Algoritmi e Strutture Dati

Lezione 4

5 ottobre 2022

CALCOLO POTENZA x^y

$\boxed{1}$ prodotti iterati $\qquad x^y = \underbrace{x \cdots x}_{y \text{ volte}}$

```
ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero
   power ← 1
   WHILE y > 0 DO
      power ← power * x
      y ← y - 1
   RETURN power
```

Tempo (#righe di codice)

$T(x, y) = 3y + 3$

Spazio

3 variabili

2 soluzione ricorsiva

$x^y = x^{\frac{y}{2} \cdot 2} = \left(x^{\frac{y}{2}}\right)^2$ divisione reale

$$x^y = \begin{cases} 1 & \text{se } y=0 \\ \left(x^{\frac{y}{2}}\right)^2 & \text{se } y>0 \text{ pari} \\ \left(x^{\frac{y-1}{2}}\right)^2 x & \text{se } y>0 \text{ dispari} \end{cases}$$

```
ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero
  IF y=0 THEN
  |   RETURN 1
  ELSE
  |  power ← potenza (x, y/2)   // div intera
  |  power ← power * power
  |  IF y è dispari THEN
  |      power ← power * x
  |  RETURN power
```

```
ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero
1  IF y = 0 THEN
2      RETURN 1
   ELSE
3      power ← potenza (x, y/2)   // divisione intera
4      power ← power * power
5      IF y è dispari THEN
6          power ← power * x
7      RETURN power
```

$T(x, y)$

- se $y = 0$: linea 1, 2 — 2
- se $y > 0$: linea 1, 3, 4, 5, 7 1 volta — 5

  linea 6 ≤ 1 volta — ≤ 1

  linee eseguite per calcolare potenza $(x, y/2)$ — $T\left(x, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor\right)$

$$\leq 6 + T\left(x, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor\right)$$

$$T(x,y) \leq \begin{cases} 2 & \text{se } y = 0 \\ T\left(x, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor\right) + 6 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

eq. di ricorrenza

```
ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero
1  IF y = 0 THEN
2     RETURN 1
   ELSE
3     power ← potenza (x, y/2)   // divisione intera
4     power ← power * power
5     IF y è dispari THEN
6        power ← power * x
7     RETURN power
```

$T(x, y)$

- se $y = 0$ linea 1, 2 — 2
- se $y > 0$ linea 1, 3, 4, 5, 7 1 volta — 5

linea 6 ≤ 1 volta — ≤ 1

linee eseguite per calcolare potenza $(x, y/2)$ — $T(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor)$

$\leq 6 + T(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor)$

$$T(x,y) \leq \begin{cases} 2 & \text{se } y = 0 \\ T(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor) + 6 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

eq. di ricorrenza

$$T(x,y) \leq 6 \log_2 y + 8$$ Tempo

$$H(x,y) = \lfloor \log_2 y \rfloor + 2$$ Altezza pila ricorsione

ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero

1 IF $y=0$ THEN

2   RETURN 1

ELSE

    ~~power ← potenza (x, y/2)~~ // div intera

3   power ← ~~power * power~~ potenza (x, y/2) * potenza (x, y/2)

4   IF y è dispari THEN

5   power ← power * x

6   RETURN power

ALGORITMO DIFFERENTE

$T(x,y)$

$y=0$ esegue 1,2   2

$y>0$ esegue 1,3,4,6,(5) $+ 2T(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor)$ ≤ 5

$$T(x,y) = \begin{cases} 2 & \text{se } y=0 \\ 5 + 2T\left(x, \left\lfloor \frac{y}{2} \right\rfloor\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero

```
1 power ← 1
2 IF y ≠ 0 THEN
3     power ← potenza (x, y/2)
4     power ← power * power
5     IF y è dispari THEN
6         power ← power * x
7 RETURN power
```

```
ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero
IF y=0 THEN
    RETURN 1
ELSE
    power ← potenza (x, y/2)
    power ← power * power
    IF y è dispari THEN
        power ← power * x
    RETURN power
```

$T(x,y)$

$y=0$ linee 1, 2, 7 — 3

$y>0$ linee 1, 2, 3, 4, 5, 7 — 6

6 — ≤ 1

$T(x, \frac{y}{2})$ chiamata ricorsiva — $T(x, \frac{y}{2})$

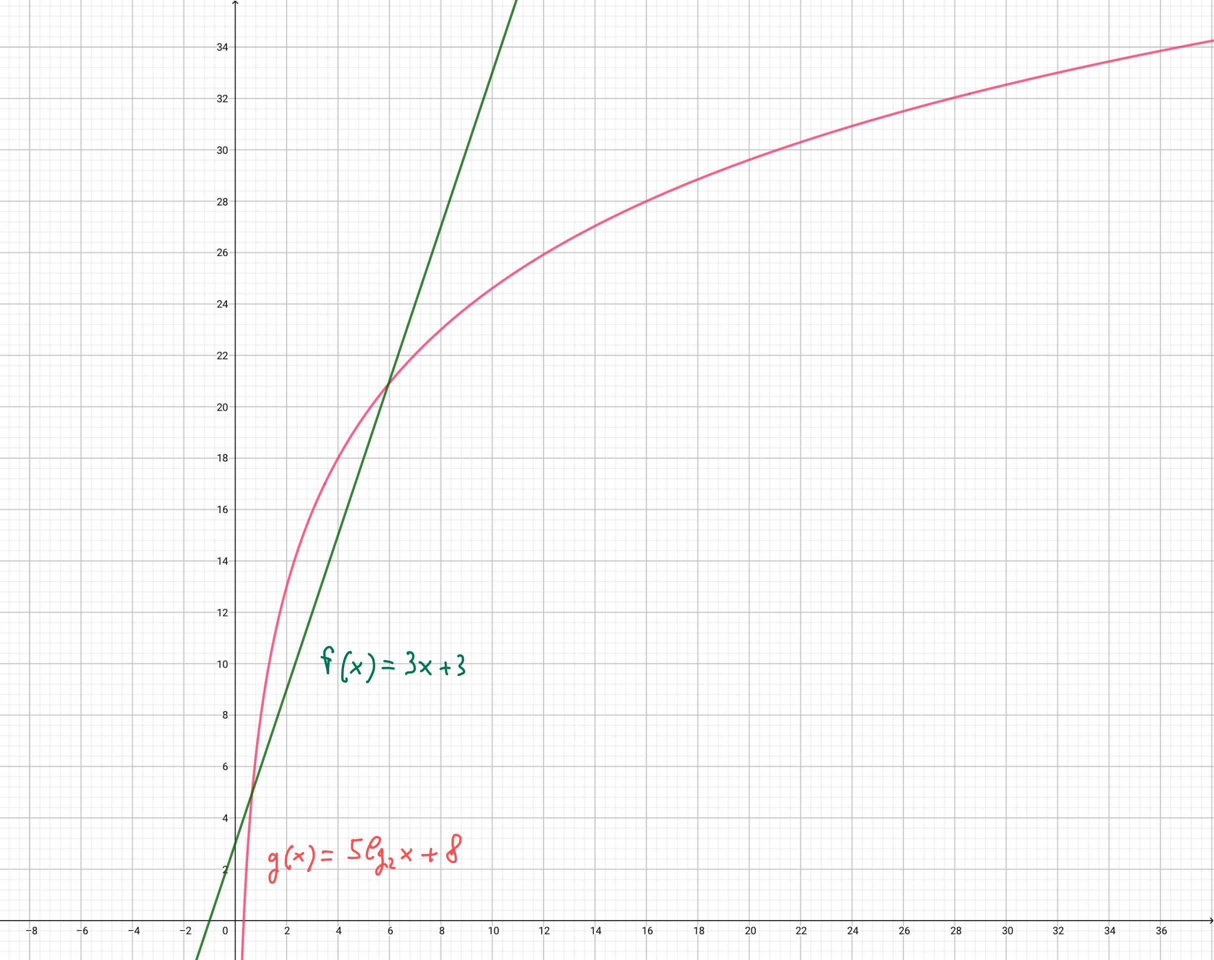
$\leq 7 + T(x, \frac{y}{2})$

$$T(x,y) \leq \begin{cases} 3 & \text{se } y=0 \\ 7 + T(x, \lfloor \frac{y}{2} \rfloor) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

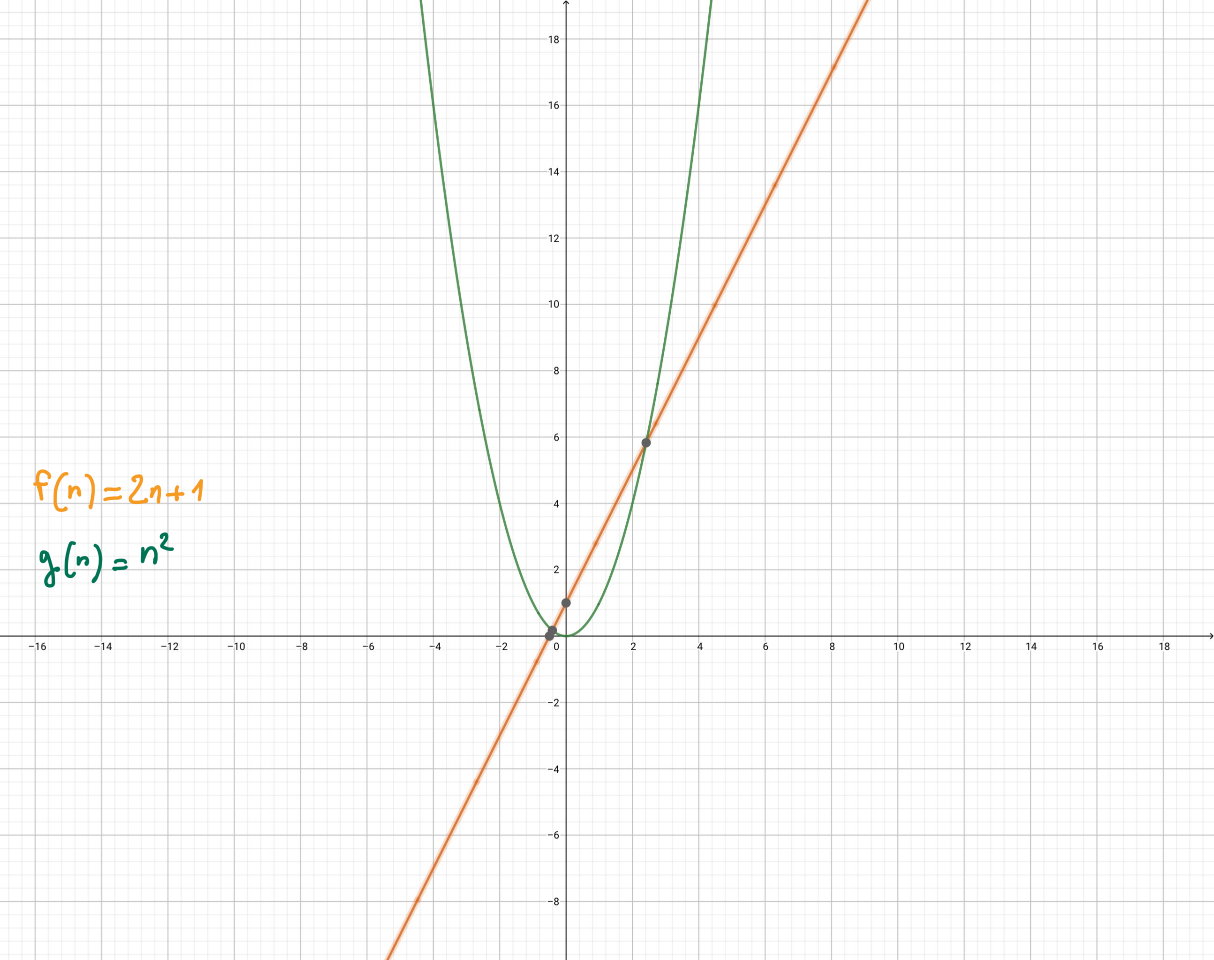
$$T(x,y) \leq 7 \log_2 y + 10$$

CONFRONTO TRA FUNZIONI

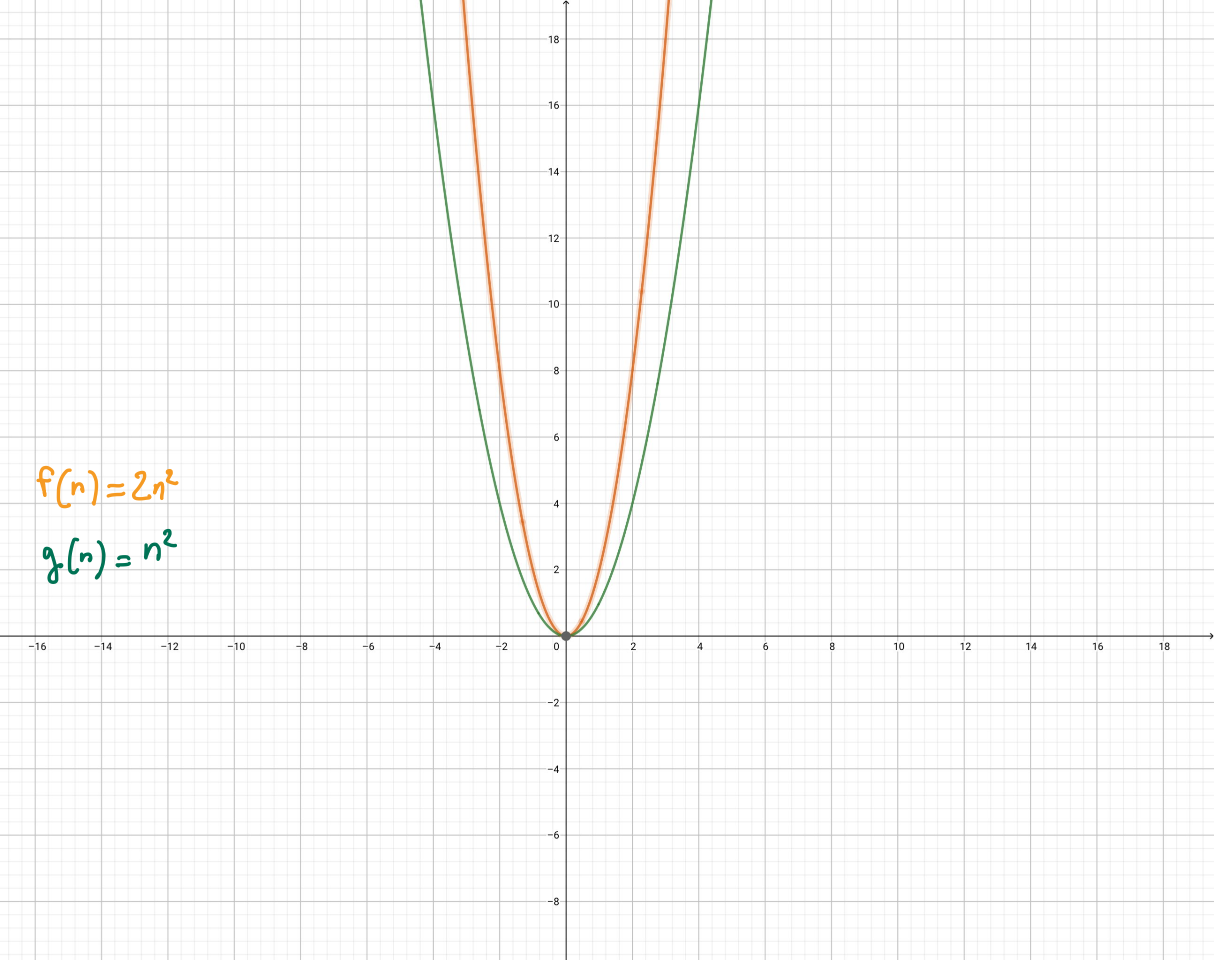
Date due funzioni f, g quale "cresce" di più?


f(x) = 3x + 3
g(x) = 5 lg₂ x + 8
34
32
30
28
26
24
22
20
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
−8
−6
−4
−2
2
4
6
8
10
12
14
16
18
20
22
24
26
28
30
32
34
36

f(n) = 10 lg₂n
g(n) = n



$f(n) = 2n + 1$
$g(n) = n^2$
−16 −14 −12 −10 −8 −6 −4 −2 0 2 4 6 8 10 12 14 16 18
18 16 14 12 10 8 6 4 2 −2 −4 −6 −8



$f(n) = 2n^2$
$g(n) = n^2$

Notazioni asintotiche

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

- limitazione superiore
  $f(n)$ è *O-grande* di $g(n)$ $\qquad f(n) = O(g(n))$
  se $\exists c > 0,\ n_0 \in N$, t.c. $\forall n > n_0 :\ f(n) \leq c \cdot g(n)$

$f(n)$ "cresce al più" come $g(n)$

$5n^2 + n = O(n^2)$

$4n^5 = O(n^{10})$ ma anche $4n^5 = O(n^5)$

Notazioni asintotiche

$f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$

- limitazione superiore
  $f(n)$ è *O-grande* di $g(n)$ $\qquad f(n) = O(g(n))$
  se $\exists c > 0,\ n_0 \in N$, t.c. $\forall n > n_0 :\ f(n) \leq c \cdot g(n)$

- limitazione inferiore
  $f(n)$ è *Ω-grande* di $g(n)$ $\qquad f(n) = \Omega(g(n))$
  se $\exists c > 0,\ n_0 \in N$, t.c. $\forall n > n_0 :\ f(n) \geq c \cdot g(n)$

$5n^2 + n = \Omega(n^2)$

$4n^{10} = \Omega(n^2)$ $\qquad 4n^{10} = \Omega(n^{10})$

Notazioni asintotiche

$f, g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}^+$

- limitazione superiore
  $f(n)$ è *O-grande* di $g(n)$ $\quad f(n) = O(g(n))$
  se $\exists c > 0,\ n_0 \in N$, t.c. $\forall n > n_0 :\ f(n) \leq c \cdot g(n)$

- limitazione inferiore
  $f(n)$ è *Ω-grande* di $g(n)$ $\quad f(n) = \Omega(g(n))$
  se $\exists c > 0,\ n_0 \in N$, t.c. $\forall n > n_0 :\ f(n) \geq c \cdot g(n)$

- stesso ordine di grandezza
  $f(n)$ è *Θ-grande* di $g(n)$ $\quad f(n) = \Theta(g(n))$
  se $\exists c, d > 0,\ n_0 \in N$, t.c. $\forall n > n_0 :\ c \cdot g(n) \leq f(n) \leq d \cdot g(n)$

$5n^2 = \Theta(n^2)$

$1.39\, n \log_2 n = \Theta(n \log n)$ $\quad e^{n+50} = \Theta(e^n)$

- $f(n) = O(g(n)) \Longrightarrow \forall k>0 \quad k \cdot f(n) = O(g(n))$

- $f_1(n) = O(g_1(n))$ e $f_2(n) = O(g_2(n))$

$$f_1(n) + f_2(n) = O(g_1(n) + g_2(n))$$

$$f_1(n) \cdot f_2(n) = O(g_1(n) \cdot g_2(n))$$

proprietà analoghe per Ω e Θ

es $f_1(n) = 3n^2 = O(n^2)$

$f_2(n) = 5n^3 = O(n^3)$

$$3n^2 + 5n^3 = O(n^2 + n^3) = O(n^3)$$

Attenzione!

$$\cancel{f_1(n) - f_2(n) = O(g_1(n) - g_2(n))}$$

$$f_1(n) = (5n^2 + 1) = O(n^2)$$

$$f_2(n) = 4n^2 = O(n^2)$$

$$f_1(n) - f_2(n) = n^2 + 1 = O(n^2)$$

$\boxed{1}$ prodotti iterati

$$T(x,y) = 3y + 3 = \Theta(y)$$ crescita lineare in y

$\boxed{2}$ potenze ricorsive

1ª v. $T(x,y) \le 6 \log_2 y + 8$ $T(x,y) = O(\log y)$

2ª v. $T(x,y) \le 7 \log_2 y + 10$ $T(x,y) = O(\log y)$

$$x^y = x^{2\cdot\frac{y}{2}} = (x^2)^{\frac{y}{2}}$$

$$x^y = \begin{cases} 1 & \text{se } y=0 \\ (x^2)^{\frac{y}{2}} & \text{se } y>0 \text{ è pari} \\ (x^2)^{\frac{y-1}{2}}\cdot x & \text{se } y \text{ è dispari} \end{cases}$$

$(\;)^2 \downarrow$ BASE x	$/2 \downarrow$ ESPONENTE y	
2	10	
4	5	4
16	2	
256	1	256
		1024

3	5	3
9	2	
81	1	81
		243

```
ALGORITMO potenza (intero x, intero y) -> intero
    power ← 1
    WHILE y > 0 DO
        IF y è dispari THEN
            power ← power * x
        y ← y/2
        x ← x * x
    RETURN power
```

$(\,)^2 \downarrow$ BASE x	$/2 \downarrow$ ESPONENTE y	
2	10	
4	5	4
16	2	
256	1	256
		1024

$$x^y = \begin{cases} 1 & \text{se } y = 0 \\ (x^2)^{\frac{y}{2}} & \text{se } y > 0 \text{ è pari} \\ (x^2)^{\frac{y-1}{2}} \cdot x & \text{se } y \text{ è dispari} \end{cases}$$

$x_i, y_i, power_i$

$\downarrow$

$$x_i^{y_i} \cdot power_i = x^y$$

ALGORITMO potenza (intero x, intero y) → intero

```
1  power ← 1
2  WHILE y > 0 DO
3      IF y è dispari THEN
4          power ← power * x
5      y ← y/2
6      x ← x * x
7  RETURN power
```

$T(x,y)$

Linea 1, 7	→ 1 volta	2
Linea 2	→ $n+1$ volte	$n+1$
Linee 3, 5, 6	→ n volte	$3n$
Linea 4	→ $\leq n$ volte	$\leq n$
		$\leq 5n+3$

$$n = \lfloor \log_2 y \rfloor + 1$$

$$T(x,y) \leq 5(\lfloor \log_2 y \rfloor + 1) + 3 = 5\lfloor \log_2 y \rfloor + 8$$

$T(x,y) = \Theta(\log y)$ Spazio : $\Theta(1)$

Calcolo potenza x^y

	$T(x,y)$	$S(x,y)$
Prodotti iterati	$\Theta(y)$	$\Theta(1)$
Potenza ricorsiva	$\Theta(\lg y)$	$\Theta(\lg y)$
Potenza "alla russa"	$\Theta(\lg y)$	$\Theta(1)$

$$\log_2 n = \frac{\log_{10} n}{\log_{10} 2} = \log_{10} n \cdot \log_2 10 \approx 3\ldots \cdot \log_{10} n$$

$$\log_a n = \frac{\log_b n}{\log_b a}$$

1 0 0 0 0   16

1 1 1 1 1   31

k cifre $\longrightarrow$ $2^{k-1} \leq n < 2^k$

$k-1 \leq \log_2 n < k$

$k \leq 1 + \log_2 n < k+1$

$n \rightarrow$ rappresentazione in binario $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$ cifre bin

base 10 $\lfloor \log_{10} n \rfloor + 1$ cifre

LUNGHEZZA DI n IN BASE $b > 1$ è $\Theta(\log n)$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \cdots \quad \cdots \quad n-2 \quad n-1 \quad n$$

$n+1$

$n+1$

$n+1$

$$(n+1)\,\frac{n}{2}$$