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k c_l^* \underbrace{\frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t} dt}_{\text{Análise da integral}}
\end{aligned}$$

Teorema de Parseval

Em seguida, analisando a integral destacada, verifica-se que

$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\frac{e^{j(k-l)\omega_0 t}}{j(k-l)\omega_0}\Bigg|_{-T_0/2}^{T_0/2}$$
$$= \mathrm{sinc}[(k-l)\pi], \quad \forall\, k, l \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, observando que

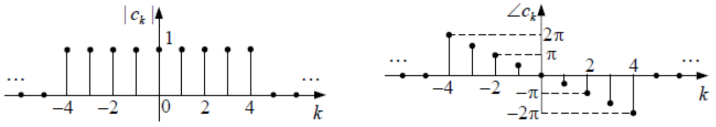
$$\frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}dt = \begin{cases} \mathrm{sinc}[(k-l)\pi] = 0, & k \neq l \\ \mathrm{sinc}[(k-l)\pi] = 1, & k = l \end{cases}$$

a expressão de P_x pode ser simplificada para

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\sum_{l=-\infty}^{\infty} c_k c_l^* \frac{1}{T_0}\int_{T_0} e^{j(k-l)\omega_0 t}dt \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2}$$

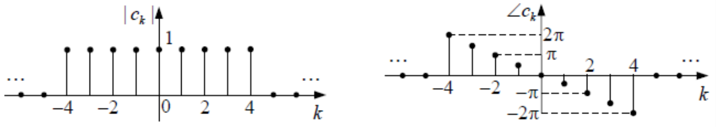
Teorema de Parseval

1) Determine a potência de $x(t)$ a partir do espectro de magnitude e fase ilustrado a seguir.



Teorema de Parseval

1) Determine a potência de $x(t)$ a partir do espectro de magnitude e fase ilustrado a seguir.



Resposta: Visto que

$$c^*_{-4} = c_4 = e^{+j2\pi}, \;\; c^*_{-3} = c_3 = e^{+j3\pi/2},$$
$$c^*_{-2} = c_2 = e^{+j\pi}, \;\; c^*_{-1} = c_1 = e^{+j\pi/2}, \;\; c_0 = 1$$

obtém-se

$$P_x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \sum_{k=-4}^{4} |c_k|^2 = |c_0|^2 + 2\sum_{k=1}^{4} |c_k|^2 \quad \Rightarrow \boxed{P_x = 9}$$

Relação entre a série de Fourier e a transformada de Fourier

Relação entre a série e a transformada de Fourier

Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados de

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{onde} \quad c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} x(t) e^{-jk\omega_0 t} dt$$

obtém-se

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega - k\omega_0)t} dt}_{2\pi\delta(\omega - k\omega_0)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Relação entre a série de Fourier e a transformada de Fourier

Diante do exposto, a seguinte relação entre a série de Fourier e a transformada de Fourier pode ser estabelecida:

$$\boxed{\begin{aligned} x(t) \quad &\Longleftrightarrow \quad X(\omega) \\ \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{jk\omega_0 t} \quad &\Longleftrightarrow \quad 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, \delta(\omega - k\omega_0) \end{aligned}}$$

Portanto, o espectro de um sinal periódico é

- discreto;
- não-nulo apenas em múltiplos inteiros de ω_0; e
- cada componente tem área igual a $2\pi c_k$.

Exemplo: Transformada de Fourier a partir da série de Fourier

1) Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = 1 + \cos[\omega_0 t + (\pi/4)]$$

a partir dos coeficientes da série de Fourier.

Exemplo: Transformada de Fourier a partir da série de Fourier

1) Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = 1 + \cos[\omega_0 t + (\pi/4)]$$

a partir dos coeficientes da série de Fourier.

Resposta: Por inspeção, verifica-se que

$$c_0 = 1, \;\; c_1 = c_{-1}^* = \frac{1}{2}e^{+j(\pi/4)}.$$

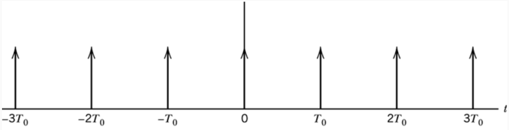
Portanto,

$$\begin{aligned} X(\omega) &= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \, \delta(\omega - k\omega_0) \\ &= 2\pi[c_0 \, \delta(\omega) + c_{-1} \, \delta(\omega + \omega_0) + c_1 \, \delta(\omega - \omega_0)] \\ &= 2\pi\delta(\omega) + \pi[e^{-j(\pi/4)}\delta(\omega + \omega_0) + e^{+j(\pi/4)}\delta(\omega - \omega_0)]. \end{aligned}$$

Exemplo: Transformada de Fourier a partir da série de Fourier

2) Considerando a função de amostragem ideal, definida como

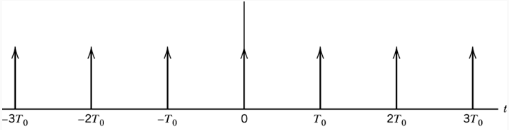
$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0)$$



determine a transformada de Fourier de $x(t)$.

2) Considerando a função de amostragem ideal, definida como

$$x(t) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0)$$



determine a transformada de Fourier de $x(t)$.

Resposta: Visto que

$$c_k = \frac{1}{T_0}\int_{T_0} \delta(t) e^{-jk\omega_0 t} dt \quad \Rightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{T_0}}$$

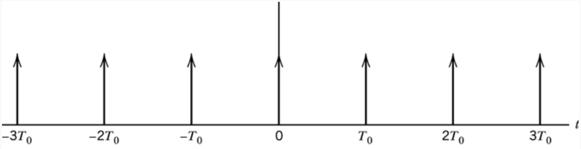
obtém-se

$$\boxed{X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)}$$

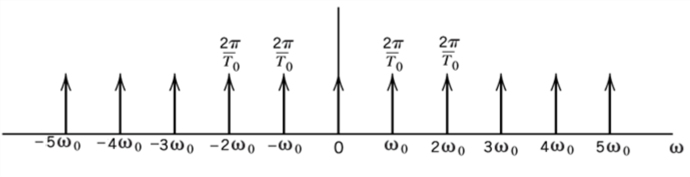
Exemplo: Transformada de Fourier de um trem de impulsos

$$\boxed{\sum_{m=-\infty}^{\infty} \delta(t - mT_0) \Longleftrightarrow \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_0)}$$

Domínio do tempo



Domínio da frequência



Resumo e discussão

Resumo e discussão

- Diferentes formulações são apresentadas na literatura,
  - **Série exponencial complexa**
  - Série trigonométrica
  - Série trigonométrica compacta
- **A série de Fourier permite representar/sintetizar sinais periódicos através da soma de exponenciais complexas,**
  - de frequência é múltipla de ω_0; e
  - ponderadas por coeficientes apropriadamente determinados.
- Sobre a convergência da série de Fourier:
  - Nos trechos contínuos, converge para o valor exato.
  - Nas descontinuidades, converge (pela direta e pela esquerda) para o valor médio.
  - Em torno das descontinuidades, a série de Fourier apresenta um sobressinal de $\pm 9\%$ $\Rightarrow$ **Fenômeno de Gibbs!**

Resumo e discussão

- Com respeito ao número de termos necessários para representar/sintetizar um sinal,
  - Sinais com variações suaves $\Rightarrow$ número pequeno de termos
  - Sinais com descontinuidades $\Rightarrow$ número elevado de termos
- Através da série de Fourier, verifica-se que
  - Sinais periódicos possuem um espectro discreto.
  - **O espectro é definido apenas em múltiplos de ω_0.**
  - A área $2\pi c_k$ caracteriza a magnitude da k-ésima componente no espectro do sinal $k\omega_0$.
- Foi mostrado que exponenciais compõem uma base ortogonal, i.e.,

$$\int_{T_0} e^{jk\omega_0 t} e^{jl\omega_0 t} dt = 0, \quad k \neq l.$$

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 584)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 8)

Até a próxima aula... =)