Федеральное агентство связи
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
«Сибирский государственный университет
телекоммуникаций и информатики»

Кафедра ПМиК

Отчёт по курсовой работе по дисциплине
«Вычислительная математика» по теме:
«Решение дифференциального уравнения методом Рунге-Кутта
2-ого порядка с усреднением по времени»

Выполнил:
ст. гр. ИВ-823
Шиндель Э. Д.

Проверил:
Ассистент
Кафедры ПМиК
Петухова Я. В.

Новосибирск, 2020

Содержание:

1. Постановка задачи

Решить краевую задачу методом Рунге-Кутта II порядка с усреднением по времени.

$$\begin{cases} y'' = \dfrac{e^x + 2y + 3y'}{6} \\ y(0) = 1 \\ y(1) = 2{,}71828 \end{cases}$$

Построить графики функции y(x) и кубического сплайна S(x) (интерполяция по точкам x=0; 0.2;0.4; 0.6; 0.8; 1.0).

Найти интеграл: $\int_0^1 (y')^2(x)dx$

2. Теория

Дифференциальное уравнение (ДУ) – это уравнение, содержащее производные функции y(x), саму функцию, независимые переменные и иные параметры в различных комбинациях.

Решением дифференциального уравнения является функция, которая обращает его в тождество.

Существуют общие и частные решения ДУ. Общим решением ДУ является общее множество решений, обращающих уравнение в тождество. Частным решением дифференциального уравнения называется решение, удовлетворяющее дополнительным условиям, заданным изначально.

Дифференциальное уравнение 2-ого порядка - это уравнение, в которое входят независимая переменная, неизвестная функция, первая и вторая производные этой функции. ДУ второго порядка записывается в виде: $y'' = f(x, y, y')$.

Общая идея всех методов численного решения ДУ и СДУ: Фиксируем шаг h, $y(x_0)$ - задан и будем находить по некоторым специальным формулам $y(x_1),\ y(x_2), \dots, y(x_n)$, где x_i – равностоящие точки, а x_0, x_n – границы интервала [a, b], на котором нам необходимо найти решение ДУ. При этом, необходимо брать шаг h достаточно малым, чтобы погрешность была невелика.

Простейший метод решения ДУ – метод Эйлера:
Заметим, что $y'(x_0) = f(x_0, y_0)$ – величина нам известная. Заменим неизвестное нам решение ДУ на касательную, а именно:
$y(x_1) = y(x_0) + y'(x_0) \cdot h = y_0 + f(x_0, y_0) \cdot h.$
В общем виде: $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$ (формула Эйлера).

Простейшая модификация метода Эйлера – метод Рунге-Кутта 2-го порядка с усреднением по времени:
Вычисление значения в искомой функции в точке x_{i+1} проводится в 2 этапа. Сначала вычисляют вспомогательную величину $y^*_{\frac{i+1}{2}}$ по методу Эйлера: $y^*_{\frac{i+1}{2}} = y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)$, в которой мы заменили приращение функции на более точное значение – на значение производной в середине интервала.

Затем значение производной искомой функции в точке (x_i, y_i). Используется для вычисления окончательного значения функции:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i + \frac{h}{2}, y^*_{\frac{i+1}{2}}).$$

Объединив эти формулы, получим формулу метода Рунге-Кутты 2-ого порядка с усреднением по времени:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i, y_i)\right).$$

Этот метод также называют методом прогноза и коррекций. Сначала находят грубое приближение $y^*_{\frac{i+1}{2}}$ по методу Эйлера (прогноз), а затем уточненное значение y_{i+1} (коррекция).

3. Решение задания

$$y'' = \frac{e^x + 2y + 3y'}{6}$$
$$y' = 1,\ y_0 = 1,\ h = 0{,}14319.$$

Отрезок [1; 2,71828].

Шаг 1:

$$y_0' = x_0$$
$$x_1 = x_0 + h = 1 + 0{,}14317 = 1{,}14319$$
$$y_1^* = y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0, y_0) = 1 + \frac{0{,}14319}{2} \cdot f(1, 1) = \ 1{,}0921$$
$$y_1 = \ y_0 + h \cdot f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_1^*\right) = 1 + 0{,}14319 \cdot f(1{,}071595, 1{,}0921)$$
$$= 1{,}19853$$

Шаг 2:

$$x_2 = x_1 + h = 1{,}28638$$
$$y_2^* = y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1, y_1) = 1{,}30549$$
$$y_2 = \ y_1 + h \cdot f\left(x_1 + \frac{h}{2}, y_2^*\right) = 1{,}42823$$

Шаг 3:

$$x_3 = x_2 + h = 1{,}42957$$
$$y_3^* = y_2 + \frac{h}{2} \cdot f(x_2, y_2) = 1{,}55156$$
$$y_3 = \ y_2 + h \cdot f\left(x_2 + \frac{h}{2}, y_3^*\right) = 1{,}69231$$

Шаг 4:

$$x_4 = x_3 + h = 1{,}57276$$
$$y_4^* = y_3 + \frac{h}{2} \cdot f(x_3, y_3) = 1{,}83371$$

$$y_4 = y_3 + h \cdot f\left(x_3 + \frac{h}{2}, y_4^*\right) = 1{,}99439$$

Шаг 5:

$$x_5 = x_4 + h = 1{,}71595$$
$$y_5^* = y_4 + \frac{h}{2} \cdot f(x_4, y_4) = 2{,}1558$$
$$y_5 = y_4 + h \cdot f\left(x_4 + \frac{h}{2}, y_5^*\right) = 2{,}33857$$

Шаг 6:

$$x_6 = x_5 + h = 1{,}85914$$
$$y_6^* = y_5 + \frac{h}{2} \cdot f(x_5, y_5) = 2{,}52218$$
$$y_6 = y_5 + h \cdot f\left(x_5 + \frac{h}{2}, y_6^*\right) = 2{,}72952$$

Шаг 7:

$$x_7 = x_6 + h = 2{,}00233$$
$$y_7^* = y_6 + \frac{h}{2} \cdot f(x_6, y_6) = 2{,}9378$$
$$y_7 = y_6 + h \cdot f\left(x_6 + \frac{h}{2}, y_7^*\right) = 3{,}17252$$

Шаг 8:

$$x_8 = x_7 + h = 2{,}14552$$
$$y_8^* = y_7 + \frac{h}{2} \cdot f(x_7, y_7) = 3{,}40828$$
$$y_8 = y_7 + h \cdot f\left(x_7 + \frac{h}{2}, y_8^*\right) = 3{,}67355$$

Шаг 9:

$$x_9 = x_8 + h = 2{,}28871$$

$$y_9^* = y_8 + \frac{h}{2} \cdot f(x_8, y_8) = 3{,}94$$

$$y_9 = y_8 + h \cdot f\left(x_8 + \frac{h}{2}, y_9^*\right) = 4{,}23944$$

Шаг 10:

$$x_{10} = x_9 + h = 2{,}43190$$

$$y_{10}^* = y_9 + \frac{h}{2} \cdot f(x_9, y_9) = 4{,}54022$$

$$y_{10} = y_9 + h \cdot f\left(x_9 + \frac{h}{2}, y_{10}^*\right) = 4{,}87796$$

Шаг 11:

$$x_{11} = x_{10} + h = 2{,}57509$$

$$y_{11}^* = y_{10} + \frac{h}{2} \cdot f(x_{10}, y_{10}) = 5{,}21722$$

$$y_{11} = y_{10} + h \cdot f\left(x_{10} + \frac{h}{2}, y_{11}^*\right) = 5{,}59797$$

Шаг 12:

$$x_{12} = x_{11} + h = 2{,}71828$$

$$y_{12}^* = y_{11} + \frac{h}{2} \cdot f(x_{11}, y_{11}) = 5{,}98045$$

$$y_{12} = y_{11} + h \cdot f\left(x_{11} + \frac{h}{2}, y_{12}^*\right) = 6{,}40957$$

4. Результат работы программы

```
shindel@LAPTOP-R2PT0MJC:/mnt/c/Users/shind/Desktop/VMAT/curs$ ./curs
        Курсовая работа по дисциплине "Вычислительная математика"
        по теме: "Решение дифференциального уравнения методом
        Рунге-Кутта 2-ого порядка с усреднением по времени"
Выполнил:
ст. гр. ИВ-823
Шиндель Э.Д.

Проверил:
ассистент
кафедры ПМиК
Петухова Я.В.
                        Новосибирск, 2020
        1 часть:
1. y(1.14319) = 1.19853
2. y(1.28638) = 1.42823
3. y(1.42957) = 1.69231
4. y(1.57276) = 1.99439
5. y(1.71595) = 2.33857
6. y(1.85914) = 2.72952
7. y(2.00233) = 3.17252
8. y(2.14552) = 3.67355
9. y(2.28871) = 4.23944
10. y(2.43190) = 4.87796
11. y(2.57509) = 5.59797
12. y(2.71828) = 6.40957

        2 часть:
y(0.00) = 0.05
y(0.20) = 0.13
y(0.40) = 0.25
y(0.60) = 0.40
y(0.80) = 0.61
y(1.00) = 0.87


        3 часть:
Integral = 0.22568
shindel@LAPTOP-R2PT0MJC:/mnt/c/Users/shind/Desktop/VMAT/curs$
```

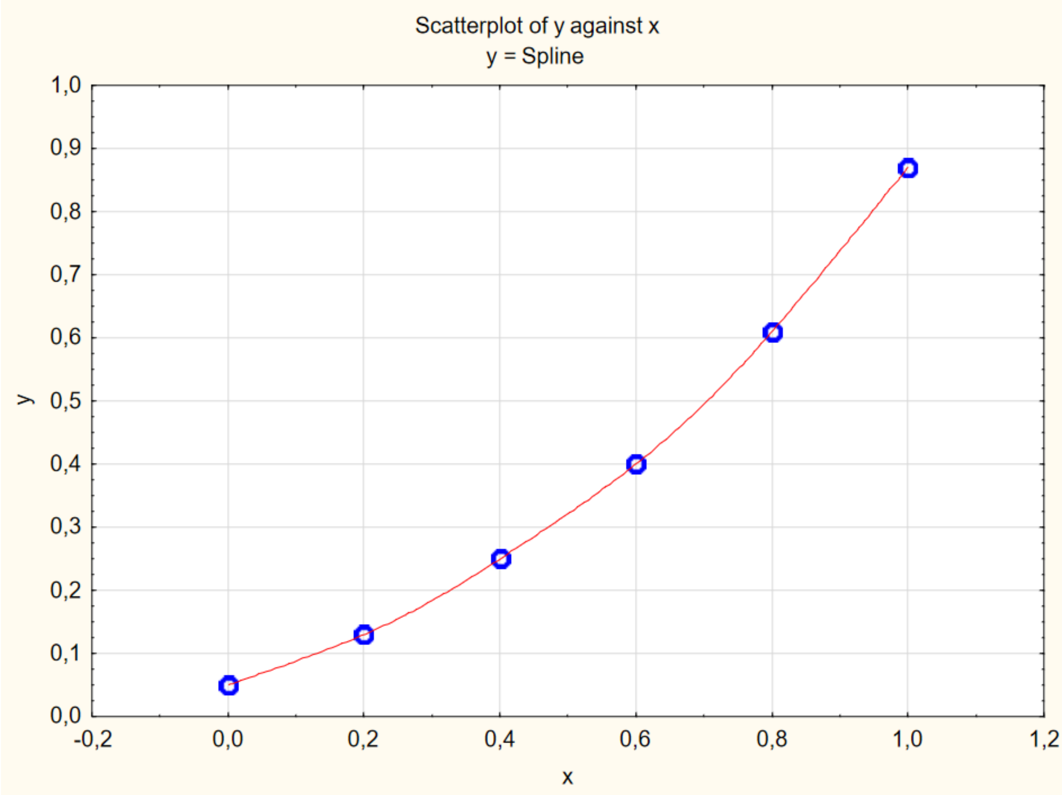

График кубического сплайна S(x)

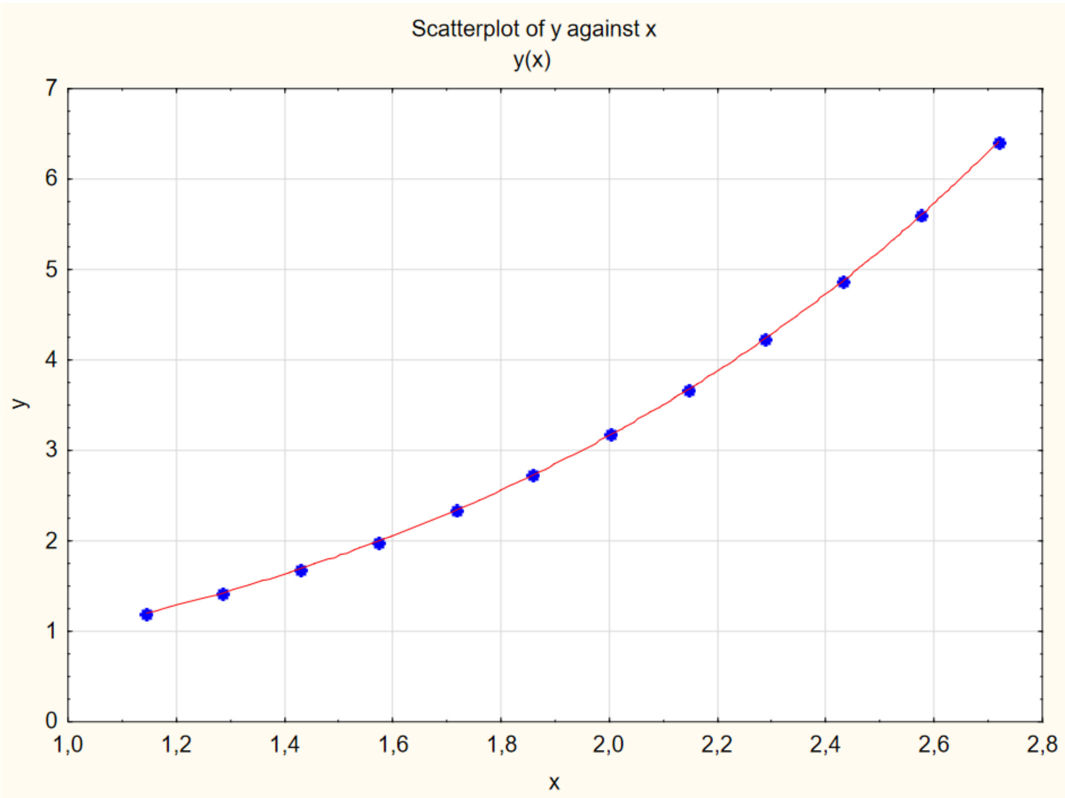

График функции y(x)

5. Листинг

```
#include <stdio.h>
#include <math.h>

double const e = 2.71828;

double f(double x, double y) {
    return ((exp(x) + 2 * y + 3 * x) / 6);
}

double RK(double x, double y, double h) {
    double _y = y + h * f(x, y) / 2;
    double yy = y + h * f(x + h / 2, _y);
    return yy;
}

double integral(double b, double t){
    double hh = 0.002;
    double x = 0.0, y = 0.0, sum_1 = 0.0, sum_2 = 0.0;
    int k = 0;

    while(x <= (t - hh)) {
        k++;
        x = b + hh * k;
        y = RK(x, y, hh);
        if(k % 2 == 0) sum_2 += y;
        else sum_1 += y;
    }
    return ((RK(b, y, hh) + RK(t, y, hh) + 4 * sum_1 + 2 * sum_2) * hh / 3);
}

int main()
```

```c
{
    double const h = 0.14319;
    double x = 1.0, y = 1.0;
    int count = 1;

    printf("\tКурсовая работа по дисциплине \"Вычислительная математика\"\n");
    printf("\tпо теме: \"Решение дифференциального уравнения методом\n");
    printf("\tРунге-Кутта 2-ого порядка с усреднением по времени\"\n");
    printf("Выполнил:\nст. гр. ИВ-823\nШиндель Э.Д.\n");
    printf("Проверил:\nассистент\nкафедры ПМиК\nПетухова Я.В.\n");
    printf("\t\t\tНовосибирск, 2020\n");

    printf("\t1 часть:\n");
    while (x < e) {
        y = RK(x, y, h);
        x += h;
        printf("%d. y(%.5f) = %.5f\n", count, x, y);
        count++;
    }

    x = y = 0.0;
    printf("\n\t2 часть:\n");
    for (x = 0.0; x <= 1.0; x += 0.2) {
        y = RK(x, y, 0.2);
        printf("y(%.2f) = %.2f\n", x, y);
    }

    printf("\n\t3 часть:\n");
    printf("Integral = %.5f\n", integral(0, 1));
    return 0;
}
```