Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinícius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

UTFPR UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Transformada de Fourier

Considerações iniciais

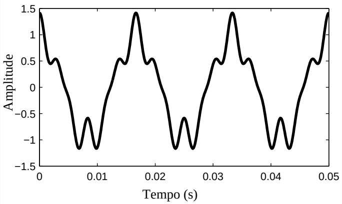
Objetivos:

- Introduzir a transformada de Fourier a fim de facilitar a análise de sinais e sistemas de tempo contínuo.
- Apresentar as propriedades da transformada de Fourier.
- Entender como o espectro do sinal é modificado ao passar por um dado sistema.
- Resolver equações diferenciais (de forma simplificada).
- Aqui, refere-se como "transformada de Fourier" a "Transformada de Fourier de tempo contínuo"!!!

Considerações iniciais

Exemplo:

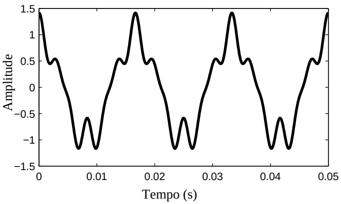
Domínio do tempo



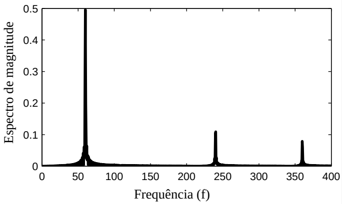
Considerações iniciais

Exemplo:

Domínio do tempo



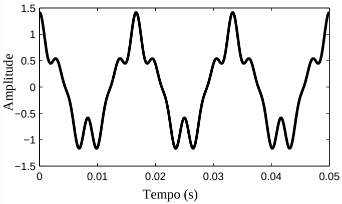
Domínio da frequência



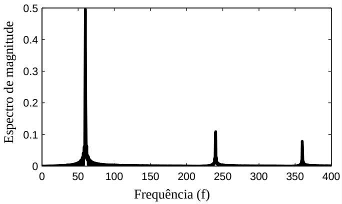
Considerações iniciais

Exemplo:

Domínio do tempo



Domínio da frequência

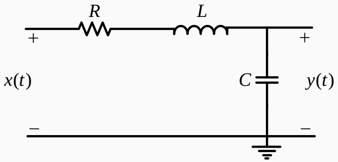


No domínio do tempo, o sinal pode ser caracterizado por

$$\boxed{x(t) = \cos(\underbrace{2\pi 60}_{\omega_1} t) + 0,25\cos(\underbrace{2\pi 240}_{\omega_2} t) + 0,15\cos(\underbrace{2\pi 360}_{\omega_3} t)}$$

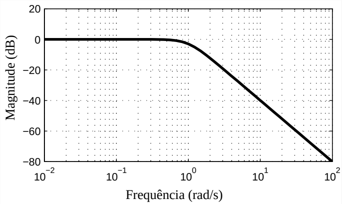
A transformada de Fourier permite identificar a amplitude das várias componentes de frequência presentes em um dado sinal.

Exemplo: Filtros seletores (práticos)

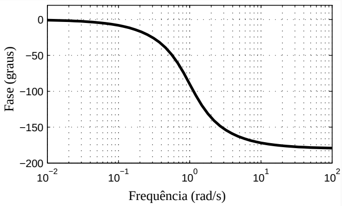


A partir disso, a resposta em frequência do circuito é obtida como

Espectro de magnitude (dB)



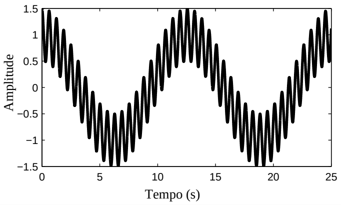
Espectro de fase (graus)



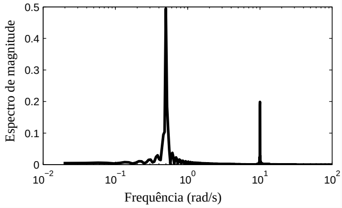
Considerações iniciais

Entrada:

Domínio do tempo

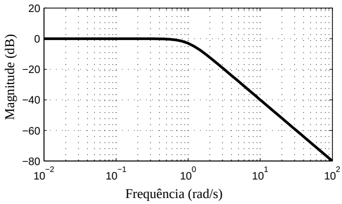


Espectro de magnitude

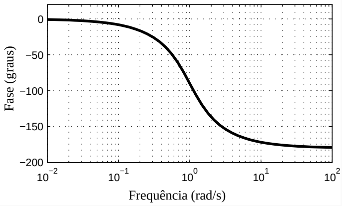


Sistema:

Espectro de magnitude (dB)



Fase (graus)



Como será o sinal de saída?

Considerações iniciais

Considere que a entrada é dada por

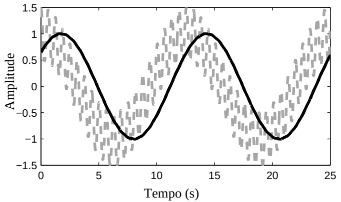
$$x(t) = \cos(0,5t) + 0,5\cos(10t)$$

Consequentemente, o sinal de saída do filtro é obtido como

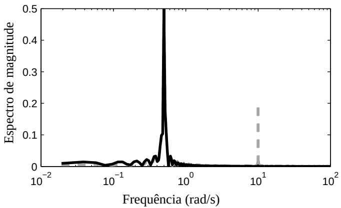
$$\boxed{x(t) = \cos(0.5t + \phi_1) + \frac{0,5}{100}\cos(10t + \phi_2)}$$

Portanto, o sinal filtrado $y(t)$ pode ser representado por

Domínio do tempo



Espectro de magnitude



***Nota:** $\phi_1 \approx 50$ e $\phi_2 \approx 172$.

Considerações iniciais

- **A transformada de Fourier possibilita:**
  - representar um sinal no domínio da frequência
  - determinar a resposta em frequência de um sistema
  - extrair com maior facilidade a informação de interesse
  - identificar componentes indesejados em um sinal
- **Do ponto de vista de engenharia, sinais e/ou sistemas podem ser melhor caracterizados no domínio da frequência.**
- **Possibilita um melhor entendimento de como um sinal é modificado ao passar através de um dado sistema.**

Definições matemáticas

Definições matemáticas

Para um sinal $x(t)$ determinístico não periódico, define-se

- Transformada direta de Fourier

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt}$$

- Transformada inversa de Fourier

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega}$$

sendo $j = \sqrt{-1}$ e $\omega \in \mathbb{R}$, a frequência (rad/s).

A transformada de Fourier possibilita descrever um sinal $x(t)$ como uma "soma infinita" de exponenciais complexas.

Definições matemáticas

Equação de análise

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$\Longrightarrow \qquad \Longleftarrow$$

Equação de síntese

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Observações:

- Convenciona-se a letra minúscula $x(t)$ para indicar o domínio do tempo e maiúscula $X(\omega)$, para o domínio da frequência.
- A transformada de Fourier permite tratar sinais causais e não causais, visto que $-\infty < t < \infty$.
- As funções $x(t)$ e $X(\omega)$ constituem um par de transformada de Fourier, i.e.,

$$\boxed{x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega)}$$

- A função $X(\omega)$ mostra como a energia de $x(t)$ está distribuída no domínio da frequência.

Definições matemáticas

Equação de análise

$$\boxed{X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt}$$

$$\Longrightarrow \quad \Longleftarrow$$

Equação de síntese

$$\boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega}$$

Observações:

- A frequência f está relacionada com a *frequência angular* através de $\omega = 2\pi f$ (rad/s).
- A transformada de Fourier da resposta ao impulso $h(t)$ resulta na resposta em frequência do sistema, i.e.,

$$\boxed{h(t) \quad \Longleftrightarrow \quad H(\omega)}$$

- As transformadas direta e inversa podem ser representadas por

$$X(\omega) = \mathcal{F}[x(t)] \quad \text{e} \quad x(t) = \mathcal{F}^{-1}[X(\omega)]$$

onde $\mathcal{F}[\,.\,]$ e $\mathcal{F}^{-1}[\,.\,]$ denotam operadores lineares.

Condições de existência

Condições de existência

A existência da transformada de Fourier de um sinal é garantida se as seguintes condições são satisfeitas (condições de Dirichlet):

1) A função $x(t)$ tem um número finito de máximos e mínimos
2) A função $x(t)$ tem um número finito de descontinuidades
3) A função $x(t)$ é absolutamente integrável

Na prática, a transformada de Fourier existe para todos os sinais de energia, os quais satisfazem

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty.$$

Portanto, a realizabilidade física de um sinal/sistema é uma condição suficiente para a existência da transformada de Fourier.

Existem funções não absolutamente integráveis para as quais podemos determinar $X(\omega)$.

Espectro do sinal

Espectro do sinal

A transformada de Fourier $X(\omega)$ de um sinal é geralmente expressa como

$$X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$$

onde

$$|X(\omega)| \quad \longrightarrow \quad \text{Espectro de magnitude contínuo}$$

e

$$\theta(\omega) \quad \longrightarrow \quad \text{Espectro de fase contínuo}$$

O espectro de magnitude e fase é contínuo uma vez $X(\omega)$ é uma função contínua de ω .

Espectro do sinal

Para um sinal $x(t)$ de valores reais, a transformada de Fourier satisfaz

$$X(-\omega) = X^*(\omega)$$

onde $(\,\cdot\,)^*$ denota o operador complexo conjugado. Como consequência, tem-se que

$$\boxed{|X(-\omega)| = |X(\omega)| \qquad \text{e} \qquad \theta(-\omega) = -\theta(\omega)}$$

Portanto,

- o espectro de magnitude é uma função *par/simétrica* de ω; e
- o espectro de fase é uma função *ímpar/anti-simétrica* de ω.

Espectro do sinal

Demonstração #1: Para $x(t) \in \mathbb{R}$, observa-se que

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{+j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(-\omega)t}dt \quad \Rightarrow \boxed{X^*(\omega) = X(-\omega)} \end{aligned}$$

Demonstração #2: Como $X^*(\omega) = X(-\omega)$, verifica-se que

$$|X(\omega)| = \sqrt{X^*(\omega)X(\omega)} = \sqrt{X(\omega)X(-\omega)}$$

e

$$|X(-\omega)| = \sqrt{X(-\omega)X^*(-\omega)} = \sqrt{X(\omega)X(-\omega)}$$

Dessa forma,

$$\boxed{|X(\omega)| = |X(-\omega)|}$$

Espectro do sinal

Demonstração #3: Como $X^*(\omega) = X(-\omega)$, verifica-se que

$$
\begin{aligned}
X(-\omega) &= |X(\omega)|e^{+j\theta(\omega)}\Big|_{\omega=-\omega} \\
&= |X(-\omega)|e^{+j\theta(-\omega)} \\
&= |X(\omega)|e^{+j\theta(-\omega)}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
X(-\omega) &= X^*(\omega) \\
&= [|X(\omega)|e^{+j\theta(\omega)}]^* \\
&= |X(-\omega)|^* e^{-j\theta(\omega)} \\
&= |X(\omega)|e^{-j\theta(\omega)}
\end{aligned}
$$

Dessa forma,

$$\boxed{\theta(-\omega) = -\theta(\omega)}$$

Relação da transformada de Fourier com a transformada de Laplace

Relação com a transformada de Laplace

Lembrando, a transformada de Laplace é definida como

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st}dt, \quad \text{onde} \quad s = \sigma + j\omega$$

Logo,

$$\mathcal{L}[x(t)] = \mathcal{F}[x(t)e^{-\sigma t}]$$

consequentemente,

$$\boxed{X(s)\big|_{s=j\omega} = X(\omega)}$$

Importante: $X(\omega)$ pode ser obtido de $X(s)$ somente quando o eixo $s = j\omega \in \mathrm{RC}$...

Relação com a transformada de Laplace

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = e^{-at}\,u(t),\; a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+a},\, \mathrm{Re}(s) > -a$$

Relação com a transformada de Laplace

Exemplo: Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad X(s) = \frac{1}{s+a},\ \mathrm{Re}(s) > -a$$

Resposta: Levando em conta que $s = j\omega \in \mathrm{RC}$, obtém-se

$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}}$$

Logo,

$$|X(\omega)| = \sqrt{X(\omega)X^*(\omega)} \quad \Rightarrow \boxed{|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}$$

e

$$\theta(\omega) = -\arctan\left\{\frac{\mathrm{Im}[X(\omega)]}{\mathrm{Re}[X(\omega)]}\right\} \quad \Rightarrow \boxed{\theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

Relação com a transformada de Laplace

Portanto,

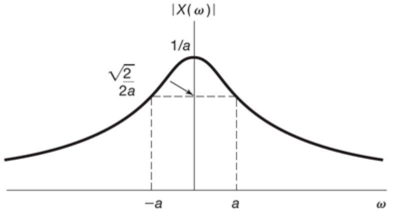
$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$
$$= |X(\omega)| e^{+j\theta(\omega)}$$

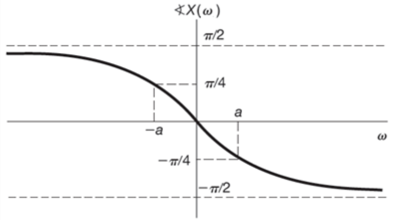
onde

$$|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}$$

e

$$\theta(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



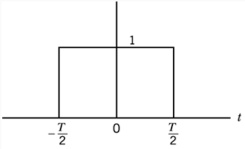


Exemplos

Exemplo: Pulso retangular

1) Determine a transformada de Fourier de

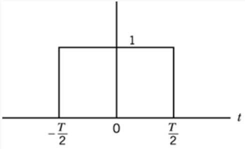
$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & -\dfrac{T}{2} < t < \dfrac{T}{2} \\ 0, & |t| \geq \dfrac{T}{2} \end{cases}$$



Exemplo: Pulso retangular

1) Determine a transformada de Fourier de

$$\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) = \begin{cases} 1, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| \geq \frac{T}{2} \end{cases}$$



Resposta: Visto que a transformada de Fourier é dada por

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

tem-se

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{2}{\omega}\text{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemplo: Pulso retangular

Então, utilizando a definição da função *sinc*, i.e.,

$$\text{sinc}(\lambda) = \frac{\text{sen}(\lambda)}{\lambda}$$

obtém-se

$$X(\omega) = T\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

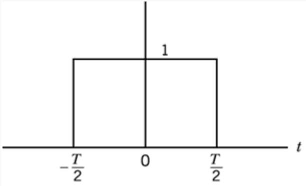
Portanto, o seguinte par de transformada de Fourier pode ser estabelecido:

$$\boxed{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\,\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

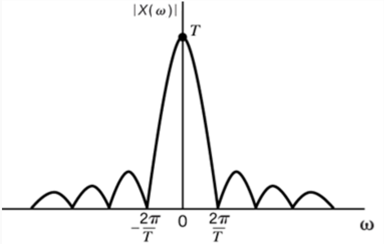
O espectro de um pulso retangular é uma função *sinc* no domínio da frequência.

Exemplo: Pulso retangular

Domínio do tempo $x(t)$ **Domínio da frequência $|X(\omega)|$**



$\Longleftrightarrow$



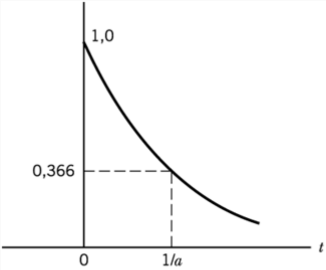
Observações:

- O espectro de $x(t)$ compreende de $-\infty < \omega < \infty$
- $X(\omega)$ tem máximo na origem e nulos em múltiplos de $2\pi/T$
- A largura do lóbulo principal de $X(\omega)$ diminui para $T \to \infty$
- Como $x(t)$ é simétrica (par), $X(\omega)$ é real!
- Como $x(t)$ é real, $|X(\omega)|$ é simétrica (par)!

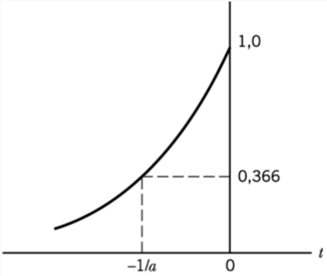
Exemplo: Pulso exponencial

2) Determine a transformada de Fourier de

$x(t) = e^{-at}u(t),\ a > 0$



$x(t) = e^{at}u(-t),\ a > 0$



Lembrete: A função degrau unitário é definida como

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Exemplo: Pulso exponencial

Para $x(t) = e^{-at}u(t)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt &\longleftarrow \text{Equação de análise} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-j\omega t}dt &\longleftarrow \text{Substituindo } x(t) \\
&= \int_{0}^{\infty} e^{-at}e^{-j\omega t}dt &\longleftarrow \text{Ajustando os limites} \\
&= -\frac{e^{-(a+j\omega)t}}{(a+j\omega)}\Bigg|_{t=0}^{t=\infty} &\longleftarrow \text{Resolvendo a integral} \\
&= \frac{1}{a+j\omega}. &\longleftarrow \text{Após a simplificação}
\end{aligned}
$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

$$\boxed{e^{-at}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a+j\omega}}$$

Exemplo: Pulso exponencial

Para $x(t) = e^{at}u(-t)$, tem-se

$$\begin{aligned}
X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \quad &\longleftarrow \text{Equação de análise} \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{at}e^{-j\omega t}dt \quad &\longleftarrow \text{Substituindo } x(t) \\
&= \left. \frac{e^{(a-j\omega)t}}{(a-j\omega)} \right|_{t=-\infty}^{t=0} \quad &\longleftarrow \text{Resolvendo a integral} \\
&= \frac{1}{a-j\omega} \quad &\longleftarrow \text{Após simplificação}
\end{aligned}$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

$$\boxed{e^{at}u(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a-j\omega}}$$

Exemplo: Pulso exponencial

$$\boxed{e^{-at}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a+j\omega}} \quad \text{e} \quad \boxed{e^{at}u(-t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a-j\omega}}$$

Espectro de magnitude:

$$\boxed{|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2+\omega^2}}}$$

Espectro de fase:

$$\boxed{\theta(\omega) = \mp \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

Observações:

- Como $e^{-at}u(t)$ e $e^{at}u(-t)$ são funções assimétricas no tempo, a transformada de Fourier assume valor complexo.
- A partir dos pares obtidos, verifica-se que ambas as exponenciais apresentam o mesmo espectro de magnitude.
- Já o espectro da fase de um é o negativo do espectro do outro.

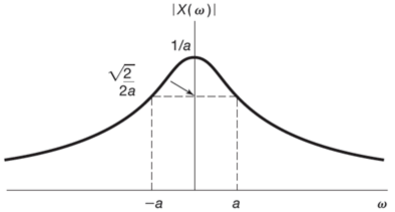
Exemplo: Pulso exponencial

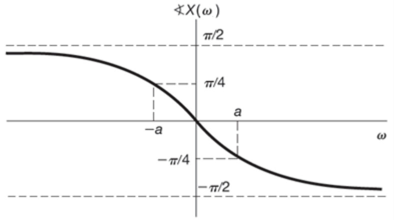
Espectro de magnitude

$$\boxed{|X(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{a^2 + \omega^2}}}$$

Espectro de fase

$$\boxed{\theta(\omega) = \mp \arctan\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$





Observações:

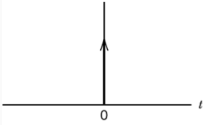
- $X(\omega) = |X(\omega)| e^{j\theta(\omega)}$
- $|X(-\omega)| = |X(\omega)| \longrightarrow$ função par
- $\theta(-\omega) = -\theta(\omega) \longrightarrow$ função ímpar

Funções elementares

1) A função delta é definida através de

(a) $\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$

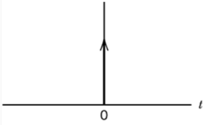


Funções elementares

1) A função delta é definida através de

(a) $\delta(t) = 0, \qquad t \neq 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1$



A partir da definição da transformada de Fourier, tem-se

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)e^{-j\omega t}dt \quad \Rightarrow \boxed{X(\omega) = 1}$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

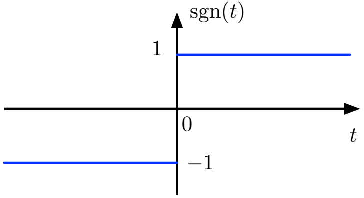
$$\boxed{\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1}$$

Observações:

- Sinal limitado no tempo $\longrightarrow$ amplo na frequência
- O espectro da função delta compreende $-\infty < \omega < \infty$
- Refletir sobre o pulso retangular considerando $T \to 0$

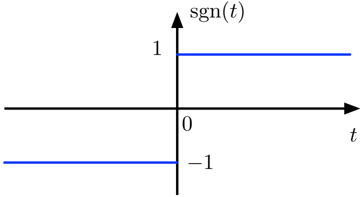
2) A função sinal (algébrico) é definida como

$$x(t) = \text{sgn}(t)$$
$$= \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



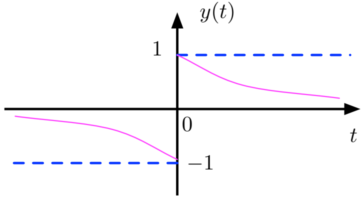
2) A função sinal (algébrico) é definida como

$$x(t) = \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} +1, & t > 0 \\ -1, & t < 0 \end{cases}$$



Para determinar a transformada de Fourier da função sinal, considere inicialmente que

$$\operatorname{sgn}(t) = \lim_{a \to 0} [-e^{at} u(-t) + e^{-at} u(t)] = \lim_{a \to 0} y(t), \quad a \geq 0$$



Então, da definição da transformada de Fourier, obtém-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= -\int_{-\infty}^{0} e^{at} e^{-j\omega t} dt + \int_{0}^{\infty} e^{-at} e^{-j\omega t} dt \\ &= -\frac{1}{a - j\omega} + \frac{1}{a + j\omega} \\ &= \frac{-2j\omega}{a^2 + \omega^2} \end{aligned}$$

Consequentemente,

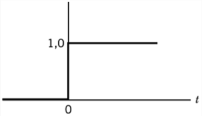
$$\begin{aligned} X(\omega) &= \lim_{a \to 0} Y(\omega) \\ &= \frac{2}{j\omega} \end{aligned}$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

$$\boxed{\mathrm{sgn}(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2}{j\omega}}$$

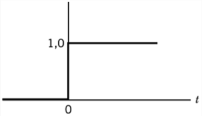
3) A função degrau unitário é definida como

$$x(t) = u(t)$$



3) A função degrau unitário é definida como

$$x(t) = u(t)$$



Para determinar a transformada de Fourier de $u(t)$, observe que

$$u(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}(t)$$

Então, como

$$\boxed{1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega)}$$

tem-se

$$X(\omega) = \pi\,\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

$$\boxed{u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}}$$

4) A função delta (na frequência) é definida como

(a) $\delta(\omega) = 0, \qquad \omega \neq 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$

4) A função delta (na frequência) é definida como

(a) $\delta(\omega) = 0, \qquad \omega \neq 0$

(b) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) d\omega = 1$

A partir da definição da transformada inversa de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega) e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \end{aligned}$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

$$\boxed{1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega)}$$

5) Uma função exponencial complexa pode ser definida como

$$x(t) = e^{+j\omega_0 t}$$

5) Uma função exponencial complexa pode ser definida como

$$x(t) = e^{+j\omega_0 t}$$

A partir da definição da transformada de Fourier, tem-se

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{+j\omega_0 t}e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(\omega-\omega_0)t}dt \\ &= 2\pi\delta(\omega-\omega_0) \end{aligned}$$

Portanto, é possível estabelecer o seguinte par de transformada:

$$\boxed{e^{+j\omega_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega-\omega_0)}$$

Considerações sobre a função delta de Dirac

É possível estabelecer algumas relações importantes a partir de

$$\boxed{1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega)}$$

e

$$\boxed{e^{+j\omega_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

a saber:

1) O nível DC é representado por $2\pi\delta(\omega)$.

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega t} dt = 2\pi\delta(\omega)$ $\longleftarrow$ (Relação interessante)

3) $\cos(\omega_0 t) \Longleftrightarrow \pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$

4) $\mathrm{sen}(\omega_0 t) \Longleftrightarrow \dfrac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$

Propriedades

Propriedades

Para entender melhor o efeito das operações realizadas sobre $x(t)$ no espectro do sinal (e vice-versa), são apresentadas agora as propriedades da transformada de Fourier.

1) Linearidade (superposição)

Considerando

$$x_1(t) \Longleftrightarrow X_1(\omega) \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(\omega)$$

então

$$\boxed{c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad c_1 X_1(\omega) + c_2 X_2(\omega)}$$

sendo c_1 e c_2 constantes de valor arbitrário.

*Note que a propriedade pode ser generalizada para N termos.

Propriedades

Demonstração: Dado que $y(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t)$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [c_1x_1(t) + c_2x_2(t)]e^{-j\omega t}dt \\ &= c_1\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)e^{-j\omega t}dt + c_2\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j\omega t}dt \end{aligned}$$

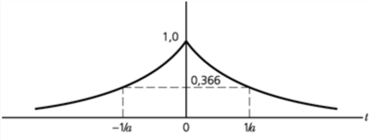
Portanto, conclui-se que

$$Y(\omega) = c_1X_1(\omega) + c_2X_2(\omega)$$

Exemplo: Linearidade

1) Determine a transformada de Fourier (para $a > 0$) de

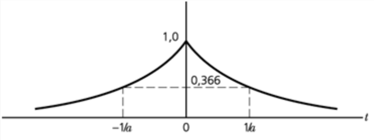
$$x(t) = e^{-a|t|}$$



Exemplo: Linearidade

1) Determine a transformada de Fourier (para $a > 0$) de

$$x(t) = e^{-a|t|}$$



Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$x(t) = e^{-at}u(t) + e^{at}u(-t)$$

Então, levando em conta a propriedade da linearidade,

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} \quad \Rightarrow \boxed{X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

Portanto, o seguinte par de transformada pode ser estabelecido:

$$\boxed{e^{-a|t|} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2a}{a^2 + \omega^2},\ a > 0}$$

Propriedades

2) Escalamento no tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{x(at) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|a|} X\left(\frac{\omega}{a}\right)}$$

Observações:

- Compressão no tempo $(a > 1) \Rightarrow$ expansão em frequência
- Expansão no tempo $(0 < a < 1) \Rightarrow$ compressão em frequência

Para $a < 0$, tem-se uma reversão no tempo associada a um escalamento.

Propriedades

Demonstração: Dado que $y(t) = x(at)$ para $a > 0$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} x(t')e^{-j\frac{\omega}{a}t'}dt' = \frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Analogamente, para $a < 0$, tem-se

$$\begin{aligned} Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(at)e^{-j\omega t}dt \\ &= \frac{1}{a}\int_{\infty}^{-\infty} x(t')e^{-j\frac{\omega}{a}t'}dt' = \frac{-1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right) \end{aligned}$$

Dessa forma, conclui-se que

$$Y(\omega) = \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right), \forall a \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Escalonamento no tempo

2) Verifique o efeito da propriedade de escalonamento no tempo sobre o seguinte par de transformada de Fourier:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \iff T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo: Escalonamento no tempo

2) Verifique o efeito da propriedade de escalonamento no tempo sobre o seguinte par de transformada de Fourier:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Resposta: Considerando

$$x(at) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{|a|}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

obtém-se

$$\boxed{\mathrm{rect}\left(\frac{at}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{T}{|a|}\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2a}\right)}$$

Propriedades

3) Dualidade

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{X(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi x(-\omega)}$$

4) Deslocamento no tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então (para $t_0 > 0$)

$$\boxed{x(t-t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega)e^{-j\omega t_0}}$$

Um atraso no tempo t_0 provoca um atraso de fase linear de $-\omega t_0$.

Propriedades

Demonstração: De

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

observa-se que

$$\begin{aligned}
t = -t \quad &\longrightarrow \quad 2\pi x(-t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega t}d\omega \\
t = u \quad &\longrightarrow \quad 2\pi x(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{-j\omega u}d\omega \\
\omega = t \quad &\longrightarrow \quad 2\pi x(-u) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-jut}dt \\
u = \omega \quad &\longrightarrow \quad 2\pi x(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} X(t)e^{-j\omega t}dt
\end{aligned}$$

Portanto, por inspeção, conclui-se

$$X(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi x(-\omega)$$

*Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

Demonstração: Dado que $y(t) = x(t - t_0)$ para $t_0 > 0$, tem-se

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t - t_0) e^{-j\omega t} dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega (t' + t_0)} dt' \\
&= e^{-j\omega t_0} \int_{-\infty}^{\infty} x(t') e^{-j\omega t'} dt'
\end{aligned}
$$

Portanto, conclui-se que

$$Y(\omega) = e^{-j\omega t_0} X(\omega),\ t_0 > 0$$

Exemplo: Função delta de Dirac (dualidade)

3a) Verifique o efeito da propriedade da dualidade sobre o seguinte par de transformada de Fourier:

$$\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1$$

Exemplo: Função delta de Dirac (dualidade)

3a) Verifique o efeito da propriedade da dualidade sobre o seguinte par de transformada de Fourier:

$$\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1$$

Resposta: Levando em conta que

$$X(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi x(-\omega)$$

obtém-se

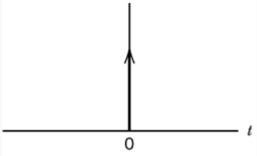
$$\boxed{1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega)}$$

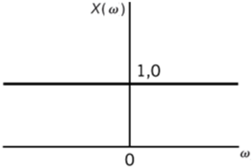
Observações:

- Sinal limitado na frequência $\longrightarrow$ amplo no tempo
- Refletir sobre o pulso retangular considerando $T \to \infty$

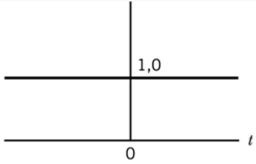
Exemplo: Função delta de Dirac (dualidade)

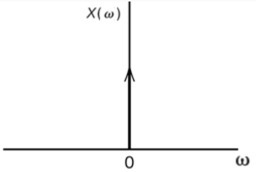
$$\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1$$





$$1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega)$$





Exemplo: Pulso sinc (dualidade)

3b) Verifique o efeito da propriedade da dualidade sobre o seguinte par de transformada de Fourier:

$$\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\,\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo: Pulso sinc (dualidade)

3b) Verifique o efeito da propriedade da dualidade sobre o seguinte par de transformada de Fourier:

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Resposta: Levando em conta que

$$X(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi x(-\omega)$$

obtém-se

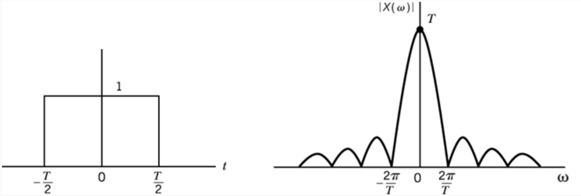
$$\boxed{T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{tT}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{T}\right)}$$

Observações:

- Resposta ao impulso de um filtro passa-baixa (ideal)...
- Resposta não causal $\Rightarrow$ Impossível implementar na prática!

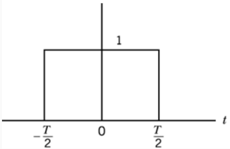
Exemplo: Pulso sinc (dualidade)

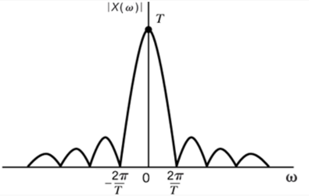
$$\boxed{\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$



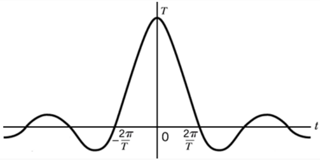
Exemplo: Pulso sinc (dualidade)

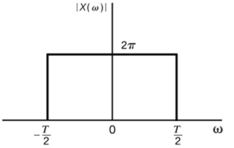
$$\boxed{\operatorname{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\operatorname{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$





$$\boxed{T\operatorname{sinc}\left(\frac{tT}{2}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\operatorname{rect}\left(\frac{\omega}{T}\right)}$$





Exemplo: Função delta de Dirac (deslocamento)

4) Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

Exemplo: Função delta de Dirac (deslocamento)

4) Determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = \delta(t - t_0)$$

Resposta: Visto que

$$\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \qquad \text{e} \qquad x(t - t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

tem-se

$$X(\omega) = e^{-j\omega t_0}$$

Dessa forma, observa-se que

$$\boxed{|X(\omega)| = 1}$$

e

$$\boxed{\theta(\omega) = -\omega t_0}$$

5) Deslocamento em frequência

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então (para $\omega_c \in \mathbb{R}$)

$$\boxed{e^{j\omega_c t}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega - \omega_c)}$$

Observações:

- A multiplicação de um sinal por $e^{j\omega_c t}$ é equivalente ao deslocamento em frequência
- Essa propriedade define o *Teorema da modulação!*
- Note a dualidade com a propriedade de deslocamento no tempo, dada por

$$x(t - t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega)e^{-j\omega t_0}$$

Propriedades

Demonstração: Dado que $y(t) = e^{j\omega_c t}x(t)$, tem-se

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega_c t}x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j(\omega-\omega_c)t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega' t}dt, \quad \omega' = \omega - \omega_c \\
&= X(\omega')
\end{aligned}
$$

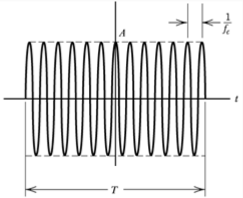
Portanto, conclui-se que

$$Y(\omega) = X(\omega - \omega_c),\ \omega_c \in \mathbb{R}$$

Exemplo: Pulso de RF (modulação)

5) Determine a transformada de Fourier para um pulso senoidal de amplitude A e frequência f_c, dado por

$$x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(\omega_c t)$$



(Sinal referido como pulso de RF quando f_c se encontra na banda de radiofrequência.)

Lembrete:

$$e^{j\omega_c t}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X(\omega - \omega_c)$$

$$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo: Pulso de RF (modulação)

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}[e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}]$$

Em seguida, levando em conta que

$$\boxed{e^{j\omega_c t} m(t) \Longleftrightarrow M(\omega - \omega_c)} \quad \text{e} \quad \boxed{\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \Longleftrightarrow AT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)}$$

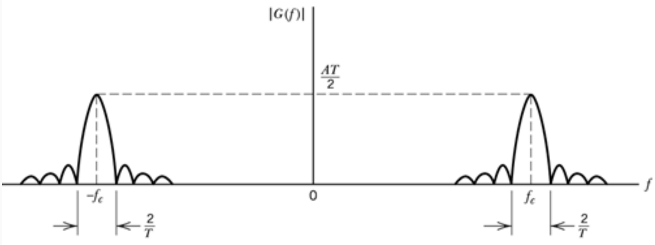
obtém-se

$$\boxed{X(\omega) = \frac{AT}{2}\left\{\text{sinc}\left[\frac{(\omega - \omega_c)T}{2}\right] + \text{sinc}\left[\frac{(\omega + \omega_c)T}{2}\right]\right\}}$$

Mostre que tal resultado pode ser obtido a partir da transformada de Fourier de $e^{j\omega_c t}$ e da propriedade da multiplicação no tempo (convolução no domínio da frequência).

Exemplo: Pulso de RF (modulação)

Espectro de magnitude do sinal:



Portanto, a multiplicação (no tempo) de um sinal $x(t)$ por $\cos(\omega_c t)$ causa um deslocamento do espectro do sinal para ω_c.

Propriedades

6) Convolução no domínio do tempo

Considerando

$$x_1(t) \Longleftrightarrow X_1(\omega) \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(\omega)$$

então

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau)x_2(t-\tau)d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad X_1(\omega)X_2(\omega)}$$

Observações:

- Note a dualidade com a propriedade da multiplicação no domínio do tempo.
- A multiplicação é mais fácil de realizar do que a convolução.

Propriedades

Demonstração: Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados de

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

tem-se

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau\right] e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(\eta+\tau-\tau)d\tau\right] e^{-j\omega(\eta+\tau)}d\eta \\
&= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau\right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} h(\eta)e^{-j\omega\eta}d\eta\right] \\
&= X(\omega)H(\omega)
\end{aligned}$$

Nota: Troca de variáveis $\eta = t - \tau$!

Propriedades

Exemplo: Questão de concurso da Petrobras para Engenheiro de Equipamentos Júnior - Eletrônica - 2011.

A resposta de um sistema linear à aplicação de um impulso $\delta(t)$ (delta de Dirac) é dada por $h(t) = A\delta(t - t_0)$, onde A e t_0 são constantes positivas. Admitindo-se que este sistema tenha como entrada um sinal senoidal definido por $x(t) = B\cos(2\pi f_0 t)$, o espectro do sinal de saída, correspondente a essa entrada, é dado pela expressão

(A) $\dfrac{AB}{2}\left(e^{j2\pi f t_0} + e^{-j2\pi f t_0}\right)$

(B) $AB\cos(2\pi f t_0)$

(C) $\dfrac{AB}{2}\delta(f)\cos(2\pi f t_0)$

(D) $\dfrac{AB}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]e^{-j2\pi f t_0}$

(E) $\dfrac{AB}{2}\delta(f - f_0)\cos(2\pi f t_0)$

Propriedades

Exemplo: Questão de concurso da Petrobras para Engenheiro de Equipamentos Júnior - Eletrônica - 2011.

A resposta de um sistema linear à aplicação de um impulso $\delta(t)$ (delta de Dirac) é dada por $h(t) = A\delta(t - t_0)$, onde A e t_0 são constantes positivas. Admitindo-se que este sistema tenha como entrada um sinal senoidal definido por $x(t) = B\cos(2\pi f_0 t)$, o espectro do sinal de saída, correspondente a essa entrada, é dado pela expressão

(A) $\frac{AB}{2}\left(e^{j2\pi f t_0} + e^{-j2\pi f t_0}\right)$

(B) $AB\cos(2\pi f t_0)$

(C) $\frac{AB}{2}\,\delta(f)\cos(2\pi f t_0)$

(D) $\frac{AB}{2}\left[\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)\right]e^{-j2\pi f t_0}$

(E) $\frac{AB}{2}\,\delta(f - f_0)\cos(2\pi f t_0)$

Resposta: (D)

7) Multiplicação no domínio do tempo

Considerando

$$x_1(t) \Longleftrightarrow X_1(\omega) \quad \text{e} \quad x_2(t) \Longleftrightarrow X_2(\omega)$$

então

$$\boxed{x_1(t)x_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)X_2(\omega-\eta)d\eta}$$

Observações:

- Note a dualidade com a propriedade da convolução no tempo.
- É usual adotar a notação compacta para a convolução, i.e.,

$$x_1(t)x_2(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2\pi}X_1(\omega) * X_2(\omega)$$

Propriedades

Demonstração (Abordagem #1): Tomando a transformada de Fourier inversa de ambos os lados de

$$Y(\omega) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)X_2(\omega-\eta)d\eta$$

e realizando uma troca de variáveis em ω (i.e., $\theta = \omega - \eta$), tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)X_2(\omega-\eta)d\eta\right]e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)X_2(\theta+\eta-\eta)e^{j(\theta+\eta)t}d\eta d\theta \\ &= \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)e^{j\eta t}d\eta\right]\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_2(\theta)e^{j\theta t}d\theta\right] \\ &= x_1(t)x_2(t) \end{aligned}$$

*Créditos: Victor Bogo Polidorio (2018/1).

Propriedades

Demonstração (Abordagem #2): Tomando a transformada de Fourier de ambos os lados de

$$y(t) = x_1(t)x_2(t)$$

tem-se

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)x_2(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)e^{j\eta t}d\eta\right] x_2(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)e^{-j(\omega-\eta)t}dt}_{=X_2(\omega-\eta)} d\eta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X_1(\eta)X_2(\omega-\eta)d\eta.
\end{aligned}$$

*Créditos: Martin Ávila Buitron (2023/2).

Propriedades

8) Diferenciação no domínio do tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

e assumindo que $\frac{d}{dt}x(t)$ existe e $x(t)$ tem componente DC nula (condições de Dirichlet), então

$$\boxed{\frac{d^n}{dt^n}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad (j\omega)^n X(\omega)}$$

9) Integração no domínio do tempo

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)}$$

Propriedades

Demonstração: Primeiramente, considere

$$y(t) = \frac{d}{dt}x(t)$$

Então, assumindo que $\frac{d}{dt}x(t)$ existe e $x(t)$ tem componente DC nula, e comutando operação de integração e de derivação, tem-se

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega\right] \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)\frac{d}{dt}e^{j\omega t}d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} j\omega X(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{d}{dt}x(t) \quad \Longleftrightarrow \quad j\omega X(\omega)$$

Propriedades

Demonstração: Levando em consideração que

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau \\
&= x(t) * u(t)
\end{aligned}
$$

e

$$
u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{j\omega} + \pi\, \delta(\omega)
$$

obtém-se

$$
\begin{aligned}
Y(\omega) &= X(\omega) U(\omega) \\
&= \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(\omega)\, \delta(\omega) \\
&= \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\, \delta(\omega)
\end{aligned}
$$

Exemplo: Função retangular

8/9) A partir das propriedades de diferenciação e integração no tempo, determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$
$$= \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Exemplo: Função retangular

8/9) A partir das propriedades de diferenciação e integração no tempo, determine a transformada de Fourier de

$$x(t) = A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$
$$= \begin{cases} A, & -\frac{T}{2} < t < \frac{T}{2} \\ 0, & |t| > \frac{T}{2} \end{cases}$$

Resposta: Primeiramente, observa-se que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{d}{dt} x(t) \right| dt < \infty$$

e

$$x(t) \longrightarrow 0, \quad t \to \pm\infty$$

Logo, o sinal satisfaz as condições de Dirichelet, implicando que as propriedades de diferenciação e integração podem ser aplicadas.

Exemplo: Função retangular

Dessa forma,

$$\begin{aligned} x'(t) &= \frac{d}{dt}x(t) \\ &= A\left[\delta\left(t+\frac{T}{2}\right) - \delta\left(t-\frac{T}{2}\right)\right] \end{aligned}$$

Então, visto que

$$\delta(t) \quad \Longleftrightarrow \quad 1$$

e

$$x(t-t_0) \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-j\omega t_0}$$

obtém-se

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= A[e^{+j\omega\frac{T}{2}} - e^{-j\omega\frac{T}{2}}] \\ &= 2jA\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \end{aligned}$$

Exemplo: Função retangular

Finalmente, levando em conta que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} x'(\tau) d\tau$$

e

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{X(\omega)}{j\omega} + \pi X(0)\delta(\omega)$$

tem-se

$$\begin{aligned} X(\omega) &= \frac{X'(\omega)}{j\omega} + \pi X'(0)\delta(\omega) \\ &= \frac{1}{j\omega} 2jA\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) + \pi 2j\mathrm{sen}(0)\delta(\omega) \\ &= \frac{2A}{\omega}\mathrm{sen}\left(\frac{\omega T}{2}\right) \quad \Rightarrow \boxed{X(\omega) = AT\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)} \end{aligned}$$

Propriedades

10) Conjugação

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{x^*(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X^*(-\omega)}$$

Similarmente, tem-se $x^*(-t) \Longleftrightarrow X^*(\omega)$.

11) Simetria do conjugado

Para $x(t) \in \mathbb{R}$,

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{\begin{cases} X(\omega) = X^*(-\omega) \\ \mathrm{Re}[X(\omega)] = \mathrm{Re}[X(-\omega)] \quad \text{e} \quad \mathrm{Im}[X(\omega)] = -\mathrm{Im}[X(\omega)] \\ |X(\omega)| = |X(-\omega)| \quad \text{e} \quad \angle X(\omega) = -\angle X(-\omega) \end{cases}}$$

Propriedades

Demonstração: A partir de

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} X^*(\omega) &= \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt\right]^* \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{+j\omega t}dt \end{aligned}$$

Então, fazendo $\omega = -\omega$, tem-se

$$X^*(-\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x^*(t)e^{-j\omega t}dt$$

o que resulta em

$$x^*(t) \quad \Longleftrightarrow \quad X^*(-\omega)$$

Exemplo: Exponencial (função par)

10) Visto a propriedade de conjugação, determine $X(\omega)$ para

$$x(t) = e^{-a|t|},\ a > 0.$$

Exemplo: Exponencial (função par)

10) Visto a propriedade de conjugação, determine $X(\omega)$ para

$$x(t) = e^{-a|t|},\ a > 0.$$

Resposta: Primeiramente, observe que

$$x(t) = \underbrace{e^{at}\,u(-t)}_{x'(-t)} + \underbrace{e^{-at}\,u(t)}_{x'(t)}$$

Então, como

$$x'(t) \quad \Rightarrow \quad X'(\omega) = \frac{1}{a + j\omega}$$

$$x'(-t) \quad \Rightarrow \quad X'^{*}(\omega) = \frac{1}{a - j\omega}$$

obtém-se

$$X(\omega) = \frac{1}{a + j\omega} + \frac{1}{a - j\omega} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X(\omega) = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}}$$

Propriedades

12) Área sob $x(t)$

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt = X(0)}$$

13) Área sob $X(\omega)$

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega}$$

Propriedades

Demonstração: Fazendo $\omega = 0$ em

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt$$

tem-se

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt$$

Demonstração: Fazendo $t = 0$ em

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{+j\omega t}d\omega$$

obtém-se

$$x(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega$$

Exemplo: Função retangular

12/13) Determine a área sob $x(t)$ e sob $X(\omega)$ a partir de

$$A\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad\Longleftrightarrow\quad AT\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Exemplo: Função retangular

12/13) Determine a área sob $x(t)$ e sob $X(\omega)$ a partir de

$$A\text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \quad \Longleftrightarrow \quad AT\text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$$

Resposta: Primeiramente, a área sob $x(t)$ é dada por

$$X(0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)dt \quad \Rightarrow \boxed{X(0) = AT}$$

Por sua vez, a área sob $X(\omega)$ é obtida como

$$\begin{aligned} x(0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)d\omega = \frac{AT}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)d\omega \\ &= \frac{AT}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x)\frac{2dx}{T} = \frac{A}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x)dx \\ &\Rightarrow \boxed{x(0) = A} \end{aligned}$$

Propriedades

14) Teorema de Rayleigh da energia

Considerando

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt < \infty$$

então

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega}$$

Observação: A densidade espectral de energia é definida como

$$\Psi_x(\omega) = |X(\omega)|^2$$

sendo expressa em joules por hertz. Logo, de acordo com o teorema de Rayleigh, a área sob a curva representa a energia total entregue pela fonte (resistor de carga de 1 ohm).

Propriedades

Demonstração: A partir da definição de energia no domínio do tempo, verifica-se que

$$
\begin{aligned}
E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)x^*(t)dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X^*(\omega)e^{-j\omega t} d\omega \right] dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt \right] X^*(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)X^*(\omega) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)|^2 d\omega
$$

Exemplo: Pulso sinc (energia)

14) Determine a energia do pulso

$$x(t) = \frac{W}{\pi}\mathrm{sinc}(Wt)$$

Exemplo: Pulso sinc (energia)

14) Determine a energia do pulso

$$x(t) = \frac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt)$$

Resposta: Primeiramente, considera-se que

$$E = \left(\frac{W}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}^2(Wt)dt$$

Contudo, obter uma solução para essa integral é difícil. Então, de

$$\frac{W}{\pi}\text{sinc}(Wt) \quad \Longleftrightarrow \quad \text{rect}\left(\frac{\omega}{2W}\right)$$

e do teorema de Rayleigh, tem-se

$$E = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}^2\left(\frac{\omega}{2W}\right) d\omega \quad \Rightarrow \boxed{E = \frac{W}{\pi}}$$

Exemplo: Pulso sinc (energia)

Alternativamente, é possível determinar a energia do sinal no domínio do tempo como

$$\begin{aligned} E &= \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt \\ &= \left(\frac{W}{\pi}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(Wt)dt \end{aligned}$$

Então, levando em consideração que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(x)dx = \pi$$

e fazendo uma operação de troca de variáveis (i.e., $x = Wt$), tem-se

$$E = \left(\frac{W}{\pi}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}^2(x)dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = \frac{W}{\pi}}$$

Exemplo: Pulso sinc (energia)

Demonstração: Visto que $\text{sinc}(x)$ caracteriza uma função par e

$$\int_0^\infty e^{-xt}dt = \frac{1}{x}$$

é possível mostrar que

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(x)dx &= 2\int_0^\infty \frac{\text{sen}(x)}{x}dx \\
&= 2\int_0^\infty \left[\int_0^\infty e^{-xt}\text{sen}(x)dx\right] dt \\
&= 2\int_0^\infty \left\{ -\frac{e^{-xt}[t\text{sen}(x)+\cos(x)]}{t^2+1}\bigg|_0^\infty \right\} dt \\
&= 2\int_0^\infty \frac{1}{t^2+1}dt = 2\,\tan^{-1}(t)\big|_0^\infty \\
&= 2[\tan^{-1}(\infty) - \tan^{-1}(0)] = \pi.
\end{aligned}$$

*Créditos: Matheus Bogo Polidorio (2018/2).

Propriedades

15) Diferenciação no domínio da frequência

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{-jtx(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{d}{d\omega}X(\omega)}$$

16) Decomposição par-ímpar para sinais reais

Considerando

$$x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

então

$$\boxed{\begin{array}{ccc} \mathrm{Par}\{x(t)\} & \Longleftrightarrow & \mathrm{Re}\{X(\omega)\} \\ \text{Ímpar}\{x(t)\} & \Longleftrightarrow & j\,\mathrm{Im}\{X(\omega)\} \end{array}}$$

Propriedades

Demonstração: Para $y(t) = -jtx(t)$, verifica-se que

$$\begin{aligned}
Y(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} y(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} -jtx(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{d}{d\omega}e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{d}{d\omega}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t}dt \\
&= \frac{d}{d\omega}X(\omega)
\end{aligned}$$

*Créditos: André Phillipe Milhomem A. Santana (2018/1).

Propriedades

Demonstração: Para

$$x_{\text{par}}(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} \qquad \text{e} \qquad x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{par}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t) + x(-t)}{2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{X(\omega) + X(-\omega)}{2} \end{aligned}$$

Portanto, visto que $x(t) \in \mathbb{R}$ implica $X(\omega) = X^*(-\omega)$, conclui-se

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \frac{X(\omega) + X^*(\omega)}{2} \\ &= \frac{\{\text{Re}[X(\omega)] + j\text{Im}[X(\omega)]\} + \{\text{Re}[X(\omega)] - j\text{Im}[X(\omega)]\}}{2} \\ &= \text{Re}[X(\omega)]. \end{aligned}$$

*Créditos: Matheus Bernardi da Silva (2019/1).

Propriedades

Analogamente, para

$$x_{\text{ímpar}}(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2} \qquad \text{e} \qquad x(t) \Longleftrightarrow X(\omega)$$

verifica-se que

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x_{\text{ímpar}}(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t) - x(-t)}{2} e^{-j\omega t} dt \\ &= \frac{X(\omega) - X(-\omega)}{2} \end{aligned}$$

Portanto, visto que $x(t) \in \mathbb{R}$ implica $X(\omega) = X^*(-\omega)$, conclui-se

$$\begin{aligned} X'(\omega) &= \frac{X(\omega) - X^*(\omega)}{2} \\ &= \frac{\{\mathrm{Re}[X(\omega)] + j\mathrm{Im}[X(\omega)]\} - \{\mathrm{Re}[X(\omega)] - j\mathrm{Im}[X(\omega)]\}}{2} \\ &= j\mathrm{Im}[X(\omega)]. \end{aligned}$$

*Créditos: Matheus Bernardi da Silva (2019/1).

Transformada inversa de Fourier

Transformada inversa de Fourier

Como

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \phi(t) \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} d\omega = 2\pi\delta(t)$$

a transformada inversa de Fourier é obtida como

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$X(\omega)e^{j\omega t} = e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega t} \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\, e^{-j\omega\tau}\, d\tau\, d\omega$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{j\omega(t-\tau)}\, d\omega}_{2\pi\delta(t-\tau)}\, d\tau$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}\, d\omega}$$

Transformada inversa de Fourier

1) Determine a transformada inversa de Fourier de

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

1) Determine a transformada inversa de Fourier de

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$$

Resposta: Dado que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

tem-se

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega \\ &= 1 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{1 \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega)}$$

2) Determine a transformada inversa de Fourier de

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Transformada inversa de Fourier

2) Determine a transformada inversa de Fourier de

$$X(\omega) = 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$$

Resposta: Dado que

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

tem-se

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega - \omega_0)e^{j\omega t}d\omega \\ &= e^{j\omega_0 t} \end{aligned}$$

Portanto,

$$\boxed{e^{j\omega_0 t} \quad \Longleftrightarrow \quad 2\pi\delta(\omega - \omega_0)}$$

3) Determine a transformada inversa de Fourier de

$$X(\omega) = \frac{1}{(1 + j\omega)(2 + j\omega)}$$

3) Determine a transformada inversa de Fourier de

$$X(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)}$$

Resposta: Visto que

$$e^{-at}u(t) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{a+j\omega},\ a>0$$

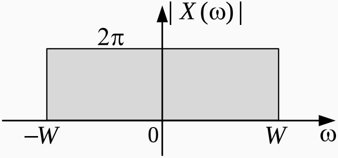
e

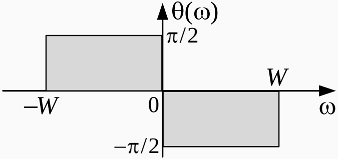
$$X(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)} - \frac{1}{(2+j\omega)}$$

obtém-se

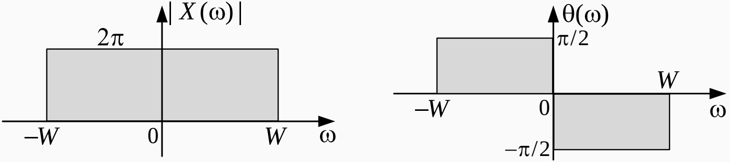
$$\boxed{X(\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)(2+j\omega)} \quad \Longleftrightarrow \quad x(t) = (e^{-t} - e^{-2t})u(t)}$$

4) Determine a transformada inversa de Fourier a partir de





4) Determine a transformada inversa de Fourier a partir de



Resposta: A partir da definição, tem-se que

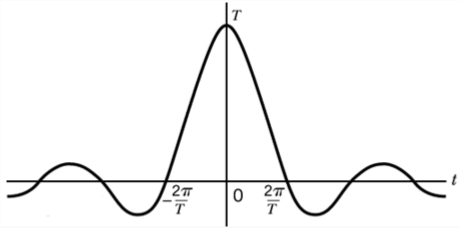
$$
\begin{aligned}
x(t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{+j\omega t}d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-W}^{0} 2\pi e^{+j\frac{\pi}{2}}e^{+j\omega t}d\omega + \int_{0}^{W} 2\pi e^{-j\frac{\pi}{2}}e^{+j\omega t}d\omega\right] \\
&\Rightarrow \boxed{x(t) = 2W\text{sinc}\left(\frac{Wt}{2}\right)\cos\left(\frac{Wt-\pi}{2}\right)}
\end{aligned}
$$

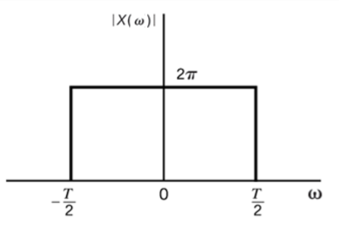
A relação entre tempo e frequência

A relação entre tempo e frequência

- Alterações no sinal no tempo afetam a sua representação no domínio da frequência (e vice-versa)
    - Compressão no tempo $\Longleftrightarrow$ expansão a frequência
    - Expansão no tempo $\Longleftrightarrow$ compressão na frequência

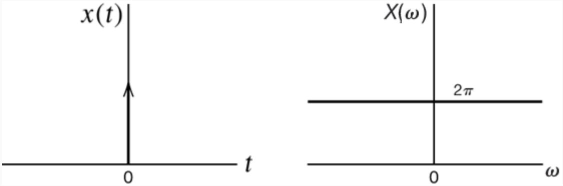
- Sinais estritamente limitados em frequência têm comprimento infinito no tempo





A relação entre tempo e frequência

- Pela dualidade, sinais estritamente limitados no tempo possuem largura de banda infinita.



Portanto, um sinal não pode ser estritamente limitado no tempo e em frequência (simultaneamente).

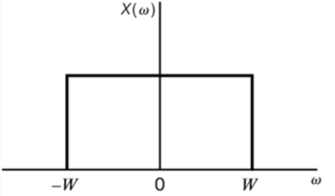
Largura de banda

Largura de banda

Definição

É uma medida que representa a extensão do conteúdo espectral significativo do sinal para frequências positivas.

Exemplo 1: Função retangular no domínio da frequência

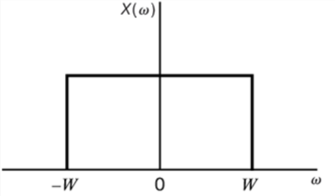


Largura de banda

Definição

É uma medida que representa a extensão do conteúdo espectral significativo do sinal para frequências positivas.

Exemplo 1: Função retangular no domínio da frequência



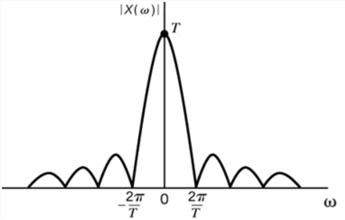
Largura de banda claramente definida $\longrightarrow B = W$; todavia, nem sempre o sinal é estritamente limitado em frequência.

Largura de banda

Definição

É uma medida que representa a extensão do conteúdo espectral significativo do sinal para frequências positivas.

Exemplo 2: Função *sinc* no domínio da frequência



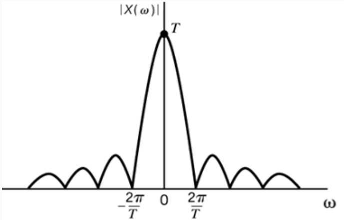
Qual é a largura de banda desse sinal?

Largura de banda

Definição

É uma medida que representa a extensão do conteúdo espectral significativo do sinal para frequências positivas.

Exemplo 2: Função *sinc* no domínio da frequência



Qual é a largura de banda desse sinal? Essa dúvida é decorrente da definição imprecisa de largura de banda ("significativo").

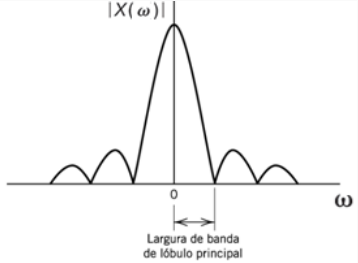
Largura de banda

Agora, são apresentadas duas definições comumente utilizadas.

1a) Largura do lóbulo principal

Para sinais cujo conteúdo espectral é centrado na origem (característica passa-baixa), a largura de banda é definida como a metade da largura do lóbulo principal.

Exemplo 1: Conteúdo espectral de um sinal passa-baixa

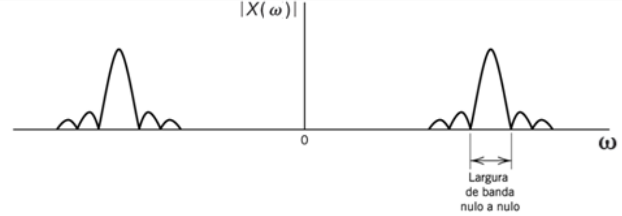


Largura de banda

1b) Largura do lóbulo principal

Para sinais cujo conteúdo espectral é centrado em ω_c (característica passa-faixa), a largura de banda é definida como a da largura do lóbulo principal de nulo-a-nulo.

Exemplo 2: Conteúdo espectral de um sinal passa-faixa



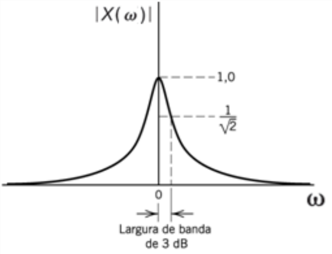
Note que a modulação de um sinal passa-baixa implica dobrar a largura de banda do sinal.

Largura de banda

2a) Largura de banda de 3 dB

Para sinais com característica espectral passa-baixa, a largura de banda é definida como a distância entre a origem e o ponto em que o espectro de magnitude decai 3 dB ($1/\sqrt{2}$).

Exemplo 1: Conteúdo espectral de um sinal passa-baixa

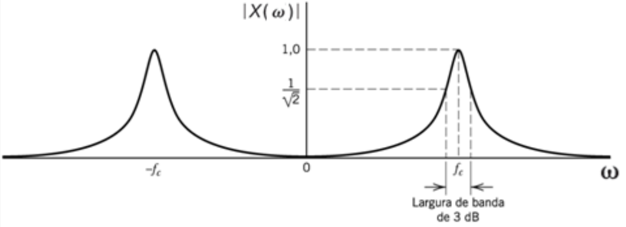


Largura de banda

2b) Largura de banda de 3 dB

Para sinais com característica espectral passa-faixa, a largura de banda é definida como a distância entre ω_c e o ponto em que o espectro de magnitude decai 3 dB $(1/\sqrt{2})$.

Exemplo 2: Conteúdo espectral de um sinal passa-faixa



Produto tempo-largura de banda

Produto tempo-largura de banda

Decorrente da Propriedade 2 da transformada de Fourier, i.e.,

Domínio do tempo	**Domínio da frequência**
compressão/expansão	expansão/compressão

é possível concluir que o produto da duração do sinal e da sua largura de banda é sempre constante para qualquer família de sinais de pulso, i.e.,

$$\boxed{(\text{duração}) \times (\text{largura de banda}) = (\text{constante})}$$

independente da definição utilizada para largura de banda.

Resumo e discussão

Resumo e discussão

- A transformada de Fourier permite relacionar as descrições no domínio do tempo e da frequência
  - Para sinais não periódicos, o espectro do sinal é contínuo em ω
  - Para sinais periódicos, o espectro do sinal é discreto em ω
- Modificações realizadas sobre o sinal no domínio do tempo se refletem no domínio da frequência e vice-versa
- O produto tempo-largura de banda de um sinal é constante
- Operações de filtragem são comumente
  - realizadas no domínio do tempo através da convolução
  - realizadas no domínio da frequência através da multiplicação
- A representação de sinais periódicos se dá através da série de Fourier.

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 662)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 6)

Até a próxima aula... =)