Sinais e Sistemas

ET45A

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br
Curso de Engenharia Eletrônica
Universidade Tecnológica Federal do Paraná

Slides adaptados do material gentilmente cedido pelo Prof. José C. M. Bermudez do Departamento de Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Santa Catarina.

Análise no domínio do tempo de sinais e sistemas de tempo discreto

Considerações iniciais

Sinal Analógico: Amplitude pode assumir qualquer valor

Sinal Digital: Amplitude restrita a valores discretos

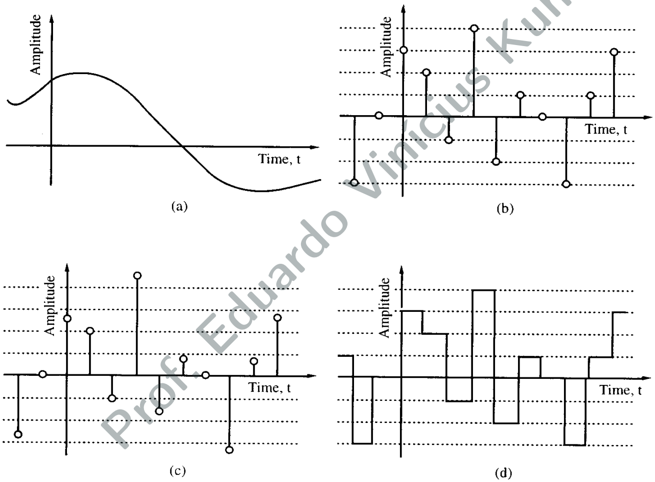
Sinal Contínuo: Definido para qualquer valor da variável independente

Sinal Discreto: Definido apenas para valores discretos da variável independente

Agora, focamos o nosso estudo sobre sinais e sistemas de tempo discreto...

Considerações iniciais

Contínuo | Digital



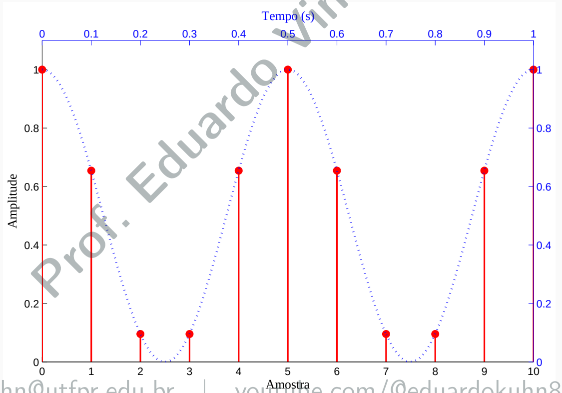
Discreto | Contínuo Amostrado

Considerações iniciais

- Um sinal de tempo discreto é basicamente uma sequência de números.
- Na prática, sinais de tempo discreto são comumente encontrados em
    - Estudos populacionais
    - Mercado financeiro
    - Dentre outras aplicações...
- Sinais de tempo discreto são também obtidos como resultado da amostragem de sinais de tempo contínuo.
- Com respeito à notação, adota-se $x(n)\ \forall n \in \mathbb{Z}$
- Na literatura, é usual expressar a variável independente entre colchetes (i.e., $x[n]$) no caso de sinais discretos.

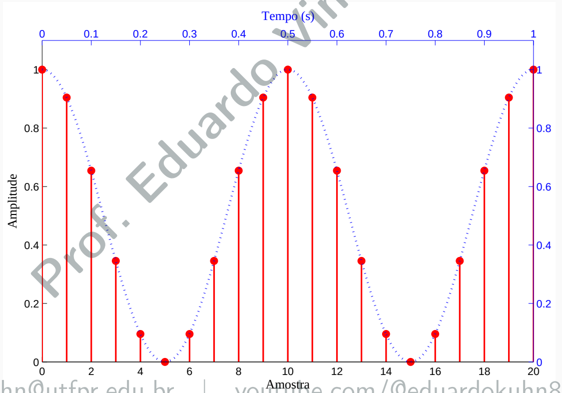
Exemplo do processo de amostragem:

- Sinal contínuo $x(t) = \cos^2(2\pi t)$
- Sinal discreto (amostrado) $x(n) = \cos^2(2\pi n T_\mathrm{s})$
- Período de amostragem $T_\mathrm{s} = 0,10\,\mathrm{s}$ ($f_\mathrm{s} = 10\,\mathrm{Hz}$)



Exemplo do processo de amostragem:

- Sinal contínuo $x(t) = \cos^2(2\pi t)$
- Sinal discreto (amostrado) $x(n) = \cos^2(2\pi n T_\mathrm{s})$
- Período de amostragem $T_\mathrm{s} = 0,05\ \mathrm{s}\ (f_\mathrm{s} = 20\ \mathrm{Hz})$



Objetivos

- Revisar as formas de classificação de sinais, modelos úteis de sinais e operações envolvendo sinais.
- **Discutir sobre a periodicidade de uma senoide de tempo discreto.**
- Revisitar a classificação de sistemas a partir da relação de entrada e saída bem como da resposta ao impulso.
- Adaptar a operação de convolução para sinais e sistemas de tempo discreto.
- Relembrar aspectos relacionados a interconexão de sistemas.

Adequar o ferramental desenvolvido até aqui para lidar com sinais e sistemas de tempo contínuo para o caso de tempo discreto.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Classificação de sinais

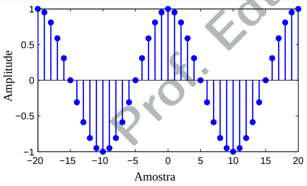
Sinais periódicos ou aperiódicos:

- Um sinal é dito periódico (com período fundamental N_0) se

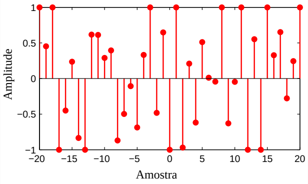
$$\boxed{x(n) = x(n + N_0), \quad \forall\, n \quad \text{e} \quad N_0 \in \mathbb{Z}^+}$$

- Um sinal é dito aperiódico quando não existe um valor de $N_0 \in \mathbb{Z}^+$ que satisfaça a definição.

Periódico



Não periódico

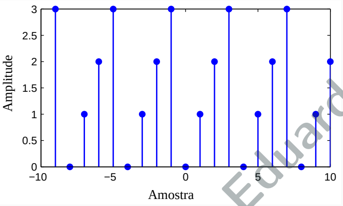


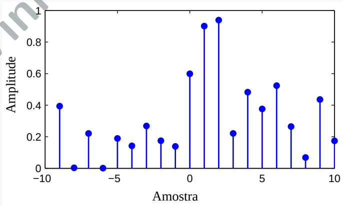
Classificação de sinais

Exemplo: Determine se os seguintes sinais são periódicos ou aperiódicos, especificando o período fundamental N_0:

i) Periódico $\quad [x(n) = x(n + N_0), \quad \forall\, n \;\; \text{e} \;\; N_0 \in \mathbb{Z}]$

ii) Aperiódico $\quad [x(n) \neq x(n + N_0), \quad \forall\, n \;\; \text{e} \;\; N_0 \in \mathbb{Z}]$





O caso de exponenciais complexas será discutido à frente.

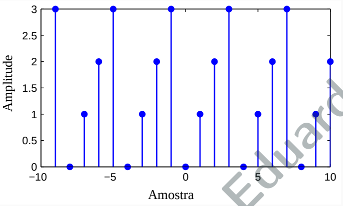
kuhn@utfpr.edu.br | youtube.com/@eduardokuhn87

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

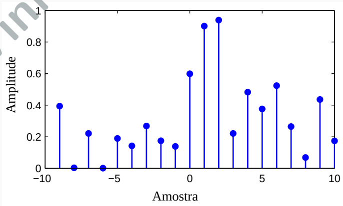
Exemplo: Determine se os seguintes sinais são periódicos ou aperiódicos, especificando o período fundamental N_0:

i) Periódico $[x(n) = x(n+N_0), \quad \forall\, n \;\; \text{e} \;\; N_0 \in \mathbb{Z}]$

ii) Aperiódico $[x(n) \neq x(n+N_0), \quad \forall\, n \;\; \text{e} \;\; N_0 \in \mathbb{Z}]$



Resposta: Periódico ($N_0 = 4$).



Resposta: Aperiódico.

O caso de exponenciais complexas será discutido à frente.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Sinais causais, não causais e anti-causais:

- Um sinal é dito causal se

$$\boxed{x(n) = 0, \quad n < 0}$$

- Um sinal é dito não causal se

$$\boxed{x(n) \neq 0, \quad n < 0 \quad \text{e} \quad n \geq 0}$$

- Um sinal é dito anti-causal se

$$\boxed{x(n) \neq 0, \quad n < 0 \quad \text{e} \quad x(n) = 0, \quad n \geq 0}$$

Exemplo: Classifique os seguintes sinais como:

i) Causal $[x(n) = 0, \quad n < 0]$

ii) Não causal $[x(n) \neq 0, \quad n < 0 \quad \text{e} \quad n \geq 0]$

iii) Anti-causal $[x(n) \neq 0, \quad n < 0 \quad \text{e} \quad x(n) = 0, \quad n \geq 0]$

(a) $x(n) = u(n)$

(b) $x(n) = u(-n-5)$

(c) $x(n) = e^{-|n|}$

(d) $x(n) = e^{n}u(n+1)$

(e) $x(n) = u(n-10) - u(n-15)$

Classificação de sinais

Exemplo: Classifique os seguintes sinais como:

i) Causal $[x(n) = 0, \quad n < 0]$

ii) Não causal $[x(n) \neq 0, \quad n < 0 \quad \text{e} \quad n \geq 0]$

iii) Anti-causal $[x(n) \neq 0, \quad n < 0 \quad \text{e} \quad x(n) = 0, \quad n \geq 0]$

(a) $x(n) = u(n)$

Resposta: Causal

(b) $x(n) = u(-n-5)$

Resposta: Anti-causal

(c) $x(n) = e^{-|n|}$

Resposta: Não causal

(d) $x(n) = e^{n}u(n+1)$

Resposta: Não causal

(e) $x(n) = u(n-10) - u(n-15)$

Resposta: Causal

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Classificação de sinais

Sinais pares e ímpares:

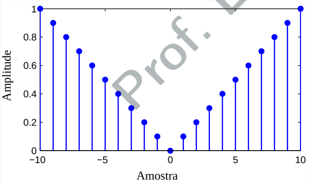
- Um sinal é dito par se

$$\boxed{x(n) = x(-n)}$$

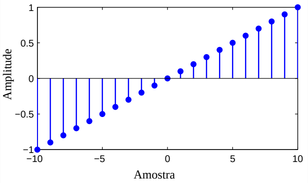
- Um sinal é dito ímpar se

$$\boxed{x(n) = -x(-n)}$$

Sinal par



Sinal ímpar



Componentes par e ímpar de um sinal:

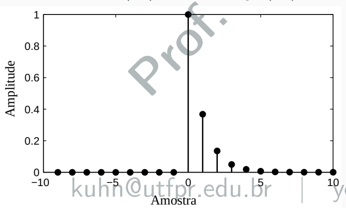
Qualquer sinal pode ser decomposto em parte par e ímpar, i.e.,

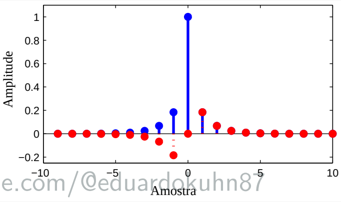
$$\boxed{x(n) = x_{\text{par}}(n) + x_{\text{ímpar}}(n)}$$

onde

$$\boxed{x_{\text{par}}(n) = \frac{x(n) + x(-n)}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{x_{\text{ímpar}}(n) = \frac{x(n) - x(-n)}{2}}$$

Exemplo: $x(n) = e^{-n}u(n)$





Sinais de energia e de potência:

- Um sinal é dito de energia se

$$\boxed{E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty}$$

Exemplos: Sinais determinísticos e/ou aperiódicos.

- Um sinal é dito de potência se

$$\boxed{P_x = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=<N>} |x(n)|^2 \quad < \infty}$$

Exemplos: Sinais aleatórios e/ou periódicos.

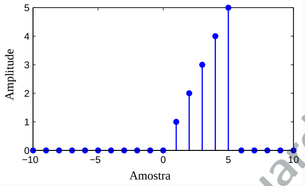
Para sinais periódicos, P_x é calculada apenas em um período.

Exemplo: Verifique se os seguintes sinais são de

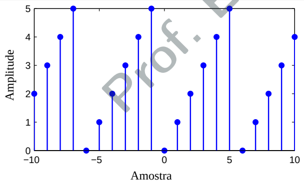
i) Energia $[E_x < \infty]$

ii) Potência $[P_x < \infty]$

(a)



(b)

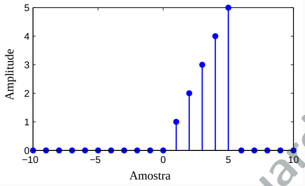


Exemplo: Verifique se os seguintes sinais são de

i) Energia $[E_x < \infty]$

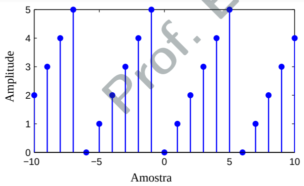
ii) Potência $[P_x < \infty]$

(a)



Resposta: $E_x = 55$

(b)



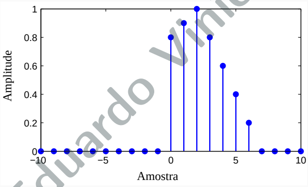
Resposta: $P_x = 55/6$

Operações elementares sobre sinais

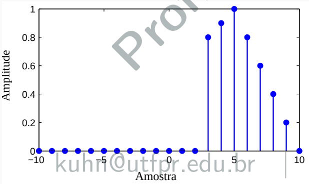
Deslocamento no tempo: Para tal, faz-se

$$y(n) = x(n - N)$$

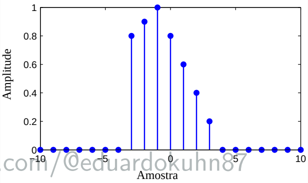
Exemplo:



$N = 3$



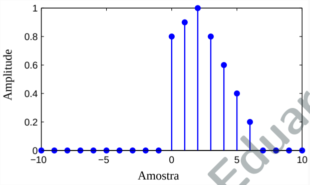
$N = -3$



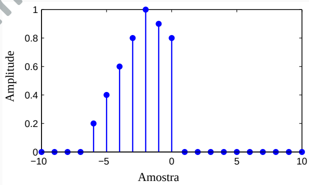
Reversão no tempo: Tal operação é realizada sobre a variável independente fazendo

$$y(n) = x(-n)$$

$x(n)$



$x(-n)$



Na reversão temporal, o eixo y (vertical) é fixo.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Reversão no tempo com deslocamento: Essa operação é dada por

$$y(n) = x(k - n)$$

Para determinar $x(k-n)$, considera-se

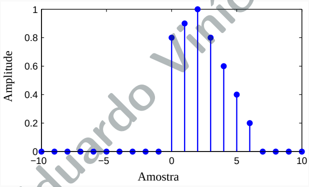
- **1ª forma ($k > 0$):**
  - i) Desloca-se $x(n)$ para a esquerda por k unidades (avanço), obtendo $z(n) = x(n + k)$.
  - ii) Faz-se a reversão no tempo, produzindo $z(-n) = x(-n + k)$
- **2ª forma ($k > 0$):**
  - i) Faz-se a reversão no tempo, obtendo $z(n) = x(-n)$.
  - ii) Desloca-se $z(n)$ para direita k unidades (atraso), produzindo $z(n - k) = x(-n + k)$.

Operação muito utilizada no cálculo da convolução discreta.

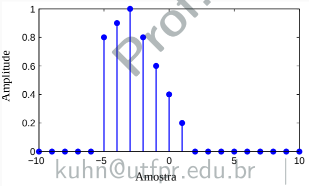
Exemplo: Reversão no tempo com deslocamento

$$y(n) = x(5 - n)$$

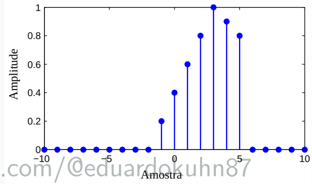
1ª forma:



$z(n) = x(n+5)$



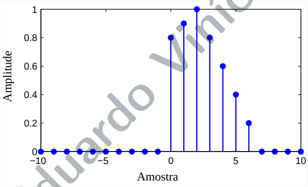
$z(-n) = x(5-n)$



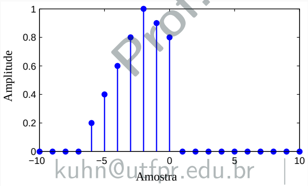
Exemplo: Reversão no tempo com deslocamento

$$y(n) = x(5 - n)$$

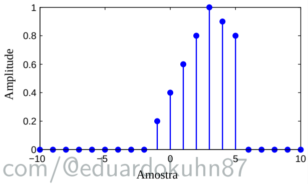
2ª forma:



$z(n) = x(-n)$



$z(n - 5) = x(5 - n)$



Alteração da taxa de amostragem:

$$y(n) = x(Kn), \quad K \in \mathbb{Z}$$

- **Decimação ($K > 1$):**

$$y(n) = x(Kn) \quad \longrightarrow \quad x(0),\, x(K),\, x(2K),\, x(3K), \ldots.$$

A decimação equivale a reduzir a taxa de amostragem.

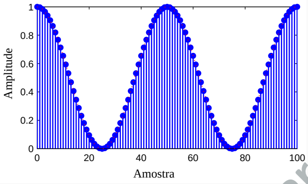
- **Interpolação ($K < 1$):**

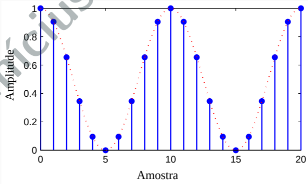
$$y(n) = x(Kn) \quad \longrightarrow \quad \begin{cases} x(n/L), & n = 0,\, \pm L,\, \pm 2L, \ldots \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

A interpolação equivale a aumentar a taxa de amostragem.

Exemplo: Decimação de um sinal

$$y(n) = x(5n)$$





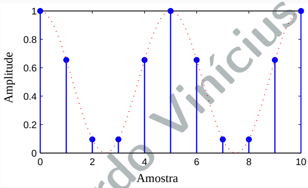
Observações:

- A decimação do sinal equivale a aumentar o período de amostragem, i.e., $T_\mathrm{s} = 0,01\,\mathrm{s} \longrightarrow T'_\mathrm{s} = 5T_\mathrm{s} = 0,05\,\mathrm{s}$.
- Note que aumentando T_s, o número total de amostras produzidas em um dado intervalo reduz pelo mesmo fator.

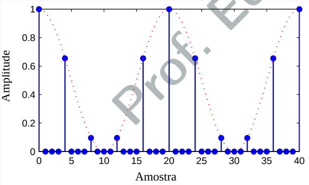
Operações elementares sobre sinais

Exemplo: Interpolação de um sinal

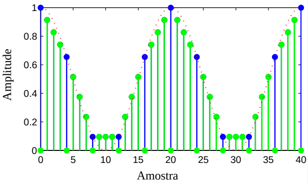
$$y(n) = x(n/4)$$



Sinal expandido $x_e(n)$

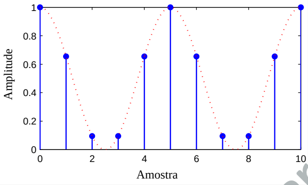


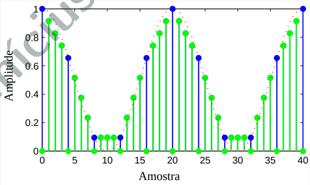
Sinal interpolado $x_i(n)$



Exemplo: Interpolação de um sinal

$$y(n) = x(n/4)$$





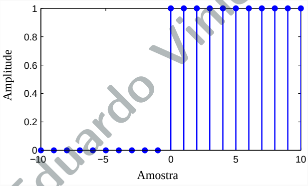
Observações:

- A interpolação do sinal equivale a reduzir o período de amostragem, i.e., $T_\mathrm{s} = 0,1\,\mathrm{s} \longrightarrow T'_\mathrm{s} = T_\mathrm{s}/L = 0,025\,\mathrm{s}$
- Note que reduzindo T_s, o número total de amostras produzidas em um dado intervalo aumenta pelo mesmo fator.
- Observe o erro de estimação devido à interpolação.

Modelos úteis de sinais

1) Degrau unitário

$$u(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$$

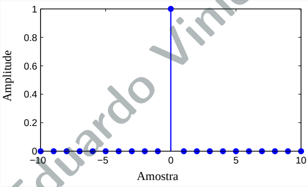


Observações:

- Útil quando deseja-se que um sinal comece em $n = 0$ (causal).
- O que ocorre quando $x(n) = u(-n)$?

2) Função impulso

$$\delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases}$$



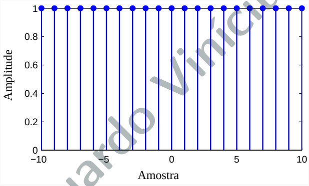
Observações:

- Função delta de Dirac $\delta(t)$
- Função delta de Kronecker $\delta(n)$

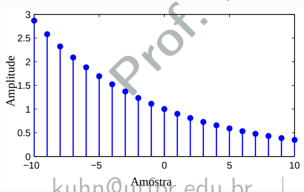
3) Exponencial discreta

$$x(n) = \alpha^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

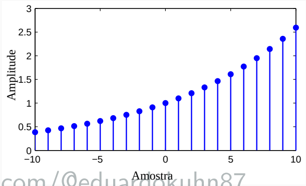
$\alpha = 1$



$\alpha = 0.9$



$\alpha = 1.1$



Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Esboce $x(n) = \alpha^n u(n)$ para $\alpha = e^{a+jb}$

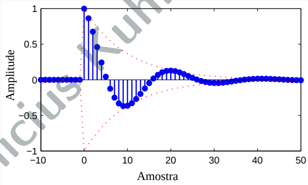
(a) $a < 0$ e $b \neq 0$

(b) $a > 0$ e $b \neq 0$

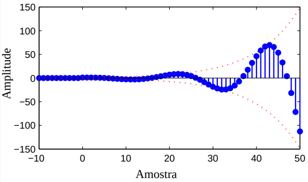
(c) $a = 0$ e $b \neq 0$

Exemplo: Esboce $x(n) = \alpha^n u(n)$ para $\alpha = e^{a+jb}$

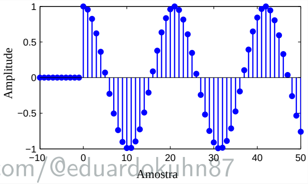
(a) $a < 0$ e $b \neq 0$ $\Longrightarrow$



(b) $a > 0$ e $b \neq 0$ $\Longrightarrow$



(c) $a = 0$ e $b \neq 0$ $\Longrightarrow$



4) Senóide discreta

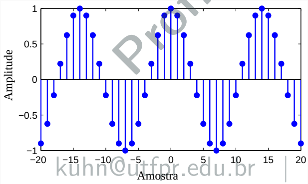
$$x(n) = C\cos(\omega_0 n + \theta), \quad \omega_0 \in \mathbb{R}$$

onde

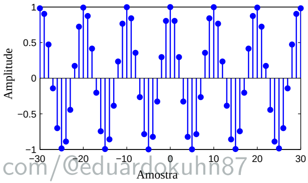
- Amplitude C
- Frequência discreta ω_0 (rad/amostra)
- $\omega_0/2\pi = m/N_0$ (ciclos/amostra) $\leftarrow$ com m e $N_0 \in \mathbb{Z}$
- Fase inicial θ (rad)

Exemplo: $x(n) = \cos[2\pi(m/N_0)n]$

$m/N_0 = 1/14$



$m/N_0 = \sqrt{5}/14$



Demonstração #1: Para verificar a periodicidade de senóides discretas, considere inicialmente que

$$x(n) = e^{+j\omega_0 n}$$

Então, assumindo que $x(n)$ é periódico (com período N_0), tem-se

$$\begin{aligned} x(n) &= x(n \pm N_0) \\ &= e^{+j\omega_0 (n \pm N_0)} \\ &= e^{+j\omega_0 n} e^{\pm j \frac{2\pi m}{N_0} N_0} \\ &= e^{+j\omega_0 n} \underbrace{e^{\pm j 2\pi m}}_{=1\, \forall m \in \mathbb{Z}} \\ &= e^{+j\omega_0 n} \end{aligned}$$

Portanto, é possível concluir que $x(n)$ é periódico se m e $N_0 \in \mathbb{Z}$.

(Apresentar exemplos no MATLAB!)

Modelos úteis de sinais

Demonstração #2: Para verificar a não unicidade de senoides discretas, considere inicialmente que

$$x(n) = e^{+j\omega_0 n}$$

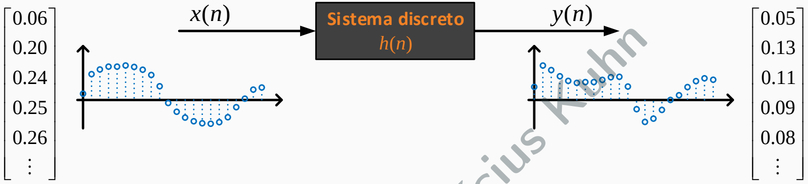
Em seguida, fazendo $\omega_0 = \omega_0 \pm 2\pi m$, verifica-se que

$$\begin{aligned} e^{+j\omega_0 n} &= e^{+j(\omega_0 \pm 2\pi m)n} \\ &= e^{+j\omega_0 n} \underbrace{\pm j2\pi mn}_{=1\,\forall\{m,n\}\in\mathbb{Z}} \\ &= e^{+j\omega_0 n} \end{aligned}$$

Portanto, em contraste com senoides de tempo contínuo, uma senoide discreta com frequência ω_0 é idêntica a outras com frequência $\omega_0 \pm 2\pi m$ com $m \in \mathbb{Z}$.

(Discutir sobre as implicações na TZ e na TFTD!)

Sistemas



Observações:

- Entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ são sinais de tempo discreto.
- A resposta ao impulso $h(n)$ é de tempo discreto.
- Realiza operações sobre a entrada para produzir a saída desejada.
- Os sistemas podem ser
  - Recursivos
  - Não-recursivos
- Sistemas de tempo discreto ou sistemas discretos!

Classificação de sistemas

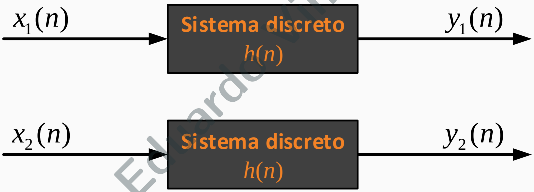
Assim como no caso de sistemas de tempo contínuo, sistemas de tempo discreto podem ser classificados como

1) **Linear ou não linear**
2) **Variante ou invariante no tempo**
3) **Causal ou não causal**
4) **Estável ou instável**
5) **Com ou sem memória**
6) **Inversível ou não inversível**

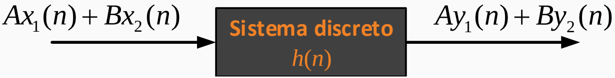
Tais classificações baseiam-se no comportamento observado na entrada $x(n)$ e na saída $y(n)$ do sistema, i.e., na relação entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ do sistema.

1) Linearidade: Um sistema é dito linear quando ele respeita o princípio da superposição, i.e., satisfaz as propriedades da aditividade e homogeneidade.

Para exemplificar, considere que



Então, se o sistema **é linear**, tem-se

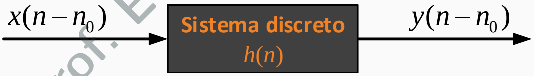


Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

2) Invariância no tempo: Um sistema é considerado invariante no tempo quando um deslocamento sobre $x(n)$ resulta em um deslocamento (igual) em $y(n)$.

Para exemplificar, considere que

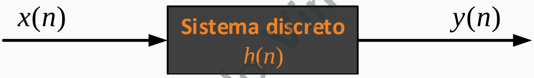
Então, se o sistema **é invariante no tempo**, tem-se



Em contraste, sistemas variantes no tempo não obedecem a relação discutida.

3) Causalidade: Um sistema é dito ser causal quando sua saída $y(n)$, em um dado instante n_0, depende apenas de amostras do sinal de entrada no instante n_0 e/ou em instantes passados.

Para exemplificar, considere que



Então, verifica-se que

- o sistema **é causal (não antecipativo)** quando $y(n)$ depende apenas de $x(n)$, $x(n-1)$, $x(n-2)$, ...$\leftarrow$ (instantes passados)

  ou

- o sistema **é não causal (antecipativo)** quando $y(n)$ depende apenas de $x(n+1)$, $x(n+2)$, ...$\leftarrow$ (instantes futuros)

4) Estabilidade: Um sistema é estável se, para uma entrada limitada, a saída do sistema também é limitada (finita).

Para exemplificar, considere que

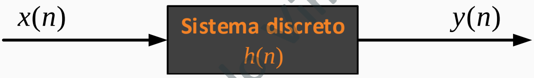
Então, fazendo $x(n) = B$ com $|B| < \infty$, tem-se

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} |y(n)| \to |K|\,|B| < \infty}$$

Logo, o sistema **é estável** do ponto de vista entrada-saída (BIBO estável). Em contraste, quando $\lim_{n\to\infty} |y(n)| \to \infty$, o sistema é dito instável.

5) Memória: Um sistema é dito sem memória se sua saída $y(n)$, para qualquer instante de tempo $n = n_0$, depende apenas de entradas no mesmo instante n_0.

Para exemplificar, considere que



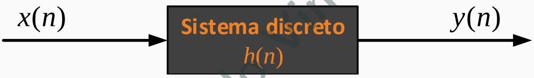
Então, fazendo $n = n_0$, um sistema é

- **sem memória** se $y(n_0) = F[K, x(n_0)]$; e
- **com memória** se $y(n_0) = F[x(n), y(n)]$ com $n \neq n_0$.

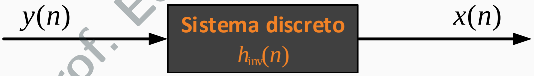
Em sistemas sem memória, $y(n)$ depende apenas de K e/ou $x(n)$.

6) Invertibilidade: Um sistema é dito inversível quando existe um sistema inverso que pode ser colocado em cascata a fim de se obter um sistema identidade.

Para exemplificar, considere que



Então, se



o sistema **é inversível**. Em contraste, se $x(n)$ não pode ser obtido a partir de $y(n)$, tem-se que o sistema é não inversível.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180
kuhn@utfpr.edu.br | youtube.com/@eduardokuhn87

Exemplo: Classifique os sistemas descritos pelas seguintes relações de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$.

(a) $y(n) = 0,5[x(n-1) + x(-n+1)]$

(b) $y(n) = 0,5x(n)$

Exemplo: Classifique os sistemas descritos pelas seguintes relações de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$.

(a) $y(n) = 0,5[x(n-1) + x(-n+1)]$

  i) Linear
  ii) Variante no tempo
  iii) Não causal
  iv) Estável
  v) Com memória
  vi) Inversível (???)

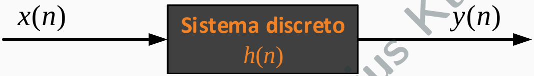
(b) $y(n) = 0,5x(n)$

  i) Linear
  ii) Invariante no tempo
  iii) Causal
  iv) Estável
  v) Sem memória
  vi) Inversível

Equações de diferenças

Equações de diferenças

Como descrever matematicamente a relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ de um sistema discreto?



- Equação linear de diferenças

$$a_0 y(n) + \cdots + a_N y(n-N+1) = b_0 x(n) + \cdots + b_M x(n-M+1)$$

- Resposta ao impulso $h(n)$

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

- Função de transferência $H(z)$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

Estabelecer paralelo com sistemas contínuos.

Forma geral de uma equação linear de diferenças:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k)$$

Então, manipulando a expressão acima, tem-se

$$\begin{aligned} a_0 y(n) + a_1 y(n-1) + \cdots + a_N y(n-N+1) &= \\ b_0 x(n) + b_1(n-1) + \cdots + b_M x(n-M+1) \end{aligned}$$

Logo,

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right]}$$

É importante enfatizar que equações de diferenças possibilitam descrever sistemas discretos lineares!

Forma geral de uma equação linear de diferenças:

$$\boxed{y(n) = \frac{1}{a_0}\left[\sum_{k=0}^{M} b_k x(n-k) - \sum_{k=1}^{N} a_k y(n-k)\right]}$$

Observações:

- A saída $y(n)$ é obtida como uma combinação linear de
  - entradas em diferentes instantes de tempo $x(n)$, $x(n-1)$,... e
  - saídas em diferentes instantes de tempo $y(n-1)$, $y(n-2)$,....
- A ordem da equação de diferenças é dada por $\max(N, M)$.
- Essas equações de diferenças são facilmente implementáveis como algoritmos computacionais.
- Tais algoritmos podem ser executados em computadores, microcontroladores e/ou DSPs.

Exemplo: Calcule $y(n)$ para

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n)$$

com $y(-1) = 0$ e $x(n) = u(n)$.

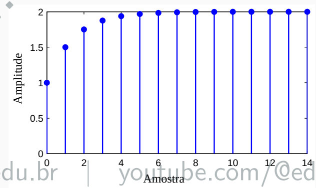
Exemplo: Calcule $y(n)$ para

$$y(n) - 0,5y(n-1) = x(n)$$

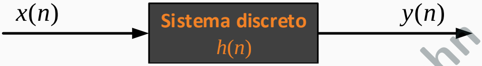
com $y(-1) = 0$ e $x(n) = u(n)$.

Resposta: Visto que $y(n) = x(n) + 0,5y(n-1)$, tem-se

$$\begin{aligned} n = 0 \quad &\Rightarrow \quad y(0) = x(0) + 0.5y(-1) = 1 \\ n = 1 \quad &\Rightarrow \quad y(1) = x(1) + 0.5y(0) = 1,5 \\ n = 2 \quad &\Rightarrow \quad y(2) = x(2) + 0.5y(1) = 1,75 \\ &\vdots \end{aligned}$$



Resposta do sistema
Entrada zero e estado zero



Como já discutido, a **resposta de sistemas lineares** pode ser expressa como

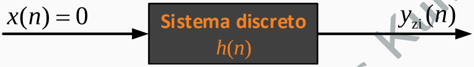
$$y(n) = y_{\mathrm{zs}}(n) + y_{\mathrm{zi}}(n)$$

onde

$$y_{\mathrm{zi}}(n) \longrightarrow \text{Resposta à entrada zero}$$

$$y_{\mathrm{zs}}(n) \longrightarrow \text{Resposta ao estado zero}$$

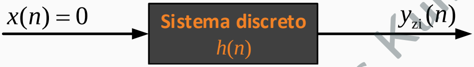
i) Resposta à entrada zero:



Exemplo: $y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

i) Resposta à entrada zero:



Exemplo: $y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$

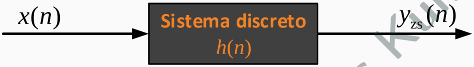
$$
\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y_{zi}(0) = a_1 y_{zi}(-1) \\
n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad y_{zi}(1) = a_1 y_{zi}(0) = a_1^2 y_{zi}(-1) \\
n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad y_{zi}(2) = a_1 y_{zi}(1) = a_1^3 y_{zi}(-1) \\
&\quad\;\vdots
\end{aligned}
$$

Note que a resposta do sistema a entrada zero depende apenas de condições internas (condições iniciais).

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Resposta do sistema: Entrada zero e estado zero

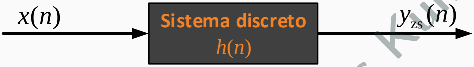
ii) Resposta ao estado zero:



$$y(-1) = y(-2) = \cdots = y(-N) = 0$$

Exemplo: $y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$

ii) Resposta ao estado zero:



$$y(-1) = y(-2) = \cdots = y(-N) = 0$$

Exemplo: $y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$

$$n = 0 \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{zs}}(0) = x(0) + a_1 y_{\text{zs}}(-1) = x(0)$$

$$n = 1 \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{zs}}(1) = x(1) + a_1 y_{\text{zs}}(0) = x(1) + a_1 x(0)$$

$$n = 2 \quad \Longrightarrow \quad y_{\text{zs}}(2) = x(2) + a_1 y_{\text{zs}}(1) = x(2) + a_1 x(1) + a_1^2 x(0)$$

$$\vdots$$

Note que a resposta do sistema a entrada externa depende apenas de $x(n)$, isto é, $y(-1) = y(-2) = \cdots = 0$.

iii) Resposta completa:

$$y(n) = y_{\text{zi}}(n) + y_{\text{zs}}(n)$$

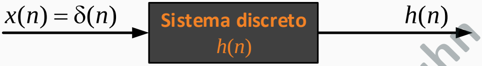
Então, substituindo $y_{\text{zi}}(n)$ e $y_{\text{zs}}(n)$, obtém-se

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad y(0) = y_{\text{zi}}(0) + y_{\text{zs}}(0) \\
&\qquad\qquad\;\; = a_1 y_{\text{zi}}(-1) + x(0) \\
n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad y(1) = y_{\text{zi}}(1) + y_{\text{zs}}(1) \\
&\qquad\qquad\;\; = a_1^2 y_{\text{zi}}(-1) + x(1) + a_1 x(0) \\
n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad y(2) = y_{\text{zi}}(2) + y_{\text{zs}}(2) \\
&\qquad\qquad\;\; = a_1^3 y_{\text{zi}}(-1) + x(2) + a_1 x(1) + a_1^2 x(0) \\
&\qquad\qquad\;\; \vdots
\end{aligned}$$

Embora a solução iterativa seja útil em certas situações, é interessante obter uma solução analítica para $y(n)$ dado $x(n)$.

Resposta ao impulso

Resposta ao impulso



A **resposta ao impulso** $h(n)$ é obtida aplicando um impulso $\delta(n)$ a entrada do sistema e considerando condições iniciais nulas [i.e., $h(-1) = \cdots = h(-N) = 0$].

$$\boxed{x(n) = \delta(n) \quad \Longrightarrow \quad h(n) = \frac{b_0}{a_0}\delta(n) + h_c(n)u(n)}$$

- Se o sistema é causal, então $h(n) = 0$ para $n < 0$!
- Para $n = 0$, $h(n)$ pode ter um valor não nulo.
- Para $n > 0$, a resposta do sistema é constituída apenas pelos modos característicos.

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Considerando o método iterativo, obtenha $h(n)$ para

$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$$

Exemplo: Considerando o método iterativo, obtenha $h(n)$ para

$$y(n) = x(n) + a_1 y(n-1)$$

Resposta: Para $x(n) = \delta(n)$, tem-se

$$h(n) = \delta(n) + a_1 h(n-1)$$

Logo, lembrando que $h(-1) = \cdots = h(-N) = 0$,

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad h(0) = \delta(0) + a_1 h(-1) \quad &\Longrightarrow \quad h(0) = 1 \\
n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad h(1) = \delta(1) + a_1 h(0) \quad &\Longrightarrow \quad h(1) = a_1 \\
n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad h(2) = \delta(2) + a_1 h(1) \quad &\Longrightarrow \quad h(2) = a_1^2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Portanto, por inspeção verifica-se que

$$\boxed{h(n) = a_1^n u(n)}$$

Exemplo: Considerando o método iterativo, obtenha $h(n)$ para

$$y(n) - 0,6y(n-1) - 0,16y(n-2) = 5x(n)$$

Exemplo: Considerando o método iterativo, obtenha $h(n)$ para

$$y(n) - 0,6y(n-1) - 0,16y(n-2) = 5x(n)$$

Resposta: Para $x(n) = \delta(n)$, tem-se

$$\begin{aligned}
n = 0 \quad &\Longrightarrow \quad h(0) = 5\delta(0) + 0,6h(-1) + 0,16h(-2) \\
&\qquad\quad\;\; = 5 \\
n = 1 \quad &\Longrightarrow \quad h(1) = 5\delta(1) + 0,6h(0) + 0,16h(-1) \\
&\qquad\quad\;\; = 3 \\
n = 2 \quad &\Longrightarrow \quad h(2) = 5\delta(2) + 0,6h(1) + 0,16h(0) \\
&\qquad\quad\;\; = 2,6 \\
&\qquad\quad\;\; \vdots
\end{aligned}$$

Contudo, o método iterativo nem sempre resulta em uma solução fechada para $h(n)$.

Como obter uma solução fechada para $h(n)$?

Primeiramente, a expressão que descreve a relação de entrada $x(n)$ e saída $y(n)$ é reescrita utilizando o operador de avanço E como

$$\begin{aligned} y(n+2) - 0,6y(n+1) - 0,16y(n) &= 5x(n+2) \\ (E^2 - 0,6E - 0,16)y(n) &= 5E^2x(n) \end{aligned}$$

Logo, o polinômio característico pode ser escrito como

$$E^2 - 0,6E - 0,16 = (E + 0,2)(E - 0,8)$$

Então,

$$h(n) = [c_1(-0,2)^n + c_2(0,8)^n]u(n)$$

restando apenas determinar c_1 e c_2 em $h(n)$.

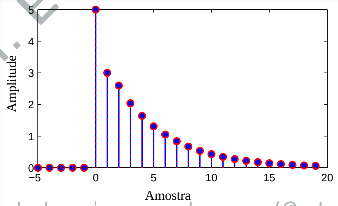
Para determinar c_1 e c_2, faz-se

$$\begin{cases} n=0 \implies h(0) = 5 \\ n=1 \implies h(1) = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} c_1 + c_2 = 5 \\ c_1(-0,2) + c_2(0,8) = 3 \end{cases}$$

Portanto,

$$\boxed{h(n) = [(-0,2)^n + 4(0,8)^n]u(n)}$$

Graficamente:



Convolução

Como determinar $y(n)$ para uma entrada arbitrária?

Primeiramente, considere que

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k)$$

Então, devido a linearidade e invariância no tempo de $h(n)$, tem-se

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \implies \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Logo, o **somatório de convolução** é obtido como

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)}$$

Convolução

1) Para um sistema LIT,

$$\delta(n) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema discreto}\\ h(n)\end{array}} \longrightarrow h(n)$$

2) Então, devido a invariância no tempo, tem-se

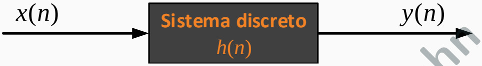
$$\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema discreto}\\ h(n)\end{array}} \longrightarrow h(n-k)$$

3) Agora, devido a linearidade,

$$x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema discreto}\\ h(n)\end{array}} \longrightarrow x(k)h(n-k)$$

4) Novamente, devido a linearidade, obtém-se

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)\delta(n-k) \longrightarrow \boxed{\begin{array}{c}\text{Sistema discreto}\\ h(n)\end{array}} \longrightarrow y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$



Portanto, a partir da resposta ao impulso $h(n)$ do sistema, é possível determinar a saída $y(n)$ para uma entrada arbitraria $x(n)$ através de

$$\boxed{y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)}$$

É importante destacar que o somatório de convolução é usualmente expresso utilizando a notação compacta, i.e.,

$$x(n) * h(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

Propriedades da convolução:

1) Comutatividade:

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) = x_2(n) * x_1(n)}$$

2) Distributividade:

$$\boxed{x_1(n) * [x_2(n) + x_3(n)] = x_1(n) * x_2(n) + x_1(n) * x_3(n)}$$

3) Associatividade:

$$\boxed{x_1(n) * [x_2(n) * x_3(n)] = [x_1(n) * x_2(n)] * x_3(n)}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Propriedades da convolução:

4) Deslocamento:

$$\boxed{x_1(n) * x_2(n) = c(n) \quad \Rightarrow \quad x_1(n-p) * x_2(n-q) = c(n-p-q)}$$

5) Convolução com um impulso:

$$\boxed{x(n) * \delta(n) = x(n)}$$

6) Comprimento:

$$\boxed{\underbrace{x_1(n)}_{L_1} * \underbrace{x_2(n)}_{L_2} = \underbrace{c(n)}_{L_1+L_2-1}}$$

Convolução

Demonstração: Considere inicialmente que

$$c(n) = x_1(n) * x_2(n)$$

Então, para

$$y(n) = x_1(n-p) * x_2(n-q)$$

é possível verificar que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_1(k-p)x_2(n-k-q) \quad \longleftarrow \quad l = k-p$$

$$= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x_1(l)x_2(n-l-p-q)$$

Portanto,

$$\boxed{y(n) = c(n-p-q)}$$

Créditos: Oclécio Monaco Torrilhas Junior (2019/1).

Exemplo: Determine $y(n) = x(n) * h(n)$ para

$$x(n) = (0,8)^n u(n) \quad \text{e} \quad h(n) = (0,3)^n u(n)$$

Exemplo: Determine $y(n) = x(n) * h(n)$ para

$$x(n) = (0,8)^n u(n) \quad \text{e} \quad h(n) = (0,3)^n u(n)$$

Resposta: Substituindo $x(n)$ e $h(n)$ no somatório de convolução, obtém-se

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{(0,8)^k u(k)}_{\neq 0,\, k\geq 0} \underbrace{(0,3)^{n-k} u(n-k)}_{\neq 0,\, n-k\geq 0 \,\to\, k\leq n}, \quad n \geq 0$$

$$= (0,3)^n \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{0,8}{0,3}\right)^k, \quad n \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{y(n) = 2[(0,8)^{n+1} - (0,3)^{n+1}]u(n)}$$

Somatório de convolução:

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

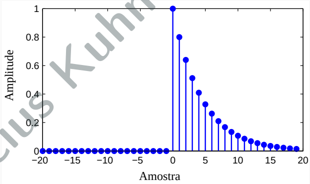
Procedimento gráfico da convolução:

1) Inverta $h(k)$ para produzir $h(-k)$.
2) Desloque $h(-k)$ por n unidades para obter $h(n-k)$, lembrando que
   - Para $n > 0$, o deslocamento é para a direita (atraso).
   - Para $n < 0$, o deslocamento é para a esquerda (avanço).
3) Então, multiplique $x(k)$ por $h(n-k)$ e some todos os produtos para obter $y(n)$, repetindo para cada valor de n na faixa de $-\infty$ a ∞.

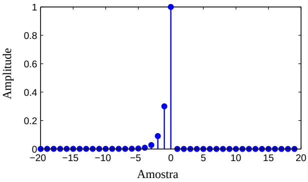
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Procedimento gráfico:

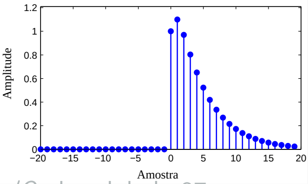
Sinal de entrada $x(k)$: $\Longrightarrow$



Resposta ao impulso $h(-k)$: $\Longrightarrow$



Sinal de saída $y(n)$: $\Longrightarrow$



Exemplo: Determine $y(n) = x(n) * h(n)$ para

$$x(n) = u(n) \quad \text{e} \quad h(n) = u(n)$$

Exemplo: Determine $y(n) = x(n) * h(n)$ para

$$x(n) = u(n) \quad \text{e} \quad h(n) = u(n)$$

Resposta: Substituindo $x(n)$ e $h(n)$ no somatório de convolução, obtém-se

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{u(k)}_{k\geq 0}\underbrace{u(n-k)}_{k\leq n}, \quad n \geq 0$$

$$= \sum_{k=0}^{n} 1, \quad n \geq 0$$

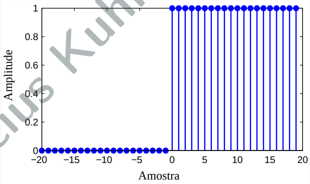
$$\Rightarrow \quad \boxed{y(n) = (n+1)u(n)}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

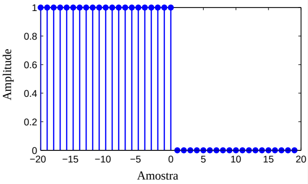
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Procedimento gráfico:

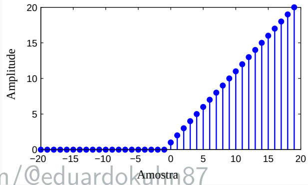
Sinal de entrada $x(k)$: $\Longrightarrow$



Resposta ao impulso $h(-k)$: $\Longrightarrow$



Sinal de saída $y(n)$: $\Longrightarrow$



Resposta ao impulso
Causalidade, estabilidade e memória

1) Causalidade: Dado que

$$\begin{aligned} y(n) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)h(n-k) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k) \end{aligned}$$

um sistema é dito causal se

$$y(n) = 0, \quad n < 0$$

Então, considerando

$$x(n) = 0, \quad n < 0$$

verifica-se que

$$\boxed{h(n) = 0, \quad n < 0}$$

2) Estabilidade (BIBO): Dado que

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

é possível inferir que

$$|y(n)| = \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)\right| \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)||x(n-k)|$$

Então, assumindo que $|x(n-k)| < \infty$, verifica-se que o sistema é BIBO estável se

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty}$$

3) Memória: Partindo de

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k)x(n-k)$$

e assumindo que

$$\boxed{h(n) = K\delta(n)}$$

é possível verificar que o **sistema é sem memória**

$$\begin{aligned} y(n) &= Kx(n) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(k) \\ &= Kx(n). \end{aligned}$$

Caso a resposta ao impulso tenha um formato diferente, é possível demonstrar que o sistema tem memória.

Exemplo: A partir de $h(n)$, determine se o sistema é

i) Causal
ii) Estável
iii) Sem memória

(a) $h(n) = (0,8)^n u(n)$

(b) $h(n) = 2^n u(-n)$

(c) $h(n) = nu(n)$

(d) $h(n) = 2^n[u(n) - u(n-1)]$

Exemplo: A partir de $h(n)$, determine se o sistema é

i) Causal

ii) Estável

iii) Sem memória

(a) $h(n) = (0,8)^n u(n)$

Resposta: Causal, estável, com memória

(b) $h(n) = 2^n u(-n)$

Resposta: Anti-causal, estável, com memória

(c) $h(n) = nu(n)$

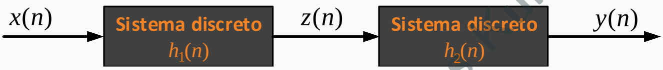
Resposta: Causal, instável, com memória

(d) $h(n) = 2^n[u(n) - u(n-1)]$

Resposta: Causal, estável, sem memória

Sistemas interconectados

Interconexão de sistemas em cascata/série:



Assim,

$$z(n) = x(n) * h_1(n) \quad \Longleftrightarrow \quad y(n) = z(n) * h_2(n)$$

Portanto, pela propriedade associativa, tem-se

$$\boxed{y(n) = x(n) * [h_1(n) * h_2(n)]}$$

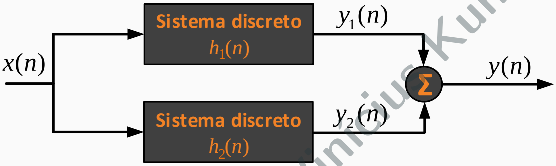
ou ainda

$$\boxed{h(n) = h_1(n) * h_2(n)}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná

lattes.cnpq.br/2456654064380180

Interconexão de sistemas em paralelo:



Assim,

$$y_1(n) = x(n) * h_1(n) \iff y_2(n) = x(n) * h_2(n)$$

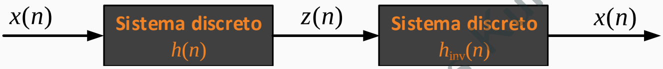
Portanto, pela propriedade distributiva, tem-se

$$\boxed{y(n) = y_1(n) + y_2(n) = x(n) * [h_1(n) + h_2(n)]}$$

ou ainda

$$\boxed{h(n) = h_1(n) + h_2(n)}$$

Interconexão com sistema inverso:



Assim,

$$z(n) = x(n) * h(n) \quad \Longleftrightarrow \quad y(n) = z(n) * h_{\mathrm{inv}}(n)$$

Portanto, pela propriedade associativa, tem-se

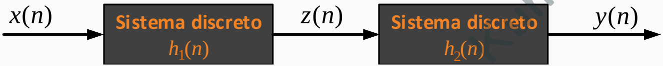
$$\boxed{y(n) = z(n) * h_{\mathrm{inv}}(n) = x(n) * [h(n) * h_{\mathrm{inv}}(n)]}$$

ou ainda

$$\boxed{h(n) * h_{\mathrm{inv}}(n) = \delta(n)}$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180
kuhn@utfpr.edu.br | youtube.com/@eduardokuhn87

Exemplo: Considerando que

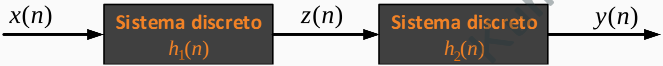


determine a resposta do sistema completo dado que

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \quad \text{e} \quad y(n) = z(n) - z(n-1)$$

Universidade Tecnológica Federal do Paraná
lattes.cnpq.br/2456654064380180

Exemplo: Considerando que



determine a resposta do sistema completo dado que

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \quad \text{e} \quad y(n) = z(n) - z(n-1)$$

Resposta: Primeiramente, determina-se $h_1(n)$ e $h_2(n)$, i.e.,

$$z(n) = \sum_{k=-\infty}^{n} x(k) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h_1(n) = u(n)}$$

e

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \quad \Longrightarrow \quad \boxed{h_2(n) = \delta(n) - \delta(n-1)}$$

Logo, visto que

$$\begin{aligned} y(n) &= z(n) * h_2(n) \\ &= [x(n) * h_1(n)] * h_2(n) \\ &= x(n) * [h_1(n) * h_2(n)] \end{aligned}$$

tem-se

$$\begin{aligned} h(n) &= h_1(n) * h_2(n) \\ &= u(n) * [\delta(n) - \delta(n-1)] \\ &= u(n) - u(n-1) \quad \Rightarrow \boxed{h(n) = \delta(n)} \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$y(n) = x(n) * h(n) \quad \Rightarrow \boxed{y(n) = x(n)}$$

Portanto, o sistema inverso de $h_1(n)$ ("integrador") é $h_2(n)$ ("diferenciador") e vice-versa.

Resumo e discussão

Resumo e discussão

- **Classificação de sinais:** Energia, potência, periódico, causal...
- **Modelos úteis de sinais:** Impulso, degrau unitário, exponencial discreta...
- **Operações elementares:** Atraso, reversão, alteração de taxa de amostragem...
- **Uma senoide discreta é periódica caso m/N_0 seja racional, i.e., m e $N_0 \in \mathbb{Z}$.**
- **Classificação de sistemas:** Linear, invariante no tempo, causal, estável e sem memória
- **Resposta ao impulso:** Causalidade, estabilidade, memória
- **Convolução discreta**
- **Interconexão de sistemas: Cascata/série e paralelo**

Para a próxima aula

Para revisar e fixar os conceitos apresentados até então, recomenda-se a seguinte leitura:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (pp. 287)

Para a próxima aula, favor realizar a leitura do seguinte material:

B.P. Lathi, *Sinais e Sistemas Lineares*, 2ª ed., Porto Alegre, RS: Bookman, 2008 $\longrightarrow$ (Capítulo 5)

Até a próxima aula... =)