Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Introdução

O que se aprende nesta disciplina?

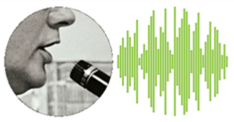
- O que são sinais
- O que são sistemas
- Como modelar matematicamente sinais e sistemas
- Como e porque representar sinais e sistemas em domínios transformados
- Como usar os modelos para prever o comportamento de sistemas lineares
- Como usar os modelos para projetar de sistemas lineares

Nosso estudo inclui sinais e sistemas de...

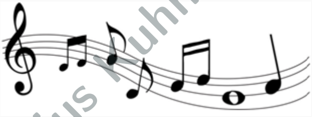
- Tempo contínuo
- Tempo discreto

O que são sinais?

Fala



Música



Texto

Imagem/vídeo

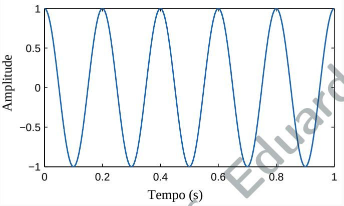
Conjunto de dados ou informações!

O que são sinais?

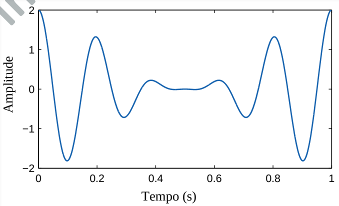
Funções matemáticas de uma ou mais variáveis independentes

$$x(t) = \cos(10\pi t) \quad \text{ou} \quad y(t) = x(t)[1 + \cos(2\pi t)]$$

$x(t)$



$y(t)$



A variável independente não é necessariamente o tempo!

São dispositivos que

- Realizam o processamento/tratamento de sinais a fim de
  - Extrair a informação de interesse
  - Interpretar a informação
  - Inserir uma nova informação
  - Modificar a informação

- Podem ser implementados
  - Em hardware (usando componentes físicos)
  - Em software (através de algoritmos matemáticos)

Tratamento analógico versus digital

- **Tratamento**
  - **Analógico:** Realizado por circuitos construídos utilizando resistores, capacitores, indutores, transistor e diodos...
  - **Digital:** Realizado por processadores contendo somadores, multiplicadores e memórias.

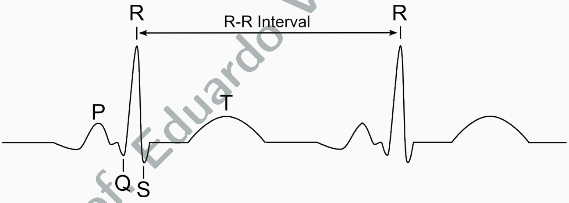
- **Vantagens e desvantagens**
  - **Analógico:**
    - → Garantia de operação em tempo real
    - → Resolução de equações diferenciais de forma trivial
  - **Digital:**
    - → Flexibilidade (alterações de software permitem implementar outras funções no mesmo hardware)
    - → Repetibilidade (operações podem ser executadas várias vezes sem erros decorrentes da sensibilidade dos componentes)

lattes.cnpq.br/2456654064380180

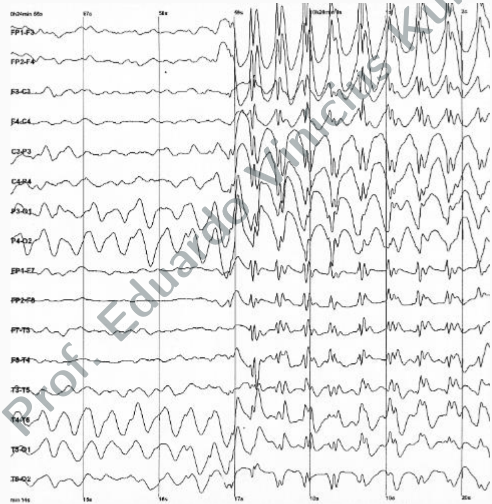
Aplicações no contexto de Engenharia

Biomédica: Sinais gerados em órgãos do corpo são medidos para auxiliar no diagnóstico de diferentes doenças.

Eletrocardiograma (ECG)



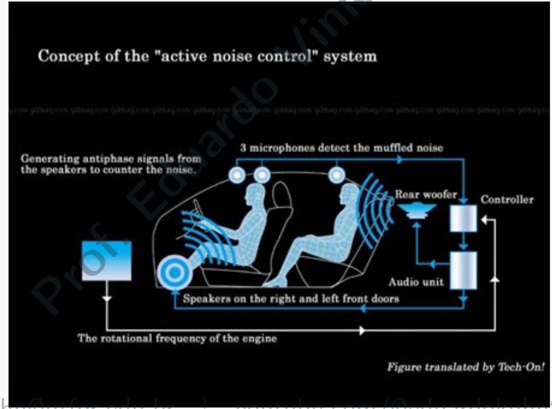
Eletroencefalograma (EEG) de paciente com epilepsia



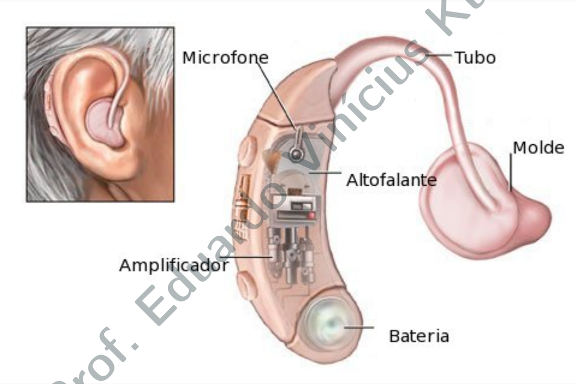
Ressonância magnética (angiografia)

Controle: Em certas aplicações, é necessário realizar algum tipo de controle a partir sinais captados no ambiente.

Controle ativo de ruído (Toyota/Bose)

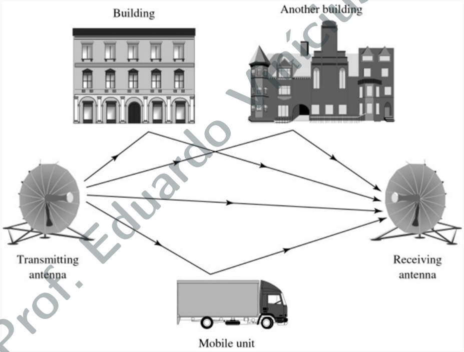


Cancelamento adaptativo de ruído (aparelhos auditivos)



Aplicações no contexto de Engenharia

Comunicações: Em sistemas de comunicação, tem-se por objetivo reduzir efeitos adversos introduzidos no sinal durante a transmissão.



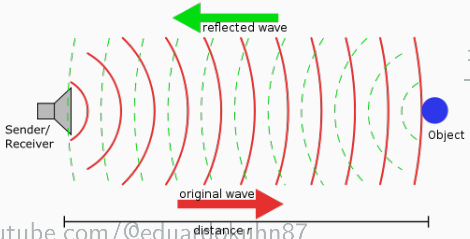
- Transmissão: conversão D/A, formatação da onda...
- Canal de comunicação: reflexões e desvanecimento...
- Recepção: amostragem, conversão A/D...

Aplicações no contexto de Engenharia

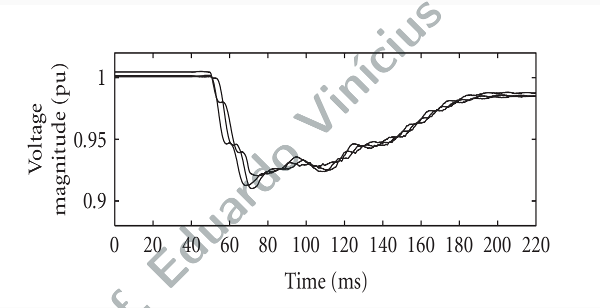
Sonar e Radar: Alterações nos sinais que retornam em relação aos enviados se traduzem em informações de posição, velocidade e característica.

Radar: Ondas eletromagnéticas

Sonar: Ondas sonoras

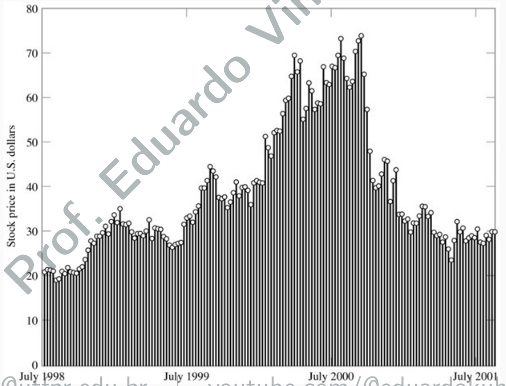


Sistemas de Potência: Estudo dos transitórios gerados devido à variações de carga na rede elétrica (e.g., à partida de um motor).



Mercado financeiro: Análise de viabilidade para investimento e predição do comportamento do mercado.

Flutuações no preço de ações (Intel)



Classificação de sinais

Classificação de sinais

Sinal analógico: Amplitude pode assumir qualquer valor

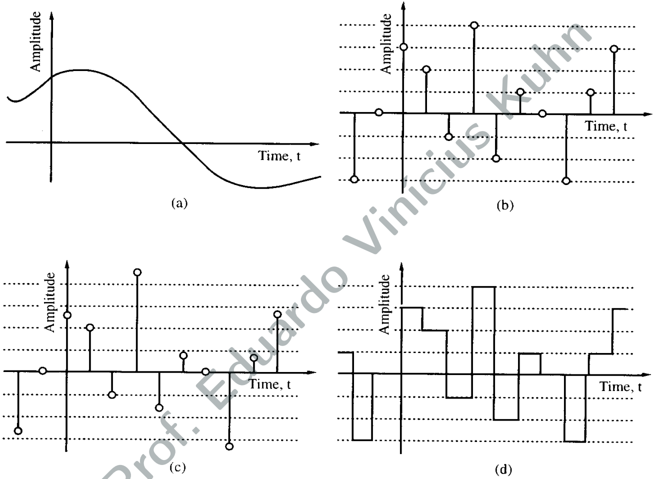
Sinal digital: Amplitude restrita a valores discretos

Sinal contínuo: Definido para qualquer valor da variável independente

Sinal discreto: Definido apenas para valores discretos da variável independente

$\Rightarrow$ **Iniciaremos nosso estudo com sinais analógicos de tempo contínuo...**

Contínuo Digital



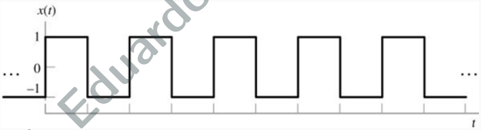
Discreto Contínuo amostrado

Sinais periódicos ou aperiódicos

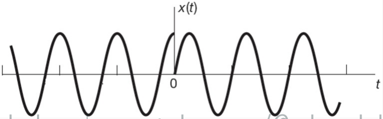
- Sinais periódicos satisfazem

$$x(t) = x(t + T), \quad \forall t \quad \text{com } T > 0$$

sendo o menor valor de T que satisfaz a igualdade denominado período fundamental.



- Sinal aperiódico: Aquele que não é periódico.



Exemplo: Determine se os seguintes sinais são ou não periódicos; caso afirmativo, especifique o período fundamental.

(a) $x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

(b) $x(t) = \cos(2\pi t)$

(c) $y(t) = x(t)[1 + \cos(2\omega_0 t)]$ onde $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

(d) $y(t) = \mathrm{sen}(3t) + \cos(2t)$

Exemplo: Determine se os seguintes sinais são ou não periódicos; caso afirmativo, especifique o período fundamental.

(a) $x(t) = \begin{cases} \cos(\omega_0 t), & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Resposta: Não periódico.

(b) $x(t) = \cos(2\pi t)$

Resposta: Periódico com período fundamental $T_0 = 1\ s$.

(c) $y(t) = x(t)[1 + \cos(2\omega_0 t)]$ onde $x(t) = \cos(\omega_0 t)$

Resposta: Periódico com período fundamental T_0.

(d) $y(t) = \text{sen}(3t) + \cos(2t)$

Resposta: Periódico com período fundamental $T_0 = 2\pi\ s$.

Atenção: Um sinal composto pela soma de dois ou mais sinais periódicos é periódico se, e somente se, as frequências são harmonicamente relacionadas; em outras palavras, a razão entre quaisquer duas frequências deve ser um número racional $\mathbb{Q}$.

Determinação: A frequência fundamental de uma soma de senoides é o maior fator comum (MFC) entre as frequências de cada senoide. $\longrightarrow$ Algoritmo de Euclides!

Para detalhes, veja: B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 543-544)

*Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Exemplo: Determine se o seguinte sinal é ou não periódico; caso afirmativo, especifique o período fundamental.

$$x(t) = 2 + 7\text{sen}\left(\frac{1}{2}t + \theta_1\right) + 3\cos\left(\frac{2}{3}t + \theta_2\right) + 5\cos\left(\frac{7}{6}t + \theta_3\right)$$

Exemplo: Determine se o seguinte sinal é ou não periódico; caso afirmativo, especifique o período fundamental.

$$x(t) = 2 + 7\text{sen}\left(\frac{1}{2}t + \theta_1\right) + 3\cos\left(\frac{2}{3}t + \theta_2\right) + 5\cos\left(\frac{7}{6}t + \theta_3\right)$$

Resposta: De $x(t)$,

$$\omega_1 = \frac{1}{2} \qquad \omega_2 = \frac{2}{3} \qquad \omega_3 = \frac{7}{6}$$

o que implica

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4} \qquad\qquad \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{4}{7}$$

Dessa forma,

$$\left(\frac{3}{4}, \frac{4}{7}\right) \in \mathbb{Q} \quad \longrightarrow \quad \text{É periódico!}$$

Classificação de sinais

Continuando, a frequência (angular) fundamental é obtida como

$$\omega_0 = \frac{\mathrm{MFC}(1,2,7)}{\mathrm{MMC}(2,3,6)} = \frac{1}{6}$$

Portanto, $x(t)$ é composto por três harmônicas, isto é,

$$\omega_1 = 3\left(\frac{1}{6}\right) \qquad \omega_2 = 4\left(\frac{1}{6}\right) \qquad \omega_3 = 7\left(\frac{1}{6}\right)$$

Note que a componente de frequência fundamental está ausente.

***Dica:** O MFC de frações é a razão entre o MFC dos numeradores e o mínimo múltiplo comum (MMC) dos denominadores.

*Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Exemplo: Determine se os seguinte sinal é ou não periódico; caso afirmativo, especifique o período fundamental.

$$x(t) = \cos\left(\frac{2}{3}t + \frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{4}{5}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

Resposta: Como $\omega_1/\omega_2 \in \mathbb{Q}$, $x(t)$ é periódico. Logo, a frequência (angular) fundamental é dada por

$$\omega_0 = \frac{\mathrm{MFC}(2,4)}{\mathrm{MMC}(3,5)} = \frac{2}{15}$$

o que implica

$$\omega_1 = \frac{2}{3} = 5\left(\frac{2}{15}\right) \qquad \omega_2 = \frac{4}{5} = 6\left(\frac{2}{15}\right)$$

*Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Sinais causais, não-causais e anti-causais

- Sinais causais não iniciam antes de $t = 0$, i.e.,

$$x(t) = 0 \quad \text{para} \quad t < 0$$

- Sinais não-causais iniciam em $t < 0$ e se estendem para $t > 0$.

- Sinais anti-causais existem apenas para $t < 0$, o que implica

$$x(t) = 0 \quad \text{para} \quad t > 0$$

Exemplo: Determine se os seguintes sinais são causais, não-causais ou anti-causais.

(a) $x(t) = 1, \quad \forall t$

(b) $x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

(c) $x(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine se os seguintes sinais são causais, não-causais ou anti-causais.

(a) $x(t) = 1, \quad \forall t$

Resposta: Não causal.

(b) $x(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

Resposta: Causal.

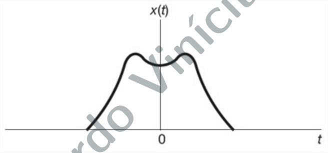
(c) $x(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$

Resposta: Anti-causal.

Sinais pares e sinais ímpares

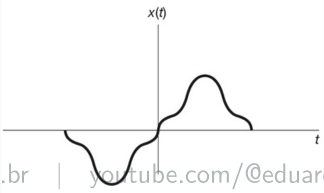
- Sinal par:

$$x(-t) = x(t)$$



- Sinal ímpar:

$$x(-t) = -x(t)$$



Decomposição da parte par e ímpar de um sinal

Qualquer sinal pode ser decomposto em parte par e ímpar através das seguintes relações:

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

Dessa forma,

$$x(t) = x_{\text{par}}(t) + x_{\text{ímpar}}(t)$$

Exemplo: Determine a parte par e a parte ímpar do seguinte sinal:

$$x(t) = e^{-at}u(t).$$

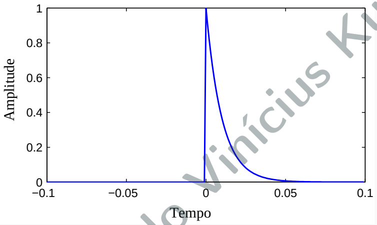
Resposta: Em relação a parte par, tem-se

$$\begin{aligned} x_{\text{par}}(t) &= \frac{x(t) + x(-t)}{2} \\ &= \frac{e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)}{2} \end{aligned}$$

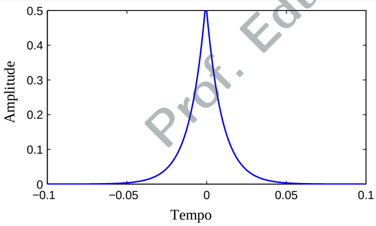
Por sua vez, com respeito a parte ímpar, tem-se

$$\begin{aligned} x_{\text{ímpar}}(t) &= \frac{x(t) - x(-t)}{2} \\ &= \frac{e^{-at}u(t) - e^{at}u(-t)}{2} \end{aligned}$$

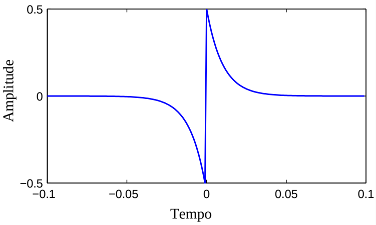
$$x(t) = e^{-at}u(t)$$



$x_{\text{par}}(t)$

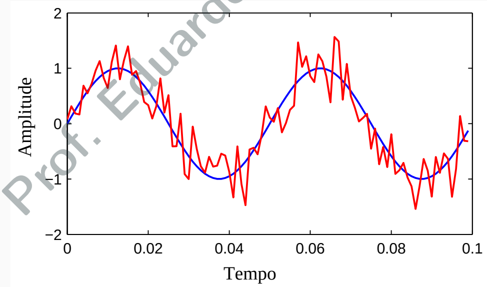


$x_{\text{ímpar}}(t)$



Sinais determinísticos ou aleatórios

- Sinais determinísticos podem ser completamente caracterizados através de funções matemáticas.
- Sinais aleatórios apresentam uma inerente incerteza antes da sua observação (e.g., ruído ou variações aleatórias).



Classificação de sinais

Sinais de energia e sinais de potência

- Sinais de energia têm energia E_x finita, i.e.,

$$E_x = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty \rightarrow \text{Sinais determinísticos/aperiódicos}$$

- Sinais de potência têm potência P_x finita, i.e.,

$$P_x = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt < \infty \rightarrow \text{Sinais aleatórios/periódicos}$$

Para um sinal periódico com período T, tem-se

$$P_x = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |x(t)|^2 dt \xrightarrow{\sqrt{P_x}} = \text{Valor RMS}$$

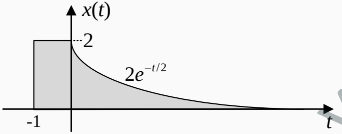
Medidas de intensidade levam em conta a magnitude e a duração do sinal (*intervalo da variável independente*).

Observações:

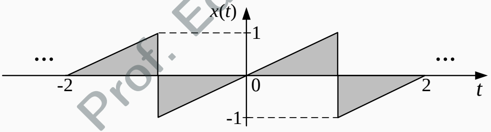
- E_x e P_x são medidas de "capacidade energética" já que não têm unidade de energia
- A classificação de um sinal como de energia ($0 < E_x < \infty$) ou de potência ($0 < P_x < \infty$) é mutuamente exclusiva
- Existem sinais que não são nem de energia nem de potência, isto é, $E_x \to \infty$ e $P_x \to \infty$ (e.g., $x(t) = t$)
- P_x é muito útil quando $E_x \to \infty$ (e.g., $\lim_{t\to\infty} |x(t)| \neq 0$)
- P_x representa o valor médio quadrático de $x(t)$

Exemplo: Verifique se os seguintes sinais são de energia e/ou de potência.

(a)

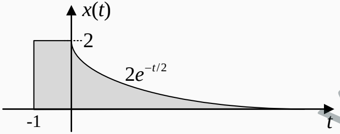


(b)



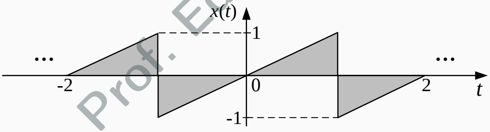
Exemplo: Verifique se os seguintes sinais são de energia e/ou de potência.

(a)



Resposta: $E_x = 8 < \infty$

(b)



Resposta: $P_x = \dfrac{1}{3} < \infty$

Operações elementares sobre sinais

Operações elementares sobre sinais

- **Escalamento**

$$y(t) = cx(t)$$

- **Adição**

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

- **Multiplicação**

$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

- **Diferenciação**

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

- **Integração**

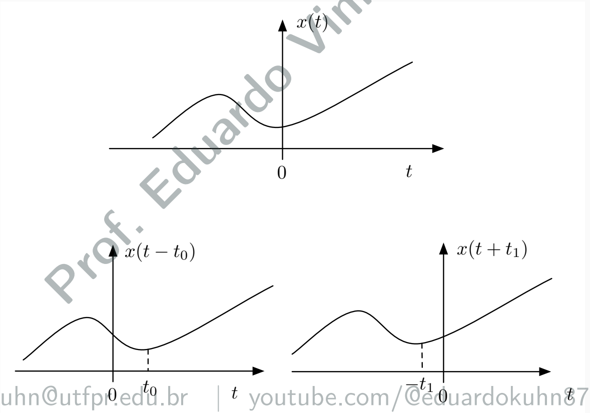
$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)\, d\tau$$

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Operações elementares sobre sinais

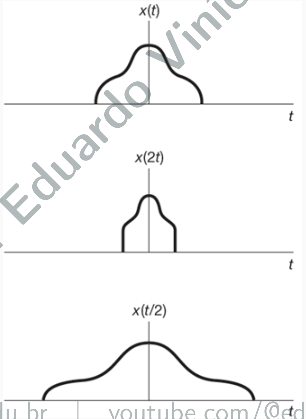
- **Deslocamento no tempo**

$$x(t) \to x(t - t_0) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} t_0 > 0 \text{ (atraso)} \\ t_0 < 0 \text{ (avanço)} \end{cases}$$



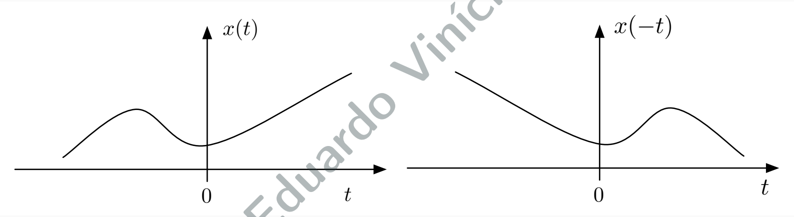
- **Escalonamento no tempo**

$$x(t) \to x(at) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} a > 1 \text{ (compressão)} \\ 0 < a < 1 \text{ (expansão)} \end{cases}$$



- **Reversão no tempo**

$$x(t) \rightarrow x(-t)$$



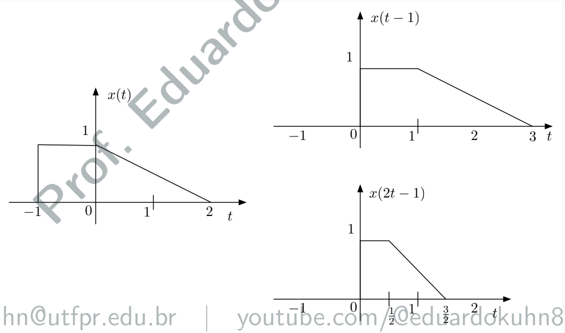
- **Operações combinadas**

$$x(t) \to x(at-b), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Desmembrando

1º) $x(t) \xrightarrow{t \to (t-b)} x(t-b)$ ← (deslocamento)

2º) $x(t-b) \xrightarrow{t \to at} x(at-b)$ ← (escalonamento)



Exemplo: Determine

(a) $y_{\mathrm{a}}(t) = x_1(t) + x_2(t)$

(b) $y_{\mathrm{b}}(t) = x_1(t)x_2(t)$

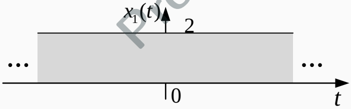
(c) $y_{\mathrm{c}}(t) = \dfrac{d}{dt}x_2(t)$

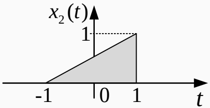
(d) $y_{\mathrm{d}}(t) = x_2(t-1)$

(e) $y_{\mathrm{e}}(t) = x_2(2t)$

(f) $y_{\mathrm{f}}(t) = x_2(2t-1)$

levando em consideração que

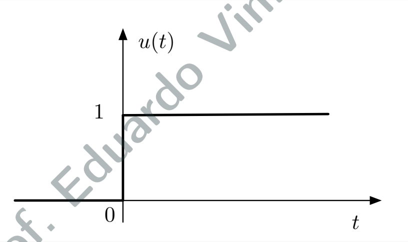




Modelos úteis de sinais

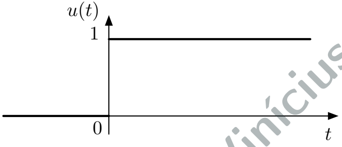
1) Degrau unitário

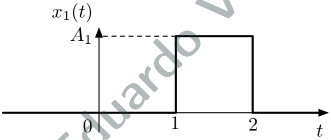
$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



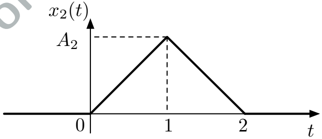
- Modelagem de variações abruptas
- Modelagem de funções contendo pulsos
- Modelagem de funções limitadas no tempo

Exemplo: Utilização do degrau unitário na representação de sinais.





$$x_1(t) = A_1\big[u(t-1) - u(t-2)\big]$$

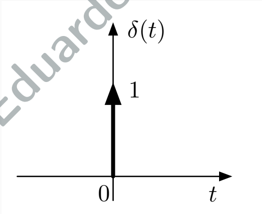


$$x_2(t) = A_2 t\big[u(t) - u(t-1)\big] - A_2(t-2)\big[u(t-1) - u(t-2)\big]$$

2) Impulso Unitário (Impulso de Dirac)

a) $\delta(t) = 0$ para $t \neq 0$

b) $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\, dt = 1$ (área unitária $\Rightarrow$ amplitude infinita!)



Modelos úteis de sinais

Propriedade da amostragem

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - t_0)\, dt = x(t_0)$$

Propriedade de escalamento no tempo

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(at)\, dt = \frac{1}{|a|} x(0)$$

Relação entre degrau e impulso unitários

$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau) d\tau \quad \longleftrightarrow \quad \delta(t) = \frac{d}{dt} u(t)$$

Demonstração: Para a propriedade da amostragem, observe que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t'+t_0)\delta(t')\,dt' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t_0)\delta(t')\,dt' \\
&= x(t_0)\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t')\,dt'}_{=1} \\
&= x(t_0)
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t-t_0)\,dt = x(t_0)$$

Demonstração: Para a propriedade de escalamento no tempo, segue que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)dt = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} \phi\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')dt'$$
$$= \frac{1}{a}\phi(0), \quad (a > 0)$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)dt = \frac{1}{a}\int_{+\infty}^{-\infty} \phi\left(\frac{t'}{a}\right)\delta(t')dt'$$
$$= -\frac{1}{a}\phi(0), \quad (a < 0)$$

Portanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\delta(at)dt = \frac{1}{|a|}\phi(0)$$

*Créditos: Alessandra Iolanda Pacheco dos Santos (2017/2).

Exemplo: Determine

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x) + \delta(x-1)] \ln(\exp\{\sqrt{\cos[2(x-1)\pi]}\})\, dx.$$

Exemplo: Determine

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(x) + \delta(x-1)] \ln(\exp\{\sqrt{\cos[2(x-1)\pi]}\})\, dx.$$

Resposta: A solução da integral é obtida como

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(x)}_{\neq 0,\, x=0} \ln(\exp\{\sqrt{\cos[2(x-1)\pi]}\})\, dx \\ &\quad + \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\delta(x-1)}_{\neq 0,\, x=1} \ln(\exp\{\sqrt{\cos[2(x-1)\pi]}\})\, dx \\ &= \sqrt{\cos(-2\pi)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx}_{=1} + \sqrt{\cos(0)} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-1)\, dx}_{=1} \\ &= 2 \end{aligned}$$

Exemplo: Determine

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-1)} \cos\left[\frac{\pi}{2}(t-5)\right] \delta(2t-3)\, dt.$$

Exemplo: Determine

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-1)} \cos\left[\frac{\pi}{2}(t-5)\right] \delta(2t-3)\, dt.$$

Resposta: A solução da integral é obtida como

$$\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{(t-1)} \cos\left[\frac{\pi}{2}(t-5)\right] \delta(2t-3)\, dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{u+3}{2}\right)-1\right]} \cos\left\{\frac{\pi}{2}\left[\left(\frac{u+3}{2}\right)-5\right]\right\} \delta(u)\, \frac{du}{2} \\
&= \frac{1}{2} e^{0,5} \cos\left(\frac{7\pi}{4}\right) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \delta(u)\, du}_{=1} \\
&= \frac{1}{2} e^{0,5} \cos(1,75\pi)
\end{aligned}$$

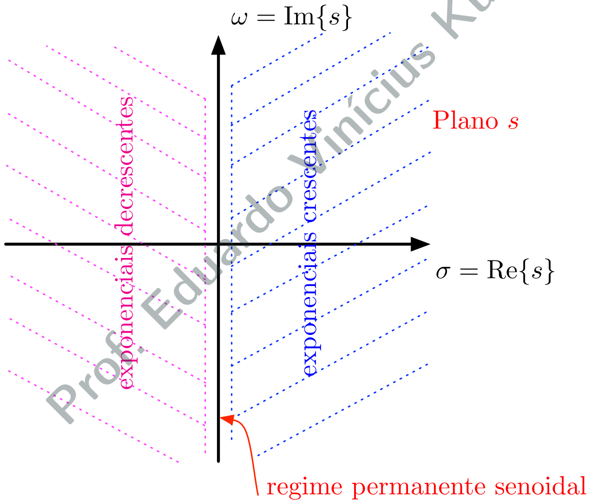
3) Exponencial complexa

$$x(t) = e^{st} \qquad \text{onde} \qquad s = \sigma + j\omega \qquad (j = \sqrt{-1})$$

Como casos particulares de $x(t) = e^{st}$, tem-se

- Constante: $s = 0 \quad \rightarrow \quad x(t) = ke^{0t} = k$
- Exponencial monotônica: $s = \sigma \quad \rightarrow \quad x(t) = e^{\sigma t}$
- Senoide: $s = \pm j\omega \quad \rightarrow \quad \mathrm{Re}[x(t)] = \cos(\omega t)$
- Senoide "amortecida": $s = \sigma \pm j\omega \ \rightarrow \ \mathrm{Re}[x(t)] = e^{\sigma t}\cos(\omega t)$

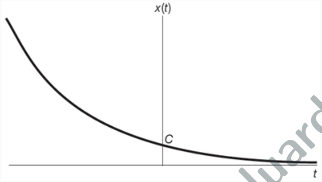
Regiões do plano s



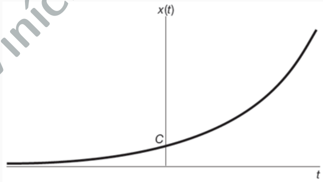
Exemplo: Exponencial complexa

$$x(t) = ke^{st} \text{ onde } s = \sigma + j\omega \longrightarrow x(t) = ke^{\sigma t}e^{j\omega t}$$

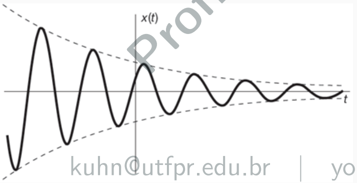
$\sigma < 0 \quad \omega = 0$



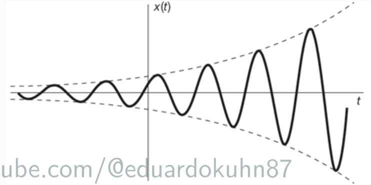
$\sigma > 0 \quad \omega = 0$



$\sigma < 0 \quad \omega \neq 0$



$\sigma > 0 \quad \omega \neq 0$

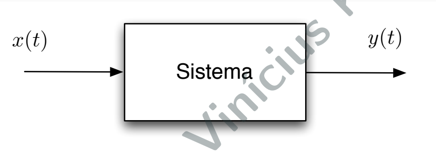


Sistemas

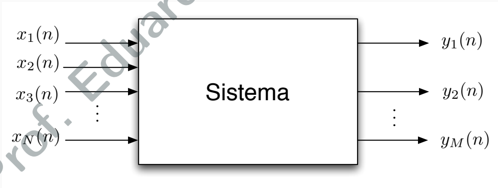
Sistemas

Com respeito ao número de entradas/saídas, tem-se

- **Sistemas SISO** (*single-input and single-output*)



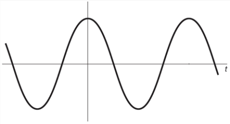
- **Sistemas MIMO** (*multiple-input and multiple-output*)

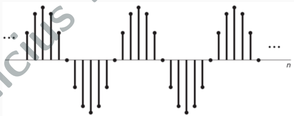


- Por convenção, $x_i(t)$ denota as entradas e $y_i(t)$ as saídas.
- Por simplicidade, o foco aqui é sobre sistemas SISO!!!

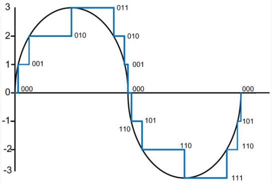
Sistemas

- Sistemas de tempo contínuo ou discreto
  - Contínuo: Entrada e saída são sinais contínuos.
  - Discreto: Entrada e saída são sinais discretos.





- Sistemas analógicos e digitais
  - Analógicos: Entrada e saída são sinais analógicos.
  - Digitais: Entrada e saída são sinais digitais.



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Classificação de sistemas

1) Linearidade: Dado que

$$\begin{cases} x_1(t) \rightarrow y_1(t) \\ x_2(t) \rightarrow y_2(t) \end{cases}$$

o sistema é dito linear quando satisfaz o princípio da superposição, i.e.,

$$\boxed{a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \rightarrow a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t)}$$

A aditividade não implica a homogeneidade!

Exemplo: Considerando $y(t) = 2tx(t-1)$, verifique se o sistema é linear.

Exemplo: Considerando $y(t) = 2tx(t-1)$, verifique se o sistema é linear.

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = 2\,t\,x_1(t-1)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = 2\,t\,x_2(t-1)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t) &\rightarrow 2\,t\,[a_1\,x_1(t-1) + a_2\,x_2(t-1)] \\ &= a_1\,y_1(t) + a_2\,y_2(t) \quad \Rightarrow \underline{\text{(Linear)}} \end{aligned}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = x(t) + 1$, verifique se o sistema é linear.

Exemplo: Considerando $y(t) = x(t) + 1$, verifique se o sistema é linear.

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x_1(t) \to y_1(t) = x_1(t) + 1$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = x_2(t) + 1$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) \to & \, a_1\, x_1(t) + a_2\, x_2(t) + 1 \\ & \neq a_1\, y_1(t) + a_2\, y_2(t) \quad \Rightarrow \text{(Não linear)} \end{aligned}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = x^2(t)$, verifique se o sistema é linear.

Exemplo: Considerando $y(t) = x^2(t)$, verifique se o sistema é linear.

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x_1(t) \rightarrow y_1(t) = x_1^2(t)$$
$$x_2(t) \rightarrow y_2(t) = x_2^2(t)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t) \rightarrow & [a_1\,x_1(t) + a_2\,x_2(t)]^2 \\ & = [a_1\,x_1(t)]^2 + 2a_1\,x_1(t)a_2\,x_2(t) + [a_2\,x_2(t)]^2 \\ & \neq a_1\,y_1(t) + a_2\,y_2(t) \quad \Rightarrow \underline{\text{(Não linear)}} \end{aligned}$$

Exemplo: Verifique se o sistema $y(t) = \mathrm{Re}[x(t)]$ é linear, i.e., satisfaz o princípio da superposição (aditividade e homogeneidade).

*******Observe o que ocorre quando a_1 e/ou a_2 são complexos.*******

Exemplo: Verifique se o sistema $y(t) = \mathrm{Re}[x(t)]$ é linear, i.e., satisfaz o princípio da superposição (aditividade e homogeneidade).

*******Observe o que ocorre quando a_1 e/ou a_2 são complexos.*******

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x_1(t) \to y_1(t) = \mathrm{Re}[x_1(t)]$$
$$x_2(t) \to y_2(t) = \mathrm{Re}[x_2(t)]$$

Então,

$$\begin{aligned} x_3(t) = x_1(t) + x_2(t) \to y_3(t) &= \mathrm{Re}[x_3(t)] \\ &= \mathrm{Re}[x_1(t)] + \mathrm{Re}[x_2(t)] \end{aligned}$$

Contudo, para $a_i \in \mathbb{C}$, verifica-se que

$$\begin{aligned} x_i(t) = a_i x_i(t) \to y_i(t) &= \mathrm{Re}[a_i x_i(t)] \\ &\neq a_i \mathrm{Re}[x_i(t)] \end{aligned}$$

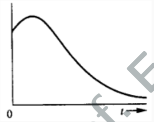
2) Invariância no tempo: Dado que

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

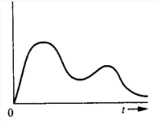
o sistema é dito invariante no tempo se

$$\boxed{x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0)}$$

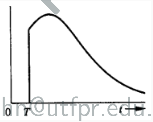
$x(t)$



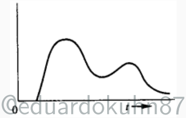
$y(t)$



$x(t - t_0)$



$y(t - t_0)$



Exemplo: Considerando $y(t) = \mathrm{sen}[x(t)]$, verifique se o sistema é invariante no tempo.

Exemplo: Considerando $y(t) = \mathrm{sen}[x(t)]$, verifique se o sistema é invariante no tempo.

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x_1(t) \to y_1(t) = \mathrm{sen}[x_1(t)]$$

$$x_2(t) = x_1(t - t_0) \to y_2(t) = \mathrm{sen}[x_2(t)] = \mathrm{sen}[x_1(t - t_0)]$$

Portanto,

$$y_1(t - t_0) = y_2(t) \quad \Rightarrow \underline{\text{(Invariante no tempo)}}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = \text{sen}(t)\, x(t-2)$, verifique se o sistema é invariante no tempo.

Exemplo: Considerando $y(t) = \text{sen}(t)\, x(t-2)$, verifique se o sistema é invariante no tempo.

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x(t) \rightarrow y(t) = \text{sen}(t)\, x(t-2)$$

$$x_1(t) = x(t-t_0) \rightarrow y_1(t) = \text{sen}(t)\, x(t-t_0-2)$$

Portanto, visto que

$$y(t-t_0) = \text{sen}(t-t_0)\, x(t-t_0-2)$$

tem-se

$$y_1(t) \neq y(t-t_0) \quad \Rightarrow \text{(Variante no tempo)}$$

3) Memória: Dado que

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

o sistema é dito sem memória se

$$\boxed{y(t_0) = F[K, x(t_0)]}$$

Em outras palavras, se a saída $y(t_0)$ depende "exclusivamente" de $x(t)$ para $t = t_0$ e/ou de constantes arbitrárias, o sistema é dito sem memória.

Exemplo: Considerando $y(t) = (t-3)\,x(t+1)$, verifique se o sistema é sem memória.

Exemplo: Considerando

$$v(t) = R\,i(t)$$

e resistência constante, verifique se o sistema é sem memória.

Exemplo: Considerando $y(t) = (t-3)\,x(t+1)$, verifique se o sistema é sem memória.

Resposta:

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0+1) \Rightarrow \underline{\text{(Com memória)}}$$

Exemplo: Considerando

$$v(t) = R\,i(t)$$

e resistência constante, verifique se o sistema é sem memória.

Exemplo: Considerando $y(t) = (t-3)\,x(t+1)$, verifique se o sistema é sem memória.

Resposta:

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0+1) \;\Rightarrow\; \text{(Com memória)}$$

Exemplo: Considerando

$$v(t) = R\,i(t)$$

e resistência constante, verifique se o sistema é sem memória.

Resposta:

$$v(t_0) = R\,i(t_0) \;\Rightarrow\; \text{(Sem memória)}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = (t-3)\,x(t)$, verifique se o sistema é sem memória.

Exemplo: Considerando

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

e capacitância constante, verifique se o sistema é sem memória.

Exemplo: Considerando $y(t) = (t-3)\,x(t)$, verifique se o sistema é sem memória.

Resposta:

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0) \quad \Rightarrow \underline{\text{(Sem memória)}}$$

Exemplo: Considerando

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

e capacitância constante, verifique se o sistema é sem memória.

Exemplo: Considerando $y(t) = (t-3)\,x(t)$, verifique se o sistema é sem memória.

Resposta:

$$y(t_0) = (t_0 - 3)\,x(t_0) \quad \Rightarrow \text{(Sem memória)}$$

Exemplo: Considerando

$$v(t) = \int_{-\infty}^{t} i(\tau)\,d\tau$$

e capacitância constante, verifique se o sistema é sem memória.

Resposta:

$$v(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} i(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \text{(Com memória)}$$

4) Causalidade: Dado que

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

o sistema é dito causal se

$$\boxed{y(t_0) = F[K, x(t \leq t_0)]}$$

Em outras palavras, se a saída $y(t_0)$ depender apenas de $x(t)$ para $t \leq t_0$, pode-se inferir que o sistema é causal (i.e., sistema não antecipativo).

Observações:

- O critério de causalidade tem grande **importância prática!**
- No caso de sistemas de tempo contínuo, a causalidade é uma restrição de projeto essencial.

Exemplo: Considerando $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$, verifique se o sistema é causal.

Exemplo: Considerando

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau - 1)\, d\tau$$

verifique se o sistema é causal.

Exemplo: Considerando $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$, verifique se o sistema é causal.

Resposta:

$$y(t_0) = x(t_0 - 2) + x(t_0 + 2) \Rightarrow \text{(Não causal)}$$

Exemplo: Considerando

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau - 1)\, d\tau$$

verifique se o sistema é causal.

Exemplo: Considerando $y(t) = x(t-2) + x(t+2)$, verifique se o sistema é causal.

Resposta:

$$y(t_0) = x(t_0 - 2) + x(t_0 + 2) \Rightarrow \underline{\text{(Não causal)}}$$

Exemplo: Considerando

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x^2(\tau - 1)\, d\tau$$

verifique se o sistema é causal.

Resposta:

$$y(t_0) = \int_{-\infty}^{t_0} x^2(\tau - 1)\, d\tau \quad \Rightarrow \underline{\text{(Causal)}}$$

5) Invertibilidade: Dado que

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

o sistema é dito invertível se

$$\boxed{x(t) = F^{-1}[y(t)]}$$

Em outras palavras, caso seja possível determinar $x(t)$ biunivocamente a partir de $y(t)$, o sistema é considerado invertível.

Exemplo: Considerando $y(t) = 4\,x(t)$, verifique se o sistema é invertível.

Exemplo: Considerando $y(t) = x^2(t)$, verifique se o sistema é invertível.

Exemplo: Considerando $y(t) = 4\,x(t)$, verifique se o sistema é invertível.

Resposta:

$$x(t) = \frac{1}{4}\,y(t) \quad \Rightarrow \text{(Invertível)}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = x^2(t)$, verifique se o sistema é invertível.

Exemplo: Considerando $y(t) = 4\,x(t)$, verifique se o sistema é invertível.

Resposta:

$$x(t) = \frac{1}{4}\,y(t) \quad \Rightarrow \text{(Invertível)}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = x^2(t)$, verifique se o sistema é invertível.

Resposta:

$$x(t) = \pm\sqrt{y(t)} \quad \Rightarrow \text{(Não invertível)}$$

6) Estabilidade (BIBO - *bounded-input bounded-output*): Dado que

$$x(t) \rightarrow y(t)$$

pode-se inferir que o sistema é BIBO estável se

$$\boxed{|x(t)| = K < \infty \quad \rightarrow \quad |y(t)| < \infty \quad \forall t}$$

Em outras palavras, um dado sistema é considerado BIBO estável se uma entrada limitada implica saída limitada.

Observações:

- Para instabilidade basta encontrar *um* exemplo.
- Sistemas estáveis são estáveis para *qualquer* $x(t)$.

Exemplo: Considerando $y(t) = e^{-|x(t)|}$, verifique se o sistema é BIBO estável.

Exemplo: Considerando $y(t) = tx(t)$, verifique se o sistema é BIBO estável.

Exemplo: Considerando $y(t) = e^{-|x(t)|}$, verifique se o sistema é BIBO estável.

Resposta: Para $x(t) = K$ (com $|K| < \infty$), verifica-se que

$$|y(t)| < \infty \Rightarrow \underline{\text{(Estável)}}$$

Exemplo: Considerando $y(t) = tx(t)$, verifique se o sistema é BIBO estável.

Resposta: Para $x(t) = K$ (com $|K| < \infty$), verifica-se que

$$\lim_{t\to\infty} y(t) \to \infty \Rightarrow \underline{\text{(Instável)}}$$

Exemplo: Classifique os sistemas descritos pelas seguintes relações de entrada e saída como i) Com mémoria; ii) Estável; iii) Causal; iv) Linear; e v) Invariante no tempo.

(a) $y(t) = tx(t) + x(t-1)$

(b) $y(t) = 1 + \cos[2\pi x(t+1)]$

Classificação de sistemas

Exemplo: Classifique os sistemas descritos pelas seguintes relações de entrada e saída como i) Com mémoria; ii) Estável; iii) Causal; iv) Linear; e v) Invariante no tempo.

(a) $y(t) = tx(t) + x(t-1)$
   i) Com memória
   ii) Instável
   iii) Causal
   iv) Linear
   v) Variante no tempo

(b) $y(t) = 1 + \cos[2\pi x(t+1)]$

Exemplo: Classifique os sistemas descritos pelas seguintes relações de entrada e saída como i) Com mémoria; ii) Estável; iii) Causal; iv) Linear; e v) Invariante no tempo.

(a) $y(t) = tx(t) + x(t-1)$

i) Com memória
ii) Instável
iii) Causal
iv) Linear
v) Variante no tempo

(b) $y(t) = 1 + \cos[2\pi x(t+1)]$

i) Com memória
ii) Estável
iii) Não causal
iv) Não linear
v) Invariante no tempo

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 ⟶ (pp. 125-127)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 ⟶ (Capítulo 2)

Até a próxima aula... =)