Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Análise de Fourier
para sinais de tempo discreto

Objetivos

- Introduzir a
  - **série de Fourier**; e
  - **transformada de Fourier**

  para realizar a análise de sinais e sistemas de tempo discreto.
- Estabelecer as devidas condições de existência.
- Apresentar as principais propriedades associadas.
- Determinar o espectro de sinais e/ou a resposta em frequência de sistemas.
- **Estabelecer uma relação entre a Transformada z e a Transformada de Fourier.**
- **Aqui, refere-se como "Série/Transformada de Fourier" a "Série/Transformada de Fourier de tempo discreto"!**

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Série de Fourier
para sinais de tempo discreto

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- A série de Fourier permite **representar sinais periódicos de tempo discreto**, i.e.,

$$x(n) = x(n + N_0), \quad \forall n \quad \text{e} \quad N_0 \in \mathbb{Z}$$

- Com respeito a sinais senoidais/cossenoidais,

$$x(n) = \text{sen}(\omega_0 n) \quad \text{e} \quad x(n) = \cos(\omega_0 n) \quad \rightarrow \quad \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{m}{N_0} \in \mathbb{Q}$$

- Nesse contexto, a k-ésima harmônica é dada por

$$x(n) = \text{sen}(k\omega_0 n) \quad \text{e} \quad x(n) = \cos(k\omega_0 n) \quad \rightarrow \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Vale destacar que
  - As harmônicas ocorrem em múltiplos inteiros de ω_0.
  - Obviamente, são também funções periódicas.
  - A soma das harmônicas resulta em um sinal periódico.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Para um sinal $x(n)$ **periódico e com período fundamental** N_0, define-se a série de Fourier como

$$\boxed{x(n) = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}}$$

e

$$\boxed{c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}}$$

Observações:

- c_0 caracteriza o valor médio do sinal (nível DC)
- c_1 e c_{-1} caracterizam a amplitude da componente ω_0
- c_k e c_{-k} caracterizam a amplitude da k-ésima harmônica
- Apenas N_0 coeficientes distintos precisam ser determinados.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

Demonstração: A partir de

$$
\begin{aligned}
c_{k\pm mN_0} &= \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>} x(n)e^{-j(k\pm mN_0)\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} \\
&= \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>} x(n)e^{-jk\omega_0 n}e^{\pm jmN_0\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{N_0}\sum_{n=<N_0>} x(n)e^{-jk\omega_0 n}\underbrace{e^{\pm j2\pi mn}}_{=1,\ m\in\mathbb{Z}}
\end{aligned}
$$

verifica-se que

$$\boxed{c_k = c_{k\pm mN_0}, \quad m \in \mathbb{Z}}$$

Portanto, ao contrário do caso de tempo contínuo, **tem-se apenas N_0 coeficientes c_k distintos (i.e., N_0 harmônicas distintas), sendo o espectro periódico e com período N_0.**

Espectro do sinal

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Os coeficientes da série de Fourier podem ser expressos como

$$c_k = |c_k| e^{j\angle c_k}$$

onde

$\lvert c_k \rvert$	$\longrightarrow$	Espectro de magnitude (discreto)
$\angle c_k$	$\longrightarrow$	Espectro de fase (discreto)

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

O espectro é discreto já que é definido apenas em múltiplos (inteiros) de ω_0.

Espectro do sinal

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Para um sinal $x(n) \in \mathbb{R}$, os coeficientes da Série de Fourier satisfazem a seguinte relação:

$$c_k = c_{-k}^*$$

onde $(\,\cdot\,)^*$ denota o complexo conjugado. Consequentemente,

$$\boxed{|c_k| = |c_{-k}| \quad \text{e} \quad \angle c_k = -\angle c_{-k}}$$

Portanto,

- o espectro de magnitude é uma função par/simétrica em k; e
- o espectro de fase é uma função ímpar/anti-simétrica em k.

As demonstrações seguem como na transformada de Fourier de tempo contínuo.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplos

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Para

$$x(n) = \mathrm{sen}(0,1\pi n)$$

determine:

(a) Os coeficientes da série de Fourier.
(b) O espectro de magnitude do sinal.
(c) O espectro de fase do sinal.

Lembrete:

$$x(n) = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\omega_0 n}$$

e

$$c_k = \frac{1}{N_0} \sum_{n=<N_0>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}, \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resposta: Primeiramente, determina-se o período fundamental como

$$\omega_0 = 0,1\pi \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi m}{N_0} \quad \longrightarrow \quad \boxed{N_0 = 20}$$

Em seguida, obtém-se os coeficientes c_k (por inspeção) como

$$\boxed{c_k = \begin{cases} \dfrac{1}{2j} = \dfrac{e^{-j\pi/2}}{2}, & k = 1 \\ -\dfrac{1}{2j} = \dfrac{e^{j\pi/2}}{2}, & k = -1 \\ 0, & -\dfrac{N_0}{2} \leq k < \dfrac{N_0}{2} \end{cases}}$$

Portanto,

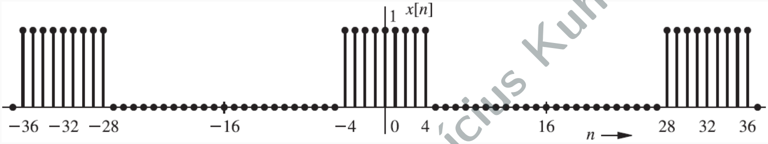
$$\boxed{|c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \angle c_{\pm 1} = \mp\frac{\pi}{2}, \quad -\frac{N_0}{2} \leq k < \frac{N_0}{2}}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Para



determine:

(a) Os coeficientes da série de Fourier.
(b) O espectro de magnitude do sinal.
(c) O espectro de fase do sinal.

Lembrete:

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplos

Resposta: Primeiramente, nota-se que

$$N_0 = 20 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0}$$

Então, os coeficientes podem ser obtidos como

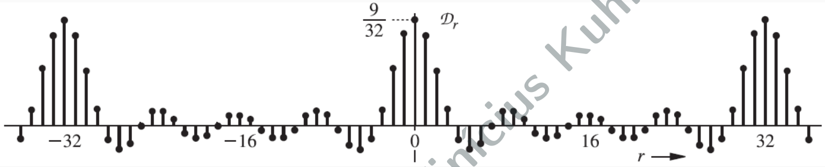
$$\begin{aligned}
c_k &= \frac{1}{N_0} \sum_{n=\langle N_0\rangle} x(n)e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{32} \sum_{n=-16}^{15} x(n)e^{-jk\omega_0 n} \\
&= \frac{1}{32} \sum_{n=-4}^{4} e^{-jk\omega_0 n} = \frac{1}{32} \frac{(e^{-j5k\omega_0} - e^{+j4k\omega_0})}{(e^{-jk\omega_0} - 1)}, \quad k \neq 0 \\
&= \frac{1}{32} \frac{1}{e^{-jk\omega_0/2}} \frac{(e^{-j5k\omega_0} - e^{+j4k\omega_0})}{(e^{-jk\omega_0/2} - e^{+jk\omega_0/2})} \\
&= \frac{1}{32} \frac{(e^{-j9k\omega_0/2} - e^{+j9k\omega_0/2})}{-2j\text{sen}(k\omega_0/2)} \quad \Rightarrow \boxed{c_k = \frac{1}{32} \frac{\text{sen}(9k\omega_0/2)}{\text{sen}(k\omega_0/2)}}
\end{aligned}$$

Aplicando L'Hopital, obtém-se $c_0 = 9/32$.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

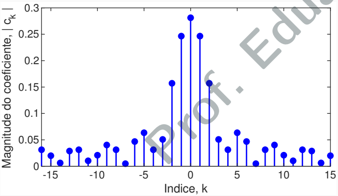
Exemplos

⇒ Coeficientes da série de Fourier:

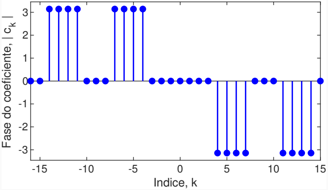


⇒ Decomposição módulo/fase:

Módulo



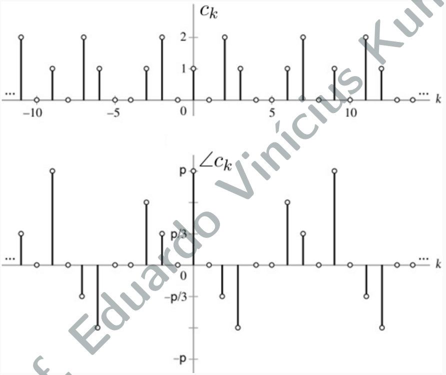
Fase



Lembrete: $c_k = |c_k| e^{j\angle c_k}$ e $e^{\pm jm\pi} = (-1)^{|m|}$.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine o sinal $x(n)$ considerando que



Lembrete:

$$\sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r - 1}, \quad r \neq 1$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180
Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Resposta: A partir da figura, verifica-se que

$$N_0 = 9 \quad \longrightarrow \quad \omega_0 = \frac{2\pi}{N_0} = \frac{2\pi}{9}$$

Logo, são necessários 9 coeficientes. Por exemplo,

$$\begin{cases} c_0 = e^{+j\pi} \\ c_1 = c_{-1}^* = 0 \\ c_2 = c_{-2}^* = 2e^{-j\pi/3} \\ c_3 = c_{-3}^* = e^{-j2\pi/3} \\ c_4 = c_{-4}^* = 0 \end{cases}$$

Então, substituindo os coeficientes em

$$x(n) = \sum_{k=<N_0>} c_k e^{jk\omega_0 n}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

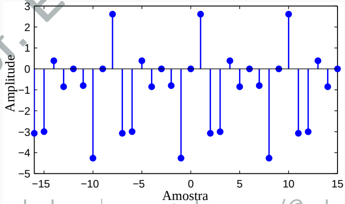
Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

é possível mostrar que

$$x(n) = \sum_{k=-4}^{4} c_k e^{jk\omega_0 n}$$
$$= e^{j\pi} + e^{j(3\omega_0 n - \frac{2\pi}{3})} + e^{-j(3\omega_0 n - \frac{2\pi}{3})} + 2e^{j(2\omega_0 n - \frac{\pi}{3})} + 2e^{-j(2\omega_0 n - \frac{\pi}{3})}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = -1 + 4\cos\left(2\omega_0 n - \frac{\pi}{3}\right) + 2\cos\left(3\omega_0 n - \frac{2\pi}{3}\right)}$$

Portanto, o sinal $x(n)$ pode ser ilustrado como



Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Propriedades

1) Linearidade

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow a_k \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow b_k$$

então

$$\boxed{c_1x_1(n) + c_2x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad c_1a_k + c_2b_k}$$

2) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{x(n-n_0) \quad \Longleftrightarrow \quad a_k e^{-jk(2\pi/N_0)n_0}}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

3) Deslocamento em frequência

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{e^{+jM(2\pi/N_0)n}x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{k-M}}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

4) Reversão no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad a_{-k}}$$

lattes.cnpq.br/2456654064380180

5) Conjugação

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{x^*(n) \quad \Longleftrightarrow \quad a^*_{-k}}$$

6) Multiplicação no tempo

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow a_k \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow b_k$$

então

$$\boxed{x_1(n)x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_{l=<N_0>} a_l b_{k-l}}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Demonstração: Levando em conta que

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} x(n) e^{-jk\omega_0 n}$$

e

$$x(n) \in \mathbb{R} \quad \longrightarrow \quad x(n) = x^*(n)$$

observa-se que

$$a_k = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} x^*(n) e^{-jk\omega_0 n} = \left[\frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} x(n) e^{-j(-k)\omega_0 n} \right]^*$$

Portanto,

$$\boxed{x^*(n) \quad \Longleftrightarrow \quad a^*_{-k}}$$

Créditos: Otávio dos Santos Bonaparte (2018/2).

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

7) Convolução periódica

$$\boxed{\sum_{k=<N_0>} x_1(k)x_2(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad N_0 a_k b_k}$$

8) Teorema de Parseval

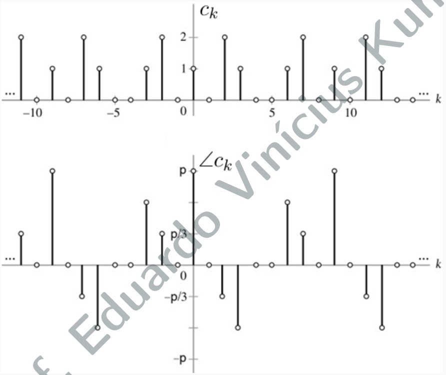
Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow a_k$$

então

$$\boxed{P_x = \frac{1}{N_0} \sum_{k=<N_0>} |x(n)|^2 = \sum_{k=<N_0>} |a_k|^2}$$

Exemplo: Determine a potência do sinal $x(n)$ dado que

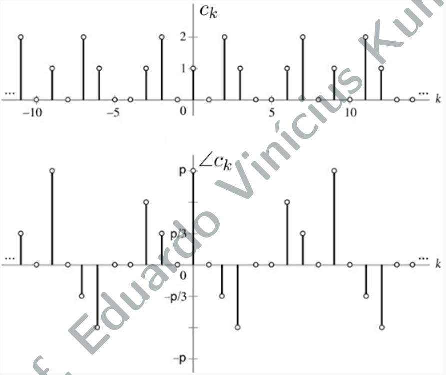


Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine a potência do sinal $x(n)$ dado que



Resposta: A partir do Teorema de Parseval, verifica-se que

$$P_x = \sum_{k=<N_0>} |c_k|^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{P_x = 11}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Transformada de Fourier para sinais de tempo discreto

Considerações iniciais

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- **A transformada de Fourier possibilita**
  - representar um sinal no domínio da frequência
  - determinar a resposta em frequência de um sistema
  - extrair com maior facilidade a informação de interesse
  - identificar componentes indesejados em um sinal
- Permite caracterizar o espectro de sinais (não periódicos) e/ou a resposta em frequência de sistemas de tempo discreto.
- **Do ponto de vista de engenharia, sinais e/ou sistemas podem ser melhor caracterizados no domínio da frequência.**
- **Existe uma relação intrínseca entre a transformada z e a transformada de Fourier.**

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Definições matemáticas

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Para um **sinal $x(n)$ determinístico e não periódico**, define-se

- Transformada direta de Fourier

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

- Transformada inversa de Fourier

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

Atenção: Note que existe uma diferença na notação adotada, i.e.,

TF de tempo discreto		TF de tempo contínuo
$X(e^{j\omega})$	$\Longrightarrow$ $\Longleftarrow$	$X(\omega)$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Definições matemáticas

Equação de análise

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Equação de síntese

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

Observações:

- O espectro $X(e^{j\omega})$ é periódico (período 2π).
- Por isso, considera-se um intervalo de integração finito na definição da transformada inversa de Fourier.
- Isso decorre do fato de que exponenciais discretas com frequência separada por 2π são idênticas.
- Note que a variável ω é continua; logo, o espectro $X(e^{j\omega})$ é uma função continua em ω.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Equação de análise

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}}$$

$\Longrightarrow$

$\Longleftarrow$

Equação de síntese

$$\boxed{x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega}$$

Observações:

- A *frequência angular* é definida como $\omega = 2\pi f$ (rad/s).
- A transformada (direta e inversa) pode ser representada por

$$X(e^{j\omega}) = \mathcal{F}[x(n)] \quad \text{e} \quad x(n) = \mathcal{F}^{-1}[X(e^{j\omega})]$$

- As funções $x(n)$ e $X(e^{j\omega})$ constituem um par de transformada de Fourier, i.e.,

$$x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})$$

- A função $X(e^{j\omega})$ mostra como a energia de $x(n)$ está distribuída no domínio da frequência.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Para verificar a periodicidade do espectro $X(e^{j\omega})$, observe que

$$\begin{aligned} X(e^{j(\omega+2\pi)}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega+2\pi)n} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}\underbrace{e^{-j2\pi n}}_{=1} \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \\ &= X(e^{j\omega}) \end{aligned}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Portanto, visto que o espectro $X(e^{j\omega})$ é uma função periódica e tem período 2π, **não é necessário apresentar o espectro para além da faixa de $(-\pi, \pi)$.**

Condição de existência

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

A partir da definição, verifica-se que

$$
\begin{aligned}
|X(e^{j\omega})| &= \left| \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \right| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)e^{-j\omega n}| \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| \underbrace{|e^{-j\omega n}|}_{=1} \\
&\leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty
\end{aligned}
$$

Portanto, a existência da transformada de Fourier de tempo discreto é garantida caso $x(n)$ seja absolutamente somável.

Espectro do sinal

Espectro do sinal

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

O espectro do sinal $x(n)$ pode ser decomposto como

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}}$$

onde

$$|X(e^{j\omega})| \longrightarrow \text{Espectro de magnitude}$$

$$\angle X(e^{j\omega}) \longrightarrow \text{Espectro de fase}$$

Os espectros de magnitude e de fase são funções contínuas em ω, uma vez que $\omega \in \mathbb{R}$.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Para um sinal $x(t) \in \mathbb{R}$, a transformada de Fourier de tempo discreto satisfaz

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})}$$

onde $(\,\cdot\,)^*$ denota o complexo conjugado. Como consequência,

$$\boxed{|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})| \quad \text{e} \quad \angle X(e^{-j\omega}) = -\angle X(e^{j\omega})}$$

Portanto,

- o espectro de magnitude é uma função par/simétrica de ω; e
- o espectro de fase é uma função ímpar/anti-simétrica de ω.

As demonstrações seguem como na transformada de Fourier de tempo contínuo.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplos

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \delta(n-k)$$

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \delta(n-k)$$

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(n-k)e^{-j\omega n} \\ &= e^{-j\omega k} \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{\delta(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-j\omega k}}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^n u(n)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^n u(n)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1-\alpha}, \quad |\alpha| < 1$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \gamma^n u(n) e^{-j\omega n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\gamma e^{-j\omega}\right)^n$$

$$= \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma e^{-j\omega}| < 1 \longrightarrow |\gamma| < 1$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Portanto, o seguinte par de transformada pode ser estabelecido

$$\boxed{\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1}$$

A partir disso, é possível decompor $X(e^{j\omega})$ como

$$X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})| e^{j\angle X(e^{j\omega})}$$

Para tal, reescreve-se $X(e^{j\omega})$ como

$$\begin{aligned} X(e^{j\omega}) &= \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}} \\ &= \frac{1}{1-\gamma[\cos(\omega) - j\mathrm{sen}(\omega)]} \\ &= \frac{1}{[1-\gamma\cos(\omega)] + j\gamma\mathrm{sen}(\omega)} \end{aligned}$$

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Logo,

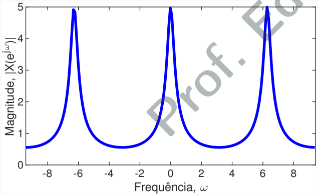
$$\boxed{|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{[1-\gamma\cos(\omega)]^2 + [\gamma \mathrm{sen}(\omega)]^2}}}$$

e

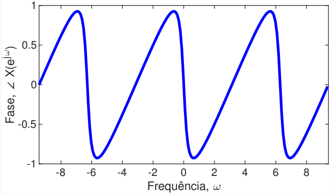
$$\boxed{\angle X(e^{j\omega}) = -\tan^{-1}\left[\frac{\gamma \mathrm{sen}(\omega)}{1-\gamma\cos(\omega)}\right]}$$

Graficamente, para $\gamma = 0,8$, obtém-se

$|X(e^{j\omega})|$



$\angle X(e^{j\omega})$



Note a periodicidade do espectro de magnitude/fase...

lattes.cnpq.br/2456654064380180

kuhn@utfpr.edu.br | youtube.com/@eduardokuhn87

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = u(n+4) - u(n-5)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r-1}, \quad r \neq 1$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = u(n+4) - u(n-5)$$

e especifique a condição de existência.

Lembrete:

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n} \quad \text{e} \quad \sum_{k=m}^{n} r^k = \frac{r^{n+1} - r^m}{r-1}, \quad r \neq 1$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} [u(n+4) - u(n-5)]e^{-j\omega n} = \sum_{n=-4}^{4} (e^{-j\omega})^n$$

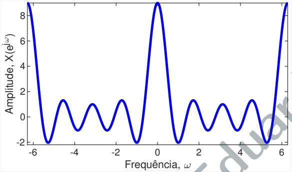
$$= \frac{e^{-j5\omega} - e^{j4\omega}}{e^{-j\omega} - 1} = \frac{(e^{-j9\omega/2} - e^{j9\omega/2})}{(e^{-j\omega/2} - e^{+j\omega/2})} = \frac{\operatorname{sen}(4,5\omega)}{\operatorname{sen}(0,5\omega)}$$

Exemplos

Portanto, é possível estabelecer que

$$\boxed{u(n+4) - u(n-5) \iff \frac{\operatorname{sen}(4,5\omega)}{\operatorname{sen}(0,5\omega)}}$$

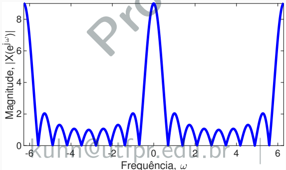
⇒ **Espectro do sinal:**

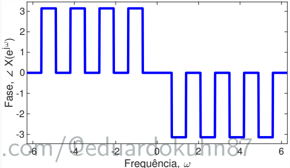


Lembrete:

$$e^{\pm jk\pi} = \begin{cases} +1, & k \text{ par} \\ -1, & k \text{ ímpar} \end{cases}$$

⇒ **Decomposição do espectro em módulo/fase:**





Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180
kuhn@utfpr.edu.br | youtube.com/@eduardokuhn87

Alguns outros pares conhecidos

$\delta(n-k)$	$e^{-jk\omega}$, $k \in \mathbb{Z}$
$\gamma^n u(n)$	$\dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\gamma}$, $\lvert\gamma\rvert < 1$
$\gamma^n u(-n-1)$	$\dfrac{e^{j\omega}}{e^{j\omega}-\gamma}$, $\lvert\gamma\rvert > 1$
$n\gamma^n u(n)$	$\dfrac{\gamma e^{j\omega}}{(e^{j\omega}-\gamma)^2}$, $\lvert\gamma\rvert < 1$
$\gamma^n \cos(\omega_0 n + \theta) u(n)$	$\dfrac{e^{j\omega}[e^{j\omega}\cos\theta - \gamma\cos(\omega_0-\theta)]}{e^{2j\omega} - 2\gamma\cos\omega_0 e^{j\omega} + \gamma^2}$, $\lvert\gamma\rvert < 1$
$u(n) - u(n-M)$	$\dfrac{\mathrm{sen}(M\omega/2)}{\mathrm{sen}(\omega/2)} e^{-j\omega(M-1)/2}$
$\dfrac{\omega_c}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_c n)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega-2\pi k}{2\omega_c}\right)$, $\omega_c \le \pi$

Uma lista expandida de pares está disponível em B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 ⟶ (pp. 751)

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_\mathrm{c}}\right), \quad \omega_\mathrm{c} = \frac{\pi}{4}$$

Lembrete:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \text{e} \quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right), \quad \omega_c = \frac{\pi}{4}$$

Lembrete:

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega \quad \text{e} \quad \int e^{ax}dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi/4}^{\pi/4} e^{j\omega n}d\omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\frac{1}{jn}(e^{jn\pi/4} - e^{-jn\pi/4}) = \frac{1}{\pi n}\operatorname{sen}\left(\frac{n\pi}{4}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{x(n) = \frac{1}{4}\operatorname{sinc}\left(\frac{n\pi}{4}\right)}$$

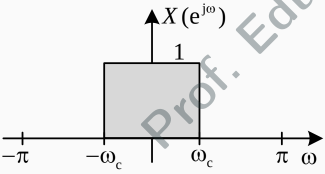
Exemplos

Portanto, é possível concluir que

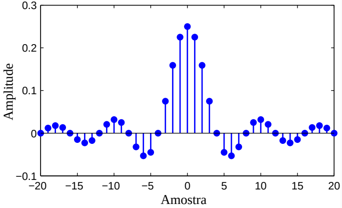
$$\boxed{\frac{\omega_c}{\pi}\operatorname{sinc}(n\omega_c) \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_c}\right)}$$

$\Rightarrow$ **Representação do sinal no domínio tempo/frequência:**

$X(e^{j\omega})$



$x(n)$



Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Exemplo: Determine a transformada de Fourier (inversa) de tempo discreto para

$$X(e^{j\omega}) = 1$$

Resposta: A partir da definição, obtém-se que

$$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega$$

Então,

$$x(n) = \begin{cases} \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} e^{j\omega n}d\omega = 0, & n \neq 0 \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} d\omega = 1, & n = 0 \end{cases}$$

Portanto,

$$\boxed{x(n) = \delta(n)}$$

Propriedades

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

1) Linearidade

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{c_1 x_1(n) + c_2 x_2(n) \quad \Longleftrightarrow c_1 X_1(e^{j\omega}) + c_2 X_2(e^{j\omega})}$$

2) Conjugação

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x^*(n) \Longleftrightarrow X^*(e^{-j\omega})}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

3) Multiplicação por n

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{nx(n) \quad \Longleftrightarrow \quad j\frac{d}{d\omega}X(e^{j\omega})}$$

4) Reversão no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\omega})}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^{|n|}, \quad |\gamma| < 1$$

Lembrete:

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1 \quad \text{e} \quad x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\omega})$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de tempo discreto para

$$x(n) = \gamma^{|n|}, \quad |\gamma| < 1$$

Lembrete:

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1 \quad \text{e} \quad x(-n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{-j\omega})$$

Resposta: Primeiramente, observe que

$$x(n) = \gamma^{|n|} \quad \longrightarrow \quad x(n) = \gamma^n u(n) + \gamma^{-n} u(-n) - \delta(n)$$

Logo,

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}} + \frac{1}{1-\gamma e^{j\omega}} - 1 = \frac{1-\gamma^2}{1-\gamma(e^{j\omega}+e^{-j\omega})+\gamma^2}$$

$$\Rightarrow \boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos(\omega)+\gamma^2}}$$

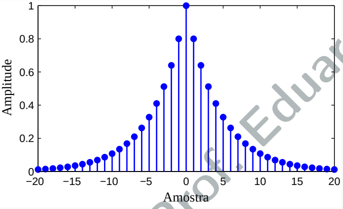
Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Portanto, é possível concluir que

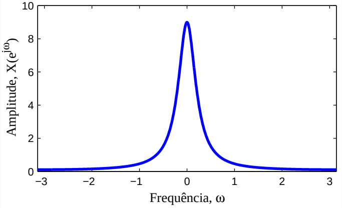
$$\boxed{\gamma^{|n|} \quad \longrightarrow \quad \frac{1-\gamma^2}{1-2\gamma\cos(\omega)+\gamma^2}}$$

$\Rightarrow$ **Representação do sinal no domínio tempo/frequência:**

$x(n)$



$X(e^{j\omega})$



A partir das figuras, observe que

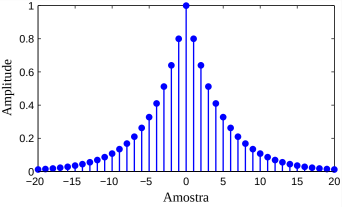
- $x(n)$ par $\Rightarrow X(e^{j\omega})$ real
- $x(n)$ real $\Rightarrow |X(e^{j\omega})|$ par

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180
kuhn@utfpr.edu.br | youtube.com/@eduardokuhn87

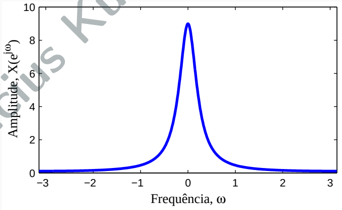
Exemplos

⇒ Representação do sinal no domínio tempo/frequência:

$x(n)$

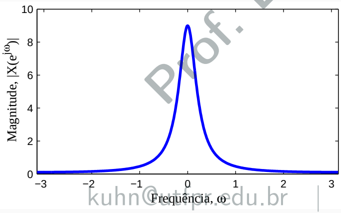


$X(e^{j\omega})$

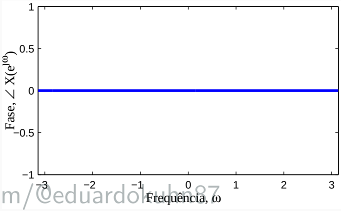


⇒ Decomposição módulo/fase:

$|X(e^{j\omega})|$



$\angle X(e^{j\omega})$



Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

5) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega}), \quad k \in \mathbb{Z}$$

então

$$\boxed{x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})e^{-jk\omega}}$$

Deslocamento no tempo provoca atraso de fase linear.

6) Deslocamento na frequência

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{e^{j\omega_0 n}x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega-\omega_0)})}$$

É realizada uma modulação do sinal.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
Prof. Eduardo Vinicius Kuhn
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Demonstração: Para $y(n) = x(n-k)$, observa-se que

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n-k)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(l)e^{-j\omega(l+k)} \\
&= X(e^{j\omega})e^{-j\omega k}
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\boxed{x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})e^{-jk\omega}}$$

Créditos: Eduardo Eugenio Rodrigues Sartor (2018/2).

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Demonstração: Para $y(n) = x(n)e^{j\omega_0 n}$, observa-se que

$$
\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega_0 n}e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j(\omega-\omega_0)n} \\
&= X(e^{j(\omega-\omega_0)})
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\boxed{e^{j\omega_0 n}x(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j(\omega-\omega_0)})}
$$

Créditos: Elias Junior Biondo (2018/2).

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de

$$x(n) = \mathrm{sinc}(\omega_0 n)\cos(\omega_\mathrm{c} n), \quad \omega_\mathrm{c} > \omega_0$$

Lembrete:

$$\frac{\omega_0}{\pi}\mathrm{sinc}(\omega_0 n) \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathrm{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_0}\right)$$

$$e^{j\omega_\mathrm{c} n} x(n) \iff X(e^{j(\omega-\omega_\mathrm{c})})$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de

$$x(n) = \operatorname{sinc}(\omega_0 n)\cos(\omega_c n), \quad \omega_c > \omega_0$$

Lembrete:

$$\frac{\omega_0}{\pi}\operatorname{sinc}(\omega_0 n) \iff \sum_{k=-\infty}^{\infty} \operatorname{rect}\left(\frac{\omega - 2\pi k}{2\omega_0}\right)$$

$$e^{j\omega_c n}x(n) \iff X(e^{j(\omega-\omega_c)})$$

Resposta: Como

$$x(n) = \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(\omega_0 n)e^{j\omega_c n} + \frac{1}{2}\operatorname{sinc}(\omega_0 n)e^{-j\omega_c n}$$

obtém-se

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{\pi}{2\omega_0}\operatorname{rect}\left(\frac{\omega - \omega_c}{2\omega_0}\right) + \frac{\pi}{2\omega_0}\operatorname{rect}\left(\frac{\omega + \omega_c}{2\omega_0}\right)}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

7) Convolução no tempo

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})}$$

8) Convolução na frequência

Considerando

$$x_1(n) \Longleftrightarrow X_1(e^{j\omega}) \quad \text{e} \quad x_2(n) \Longleftrightarrow X_2(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{x_1(n)x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}X_1(e^{j\omega}) * X_2(e^{j\omega})}$$

Atenção: Aqui, considera-se a convolução periódica/circular.

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn
Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Demonstração: A partir de

$$y(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)$$

verifica-se que

$$Y(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)x_2(n-k)\right]e^{-j\omega n}$$

Então, fazendo $l = n - k$,

$$Y(e^{j\omega}) = \left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k)e^{-j\omega k}\right]\left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} x_2(l)e^{-j\omega l}\right]$$

Portanto,

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})}$$

Créditos: Mateus Zeferino de Carvalho (2018/2).

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Demonstração: Para $y(n) = x_1(n)x_2(n)$, verifica-se que

$$\begin{aligned}
Y(e^{j\omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n)e^{-j\omega n} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x_1(n)x_2(n)e^{-j\omega n} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})e^{j\theta n}d\theta\right] x_2(n)e^{-j\omega n} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})\left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} x_2(n)e^{-j(\omega-\theta)n}\right] d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{x_1(n)x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} X_1(e^{j\theta})X_2(e^{j(\omega-\theta)})d\theta}$$

Créditos: Matheus Bogo Polidorio (2018/2).

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Considerando um sistema descrito pela seguinte relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n)$$

determine $y(n)$ quando $x(n) = (0,8)^n u(n)$.

Lembrete:

$$x(n-k) \quad \Longleftrightarrow \quad X(e^{j\omega})e^{-jk\omega}$$

$$x_1(n) * x_2(n) \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(e^{j\omega})X_2(e^{j\omega})$$

$$\gamma^n u(n) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{1-\gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1$$

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Resposta: Primeiramente, observe que

$$Y(e^{j\omega}) - 0,5Y(e^{j\omega})e^{-j\omega} = X(e^{j\omega})$$
$$Y(e^{j\omega})(1 - 0,5e^{-j\omega}) = X(e^{j\omega})$$

o que resulta em

$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})} = \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}}}$$

Além disso, a partir das tabelas, tem-se que

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$$

Logo,

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})X(e^{j\omega})$$
$$= \frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} \frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Então, realizando a expansão em frações parciais modificada, i.e.,

$$\frac{Y(e^{j\omega})}{e^{j\omega}} = -\frac{5}{3}\frac{1}{e^{j\omega} - 0,5} + \frac{8}{3}\frac{1}{e^{j\omega} - 0,8}$$

tem-se que

$$Y(e^{j\omega}) = -\frac{5}{3}\frac{1}{1 - 0,5e^{-j\omega}} + \frac{8}{3}\frac{1}{1 - 0,8e^{-j\omega}}$$

Finalmente, levando em conta que

$$\gamma^n u(n) \Longleftrightarrow \frac{1}{1 - \gamma e^{-j\omega}}, \quad |\gamma| < 1$$

a saída do sistema é obtida como

$$\boxed{y(n) = \left[-\frac{5}{3}(0,5)^n + \frac{8}{3}(0,8)^n\right] u(n)}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

9) Teorema de Rayleigh

Considerando

$$x(n) \Longleftrightarrow X(e^{j\omega})$$

então

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Uma tabela contendo todas as propriedades é apresentada em B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 765 e 766).

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a energia de

$$x(n) = \operatorname{sinc}(\omega_c n), \quad \omega_c < \pi.$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Transformada de Fourier: Propriedades

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Exemplo: Determine a energia de

$$x(n) = \mathrm{sinc}(\omega_c n), \quad \omega_c < \pi.$$

Resposta: Dado que

$$\mathrm{sinc}(\omega_c n) \iff \frac{\pi}{\omega_c}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right), \quad |\omega| \leq \pi$$

verifica-se, a partir do Teorema de Rayleigh, que

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{2\pi}\int_{2\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\frac{\pi}{\omega_c}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right)\right|^2 d\omega \\ &= \frac{\pi}{2\omega_c^2}\int_{-\omega_c}^{\omega_c} d\omega \implies \boxed{E_x = \frac{\pi}{\omega_c}} \end{aligned}$$

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Relação entre a transformada z
e a transformada de Fourier

Relação entre a transformada z e a transformada de Fourier

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Primeiramente, é importante lembrar que

$$z = re^{j\omega}$$

A partir disso, observa-se que

$$z\Big|_{r=1} \longrightarrow e^{j\omega}$$

Logo, a transformada z se reduz a transformada de Fourier fazendo

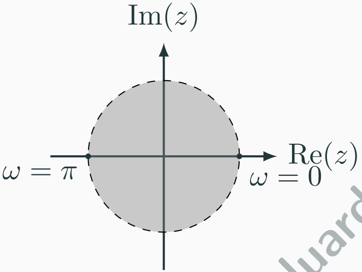
$$\boxed{X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = X(e^{j\omega})}$$

A RDC de $X(z)$ deve incluir o círculo de raio unitário.

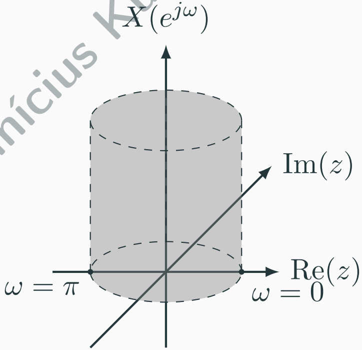
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

⇒ **Plano z:**



⇒ **Resposta em frequência:**

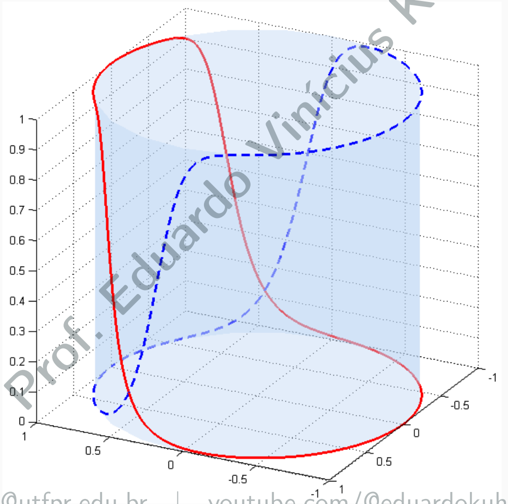


Para detalhes, veja A. Antoniou, *Digital Signal Processing: Signals, systems, and filters*, New York, NY: McGraw-Hill, 2006 $\longrightarrow$ (Sec. 5.5).

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Resposta em frequência de um filtro

passa-baixas *versus* **passa-alta**.



Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Resumo e discussão

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

- A Série/Transformada de Fourier de tempo discreto permite caracterizar sinais/sistemas de tempo discreto no domínio da frequência.
- **Série de Fourier:**
  - Sinais de tempo discreto **periódicos**.
  - O **espectro é discreto, periódico** e tem período N_0.
- **Transformada de Fourier:**
  - Sinais de tempo discreto **não periódicos**.
  - O **espectro é contínuo, periódico** e tem período 2π.
- A transformada de Fourier de tempo discreto é um caso particular da transformada z.
- É possível relacionar a posição dos polos com a resposta em frequência de um sistema.

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Para a próxima aula

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 775)

Até a próxima aula... =)

lattes.cnpq.br/2456654064380180