ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО СВЯЗИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«СИБИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ТЕЛЕКОММУНИКАЦИЙ И ИНФОРМАТИКИ»

ПОЯСНИТЕЛЬНАЯ ЗАПИСКА

к курсовому проекту по дисциплине
«Структуры и алгоритмы обработки данных»
на тему: «2-3 TREE»

Выполнил студент Шиндель Эдуард Дмитриевич
Ф.И.О.

Группы ИВ-823

Работу принял _____ преподаватель Кафедры ВС Д. М. Берлизов
подпись

Защищена _____ Оценка _____

Новосибирск – 2019

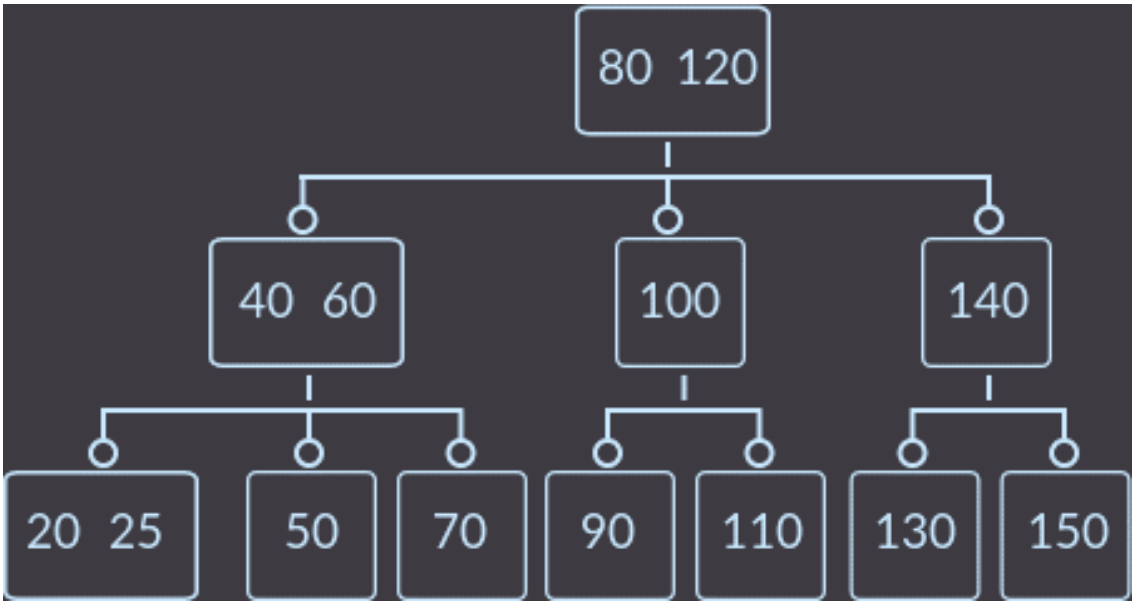
СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Большинству программистов (и не только) известно такое дерево как бинарное дерево поиска. Деревья поиска используют тогда, когда нужно очень часто выполнять операцию поиск. В обычном дереве поиска есть очень большой недостаток: когда на вход получаем отсортированные данные, наше дерево становится обычным массивом. И тогда операция поиск будет осуществляться за такую же сложность, как и в массиве, — за O(n), где n — количество элементов в массиве. Есть несколько способов, как можно обычное дерево сделать сбалансированным (поиск имеет сложность O(log n) и 2-3 деревья это один из них.

1. 2-3 деревья и его свойства

2-3 дерево (англ. 2-3 tree) — структура данных, являющаяся B-деревом, представляющая собой сбалансированное дерево поиска, такое что из каждого узла может выходить две или три ветви, и глубина всех листьев одинакова.



Свойства 2-3 дерева:

1. Все нелистовые вершины содержат одно поле и 2 поддерева или 2 поля и 3 поддерева.
2. Все листовые вершины находятся на одном уровне (на нижнем уровне) и содержат 1 или 2 поля.
3. Все данные отсортированы (по принципу двоичного дерева поиска).
4. Нелистовые вершины содержат одно или два поля, указывающие на диапазон значений в их поддеревьях.
5. Высота 2-3 дерева O(log n), где n — количество элементов в дереве.

2. Операции с 2-3 деревьями

Я в своей курсовой работе реализовал такие операции с 2-3 деревьями как:

- Поиск элемента
- Добавление
- Поиск минимального элемента
- Удаление

2.1 Поиск

Операцию поиска можно описать при помощи простого алгоритма:

Поиск начинаем с корня дерева.

1. Ищем искомый ключ key в текущей вершине, если нашли, то возвращаем вершину, иначе
2. Если key меньше первого ключа вершины, то идем в левое поддерево и переходим к пункту 1, иначе
3. Если в дереве 1 ключ, то идем в правое поддерево и переходим к пункту 1, иначе
4. Если key меньше второго ключа вершины, то идем в среднее поддерево и переходим к пункту 1, иначе
5. Идем в правое поддерево и переходим к пункту 1.

2.2 Добавление

Также как и для поиска, операция добавления имеет определённый алгоритм.

Для того, чтобы вставить в дерево элемент с ключом key, нужно следовать пунктам.

1. Если дерево пусто, то создать новую вершину, вставить ключ и вернуть в качестве корня эту вершину, иначе
2. Если вершина является листом, то вставляем ключ в эту вершину и если получили 3 ключа в вершине, то разделяем её, иначе
3. Сравниваем ключ key с первым ключом в вершине, и если key меньше данного ключа, то идем в первое поддерево и переходим к пункту 2, иначе
4. Смотрим, если вершина содержит только 1 ключ (является 2-вершиной), то идем в правое поддерево и переходим к пункту 2, иначе
5. Сравниваем ключ key со вторым ключом в вершине, и если key меньше второго ключа, то идем в среднее поддерево и переходим к пункту 2, иначе
6. Идем в правое поддерево и переходим к пункту 2.

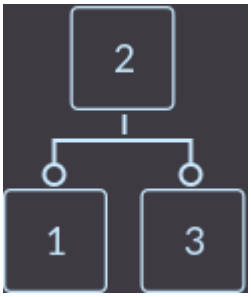
Для примера вставим keys = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}:

При вставке key=1 мы имеем пустое дерево, а после получаем единственную вершину с единственным ключа key=1:

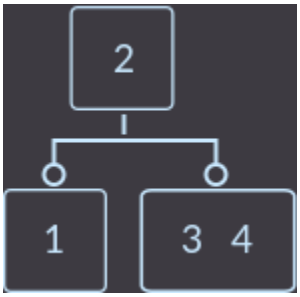
Дальше вставляем key=2:

Теперь вставляем key=3 и получаем вершину, содержащую 3 ключа:

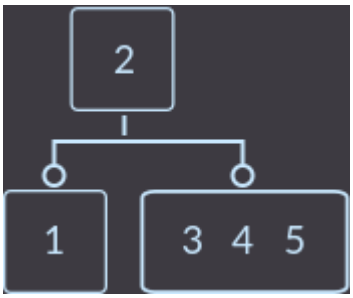
Теперь эта вершина нарушает свойства 2-3 дерева, поэтому вызовется функция разделения вершины split



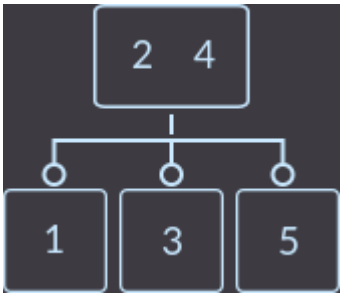
Дальше по алгоритму вставляем key=4:



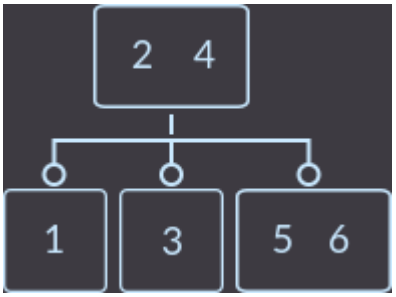
Key=5:



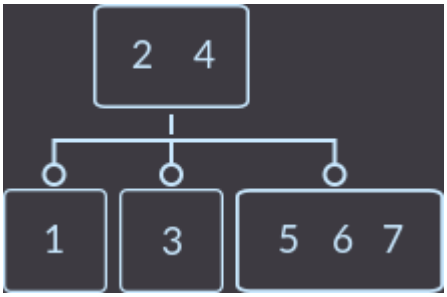
Снова нарушилось свойства 2-3 дерева, делаем разделение:



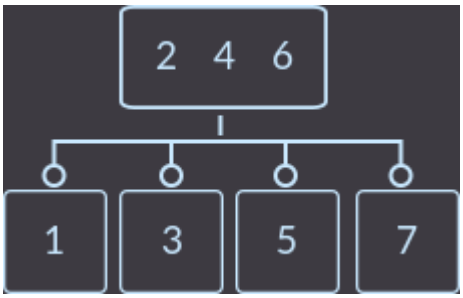
Key=6:



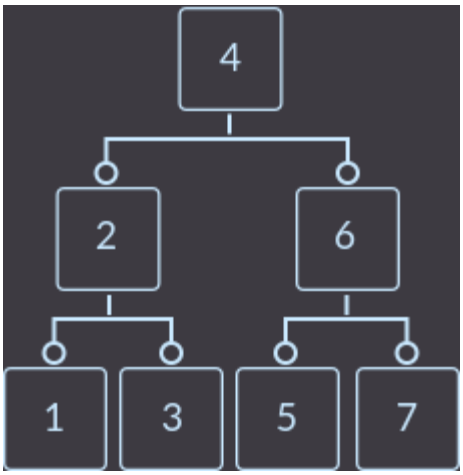
Key=7:



Теперь нам предстоит сделать два разделения, т.к. вершина, в которую вставили новый ключ теперь имеет 3 ключа (сначала разделим ее):



А теперь и корень имеет 3 вершины — разделим его и получим сбалансированное дерево, которое при таких входных данных с обычным двоичным деревом поиска мы бы не смогли получить:



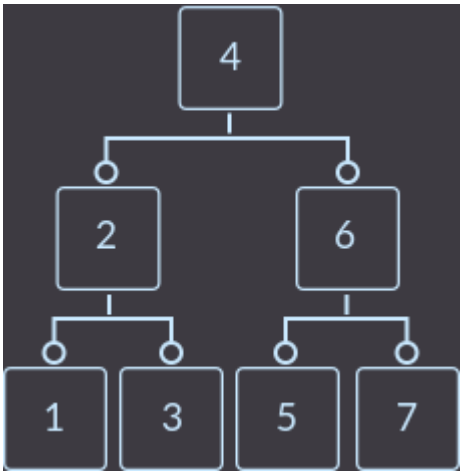
2.3 Поиск минимального элемента

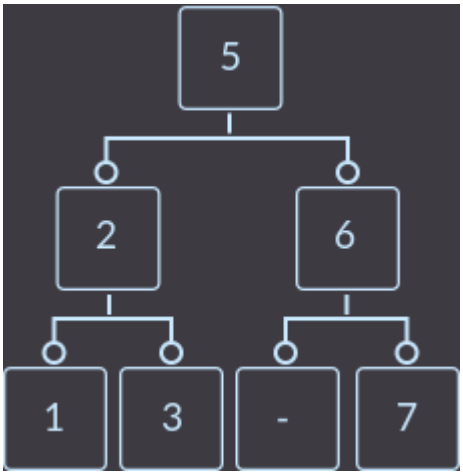
Поиск минимального элемента происходит точно также, как и в обычном бинарном дереве поиска: спускаемся в самый левый нижний узел и его левый ключ и будет минимальным.

2.4 Удаление

Удаление в 2-3-дереве, как и в любом другом дереве, происходит только из листа (из самой нижней вершины). Поэтому, когда мы нашли ключ, который нужно удалить, сначала надо проверить, находится ли этот ключ в листовой или нелистовой вершине. Если ключ находится в нелистовой вершине, то нужно найти эквивалентный ключ для удаляемого ключа из листовой вершины и поменять их местами. Для нахождения эквивалентного ключа есть два варианта: либо найти максимальный элемент в левом поддереве, либо найти минимальный элемент в правом поддереве.

Чтобы удалить из дерева ключ key=4, для начала нужно найти эквивалентный эму элемент и поменять местами: это либо key=3, либо key=5. Так как я выбрал второй способ, то меняю ключи key=4 и key=5 местами и удаляю key=4 из листа

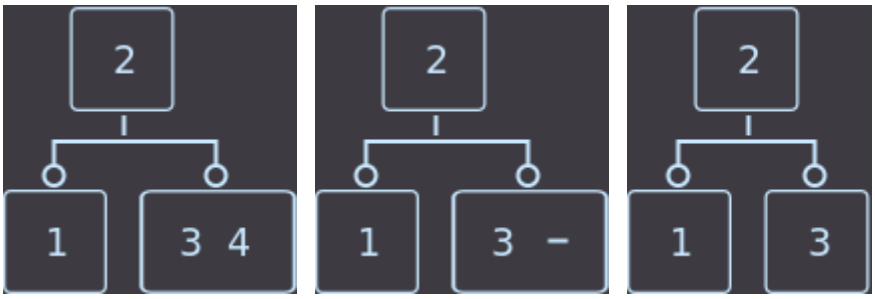




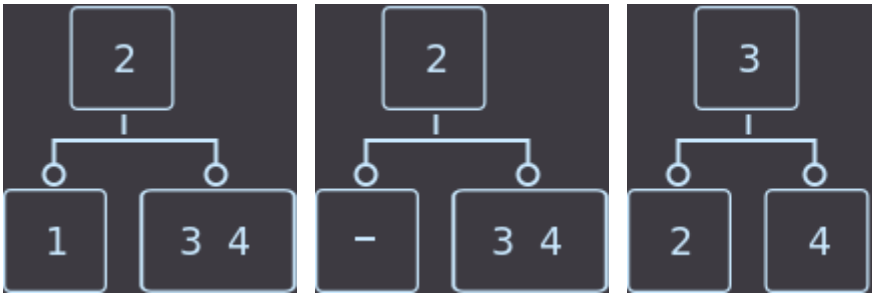
После того, как удалили ключ, у нас могут получиться концептуально 4 разные ситуации: 3 из них нарушают свойства дерева, а одна — нет. Поэтому для вершины, из которой удалили ключ, нужно вызвать функцию исправления fix(), которая вернет свойства 2-3 дерева.

Случай 0: самый простой случай: если дерево состоит из одной вершины (корень), которая имеет 1 ключ, то просто удаляем эту вершину.

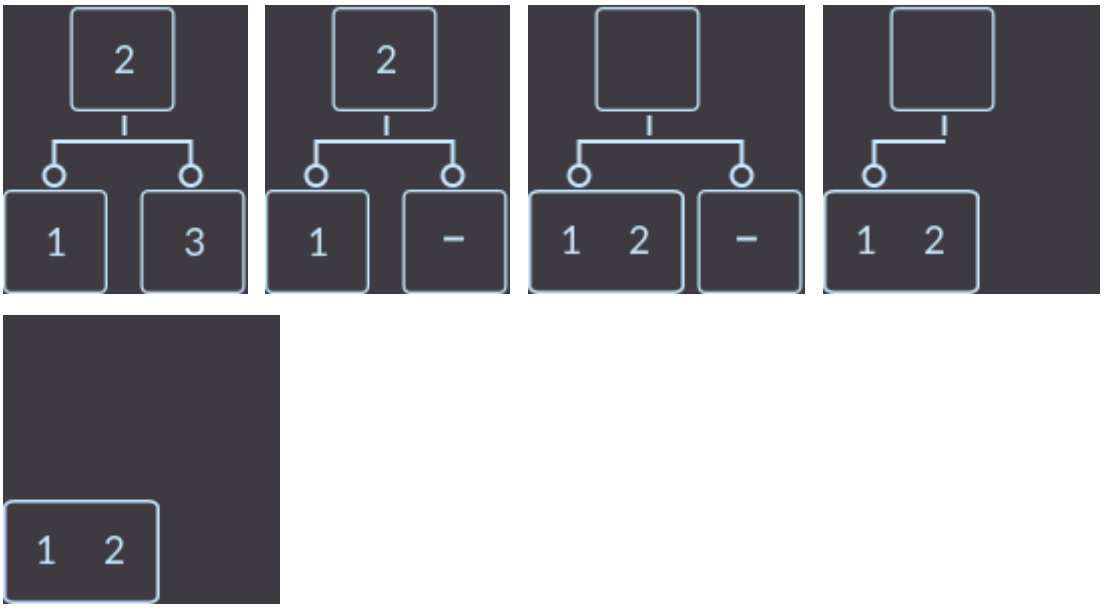
Случай 1: если нужно удалить ключ из листа, где находятся два ключа, то мы просто удаляем ключ и на этом функция удаления закончена.



Случай 2 (распределение или redistribute): мы удаляем ключ из вершины и вершина становится пустой. Если хотя бы у одного из братьев есть 2 ключа, то делаем простое правильное распределение и работа закончена.



Случай 3 (склеивание или merge): пожалуй, самый сложный случай, так как после склеивания всегда обязательно идти по дереву вверх и опять применять операции либо merge, либо redistribute.



3 Экспериментальное исследование эффективности алгоритма

В практической части было проведено 2 исследования: 1) зависимость времени выполнения функции добавления в 2-3 дереве и обычном бинарном дереве поиска от количества элементов, у которых случайные значения (график 1); 2) также зависимость времени выполнения функции добавления в 2-3 дереве и бинарном дереве поиска от количества элементов, у которых значения только возрастают (худший случай бинарного дерева поиска) (график 2).

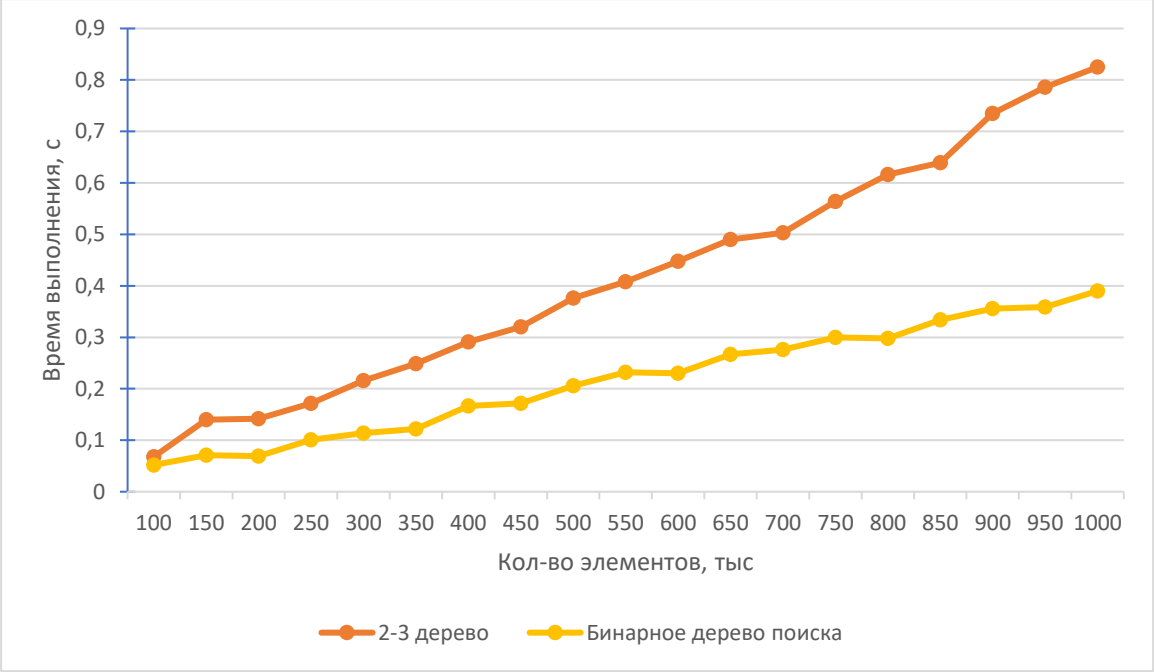


График 1. Зависимость времени выполнения функции от кол-ва элементов со случайными значениями.

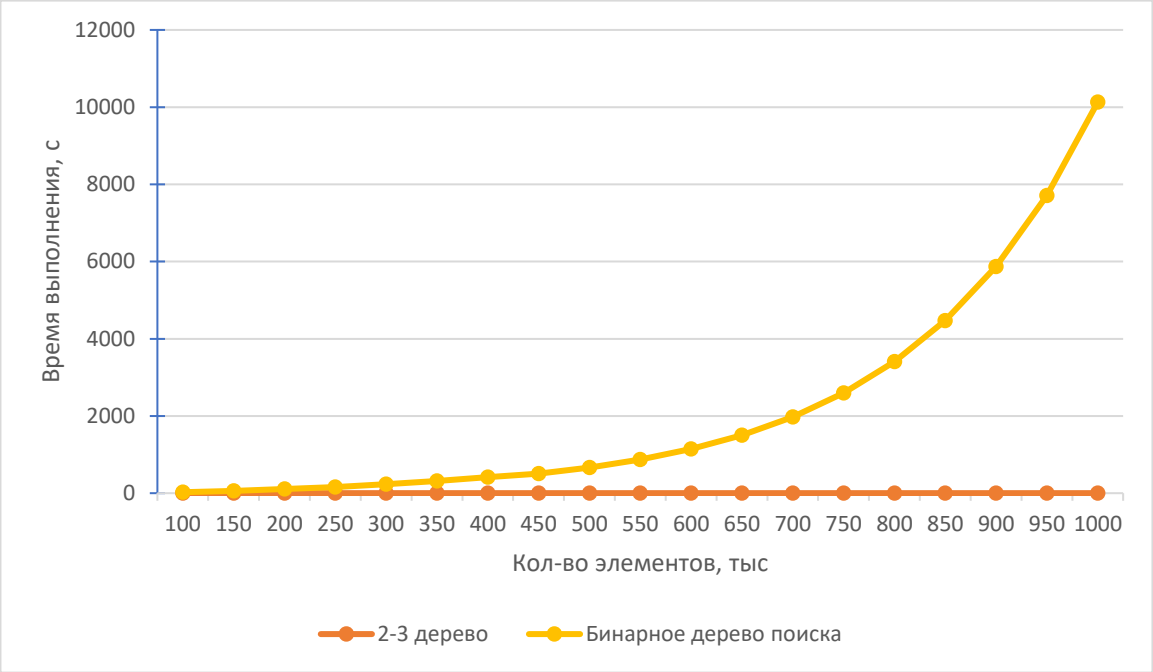


График 2. Зависимость времени выполнения функции от кол-ва элементов с возрастающими значениями.

Данное исследование подтвердило, что 2-3 деревья, в отличии от бинарного дерева поиска не имеют худшего случая и сложность их операций всегда равна O(log n), где n – количество элементов.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В результате выполнения работы было реализовано 2-3 дерево и проверено наглядно, что, действительно, его высота не превышает log n, где n – это количество узлов, что делает его самобалансирующимся.

ПРИЛОЖЕНИЕ

1 Исходный код программы

```
#include <iostream>
#include <stdlib.h>
#include <conio.h>

#define COUNT 10

using namespace std;

struct node {
public:
   int size;      // количество занятых ключей
   int key[3];    // ключи
   node *first;   // левый дочерний узел
   node *second;  // средний
   node *third;   // правый
   node *fourth;  // дополнительный
   node *parent; // родитель

   bool find(int k) { // Этот метод возвращает true, если ключ k находится в вершине, иначе false.
      for (int i = 0; i < size; ++i)
         if (key[i] == k) return true;
      return false;
   }

   void swap(int &x, int &y) {
      int r = x;
      x = y;
      y = r;
   }

   void sort2(int &x, int &y) {
      if (x > y) swap(x, y);
   }

   void sort3(int &x, int &y, int &z) {
      if (x > y) swap(x, y);
      if (x > z) swap(x, z);
      if (y > z) swap(y, z);
   }

   void sort() { // Ключи в вершинах должны быть отсортированы
      if (size == 1) return;
      if (size == 2) sort2(key[0], key[1]);
      if (size == 3) sort3(key[0], key[1], key[2]);
   }

   void insert_to_node(int k) {  // Вставляем ключ k в вершину (не в дерево)
      key[size] = k;
      size++;
      sort();
   }

   void remove_from_node(int k) { // Удаляем ключ k из вершины (не из дерева)
      if (size >= 1 && key[0] == k) {
         key[0] = key[1];
```

```
        key[1] = key[2];
        size--;
      } else if (size == 2 && key[1] == k) {
        key[1] = key[2];
        size--;
      }
   }

   void become_node2(int k, node *first_, node *second_) {  // Преобразовать в 2-вершину.
      key[0] = k;
      first = first_;
      second = second_;
      third = nullptr;
      fourth = nullptr;
      parent = nullptr;
      size = 1;
   }

   bool is_leaf() { // Является ли узел листом; проверка используется при вставке и удалении.
      return (first == nullptr) && (second == nullptr) && (third == nullptr);
   }
   void print(node *p, int space) {
      if (!p) return;
      space += COUNT;
      print(p->third, space);
      cout << endl;
      print(p->second, space);
      for (int i = COUNT; i < space; i++) cout << " ";
      if (p->key[0] != 0) {
         if ((p->key[0] != p->key[1]) && (p->key[1] != 0) && (p->key[0] < p->key[1])) cout << p->key[0]
<< " " << p->key[1] << " ";
         else  cout << p->key[0] << " ";
      }
      cout << endl;
      print(p->first, space);
   }
   // Создавать всегда будем вершину только с одним ключом
   node(int k): size(1), key{k, 0, 0}, first(nullptr), second(nullptr),
              third(nullptr), fourth(nullptr), parent(nullptr) {}

   node (int k, node *first_, node *second_, node *third_, node *fourth_, node *parent_):
                      size(1), key{k, 0, 0}, first(first_), second(second_),
                      third(third_), fourth(fourth_), parent(parent_) {}

   friend node *split(node *item); // Метод для разделение вершины при переполнении;
   friend node *insert(node *p, int k); // Вставка в дерево;
   friend node *search(node *p, int k); // Поиск в дереве;
   friend node *search_min(node *p); // Поиск минимального элемента в поддереве;
   friend node *merge(node *leaf); // Слияние используется при удалении;
   friend node *redistribute(node *leaf); // Перераспределение также используется при удалении;
   friend node *fix(node *leaf); // Используется после удаления для возвращения свойств дереву
   friend node *remove(node *p, int k); // удаление из дерева;

};

node *insert(node *p, int k) { // вставка ключа k в дерево с корнем p

   if (!p || p->key[0] == 0) return new node(k); // если дерево пусто, то создаем первую 2-3-вершину
(корень)
   if (p->is_leaf()) p->insert_to_node(k);
   else if (k <= p->key[0]) insert(p->first, k);
```

```
    else if ((p->size == 1) || ((p->size == 2) && k <= p->key[1])) insert(p->second, k);
    else insert(p->third, k);

    return split(p);
}

node *split(node *item) {
    if (item->size < 3) return item;

    node *x = new node(item->key[0], item->first, item->second, nullptr, nullptr, item->parent);
    node *y = new node(item->key[2], item->third, item->fourth, nullptr, nullptr, item->parent);
    if (x->first)  x->first->parent = x;    // Правильно устанавливаем "родителя" "сыновей".
    if (x->second) x->second->parent = x;   // После разделения, "родителем" "сыновей" является
"дедушка",
    if (y->first)  y->first->parent = y;    // Поэтому нужно правильно установить указатели.
    if (y->second) y->second->parent = y;

    if (item->parent) {
        item->parent->insert_to_node(item->key[1]);

        if (item->parent->first == item) item->parent->first = nullptr;
        else if (item->parent->second == item) item->parent->second = nullptr;
        else if (item->parent->third == item) item->parent->third = nullptr;

        // Дальше происходит своеобразная сортировка ключей при разделении.
        if (item->parent->first == nullptr) {
            item->parent->fourth = item->parent->third;
            item->parent->third = item->parent->second;
            item->parent->second = y;
            item->parent->first = x;
        } else if (item->parent->second == nullptr) {
            item->parent->fourth = item->parent->third;
            item->parent->third = y;
            item->parent->second = x;
        } else {
            item->parent->fourth = y;
            item->parent->third = x;
        }

        node *tmp = item->parent;
        delete item;
        return tmp;
    } else {
        x->parent = item;   // Так как в эту ветку попадает только корень,
        y->parent = item;   // то мы "родителем" новых вершин делаем разделяющийся элемент.
        item->become_node2(item->key[1], x, y);
        return item;
    }
}

node *search(node *p, int k) { // Поиск ключа k в 2-3 дереве с корнем p.
    if (!p) return nullptr;
    if (p->find(k)) return p;
    if (k < p->key[0]) return search(p->first, k);
    if (((p->size == 2) || (p->size == 1)) && (k < p->key[1])) return search(p->second, k);
    if (p->size == 2) return search(p->third, k);
    return nullptr;
}

node *search_min(node *p) { // Поиск узла с минимальным элементов в 2-3-дереве с корнем p.
    if (!p) return p;
```

```
    if (!(p->first)) return p;
    else return search_min(p->first);
}

node *remove(node *p, int k) { // Удаление ключа k в 2-3-дереве с корнем p.
    node *item = search(p, k); // Ищем узел, где находится ключ k

    if (!item) return p;

    node *min = nullptr;
    if (item->key[0] == k) min = search_min(item->second); // Ищем эквивалентный ключ
    else min = search_min(item->third);

    if (min) { // Меняем ключи местами
        int &z = (k == item->key[0] ? item->key[0] : item->key[1]);
        item->swap(z, min->key[0]);
        item = min; // Перемещаем указатель на лист, т.к. min - всегда лист
    }

    item->remove_from_node(k); // И удаляем требуемый ключ из листа
    return fix(item); // Вызываем функцию для восстановления свойств дерева.
}

node *fix(node *leaf) {
    if (leaf->size == 0 && leaf->parent == nullptr) { // Случай 0, когда удаляем единственный ключ в
дереве
        delete leaf;
        return nullptr;
    }
    if (leaf->size != 0) { // Случай 1, когда вершина, в которой удалили ключ, имела два ключа
        if (leaf->parent) return fix(leaf->parent);
        else return leaf;
    }

    node *parent = leaf->parent;
    if (parent->first->size == 2 || parent->second->size == 2 || parent->size == 2) leaf =
redistribute(leaf); // Случай 2, когда достаточно перераспределить ключи в дереве
    else if (parent->size == 2 && parent->third->size == 2) leaf = redistribute(leaf); // Аналогично
    else leaf = merge(leaf); // Случай 3, когда нужно произвести склеивание и пройтись вверх по дереву
как минимум на еще одну вершину

    return fix(leaf);
}

node *redistribute(node *leaf) {
    node *parent = leaf->parent;
    node *first = parent->first;
    node *second = parent->second;
    node *third = parent->third;

    if ((parent->size == 2) && (first->size < 2) && (second->size < 2) && (third->size < 2)) {
        if (first == leaf) {
            parent->first = parent->second;
            parent->second = parent->third;
            parent->third = nullptr;
            parent->first->insert_to_node(parent->key[0]);
            parent->first->third = parent->first->second;
            parent->first->second = parent->first->first;

            if (leaf->first != nullptr) parent->first->first = leaf->first;
            else if (leaf->second != nullptr) parent->first->first = leaf->second;
```

```
        if (parent->first->first != nullptr) parent->first->first->parent = parent->first;

        parent->remove_from_node(parent->key[0]);
        delete first;
    } else if (second == leaf) {
        first->insert_to_node(parent->key[0]);
        parent->remove_from_node(parent->key[0]);
        if (leaf->first != nullptr) first->third = leaf->first;
        else if (leaf->second != nullptr) first->third = leaf->second;

        if (first->third != nullptr) first->third->parent = first;

        parent->second = parent->third;
        parent->third = nullptr;

        delete second;
    } else if (third == leaf) {
        second->insert_to_node(parent->key[1]);
        parent->third = nullptr;
        parent->remove_from_node(parent->key[1]);
        if (leaf->first != nullptr) second->third = leaf->first;
        else if (leaf->second != nullptr) second->third = leaf->second;

        if (second->third != nullptr)  second->third->parent = second;

        delete third;
    }
} else if ((parent->size == 2) && ((first->size == 2) || (second->size == 2) || (third->size == 2))) {
    if (third == leaf) {
        if (leaf->first != nullptr) {
            leaf->second = leaf->first;
            leaf->first = nullptr;
        }

        leaf->insert_to_node(parent->key[1]);
        if (second->size == 2) {
            parent->key[1] = second->key[1];
            second->remove_from_node(second->key[1]);
            leaf->first = second->third;
            second->third = nullptr;
            if (leaf->first != nullptr) leaf->first->parent = leaf;
        } else if (first->size == 2) {
            parent->key[1] = second->key[0];
            leaf->first = second->second;
            second->second = second->first;
            if (leaf->first != nullptr) leaf->first->parent = leaf;

            second->key[0] = parent->key[0];
            parent->key[0] = first->key[1];
            first->remove_from_node(first->key[1]);
            second->first = first->third;
            if (second->first != nullptr) second->first->parent = second;
            first->third = nullptr;
        }
    } else if (second == leaf) {
        if (third->size == 2) {
            if (leaf->first == nullptr) {
                leaf->first = leaf->second;
                leaf->second = nullptr;
            }
```

```
            second->insert_to_node(parent->key[1]);
            parent->key[1] = third->key[0];
            third->remove_from_node(third->key[0]);
            second->second = third->first;
            if (second->second != nullptr) second->second->parent = second;
            third->first = third->second;
            third->second = third->third;
            third->third = nullptr;
        } else if (first->size == 2) {
            if (leaf->second == nullptr) {
                leaf->second = leaf->first;
                leaf->first = nullptr;
            }
            second->insert_to_node(parent->key[0]);
            parent->key[0] = first->key[1];
            first->remove_from_node(first->key[1]);
            second->first = first->third;
            if (second->first != nullptr) second->first->parent = second;
            first->third = nullptr;
        }
    } else if (first == leaf) {
        if (leaf->first == nullptr) {
            leaf->first = leaf->second;
            leaf->second = nullptr;
        }
        first->insert_to_node(parent->key[0]);
        if (second->size == 2) {
            parent->key[0] = second->key[0];
            second->remove_from_node(second->key[0]);
            first->second = second->first;
            if (first->second != nullptr) first->second->parent = first;
            second->first = second->second;
            second->second = second->third;
            second->third = nullptr;
        } else if (third->size == 2) {
            parent->key[0] = second->key[0];
            second->key[0] = parent->key[1];
            parent->key[1] = third->key[0];
            third->remove_from_node(third->key[0]);
            first->second = second->first;
            if (first->second != nullptr) first->second->parent = first;
            second->first = second->second;
            second->second = third->first;
            if (second->second != nullptr) second->second->parent = second;
            third->first = third->second;
            third->second = third->third;
            third->third = nullptr;
        }
    }
} else if (parent->size == 1) {
    leaf->insert_to_node(parent->key[0]);

    if (first == leaf && second->size == 2) {
        parent->key[0] = second->key[0];
        second->remove_from_node(second->key[0]);

        if (leaf->first == nullptr) leaf->first = leaf->second;

        leaf->second = second->first;
        second->first = second->second;
        second->second = second->third;
```

```
            second->third = nullptr;
            if (leaf->second != nullptr) leaf->second->parent = leaf;
        } else if (second == leaf && first->size == 2) {
            parent->key[0] = first->key[1];
            first->remove_from_node(first->key[1]);

            if (leaf->second == nullptr) leaf->second = leaf->first;

            leaf->first = first->third;
            first->third = nullptr;
            if (leaf->first != nullptr) leaf->first->parent = leaf;
        }
    }
    return parent;
}

node *merge(node *leaf) {
    node *parent = leaf->parent;

    if (parent->first == leaf) {
        parent->second->insert_to_node(parent->key[0]);
        parent->second->third = parent->second->second;
        parent->second->second = parent->second->first;

        if (leaf->first != nullptr) parent->second->first = leaf->first;
        else if (leaf->second != nullptr) parent->second->first = leaf->second;

        if (parent->second->first != nullptr) parent->second->first->parent = parent->second;

        parent->remove_from_node(parent->key[0]);
        delete parent->first;
        parent->first = nullptr;
    } else if (parent->second == leaf) {
        parent->first->insert_to_node(parent->key[0]);

        if (leaf->first != nullptr) parent->first->third = leaf->first;
        else if (leaf->second != nullptr) parent->first->third = leaf->second;

        if (parent->first->third != nullptr) parent->first->third->parent = parent->first;

        parent->remove_from_node(parent->key[0]);
        delete parent->second;
        parent->second = nullptr;
    }

    if (parent->parent == nullptr) {
        node *tmp = nullptr;
        if (parent->first != nullptr) tmp = parent->first;
        else tmp = parent->second;
        tmp->parent = nullptr;
        delete parent;
        return tmp;
    }
    return parent;
}

int main() {
    int i = 1, key;
    node *root = new node(0);
    node *find = new node(0);
```

```
    while (1) {
        system("cls");
        cout << "1. Insert\n";
        cout << "2. Lookup\n";
        cout << "3. Min\n";
        cout << "4. Delete\n";
        cout << "5. Print\n";
        cout << "0. Quit\n";
        cout << " :";
        cin >> i;
        switch(i) {
            case 1:
                system("cls");
                cout << "Enter key to insert: ";
                cin >> key;
                root = insert(root, key);
                break;
            case 2:
                system("cls");
                cout << "Enter key to lookup: ";
                cin >> key;
                find = search(root, key);
                if (find == nullptr) cout << "Key " << key << " not found\n";
                else cout << "Key " << key << " found\n";
                getch();
                break;
            case 3:
                system("cls");
                find = search_min(root);
                if (!find || find->key[0] == 0) cout << "No elements\n";
                else cout << "Min = " << find->key[0];
                getch();
                break;
            case 4:
                system("cls");
                cout << "Enter key to delete: ";
                cin >> key;
                root = remove(root, key);
                break;
            case 5:
                system("cls");
                root->print(root, 0);
                getch();
                break;
            case 0:
                return 0;

        }

    }
}
```