

2 Lógica Fuzzy

- 2.1 Cálculo proposicional (lógica proposicional)
- 2.2 Lógica de Predicados
- 2.3 Lógica de múltiplos valores
- 2.4 Lógica Fuzzy
 - Proposições fuzzy
 - Inferência a partir de proposições fuzzy condicionais

1

2 Lógica Fuzzy

- Lógica – princípios formais que dão suporte às leis do raciocínio
- Raciocínio – parte importante do esforço envolvido nas tarefas de resolução de problemas ou tomada de decisão
- Lógica fuzzy – trata dos modos de raciocínio aproximado ao invés de exatos

2

2.1 Cálculo proposicional (lógica proposicional)

- Baseado em proposições que podem ter valores **verdadeiro** ou **falso**
- Não se preocupa com a estrutura interna das proposições que as variáveis lógicas representam
- Proposições atômicas:
 - Representadas por variáveis lógicas
 - P : o carro é vermelho
 - Q: O céu está azul
 - R: 11 é um número ímpar
 - S: duas retas paralelas interceptam-se
- Proposições compostas:
 - O carro é vermelho E o céu está azul

3

Sintaxe da linguagem

- Sintaxe da linguagem proposicional
 - Proposições atômicas são proposições
 - Se P e Q são proposições, então
 $\neg P$, $P \wedge Q$, $P \vee Q$, $P \rightarrow Q$, $P \leftrightarrow Q$ são proposições
 - Todas as proposições são geradas por um número finito de aplicações das regras anteriores
- Exemplos:
 - $(P \leftrightarrow Q) \wedge (P \vee Q) \vee \neg P$ (é fórmula bem formada)

$W \vee \neg P \vee QP \rightarrow Q$ (não é fórmula bem formada)

4

Semântica das proposições

- A semântica ou significado de uma proposição é o valor verdadeiro (0) ou falso (1) dessa proposição
- Uma interpretação para uma proposição ou grupo de proposições é uma atribuição de valores verdade a cada proposição atômica.
- A partir de valores verdade de proposições atômicas define-se valores verdade de proposições compostas
- Tabela verdade – dá o valor verdade de uma proposição a partir de todas as combinações de valores das proposições atômica

5

Seja p valor verdade de P e q valor verdade de Q.

Valores verdade para negação, conjunção e disjunção:

$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$\sim P$
$\min(p,q)$	$\max(p,q)$	$1-p$

- Implicação:
 $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$
- Equivalência:
 $P \leftrightarrow Q \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

6

Regras de inferência

- São o meio pelo qual as deduções – ou raciocínio – são realizadas no cálculo proposicional
- Problema: dado um conjunto de proposições $P = \{ P_1, P_2, \dots, P_n \}$ (premissas) encontre o valor verdade de uma proposição Q (conclusão)
- Exemplos de Regras de Inferência:

Modus Ponens:
$$\begin{array}{c} P \\ P \rightarrow Q \\ \hline Q \end{array}$$

Conjunção:
$$\begin{array}{c} P \\ Q \\ \hline P \wedge Q \end{array}$$

Projeção:
$$\begin{array}{c} P \wedge Q \\ \hline P \end{array}$$

Modus Tolens:
$$\begin{array}{c} \neg Q \\ P \rightarrow Q \\ \hline \neg P \end{array}$$

7

2.2 Lógica de Predicados

- Melhora a expressividade da lógica proposicional
- É útil quando a estrutura interna de uma proposição não pode ser ignorada
- Permite representar conhecimento e raciocinar usando relações entre objetos, classes e subclasses
- Baseada em predicados atômicos, funções, variáveis e quantificadores de variáveis

8

Predicados:

- Sentenças que representam proposições podem ser quebradas em sujeito e predicado:

O céu está azul

Sujeito (objeto) : **céu**

Predicado que caracteriza uma propriedade: **está azul**

Notação : $P(x)$ x representa qualquer objeto do domínio

Azul(x) $x = \text{céu}, x = \text{mar}, \dots$

9

Predicados denotam relações em um domínio e podem ter $n \geq 0$ argumentos, constantes ou variáveis:

x_1 é um cidadão de x_2 ($n=2$)

X_1 – conjunto de pessoas

X_2 – conjunto de cidades

$\text{cidadão}(x_1, x_2)$

x é maior que y

X e Y – conjuntos de números

$\text{Maior}(x, y)$

10

- Quantificadores de predicados

Quantificador existencial

$(\exists x) P(x)$

“Existe pelo menos um $x \in X$ que tem a propriedade P ”

Quantificador universal

$(\forall x) P(x)$

“Para todo $x \in X$ vale a propriedade P ”

11

- Funções: mapeiam n elementos em um elemento de um domínio

$f : D^n \rightarrow D$

$f(t_1, t_2, \dots, t_n)$ t_i são termos (constantes, variáveis, funções)

- Sintaxe:

- Inclui os mesmos conectivos da lógica proposicional mais as funções e quantificadores para todo (\forall) e existe (\exists):

Se P é uma fbf então $\forall x P(x)$ e $\exists x P(x)$ são fbf

- Exemplo:

$\forall x \exists y (P(x) \vee Q(y)) \rightarrow (R(a, y) \wedge Q(b))$

12

Semântica

- Semântica de uma sentença: valores **verdadeiro** ou **falso**
- Interpretação: atribuição de valores a cada termo e predicado da sentença
- O valor verdade de uma sentença pode ser calculado a partir de uma interpretação usando as mesmas regras da lógica proposicional e mais:
 - $\forall x P(x)$ é verdade se e só se $P(x)$ é verdade para todo x do domínio
 - $\exists x P(x)$ é verdade se existe pelo menos um valor de x no domínio para o qual $P(x)$ é verdade

13

Regras de inferência

- As regras de inferência são as mesmas da lógica proposicional, com as variáveis

Modus Ponens:

$$\begin{array}{c} P(a) \\ \hline \forall x \quad P(x) \rightarrow Q \\ \hline Q(a) \end{array}$$

Modus Tolens:

$$\begin{array}{c} \neg Q(a) \\ \hline \forall x \quad P(x) \rightarrow Q \\ \hline \neg P(a) \end{array}$$

14

2.3 Lógica de múltiplos valores

- São os sistemas lógicos que admitem um número $n \geq 2$ de valores verdade
- Extendem a lógica de predicados mantendo a mesma sintaxe e permitindo valores verdade dentro de um conjunto
- Lógica de três valores: verdade(1), falso(0) e indeterminado (1/2)
- Lógica de múltiplos valores: valores verdade no intervalo $[0,1]$ (graus de verdade)

15

Lógicas de Lukasiewicz's

Sistemas lógicos $L_2, L_3, \dots, L_\infty$

L_2 – lógica de dois valores

L_∞ - lógica de valores infinitos (números racionais no intervalo $[0, 1]$)

Lógica de valores infinitos alternativa: valores verdade em $[0, 1]$

L_n – sistemas de n valores com valores verdade divididos uniformemente no intervalo unitário:

$$T = \left\{ 0, \frac{1}{n-1}, \frac{2}{n-2}, \dots, \frac{n-2}{n-1}, 1 \right\}$$

16

primitivas

$$\neg a = 1 - a$$

$$a \wedge b = \min(a, b)$$

$$a \vee b = \max(a, b)$$

$$a \rightarrow b = \min(1, 1 + b - a)$$

$$a \leftrightarrow b = 1 - |a - b|$$

17

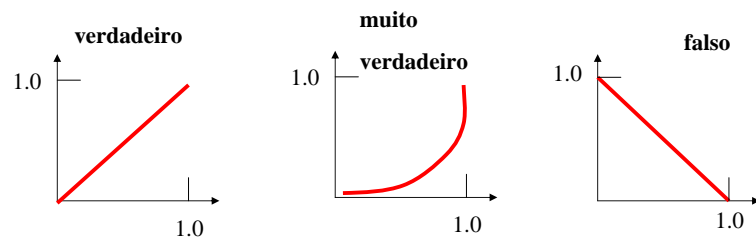
2.4 Lógica Fuzzy

- Generalização da lógica de valores múltiplos que permite raciocinar sobre objetos imprecisos como entidades relacionais
- Raciocinar com objetos imprecisos leva a modos de raciocínio também imprecisos
- Na lógica fuzzy tudo é uma questão de grau, inclusive os valores verdade

18

Lógica Fuzzy

- Valor verdade é definido por graus
 - Valor verdade numérico - valor em $[0, 1]$
 - Valor verdade linguístico: verdade, muito verdade, falso, mais ou menos falso,



19

Proposições fuzzy

- Incondicional não qualificada
- Incondicional qualificada
- condicional não qualificada
- Condicional qualificada

20

Proposição fuzzy incondicional não qualificada

$p: V \text{ é } A$

onde A é um Conjunto fuzzy

Ex: A pressão está normal
 A temperatura está baixa

Grau de verdade $T(p)$ da proposição p :

$$T(p) = A(v)$$

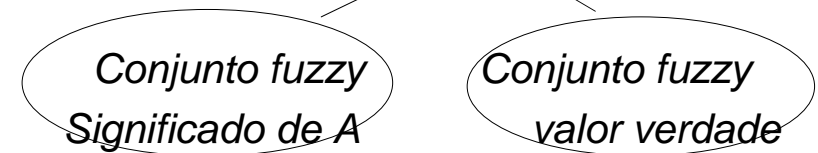
Para cada particular valor v da variável V em p

T é um conjunto fuzzy em $[0,1]$ que atribui o grau de pertinência $A(v)$ a cada valor v da variável V

21

Proposição fuzzy incondicional qualificada

$V \text{ é } A \text{ é } S$



A pressão está normal é muito verdadeiro

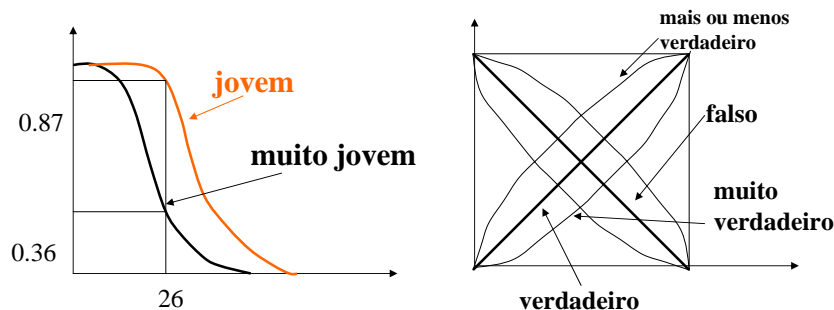
A temperatura está baixa é falso

22

Grau de verdade da proposição

O grau de verdade $T(p)$ de uma proposição qualificada é dado por

$$T(p) = S(A(v)) \quad \text{para cada valor } v \text{ de } V$$



$Tina \text{ é } jovem \text{ é muito verdade}$

23

• Observações:

- Se $G(v) = S(A(v))$ for visto como um simples predicado, qualquer proposição qualificada pode ser interpretada como uma proposição não qualificada da forma $V \text{ é } G$
- A proposição não qualificada é de fato uma proposição qualificada especial na qual o qualificador é o valor *verdadeiro*

24

Proposição fuzzy condicional não qualificada

p: Se V é A então U é B

Podem ser vistas como proposições da forma

(V, U) é R

R é uma relação fuzzy em $X \times Y$ que é determinada por

$$R(x,y) = I[A(x), B(y)]$$

(I implicação fuzzy ou norma triangular)

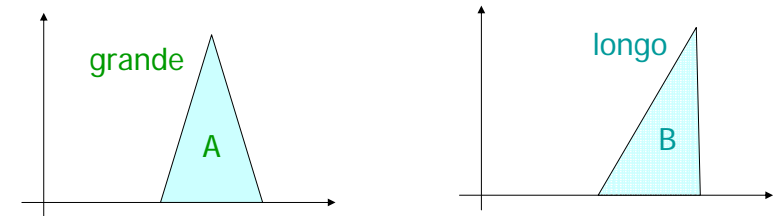
Grau de verdade de p:

$$T(p) = R(x,y)$$

25

Exemplo

- Regra: Se V é A então U é B
- Se a distância é grande
- Então o tempo de viagem é longo



26

Exemplo

Se V é A então U é B

- Regra:

Se a distância é grande

Então o tempo de viagem é longo

$$X = \{0, 10, 20, 30, 40, 50, 60\}$$

$$Y = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$$

$$A = [0, 0, 0.2, 0.5, 0.8, 1, 1]$$

$$B = [0, 0, 0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1]$$

$$R(30, 7) = f(A(30), B(7)) = f(0.5, 0.6)$$

27

Exemplo

Seja I implicação de Lukasiewicz:

$$I(a,b) = \min(1, 1-a+b)$$

Exemplo:

$$A = 0.1/x_1 + 0.8/x_2 + 1/x_3$$

$$B = 0.5/y_1 + 1/y_2$$

$$R = 1/x_1, y_1 + 1/x_1, y_2 + 0.7/x_2, y_1 + 1/x_2, y_2 + 0.5/x_3, y_1 + 1/x_3, y_2$$

Assim, $T(p) = 1$ quando $V = x_1$ e $U = y_1$

$T(p) = 0.7$ quando $V = x_2$ e $U = y_1$

28

Proposição fuzzy condicional qualificada

p: Se V é A então U é B é S

Cálculo do grau de verdade:

Combinação dos métodos anteriores

29

Inferência a partir de proposições fuzzy condicionais

- As regras de inferência da lógica clássica podem ser generalizadas no contexto da lógica fuzzy
- As generalizações são baseadas na regra de inferência composicional.
- Podem ser generalizadas as regras:
 - Modus ponens
 - Modus Tollens
 - Silogismo hipotético

30

Regra da inferência composicional

Sejam R uma relação fuzzy sobre X X Y

A' conjunto fuzzy em X

B' conjunto fuzzy em Y

Dados R e A' podemos obter B' por

$$B'(y) = \sup_{x \in X} \min [A'(x), R(x,y)] \text{ para todo } y \in Y$$

Na forma matricial:

$$B' = A' \circ R$$

31

A proposição fuzzy condicional

p: Se V é A então U é B

tem uma relação R embutida que é determinada pela fórmula:

$$R(x,y) = I[A(x), B(y)] \text{ para todo } x \in X \text{ e } y \in Y$$

sendo que I denota um operador de implicação

Dada uma outra proposição q da forma:

q: V é A'

podemos concluir

U é B'

pela regra da inferência composicional.

Esse procedimento é chamado *modus ponens generalizado*

32

Modus Ponens Generalizado

A proposição p é vista como uma **regra**

A proposição q é vista como um **fato**

O padrão de inferência é representado por:

Regra: Se V é A então U é B

Fato: V é A'

Conclusão: U é B'

Quando $A = A'$ produz $B = B'$ temos o modus ponens clássico

33

Modus Tolens Generalizado

O padrão de inferência é representado por:

• Regra: Se V é A então U é B

Fato: U é B'

Conclusão: V é A'

Quando $B' = \overline{B}$ produz $A' = \overline{A}$ temos o modus tolens clássico

A regra da Inferência Composicional tem a forma:

$$A'(x) = \sup_{y \in Y} \min [B'(y), R(x,y)]$$

34

Silogismo Hipotético Generalizado

O padrão de inferência é representado por:

Regra1: Se V é A então U é B

Regra2: Se U é B então Z é C

Conclusão: Se V é A então Z é C

Relações fuzzy são determinadas por:

$$R_1(x,y) = I[A(x), B(y)]$$

$$R_2(y,z) = I[B(y), C(z)]$$

$$R_3(x,z) = I[A(x), C(z)]$$

O silogismo hipotético generalizado vale se:

$$R_3(x,y) = \sup_{y \in Y} \min [R_1(x,y), R_2(y,z)]$$

35