# Sistemas Digitais

ET46B

Prof. Eduardo Vinicius Kuhn

kuhn@utfpr.edu.br Curso de Engenharia Eletrônica Universidade Tecnológica Federal do Paraná



Capítulo 3 Descrevendo circuitos lógicos

#### Conteúdo

- 3.1 Constantes e variáveis booleanas
- 3.2 Tabelas-verdade
- 3.3 Operação e porta OR
- 3.4 Operação e porta AND
- 3.5 Operação e porta NOT
- 3.6 Descrevendo circuitos lógicos algebricamente
- 3.7 Avaliando as saídas dos circuitos lógicos
- 3.8 Implementando circuitos a partir de expressões booleanas
- 3.9 Portas NOR e NAND
- 3.10 Teoremas booleanos
- 3.11 Teoremas de DeMorgan
- 3.12 Universalidade das portas NOR e NAND
- 3.15 Atraso de propagação

# Objetivos

- Introduzir as três operações lógicas básicas (OR, AND e NOT).
- Descrever a operação e construir tabelas-verdade para as portas OR, NOR, AND, NAND e NOT.
- Obter expressões booleanas descrevendo circuitos lógicos.
- Implementar circuitos usando portas lógicas a partir de expressões booleanas.
- Mostrar como os teoremas da álgebra booleana podem ser usados para simplificar expressões lógicas.
- Demonstrar a universalidade das portas NOR e NAND.
- Discutir sobre o tempo de atraso de propagação.

#### Introdução

- Álgebra convencional não é adequada para lidar com circuitos digitais, uma vez que as variáveis podem assumir valores reais.
- Na álgebra booleana, as variáveis só podem assumir apenas dois "valores" distintos (i.e., 0 ou 1).
  - Proposta por George Boole (1854) e levada para o mundo dos circuitos digitais por Claude Shannon (1930).
  - ...introduz símbolos e operadores "próprios".
  - Torna possível descrever, manipular e simplificar expressões lógicas.
- Portanto, é uma ferramenta poderosa de análise, síntese e documentação para circuitos lógicos, tal como tabelas-verdade, símbolos, diagramas esquemáticos e diagramas de tempo.

#### Constantes e variáveis booleanas

- Constantes e variáveis booleanas podem assumir apenas dois "valores", i.e., 0 ou 1.
- As variáveis booleanas 0 e 1 representam efetivamente um estado/nível lógico.
- Outros termos são, comumente, usados como sinônimos desses níveis lógicos.

Lógico 0	Lógico 1	
Falso	Verdadeiro	
Baixo	Alto	
Desligado	Ligado	
Não	Sim	
Aberto	Fechado	

O valor booleano 0 pode representar qualquer tensão na faixa de 0–0,8~V, enquanto 1 pode representar qualquer tensão na faixa de 2–5~V.

#### Constantes e variáveis booleanas

- As entradas (e.g., A, B, C, ...) e saídas (e.g., x, y, z, ...)
  de um circuito lógico são consideradas variáveis lógicas.
- Os níveis lógicos da(s) entrada(s) determinam, a qualquer momento, os níveis lógicos da(s) saída(s).
- A álgebra booleana permite expressar relações entre entradas e saídas (variáveis e constantes) de um circuito.

$$x = (A+0)\overline{CD} + \overline{(\overline{A}+C)(B+\overline{D})} + B(\overline{C}+1)D$$

- Variáveis booleanas, em momentos diferentes, podem assumir níveis lógicos 0 ou 1 (se não for um nível lógico, será o outro).
- Constantes booleanas são pontos no circuito onde os níveis lógicos <u>não se alteram</u> ao longo do tempo (são sempre 0 ou 1).

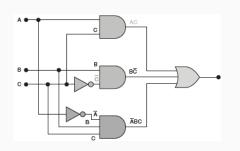
A álgebra booleana tem, de fato, apenas

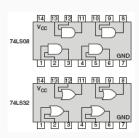
três operações básicas (operações lógicas):

OR. AND e NOT

#### Constantes e variáveis booleanas

Em nosso mundo digital, essas operações são realizadas por portas lógicas construídas com transistores.



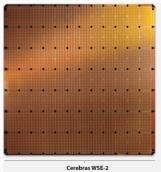


#### Exemplo:



## Curiosidade

Porta/Função	Número de Transistores
NOT	2
Buffer	4
NAND 2-input	4
NOR 2-input	4
AND 2-input	6
OR 2-input	6
NAND 3-input	6
NOR 3-input	6
MUX 2-input with TG	6
MUX 4-input with TG	18
MUX 4-input	24
1-bit Adder full	28
1-bit Adder-subtractor	48
8-bit multiplier	3,000
16-bit multiplier	9,000
32-bit multiplier	21,000

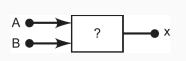




Cerebras WSE-2 46,225mm² Silicon 2.6 Trillion transistors Largest GPU 826mm<sup>2</sup> Silicon 54.2 Billion transistors

#### Tabelas-verdade

Uma tabela-verdade descreve como a saída x de um circuito lógico depende dos níveis lógicos das entradas (e.g., A e B).



$\overline{A}$	В	x
0	0	1
0	1	0
1	0	1
1	1	0

- A lista das combinações possíveis é usualmente uma sequência de contagem binária; logo, é fácil preencher uma tabela-verdade sem esquecer nenhuma combinação.
- Caso o circuito lógico tenha mais entradas, basta adicionar mais colunas (e.g., C, D, E...).
- O número de linhas é  $2^N$ , sendo N o número de entradas.

Na álgebra booleana, a operação OR é representada por '+', i.e.,

$$x = A + B$$

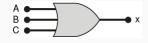
a qual é lida como 'x é igual a A OU B'.

Com respeito a tabela-verdade e símbolo,

	C	PR		
Α	В	x = A + B		
0	0	0	$A \longrightarrow X = A + B$	
0	1	1		
1	0	1	B —	
1	1	1		
			Porta OR	

Note que x assume nível lógico 1 caso <u>ao menos uma</u> entrada seja 1; caso contrário, x assume nível lógico 0.

**Exemplo:** Determine a saída x para uma porta OR de 3 entradas  $(A, B \in C)$ .



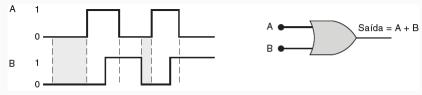
**Exemplo:** Determine a saída x para uma porta  $\mathsf{OR}$  de 3 entradas  $(A, B \in C)$ .



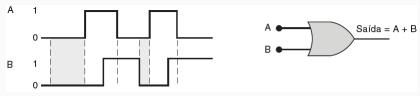
R:

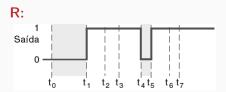
$\overline{A}$	B	C	x
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

**Exemplo:** Determine a saída da porta OR nos diferentes instantes de tempo indicados.



**Exemplo:** Determine a saída da porta OR nos diferentes instantes de tempo indicados.





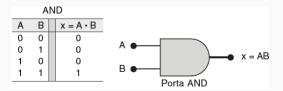
Entre  $t_0$ – $t_1$  e  $t_4$ – $t_5$ , a saída assume nível lógico 0; em contraste, assume nível lógico 1 em todos os outros intervalos.

Na álgebra booleana, a operação AND é representada por '·' (comumente omitido por simplicidade), i.e.,

$$x = A \cdot B$$

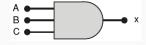
a qual é lida como 'x é igual a  $A \to B$ '.

Com respeito a tabela-verdade e símbolo,

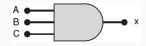


Note que x assume nível lógico 1 caso <u>todas</u> as entradas sejam 1; caso contrário, x assume nível lógico 0.

**Exemplo:** Determine a saída x para uma porta AND de 3 entradas  $(A, B \in C)$ .



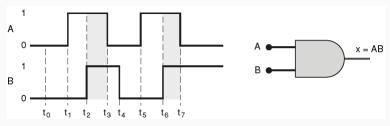
**Exemplo:** Determine a saída x para uma porta AND de 3 entradas  $(A, B \in C)$ .



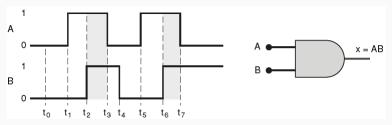
R:

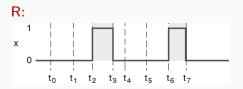
			-
A	B	C	x
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	0
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

**Exemplo:** Determine a saída da porta AND nos diferentes instantes de tempo indicados.



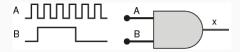
**Exemplo:** Determine a saída da porta AND nos diferentes instantes de tempo indicados.





A saída assume nível lógico 1 apenas entre  $t_2$ - $t_3$  e  $t_6$ - $t_7$ .

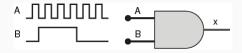
Exemplo: Considerando



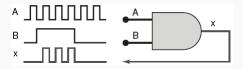
a) Qual a forma de onda da saída da porta AND?

b) E, caso a entrada B seja mantida em nível lógico 0?

#### Exemplo: Considerando



a) Qual a forma de onda da saída da porta AND?R:



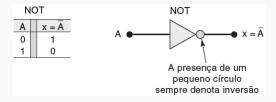
b) E, caso a entrada B seja mantida em nível lógico 0? R: Nesse caso, a porta AND é usada como circuito inibidor, já que B=0 implica x=0; por outro lado, quando B=1, tem-se a condição de habilitação, fazendo x=A.

Na álgebra booleana, a operação NOT é representada por '-' (ou, eventualmente, por '′'), i.e.,

$$x = \overline{A}$$
 ou  $x = A'$ 

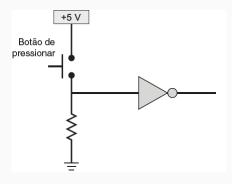
a qual é lida como 'x é igual a A negado' (complemento de A).

Com respeito a tabela-verdade e símbolo,

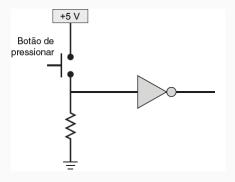


Note que x assume o nível lógico oposto ao aplicado na entrada A.

**Exemplo:** Explique o funcionamento da porta NOT na aplicação (típica) ilustrada na figura.



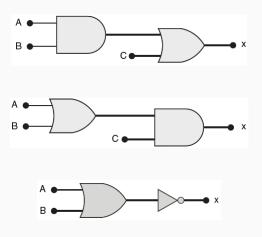
**Exemplo:** Explique o funcionamento da porta NOT na aplicação (típica) ilustrada na figura.



R: Nessa aplicação, quando o botão é pressionado, tem-se nível lógico 0 na saída da porta NOT (inversora).

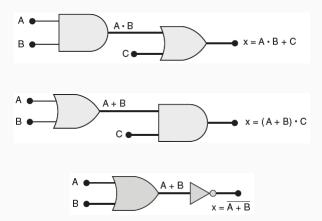
# Qualquer circuito lógico pode ser descrito usando as 3 operações booleanas básicas (OR, AND e NOT).

**Exemplo**: Determine as expressões booleanas que descrevem a relação entre as entradas e a saída dos seguintes circuitos lógicos:

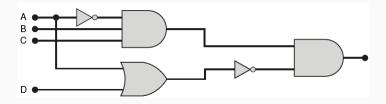


**Exemplo**: Determine as expressões booleanas que descrevem a relação entre as entradas e a saída dos seguintes circuitos lógicos:

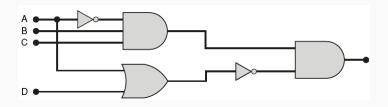
R:



**Exemplo:** Determine a expressão booleana que descreve o seguinte circuito lógico:



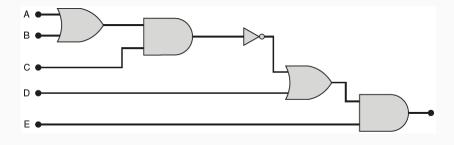
**Exemplo:** Determine a expressão booleana que descreve o seguinte circuito lógico:



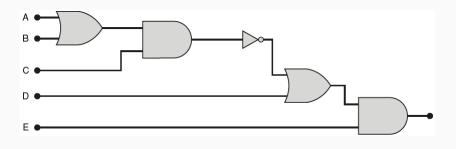
R:

$$x = \overline{A}BC\overline{(A+D)}$$

**Exemplo:** Determine a expressão booleana que descreve o seguinte circuito lógico:



**Exemplo:** Determine a expressão booleana que descreve o seguinte circuito lógico:



R:

$$x = [D + \overline{(A+B)C}]E$$

# Avaliando as saídas dos circuitos lógicos

A partir da expressão booleana que descreve um circuito, pode-se determinar o nível lógico da saída para uma dada entrada. Para tal, deve-se:

- i) atribuir o nível lógico às entradas; e, então,
- ii) avaliar a expressão usando a álgebra booleana.

Eventualmente, podem surgir dúvidas quanto a qual operação deve ser avaliada primeiro. Nesse contexto, lembre-se:

Precedência de operadores			
Operador	Operador Símbolo		
NOT	ou ′	Mais alta	
AND	•	Média	
ΠR	_	Mais haixa	

Avalie primeiro as expressões contidas entre parênteses.

# Avaliando as saídas dos circuitos lógicos

#### Especificamente, as seguintes regras devem ser obedecidas:

- 1) Avalie as expressões dentro de parênteses.
- 2) Realize as operações NOT "simples" (uma variável).
  - Caso uma operação NOT envolva mais de uma variável, resolva a expressão e, em seguida, "inverta" o resultado.
- 3) Execute as operações AND e, então, OR.

A ordem das operações é a mesma da álgebra convencional.

# Avaliando as saídas dos circuitos lógicos

**Exemplo:** Determine a saída x = [D + (A + B)C]E quando

a) 
$$A = B = 0$$
 e  $C = D = E = 1$ 

b) 
$$A = B = E = 0$$
 e  $C = D = 1$ 

**Exemplo:** Determine a saída  $x = [D + (A + \overline{B})\overline{C}]E$  quando

a) 
$$A = B = 0$$
 e  $C = D = E = 1$ 

b) 
$$A = B = E = 0$$
 e  $C = D = 1$ 

R:

a)

$$x = [1 + \overline{(0+0)1}]1$$
  
=  $[1 + \overline{0}]1$   
= 1.

b)

$$x = [1 + \overline{(0+0)1}]0$$
  
= 0.

Lembre-se da precedência de operadores, i.e.,  $(\ ) o \mathtt{NOT} o \mathtt{AND} o \mathtt{OR}.$ 

E, se quiséssemos avaliar/verificar o

frente a todos os casos possíveis?

funcionamento de um dado circuito lógico

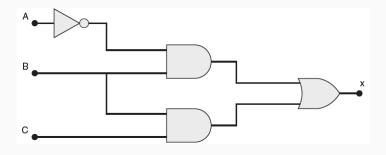
A melhor maneira de verificar como um circuito lógico funciona se dá através de sua tabela-verdade, a qual lista todas as possíveis combinações de entrada.

Dessa forma, torna-se possível:

- Analisar uma porta ou combinação lógica de cada vez.
- Conferir se a implementação está correta.
- Identificar pontos de erros do circuito lógico.

Para cada possível combinação de entrada, determina-se o estado lógico em cada ponto (nó) do circuito lógico, inclusive a saída.

**Exemplo:** Determine a tabela-verdade do circuito combinacional ilustrado na figura.



R: Considerando que a saída do circuito lógico é dada por

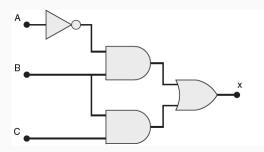
$$x = \overline{A}B + BC$$

é possível mostrar que

А	В	С	<u>u</u> = A	<u>v</u> = AB	w= BC	X= V+W
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1 0		1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0 0		0
1	1	1	0	0	1	1

A partir de uma tabela-verdade, pode-se então testar o circuito para todas as combinações de entradas, e.g.,

- Se uma combinação de entrada produzir uma saída incorreta, basta verificar o nível lógico de cada nó intermediário.
- Se o nível lógico de um nó intermediário está correto, o problema está à direita; caso contrário, à esquerda desse nó.



Α	В	С	<u>u</u> = A	<u>v</u> = AB	w= BC	X= V+W
0	0	0	1	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	0	1
0	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	0	0
1	1	0	0	0	0	0
1	1	1	0	0	1	1

O diagrama de um circuito lógico pode ser obtido diretamente a partir de uma dada

expressão booleana.

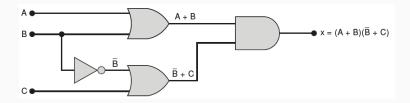
**Exemplo:** Desenhe o diagrama do circuito que implementa a seguinte expressão lógica:

$$x = (A + B)(\overline{B} + C).$$

**Exemplo:** Desenhe o diagrama do circuito que implementa a seguinte expressão lógica:

$$x = (A+B)(\overline{B}+C).$$

R:



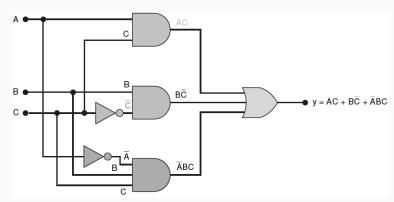
**Exemplo:** Desenhe o diagrama do circuito que implementa a seguinte expressão lógica:

$$y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC.$$

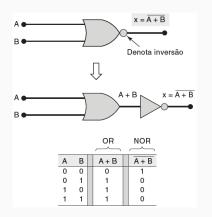
**Exemplo:** Desenhe o diagrama do circuito que implementa a seguinte expressão lógica:

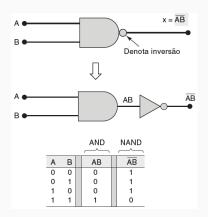
$$y = AC + B\overline{C} + \overline{A}BC.$$

#### R:



#### Portas NOR e NAND





Exceto pelo pequeno círculo na saída, que representa a operação de "inversão", os símbolos das portas NOR e NAND são iguais às portas OR e AND, respectivamente.

#### Portas NOR e NAND

**Exemplo:** Implemente o circuito lógico cuja expressão booleanada é dada por

$$x = \overline{AB\overline{(C+D)}}$$

usando apenas portas NOR e NAND. E, em seguida, determine o nível lógico da saída quando A=B=C=1 e D=0.

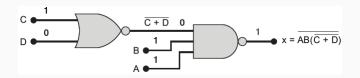
#### Portas NOR e NAND

**Exemplo:** Implemente o circuito lógico cuja expressão booleanada é dada por

$$x = \overline{AB\overline{(C+D)}}$$

usando apenas portas NOR e NAND. E, em seguida, determine o nível lógico da saída quando A=B=C=1 e D=0.

#### R:



Lembre-se da precedência de operadores, i.e., ( )  $\to$  NOT  $\to$  AND  $\to$  OR.

Em álgebra, um teorema é uma proposição que foi provada verdadeira por uma cadeia de raciocínio...

# Teoremas booleanos (de uma variável)

# 1) Elementos de identidade:

$$\begin{cases} A+0=A\\ A\cdot 1=A \end{cases}$$

### 2) Elementos nulos:

$$\begin{cases} A+1=1\\ A\cdot 0=0 \end{cases}$$

# 3) Lei da involução:

$$\left\{ \overline{\overline{A}} = A \right\}$$

## 4) Lei da idempotência:

$$\begin{cases} A \cdot A = A \\ A + A = A \end{cases}$$

## 5) Complemento:

$$\begin{cases} A \cdot \overline{A} = 0 \\ A + \overline{A} = 1 \end{cases}$$

## 6) Princípio da dualidade:

como os elementos 0 e 1.

Cada postulado/teorema tem seu par dual obtido intercambiando-se as operações OR "+" e AND ":", bem

# Teoremas booleanos (com mais de uma variável)

$$\begin{cases} A + B = B + A \\ A \cdot B = B \cdot A \end{cases}$$

$$\begin{cases} A + AB = A \\ A(A+B) = A \end{cases}$$

8) Propriedade associativa:

$$\begin{cases} (A+B) + C = A+B+C \\ (A \cdot B) \cdot C = ABC \end{cases}$$

11) **Teorema** '(?)':

$$\begin{cases} A + \overline{A}B = A + B \\ \overline{A} + AB = \overline{A} + B \end{cases}$$

9) Propriedade distributiva:

$$\begin{cases} A(B+C) = AB + AC \\ A + BC = (A+B)(A+C) \end{cases}$$

12) Teoremas de De Morgan:\*

$$\begin{cases} \overline{(A+B)} = \overline{A} \cdot \overline{B} \\ \overline{(A\cdot B)} = \overline{A} + \overline{B} \end{cases}$$

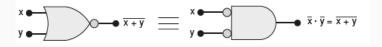
<sup>\*</sup>Os dois teoremas mais importantes da álgebra booleana foram contribuições do grande matemático Augustus De Morgan.

# Implicações dos Teoremas de De Morgan

Dado que

$$\overline{A+B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$$

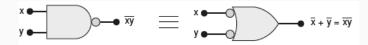
verifica-se que



Analogamente, de

$$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$$

observa-se que



Os teoremas booleanos são úteis na simplificação de expressões lógicas...

# Simplificação de expressões usando teoremas booleanos

**Exemplo:** Simplifique as seguintes expressões booleanas:

a) 
$$x = A \cdot \overline{B} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{D}$$

b) 
$$y = (\overline{A} + B)(A + B)$$

c) 
$$z = ACD + \overline{A}BCD$$

d) 
$$w = \overline{(\overline{A} + C)(B + \overline{D})}$$

## Simplificação de expressões usando teoremas booleanos

**Exemplo:** Simplifique as seguintes expressões booleanas:

a) 
$$x = A \cdot \overline{B} \cdot D + A \cdot \overline{B} \cdot \overline{D}$$
  
R:  $y = A\overline{B}$ 

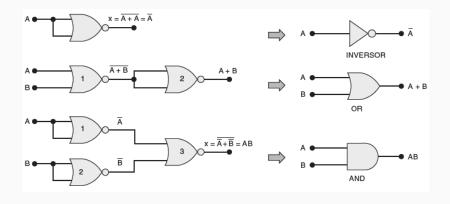
b) 
$$y = (\overline{A} + B)(A + B)$$
  
R:  $z = B$ 

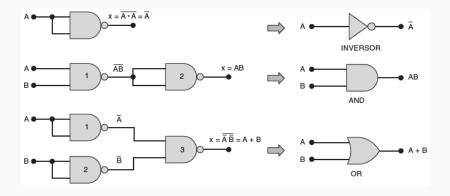
c) 
$$z = ACD + \overline{A}BCD$$
  
R:  $z = (A + B)CD$ 

d) 
$$w = \overline{(\overline{A} + C)(B + \overline{D})}$$
  
R:  $w = A\overline{C} + \overline{B}D$ 

Qualquer expressão pode ser implementada

usando apenas portas NOR ou NAND.





Exemplo: Implemente a expressão booleana

$$x = AB + CD$$

usando apenas portas NAND.

Exemplo: Implemente a expressão booleana

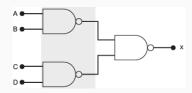
$$x = AB + CD$$

usando apenas portas NAND.

R: A partir da Lei da involução e dos Teoremas de De Morgan,

$$x = \overline{\overline{AB}} + \overline{\overline{CD}}$$
$$= \overline{\overline{AB} \cdot \overline{CD}}$$

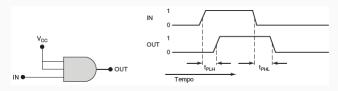
o que resulta em



O atraso de propagação é definido, basicamente, como o tempo que leva para um sistema produzir uma saída apropriada após receber uma entrada.

## Atraso de propagação

Visando mensurar o atraso de propagação (e.g., porta AND), considere:



Quando a entrada assume nível ALTO, a saída assume um nível ALTO pouco depois (e vice-versa). Logo, observa-se que

- i) Transições não são verticais (instantâneas); por isso, mede-se o ponto de 50% na entrada até 50% na saída.
- ii) O tempo de propagação BAIXO/ALTO  $t_{\rm PLH}$  não é necessariamente o mesmo de ALTO/BAIXO  $t_{\rm PHL}$ .

## Atraso de propagação

A velocidade de um circuito lógico está relacionada à característica de atraso de propagação. Portanto, cabe ao projetista assegurar que o CI é adequado para a aplicação considerada.

Philips Semio	Product specification						
8-input NAND gate 74HC/HCT							
	RENEC DATA amb = 25 °C; t <sub>f</sub> = t <sub>f</sub> = 6 ns						
SYMBOL	PARAMETER	CONDITIONS	TYPICAL				
STWIBUL				ICAL	LIMIT		
	FARAWETER	CONDITIONS	HC	HCT	UNIT		
t <sub>PHL</sub> / t <sub>PLH</sub>	propagation delay A, B, C, D, E, F, G, H to Y	C <sub>L</sub> = 15 pF; V <sub>CC</sub> = 5 V	HC 12	_	UNIT		
t <sub>PHL</sub> / t <sub>PLH</sub>				нст			



SN54/74LS32

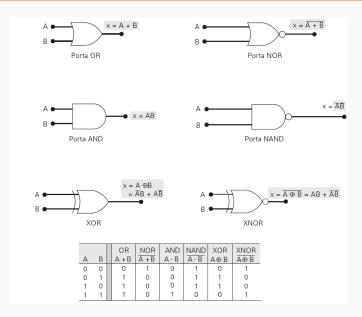
AC CHARACTERISTICS (TA = 25°C)

		Limits				
Symbol	Parameter	Min	Тур	Max	Unit	Test Conditions
t <sub>PLH</sub>	Turn-Off Delay, Input to Output		14	22	ns	V <sub>CC</sub> = 5.0 ∨
tPHL	Turn-On Delay, Input to Output		14	22	ns	C <sub>L</sub> = 15 pF

#### Resumo

- As 3 operações básicas foram mostradas, i.e., OR, AND e NOT.
- Ferramentas úteis de análise, síntese e documentação de circuitos lógicos foram apresentadas, e.g.,
  - descrição em nossa própria língua;
  - construção de tabelas-verdade;
  - derivação de expressões lógicas;
  - esboço de diagramas esquemáticos; e/ou
  - obtenção de diagramas de tempo.
- Teoremas da álgebra booleana foram introduzidos e utilizados para simplificar expressões lógicas.
- A universalidade das portas NOR e NAND foi mostrada, as quais possibilitam sintetizar quaisquer circuitos lógicos.
- O conceito de atraso de propagação foi discutido.

#### Resumo



# Considerações finais

#### Exercícios sugeridos:

3.16, 3.19, 3.20, 3.22, 3.24, 3.26-3.33, 3.38-3.40, 3.48 e 3.49

de R.J. Tocci, N.S. Widmer, G.L. Moss, *Sistemas digitais: princípios e aplicações,* 12a ed., São Paulo: Pearson, 2019. — (Capítulo 3)

#### Para a próxima aula:

R.J. Tocci, N.S. Widmer, G.L. Moss, *Sistemas digitais: princípios e aplicações*, 12a ed., São Paulo: Pearson, 2019. — (Capítulo 4)

Até a próxima aula... =)