

## 2 Lógica Fuzzy

- 2.1 Cálculo proposicional (lógica proposicional)
- 2.2 Lógica de Predicados
- 2.3 Lógica de múltiplos valores
- 2.4 Lógica Fuzzy
  - Proposições fuzzy
  - Inferência a partir de proposições fuzzy condicionais

1

## 2 Lógica Fuzzy

- Lógica – princípios formais que dão suporte às leis do raciocínio
- Raciocínio – parte importante do esforço envolvido nas tarefas de resolução de problemas ou tomada de decisão
- Lógica fuzzy – trata dos modos de raciocínio aproximado ao invés de exatos

2

### 2.1 Cálculo proposicional (lógica proposicional)

- Baseado em proposições que podem ter valores **verdadeiro** ou **falso**
- Não se preocupa com a estrutura interna das proposições que as variáveis lógicas representam
- Proposições atômicas:  
Representadas por variáveis lógicas
  - P : o carro é vermelho
  - Q: O céu está azul
  - R: 11 é um número ímpar
  - S: duas retas paralelas interceptam-se
- Proposições compostas:  
O carro é vermelho E o céu está azul

3

### Sintaxe da linguagem

- Sintaxe da linguagem proposicional
  - Proposições atômicas são proposições
  - Se P e Q são proposições, então  
 $\sim P$ ,  $P \wedge Q$ ,  $P \vee Q$ ,  $P \rightarrow Q$ ,  $P \leftrightarrow Q$  são proposições
  - Todas as proposições são geradas por um número finito de aplicações das regras anteriores
- Exemplos:  
 $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \vee \sim P$  (é fórmula bem formada)  
 $W \vee \sim P \vee Q P \rightarrow Q$  (não é fórmula bem formada)

4

# Semântica das proposições

- A semântica ou significado de uma proposição é o valor verdadeiro (0) ou falso (1) dessa proposição
- Uma interpretação para uma proposição ou grupo de proposições é uma atribuição de valores verdade a cada proposição atômica.
- A partir de valores verdade de proposições atômicas define-se valores verdade de proposições compostas
- Tabela verdade – dá o valor verdade de uma proposição a partir de todas as combinações de valores das proposições atômicas

5

Seja p valor verdade de P e q valor verdade de Q.  
Valores verdade para negação, conjunção e disjunção:

$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\neg P$
$\min(p,q)$	$\max(p,q)$	$1-p$

- Implicação:  
 $P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q$
- Equivalência:  
 $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

6

## Regras de inferência

- São o meio pelo qual as deduções – ou raciocínio – são realizadas no cálculo proposicional
- Problema: dado um conjunto de proposições  
 $P = \{P_1, P_2, \dots, P_n\}$  (premissas) encontre o valor verdade de uma proposição  $Q$  (conclusão)
- Exemplos de Regras de Inferência:

$$\text{Modus Ponens: } \frac{P}{P \rightarrow Q} \quad Q$$

$$\text{Projeção: } \frac{P}{P \wedge Q}$$

Conjunção:

$$\frac{P}{P \wedge Q}$$

$$\text{Modus Tolens: } \frac{\neg Q}{P \rightarrow Q} \quad \neg P$$

7

## 2.2 Lógica de Predicados

- Melhora a expressividade da lógica proposicional
- É útil quando a estrutura interna de uma proposição não pode ser ignorada
- Permite representar conhecimento e raciocinar usando relações entre objetos, classes e subclasses
- Baseada em predicados atômicos, funções, variáveis e quantificadores de variáveis

8

## Predicados:

- Sentenças que representam proposições podem ser quebradas em sujeito e predicado:

### O céu está azul

Sujeito (objeto) : **céu**

Predicado que caracteriza uma propriedade: **está azul**

Notação :  $P(x)$      $x$  representa qualquer objeto do domínio

**Azul(x)**     $x = \text{céu}$ ,     $x = \text{mar}$ , .....

9

Predicados denotam relações em um domínio e podem ter  $n \geq 0$  argumentos, constantes ou variáveis:

**$x_1$  é um cidadão de  $x_2$**     ( $n=2$ )

$X_1$  – conjunto de pessoas

$X_2$  – conjunto de cidades

$\text{cidadão}(x_1, x_2)$

**$x$  é maior que  $y$**

$X$  e  $Y$  – conjuntos de números

$\text{Maior}(x,y)$

10

- Quantificadores de predicados

### Quantificador existencial

$(\exists x) P(x)$

“Existe pelo menos um  $x \in X$  que tem a propriedade  $P$ ”

### Quantificador universal

$(\forall x) P(x)$

“Para todo  $x \in X$  vale a propriedade  $P$ ”

11

- Funções: mapeiam  $n$  elementos em um elemento de um domínio

$f : D^n \rightarrow D$

$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$      $t_i$  são termos (constantes, variáveis, funções)

- Sintaxe:

– Inclui os mesmos conectivos da lógica proposicional mais as funções e quantificadores para todo( $\forall$ ) e existe ( $\exists$ ):

Se  $P$  é uma fbf então  $\forall x P(x)$  e  $\exists x P(x)$  são fbf

– Exemplo:

$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow (R(a,y) \wedge Q(b))$

12

## Semântica

- Semântica de uma sentença: valores **verdadeiro** ou **falso**
- Interpretação: atribuição de valores a cada termo e predicado da sentença
- O valor verdade de uma sentença pode ser calculado a partir de uma interpretação usando as mesmas regras da lógica proposicional e mais:
  - $\forall x P(x)$  é verdade se e só se  $P(x)$  é verdade para todo  $x$  do domínio
  - $\exists x P(x)$  é verdade se existe pelo menos um valor de  $x$  no domínio para o qual  $P(x)$  é verdade

13

## Regras de inferência

- As regras de inferência são as mesmas da lógica proposicional, com as variáveis

Modus Ponens:

$$\frac{P(a) \quad \forall x \quad P(x) \rightarrow Q}{Q(a)}$$

Modus Tolens:

$$\frac{\neg Q(a) \quad \forall x \quad P(x) \rightarrow Q}{\neg P(a)}$$

14

## 2.3 Lógica de múltiplos valores

- São os sistemas lógicos que admitem um número  $n \geq 2$  de valores verdade
- Extendem a lógica de predicados mantendo a mesma sintaxe e permitindo valores verdade dentro de um conjunto
- Lógica de três valores: verdade(1), falso(0) e indeterminado (1/2)
- Lógica de múltiplos valores: valores verdade no intervalo  $[0,1]$  (graus de verdade)

15

## Lógicas de Lukasiewicz's

Sistemas lógicos  $L_2, L_3, \dots, L_\infty$

$L_2$  – lógica de dois valores

$L_\infty$  – lógica de valores infinitos (números racionais no intervalo  $[0, 1]$ )  
Lógica de valores infinitos alternativa: valores verdade em  $[0, 1]$

$L_n$  – sistemas de  $n$  valores com valores verdade divididos uniformemente no intervalo unitário:

$$T = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$$

16

## primitivas

$$\neg a = 1 - a$$

$$a \wedge b = \min(a,b)$$

$$a \vee b = \max(a,b)$$

$$a \rightarrow b = \min(1, 1 + b - a)$$

$$a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$$

17

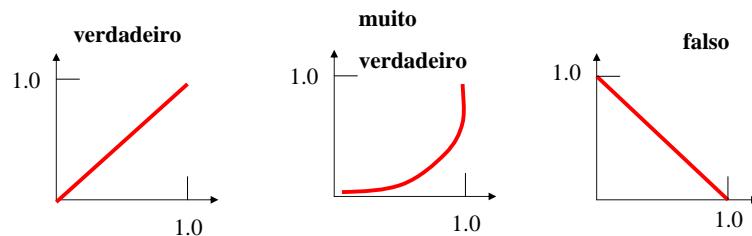
## 2.4 Lógica Fuzzy

- Generalização da lógica de valores múltiplos que permite raciocinar sobre objetos imprecisos como entidades relacionais
- Raciocinar com objetos imprecisos leva a modos de raciocínio também imprecisos
- Na lógica fuzzy tudo é uma questão de grau, inclusive os valores verdade

18

## Lógica Fuzzy

- Valor verdade é definido por graus
  - Valor verdade numérico - valor em  $[0,1]$
  - Valor verdade linguístico: verdade, muito verdade, falso, mais ou menos falso, .....



19

## Proposições fuzzy

- Incondicional não qualificada
- Incondicional qualificada
- condicional não qualificada
- Condicional qualificada

20

## Proposição fuzzy incondicional não qualificada

$$p: V \in A$$

onde A é um Conjunto fuzzy

Ex: *A pressão está normal*

*A temperatura está baixa*

Grau de verdade  $T(p)$  da proposição p:

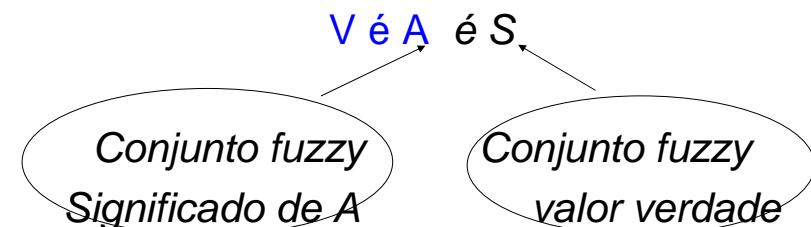
$$T(p) = A(v)$$

Para cada particular valor v da variável V em p

T é um conjunto fuzzy em  $[0,1]$  que atribui o grau de pertinência  $A(v)$  a cada valor v da variável V

21

## Proposição fuzzy incondicional qualificada



*A pressão está normal* é muito verdadeiro

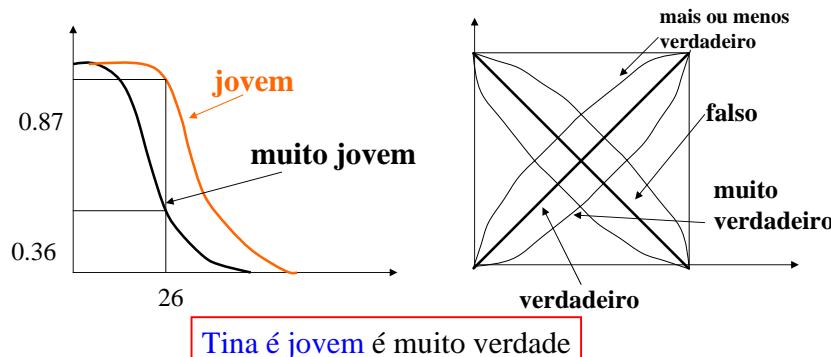
*A temperatura está baixa* é falso

22

## Grau de verdade da proposição

O grau de verdade  $T(p)$  de uma proposição qualificada é dado por

$$T(p) = S(A(v)) \quad \text{para cada valor } v \text{ de } V$$



23

- Observações:

- Se  $G(v) = S(A(v))$  for visto como um simples predicado, qualquer proposição qualificada pode ser interpretada como uma proposição não qualificada da forma  $V \in G$
- A proposição não qualificada é de fato uma proposição qualificada especial na qual o qualificador é o valor *verdadeiro*

24

## Proposição fuzzy condicional não qualificada

p: Se V é A então U é B

Podem ser vistas como proposições da forma

(V, U) é R

R é uma relação fuzzy em X X Y que é determinada por

$$R(x,y) = I[A(x), B(y)]$$

(I implicação fuzzy ou norma triangular)

Grau de verdade de p:

$$T(p) = R(x,y)$$

25

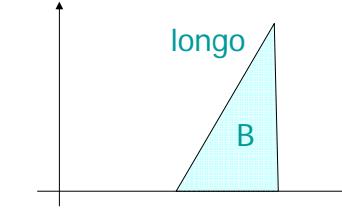
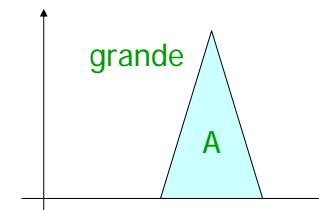
## Exemplo

Se V é A então U é B

- Regra:

**Se a distância é grande**

**Então o tempo de viagem é longo**



26

## Exemplo

Se V é A então U é B

- Regra:

**Se a distância é grande**

**Então o tempo de viagem é longo**

$$X = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60\}$$

$$Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = [0, 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 1]$$

$$B = [0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1]$$

$$R(30, 7) = f(A(30), B(7)) = f(0.5, 0.6)$$

27

## Exemplo

Seja I implicação de Lukasiewicz:

$$I(a,b) = \min(1, 1-a+b)$$

Exemplo:

$$A = 0.1/x_1 + 0.8/x_2 + 1/x_3$$

$$B = 0.5/y_1 + 1/y_2$$

$$R = 1/x_1, y_1 + 1/x_1, y_2 + 0.7/x_2, y_1 + 1/x_2, y_2 + \\ 0.5/x_3, y_1 + 1/x_3, y_2$$

Assim,  $T(p) = 1$  quando  $V = x_1$  e  $U = y_1$

$T(p) = 0.7$  quando  $V = x_2$  e  $U = y_1$

28

## Proposição fuzzy condicional qualificada

p: Se V é A então U é B é S

Cálculo do grau de verdade:

Combinação dos métodos anteriores

29

## Inferência a partir de proposições fuzzy condicionais

- As regras de inferência da lógica clássica podem ser generalizadas no contexto da lógica fuzzy
- As generalizações são baseadas na regra de inferência composicional.
- Podem ser generalizadas as regras:
  - Modus ponens
  - Modus Tollens
  - Silogismo hipotético

30

## Regra da inferência composicional

Sejam R uma relação fuzzy sobre X X Y

A' conjunto fuzzy em X

B' conjunto fuzzy em Y

Dados R e A' podemos obter B' por

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \min [A'(x), R(x,y)] \text{ para todo } y \in Y$$

Na forma matricial:

$$B' = A' \circ R$$

31

A proposição fuzzy condicional

p: Se V é A então U é B

tem uma relação R embutida que é determinada pela fórmula:

$$R(x,y) = I[A(x), B(y)] \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Y$$

sendo que I denota um operador de implicação

Dada uma outra proposição q da forma:

q: V é A'

podemos concluir

U é B'

pela regra da inferência composicional.

Esse procedimento é chamado *modus ponens generalizado*

32

## Modus Ponens Generalizado

A proposição p é vista como uma **regra**

A proposição q é vista como um **fato**

O padrão de inferência é representado por:

**Regra:** Se V é A então U é B

**Fato:** V é A'

**Conclusão:** U é B'

Quando A = A' produz B = B' temos o modus ponens clássico

33

## Modus Tolens Generalizado

O padrão de inferência é representado por:

• **Regra:** Se V é A então U é B

**Fato:** U é B'

**Conclusão:** V é A'

Quando  $B' = \overline{B}$  produz  $A' = \overline{A}$  temos o modus tolens clássico

A regra da Inferência Composicional tem a forma:

$$A'(x) = \sup_{y \in Y} \min [B'(y), R(x,y)]$$

34

## Silogismo Hipotético Generalizado

O padrão de inferência é representado por:

**Regra1:** Se V é A então U é B

**Regra2:** Se U é B então Z é C

**Conclusão:** Se V é A então Z é C

Relações fuzzy são determinadas por:

$$R_1(x,y) = I[A(x), B(y)]$$

$$R_2(y,z) = I[B(y), C(z)]$$

$$R_3(x,z) = I[A(x), C(z)]$$

O silogismo hipotético generalizado vale se:

$$R_3(x,y) = \sup_{y \in Y} \min [R_1(x,y), R_2(y,z)]$$

35