Algoritmi e Strutture Dati

Lezione 20

14 novembre 2022

Grafi

GRAFO $G = (V, E)$

V insieme finito di NODI o VERTICI

$E \subseteq V \times V$ insieme di ARCHI (o LATI, SPIGOLI)

GRAFO $G = (V, E)$

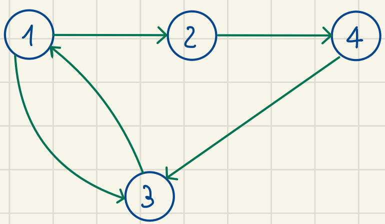
V insieme finito di NODI o VERTICI

$E \subseteq V \times V$ insieme di ARCHI (o LATI, SPIGOLI)

Esempi

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

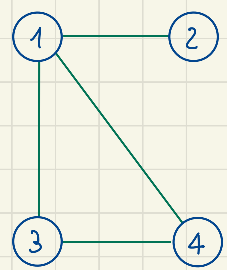
$E = \{(1,2), (1,3), (2,4), (4,3), (3,1)\}$



ORIENTATO / DIRETTO

$V = \{1, 2, 3, 4\}$

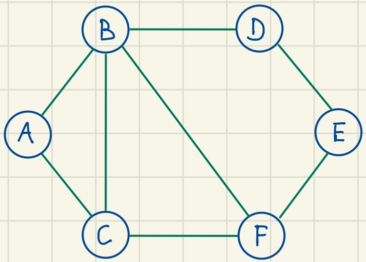
$E = \{(1,2), (2,1), (1,3), (3,1), (3,4), (4,3), (1,4), (4,1)\}$



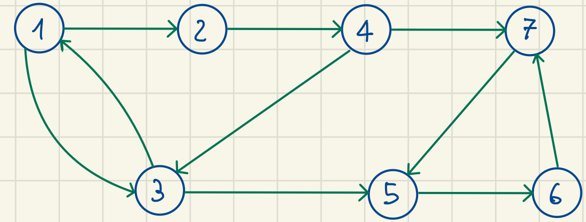
E simmetrica

$(x,y)\ (y,x) \to \{x,y\}$

NON ORIENTATO



NON ORIENTATO



ORIENTATO

- $(x, y) \in E \Rightarrow (x, y)$ è INCIDENTE su x e su y

inoltre:

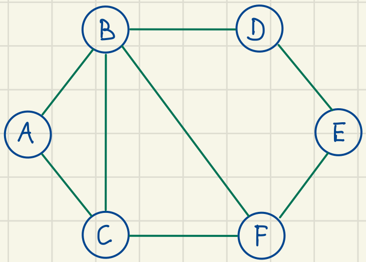
	(x, y) esce da x, entra in y
x e y sono ADIACENTI	y è ADIACENTE a x

- VICINI di $v \in V$: vertici adiacenti a v

vicini di B: A, C, F, D

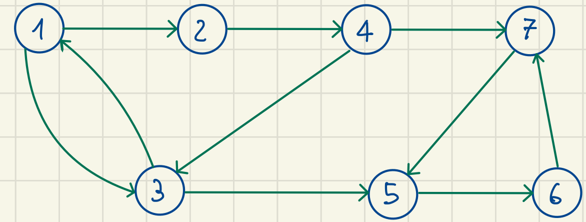
vicini di 5: 6

vicini di 4: 3 e 7



$\# V = n$

$\# E = m$



- GRADO $\delta(v)$ di un vertice v: #archi incidenti su v

$\delta(B) = 4$

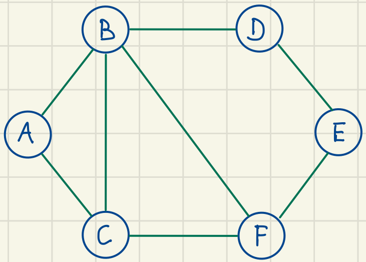
$$\sum_{v \in V} \delta(v) = 2m$$

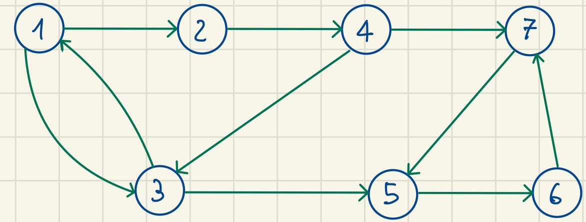
$\delta_{in}(v)$ grado in INGRESSO $\delta_{in}(7) = 2$

$\delta_{out}(v)$ grado in USCITA $\delta_{out}(7) = 1$

$$\delta(v) = \delta_{in}(v) + \delta_{out}(v)$$

$$\sum_{v \in V} \delta_{out}(v) = m = \sum_{v \in V} \delta_{in}(v)$$





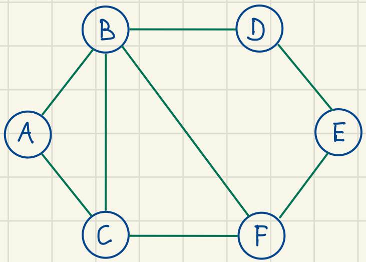
- CAMMINO da x a y $(x, y \in V)$:

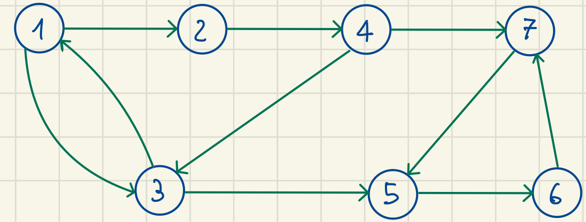
  sequenza di vertici $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ t.c.

  $v_0 = x, \quad v_k = y \quad$ e $\quad (v_{i-1}, v_i) \in E$ per $i = 1, \dots, k$

  - lunghezza del cammino = #archi (k)
  - cammino SEMPLICE: non contiene vertici ripetuti

- y è RAGGIUNGIBILE da x se $\exists$ cammino da x a y

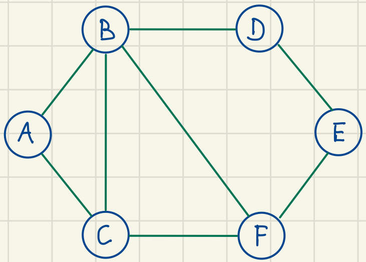


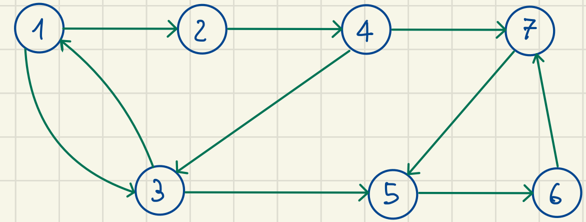


- **CICLO**: cammino da un vertice v a v stesso

  - ciclo **SEMPLICE**:

    solo il vertice iniziale è ripetuto (alla fine)



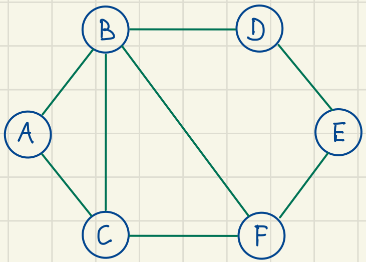


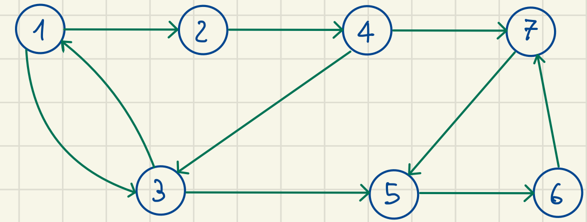
- **CATENA** tra x e y $(x, y \in V)$:

  sequenza di vertici $v_0, v_1, \dots, v_k \in V$ t.c.

  $v_0 = x$, $v_k = y$ e $\left((v_{i-1}, v_i) \in E \text{ o } (v_i, v_{i-1}) \in E\right)$ per $i = 1, \dots, k$

  - **CIRCUITO**: se $x = y$





CONNESSO ma non FORTEMENTE CONNESSO

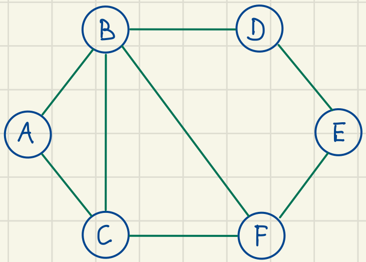
- **GRAFO CONNESSO:**

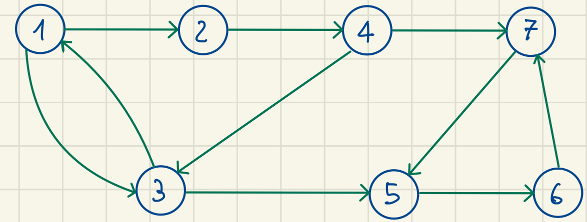
  tra ogni coppia di vertici esiste una catena.

- **GRAFO FORTEMENTE CONNESSO:**

  tra ogni coppia di vertici esiste un cammino

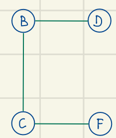
NON ORIENTATI : CONNESSO ≡ FORTEMENTE CONNESSO

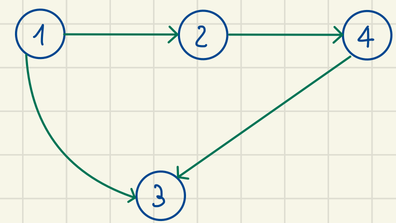




- $G' = (V', E')$ è un **SOTTOGRAFO** di $G = (V, E)$ quando

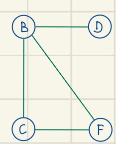
  $V' \subseteq V$ e $E' \subseteq E \cap (V' \times V')$

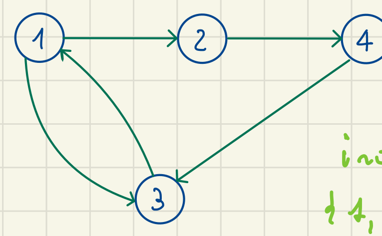




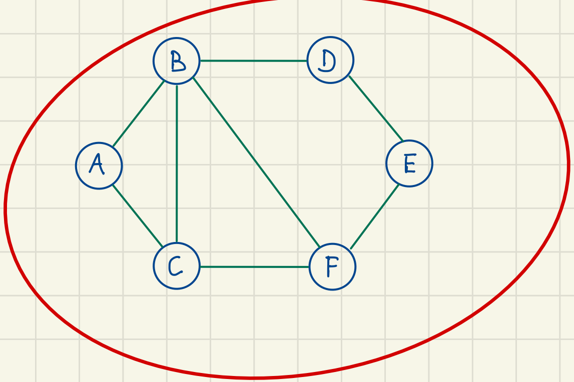
G' è il **sottografo INDOTTO** da V' quando

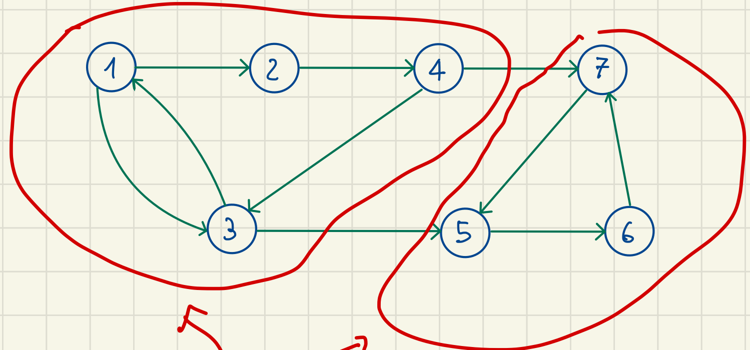
$E' = E \cap (V' \times V')$





indotto da $\{1, 2, 3, 4\}$

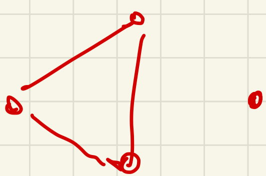


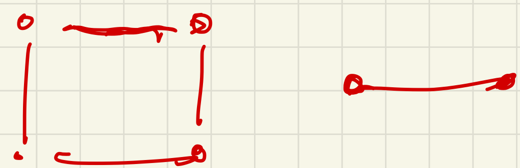


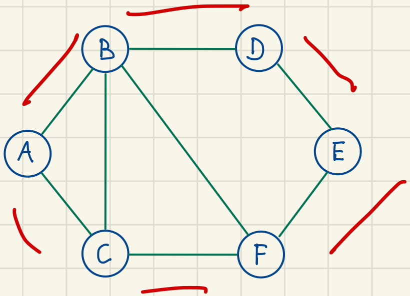
Componenti F.C.

- **COMPONENTE FORTEMENTE CONNESSA:**

  sottografo indotto fortemente connesso massimale



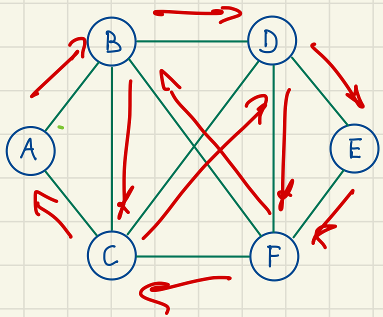




CIRCUITO HAMILTONIANO:

circuito che passa per ogni vertice del grafo una e una sola volta

Problema difficile!

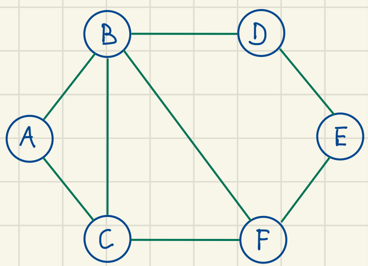


CIRCUITO EULERIANO

circuito che passa per ogni arco del grafo una e una sola volta

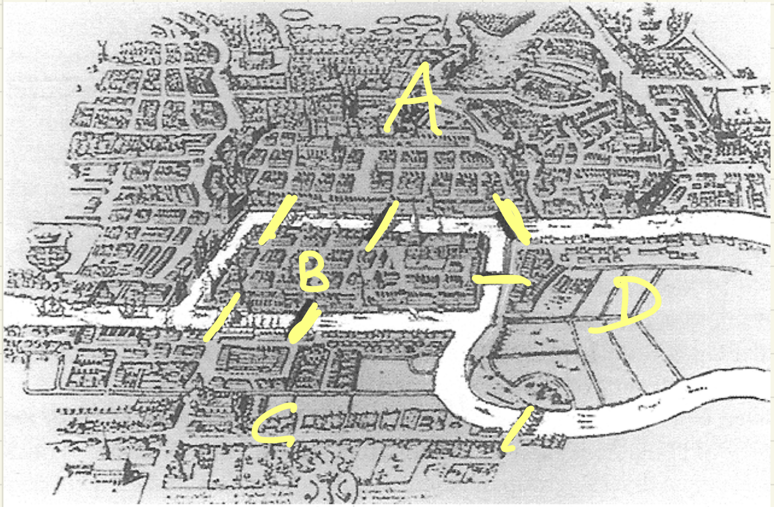
Postino cinese

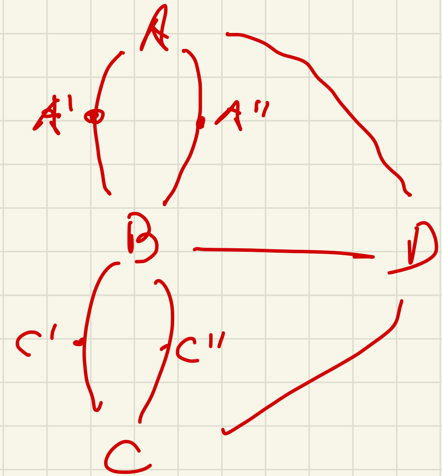
A B D E F C D F B C A



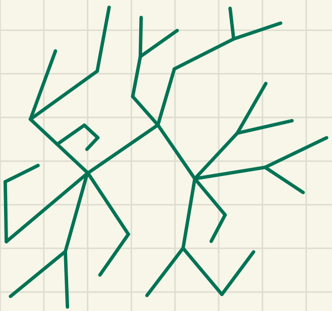
Proprietà $\exists$ circuito euleriano sse grado di ogni vertice è pari

I PONTI DI KÖNIGSBERG

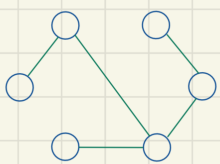




ALBERI

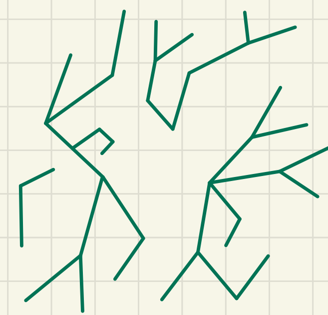


ALBERO: grafo ==NON ORIENTATO==, ==CONNESSO== e ==PRIVO DI CICLI==

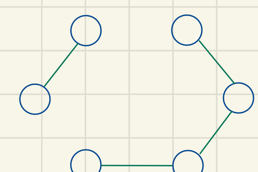


ALBERI

FORESTE



FORESTA: insieme di alberi

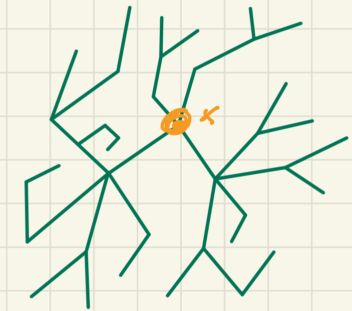


Sia $G=(V,E)$ un albero. Allora $\#E = \#V - 1$

<u>Dim</u> $n = \#V$, induzione su n

$\boxed{n=1}$ • 1 vertice 0 archi

$\boxed{n>1}$ Scelgo $x \in V$ qualunque



Chiamo $G_1 = (V_1, E_1) \dots G_k = (V_k, E_k)$ gli alberi ottenuti da G rimuovendo x e gli archi incidenti su x

Allora $k = \#$ archi incidenti su x

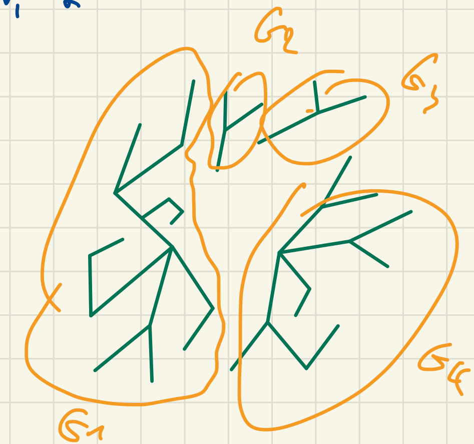
Per $i = 1..k$ $\quad \#V_i < \#V \to$ ip. ind. $\#E_i = \#V_i - 1$

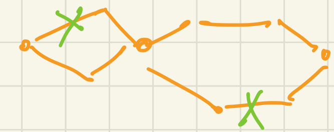
$$\#E = \#E_1 + \#E_2 + \dots + \#E_k + k$$

$$= \#V_1 - 1 + \#V_2 - 1 + \dots + \#V_k - 1 + k =$$

$$= \#V_1 + \#V_2 + \dots + \#V_k = \#V - 1$$

vertice x $\qquad \square$



Sia $G = (V, E)$ non orientato e connesso 

Se $\#E = \#V - 1$ allora G è un albero

Per assurdo sia G non orientato, connesso, $\#E = \#V - 1$,

G non albero $\Rightarrow$ G contiene un ciclo

Continuo a eliminare in modo che il grafo rimanga connesso e non ci siano più cicli

$\Rightarrow$ ottengo $G' = (V', E')$ $\quad \#E' < \#E \quad V' = V$

G' connesso, privo cicli $\Rightarrow$ G' è un albero

$\Rightarrow$ $\#E' = n - 1$, ma $\#E' < \#E = n - 1$

ASSURDO

Teo Un grafo $G=(V,E)$ non orientato e connesso è un albero sse $\#E = \#V - 1$

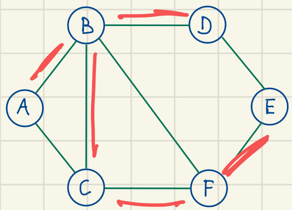
$\#V = 5$ $\#E = 4$ NON è albero!

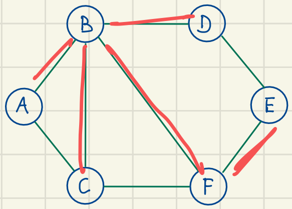
Prop. Sia G una foresta di k alberi.

Allora $\#E = \#V - K$

ALBERO di SUPPORTO o RICOPRENTE (Spanning tree)

Dato $G=(V,E)$ grafo non orientato connesso,
un albero ricoprente di G è un albero $G'=(V',E')$
con $V'=V$ e $E'\subseteq E$





CRICCA (Clique)

Dizionario

cricca[1]

/cric·ca/

sostantivo femminile

1. Gruppo d'intriganti, intenti a procurarsi reciproci favori; combriccola, camarilla.
   - ESTENS. • FAM.
     Gruppo di amici molto uniti tra loro.
     "se ne sta sempre con la sua c."
2. ARCAICO
   Combinazione di tre carte; anche, nome di un gioco di carte.

Origine

Dal fr. *clique* 'combriccola' •sec. XV.

cricca[2]

/cric·ca/

sostantivo femminile

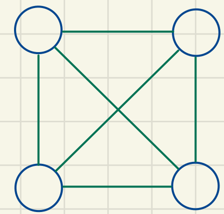
Piccola crepa sottile e profonda che si verifica nei laminati o nei getti metallici, dovuta a difetti di lavorazione.

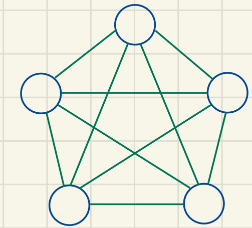
Origine

Der. di *criccare* •1956.

CRICCA (Clique)

Grafo non orientato completo





CRICCA IN UN GRAFO

Sottografo completo