

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

Кафедра ПМиК

Контрольная работа №3 по дисциплине
«Вычислительная математика»

Выполнил:
ст. гр. ИВ-823
Шиндель Э. Д.

Проверила:
Ассистент
Кафедры ПМиК
Петухова Я. В.

Новосибирск, 2020

$$f(x) = \cos(x) + 2 \cdot \sin(2 \cdot x) - \frac{1}{x} = 0 \quad [0,5; 2]$$

Проверка на наличие корней:

$f(a) \cdot f(b) < 0$ (есть хотя бы один корень)

$f(a) = f(0,5) = 0,5605$

$f(b) = f(2) = -2,4298$

$f(a) \cdot f(b) = -1,3619 < 0 \rightarrow$ Есть хотя бы 1 корень

1. Метод биссекций

$a = 0,5 \quad b = 2$

$$x_i = \frac{a + b}{2}$$

Проверка: $|f(x)| < e$

$e = 0,0001$ (точность)

Для перехода на следующую итерацию находим интервал, где происходит смена знака:

if $(f(a) \cdot f(x) < 0)$ $a = a, b = x; [a; x]$

else $a = x, b = b; [x, b]$

1-ая итерация:

$a = 0,5 \quad b = 2$

$$x_0 = \frac{a + b}{2} = \frac{0,5 + 2}{2} = 1,25$$

Проверка: $|f(x_0)| = |f(1,25)| = 0,7123 > e (-)$

$f(a) \cdot f(x) = f(0,5) \cdot f(1,25) = 0,5605 \cdot 0,7123 = 0,3992 > 0 \rightarrow a = x$

2-ая итерация:

$a = 1,25 \quad b = 2$

$$x_1 = \frac{a + b}{2} = \frac{1,25 + 2}{2} = 1,625$$

Проверка: $|f(x_1)| = |f(1,625)| = 0,8860 > e (-)$

$f(a) \cdot f(x) = f(1,25) \cdot f(1,625) = 0,7123 \cdot (-0,8860) = -0,6311 < 0 \rightarrow b = x$

3-я итерация:

$a = 1,25 \quad b = 1,625$

$$x_2 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,25 + 1,625}{2} = 1,4375$$

Проверка: $|f(x_2)| = |f(1,4375)| = 0,0359 > \epsilon (-)$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,25) \cdot f(1,4375) = 0,7123 \cdot (-0,0359) = -0,0256 < 0 \rightarrow \\ \rightarrow b = x$$

4-ая итерация:

$$a = 1,25 \quad b = 1,4375$$

$$x_3 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,25 + 1,4375}{2} = 1,3438$$

Проверка: $|f(x_3)| = |f(1,3438)| = 0,3580 > \epsilon (-)$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,25) \cdot f(1,3438) = 0,7123 \cdot 0,3580 = 0,2550 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

5-ая итерация:

$$a = 1,3438 \quad b = 1,4375$$

$$x_4 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3438 + 1,4375}{2} = 1,3907$$

Проверка: $|f(x_4)| = |f(1,3907)| = 0,1650 > \epsilon (-)$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,3438) \cdot f(1,3907) = 0,3580 \cdot 0,1650 = 0,0591 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

6-ая итерация:

$$a = 1,3907 \quad b = 1,4375$$

$$x_5 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,3907 + 1,4375}{2} = 1,4141$$

Проверка: $|f(x_5)| = |f(1,4141)| = 0,0655 > \epsilon (-)$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,3907) \cdot f(1,4141) = 0,1650 \cdot 0,0655 = 0,0108 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

7-ая итерация:

$$a = 1,4141 \quad b = 1,4375$$

$$x_6 = \frac{a+b}{2} = \frac{1,4141 + 1,4375}{2} = 1,4258$$

Проверка: $|f(x_6)| = |f(1,4258)| = 0,0150 > \epsilon (-)$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4141) \cdot f(1,4258) = 0,0655 \cdot 0,0150 = 0,0010 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

8-ая итерация:

$$a = 1,4258 \quad b = 1,4375$$

$$x_7 = \frac{a + b}{2} = \frac{1,4258 + 1,4375}{2} = 1,4317$$

$$\text{Проверка: } |f(x_7)| = |f(1,4317)| = 0,0106 > \epsilon (-)$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4258) \cdot f(1,4317) = 0,0150 \cdot (-0,0106) = -0,0002 < 0 \rightarrow \\ \rightarrow b = x$$

9-ая итерация:

$$a = 1,4258 \quad b = 1,4317$$

$$x_8 = \frac{a + b}{2} = \frac{1,4258 + 1,4317}{2} = 1,4288$$

$$\text{Проверка: } |f(x_8)| = |f(1,4288)| = 0,0020 > \epsilon (-)$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4258) \cdot f(1,4288) = 0,0150 \cdot 0,0020 = 0,00003 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

10-ая итерация:

$$a = 1,4288 \quad b = 1,4317$$

$$x_9 = \frac{a + b}{2} = \frac{1,4288 + 1,4317}{2} = 1,4303$$

$$\text{Проверка: } |f(x_9)| = |f(1,4303)| = 0,0045 > \epsilon (-)$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4288) \cdot f(1,4303) = 0,0020 \cdot (-0,0045) = -0,000009 < 0 \\ \rightarrow b = x$$

11-ая итерация:

$$a = 1,4288 \quad b = 1,4303$$

$$x_{10} = \frac{a + b}{2} = \frac{1,4288 + 1,4303}{2} = 1,4296$$

$$\text{Проверка: } |f(x_{10})| = |f(1,4296)| = 0,0015 > \epsilon (-)$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4288) \cdot f(1,4296) = 0,0020 \cdot (-0,0015) = -0,000003 < 0 \\ \rightarrow b = x$$

12-ая итерация:

$$a = 1,4288 \quad b = 1,4296$$

$$x_{11} = \frac{a + b}{2} = \frac{1,4288 + 1,4296}{2} = 1,4292$$

$$\text{Проверка: } |f(x_{11})| = |f(1,4292)| = 0,0003 > \epsilon (-)$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4288) \cdot f(1,4292) = 0,0020 \cdot 0,0003 = 0,0000006 > 0 \\ \rightarrow a = x$$

13-ая итерация:

$$a = 1,4292 \quad b = 1,4296$$

$$x_{12} = \frac{a+b}{2} = \frac{1,4292 + 1,4296}{2} = 1,4294$$

$$\text{Проверка: } |f(x_{12})| = |f(1,4294)| = 0,0006 > e \text{ (-)}$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4292) \cdot f(1,4294) = 0,0003 \cdot (-0,0006) = -0,00000018 < 0$$

$$\rightarrow b = x$$

14-ая итерация:

$$a = 1,4292 \quad b = 1,4294$$

$$x_{13} = \frac{a+b}{2} = \frac{1,4292 + 1,4294}{2} = 1,4293$$

$$\text{Проверка: } |f(x_{13})| = |f(1,4293)| = 0,0002 > e \text{ (-)}$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4292) \cdot f(1,4293) = 0,0003 \cdot (-0,0002) = -0,00000006 < 0$$

$$\rightarrow b = x$$

15-ая итерация:

$$a = 1,4292 \quad b = 1,4293$$

$$x_{14} = \frac{a+b}{2} = \frac{1,4292 + 1,4293}{2} = 1,42925$$

$$\text{Проверка: } |f(x_{14})| = |f(1,42925)| = 0,00005 < e \text{ (+)}$$

Ответ: $x = 1,4293$ с точностью 0,0001.

2. Метод хорд

$$a = 0,5 \quad b = 2$$

$$x_i = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)}$$

$$\text{Проверка: } |x_k - x_{k-1}| < e \quad e = 0,0001 \text{ (точность)}$$

Для перехода на следующую итерацию находим интервал, где происходит смена знака:

if $(f(a) \cdot f(x) < 0)$ $a = a$, $b = x$; $[a; x]$

else $a = x$, $b = b$; $[x, b]$

1-ая итерация:

$$a = 0,5 \quad b = 2$$

$$x_0 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{0,5 \cdot f(2) - 2 \cdot f(0,5)}{f(2) - f(0,5)} = 0,7812$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(0,5) \cdot f(0,7812) = 0,5605 \cdot 1,4299 = 0,8402 > 0 \rightarrow a = x$$

2-ая итерация:

$$a = 0,7812 \quad b = 2$$

$$x_1 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{0,7812 \cdot f(2) - 2 \cdot f(0,7812)}{f(2) - f(0,7812)} = 1,2327$$

$$\text{Проверка: } |x_1 - x_0| = |1,2327 - 0,7812| = 0,4515 > e \text{ (-)}$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(0,7812) \cdot f(1,2327) = 1,4299 \cdot 0,7721 = 1,1040 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

3-я итерация:

$$a = 1,2327 \quad b = 2$$

$$x_2 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,2327 \cdot f(2) - 2 \cdot f(1,2327)}{f(2) - f(1,2327)} = 1,4177$$

$$\text{Проверка: } |x_2 - x_1| = |1,4177 - 1,2327| = 0,185 > e \text{ (-)}$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,2327) \cdot f(1,4177) = 0,7721 \cdot 0,0500 = 0,0386 > 0 \rightarrow \\ \rightarrow a = x$$

4-ая итерация:

$$a = 1,4177 \quad b = 2$$

$$x_3 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,4177 \cdot f(2) - 2 \cdot f(1,4177)}{f(2) - f(1,4177)} = 1,4294$$

$$\text{Проверка: } |x_3 - x_2| = |1,4294 - 1,4177| = 0,0117 > e \text{ (-)}$$

$$f(a) \cdot f(x) = f(1,4177) \cdot f(1,4294) = 0,0500 \cdot (-0,0006) = -0,00003 < 0 \rightarrow \\ \rightarrow b = x$$

5-ая итерация:

$$a = 1,4177 \quad b = 1,4294$$

$$x_4 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,4177 \cdot f(1,4294) - 1,4294 \cdot f(1,4177)}{f(1,4294) - f(1,4177)} \\ = 1,4293$$

Проверка: $|x_4 - x_3| = |1,4293 - 1,4294| = 0,0001 > e \text{ (-)}$
 $f(a) \cdot f(x) = f(1,4177) \cdot f(1,4293) = 0,0500 \cdot (-0,0002) = 0,00001 > 0 \rightarrow$
 $\rightarrow a = x$

6-ая итерация:

$$a = 1,4293 \quad b = 1,4294$$

$$x_5 = \frac{a \cdot f(b) - b \cdot f(a)}{f(b) - f(a)} = \frac{1,4293 \cdot f(1,4294) - 1,4294 \cdot f(1,4293)}{f(1,4294) - f(1,4293)}$$

$$= 1,42925$$

Проверка: $|x_5 - x_4| = |1,42925 - 1,4293| = 0,00005 < e \text{ (+)}$

Ответ: $x = 1,4293$ с точностью 0,0001.

3. Метод Ньютона

Выберем начальное приближение x_0 . Обычно это один из концов отрезка. Начальное приближение должно удовлетворять условию: $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$.

Найдём 1 и 2 производную функции:

$$f'(x) = -\sin(x) + 4 \cdot \cos(2 \cdot x) + \frac{1}{x^2}$$

$$f''(x) = -8 \sin(2 \cdot x) - \cos(x) - \frac{2}{x^3}$$

Проверяем левый конец отрезка:

$$f(0,5) \cdot f''(0,5) = 0,5605 \cdot (-23,6094) = -13,2330 < 0 \text{ (-)}$$

Проверяем правый конец:

$$f(2) \cdot f''(2) = -2,4298 \cdot (-6,2206) = 15,1148 > 0 \text{ (+)}$$

В качестве начального приближения выбираем $x_0 = 2$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Проверка: $\left| \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \right| < e$ $e = 0,0001$ (точность)

1-ая итерация:

$$f(x_0) = f(2) = -2,4298$$

$$f'(x_0) = f'(2) = -3,2739$$

$$\text{Проверка: } \left| \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} \right| = \left| \frac{-2,4298}{-3,2739} \right| = 0,7422 > e \text{ (-)}$$

2-ая итерация

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 2 - \frac{-2,4298}{-3,2739} = 1,2578$$

$$f(x_1) = f(1,2578) = 0,6847$$

$$f'(x_1) = f'(1,2578) = -3,5609$$

$$\text{Проверка: } \left| \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} \right| = \left| \frac{0,6847}{-3,5609} \right| = 0,1923 > e \text{ (-)}$$

3-я итерация:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 1,2578 - \frac{0,6847}{-3,5609} = 1,4501$$

$$f(x_2) = f(1,4501) = -0,0911$$

$$f'(x_2) = f'(1,4501) = -4,4012$$

$$\text{Проверка: } \left| \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} \right| = \left| \frac{-0,0911}{-4,4012} \right| = 0,0207 > e \text{ (-)}$$

4-ая итерация:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)} = 1,4501 - \frac{-0,0911}{-4,4012} = 1,4294$$

$$f(x_3) = f(1,4294) = -0,0006$$

$$f'(x_3) = f'(1,4294) = -4,3417$$

$$\text{Проверка: } \left| \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} \right| = \left| \frac{-0,0006}{-4,3417} \right| = 0,0001 > e \text{ (-)}$$

5-ая итерация:

$$x_4 = x_3 - \frac{f(x_3)}{f'(x_3)} = 1,4294 - \frac{-0,0006}{-4,3417} = 1,4293$$

$$f(x_4) = f(1,4293) = -0,0002$$

$$f'(x_4) = f'(1,4293) = -4,3414$$

$$\text{Проверка: } \left| \frac{f(x_4)}{f'(x_4)} \right| = \left| \frac{-0,0002}{-4,3414} \right| = 0,00005 < e \text{ (+)}$$

Ответ: $x = 1,4293$ с точностью 0,0001.