Reporte actividades: 10, 11 y 12

Luis Eduardo Martínez Espinoza
Departamento de Física
Universidad de Sonora

3 de mayo de 2021

Índice

1. Introducción

En este reporte se describiran de manera sencilla los métodos y las formas en las que estuvimos resolviendo los diferentes tipos de ecuaciones diferencias parciales durante las actividades 10, 11 y 12, Específicamente de los tipos de condiciones a la frontera y el método de diferencias finitas

2. Familias de ecuaciones diferencias parciales

2.1. Parabólicas

Este tipo de ecuaciones son correspondientes a los a los flujos disipativos, cómo efectos viscosos o conducción térmica, existe una única solución real. Las soluciones a este tipo de ecuaciones presentan distribuciones suaves y los gradientes tienden a reducirse con el tiempo si las condiciones a la frontera son constantes. Uno de los ejemplos más comunes es el de la conducción de calor. Se presenta a continuación la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

α es un coeficeinte de difusión mayor a cero

2.2. Hiperbólicas

A diferencia de las parabólicas esta cuenta con dos soluciones reales que satisfacen la ecuación. Este tipo de ecucaciones describen procesos donde los mecanismos no son disipativos, se asocian a problemas de propagación de ondas. Podemos ver la ecuación de onda en una dimensión de la siguiente manera

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

2.3. Elípticas

A diferencia de los dos tipos anteriores, esta no cuenta con ningúna linea característica real. Corresponde a problemas estacionarios, como la transmisión de calor por conducción en ausencia de fuentes de calor. Tenemos como ejemplo la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$$

3. Tipos de Condiciones a la Frontera

Las condiciones a la frontera nos ayudan a encontrar una solución específica a una ecuación diferencial, sin ellas sólo podemos encontrar familias de soluciones debido a la perdida de información de constantes en el proceso.

3.1. Dirichlet

Llamadas condición a la frontera de Dirichlet, en honor a Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, también llamadas de primer tipo. Se clasifica en esta categoria cuando en la ecuación diferencial o de derivadas parciales se especifican las condiciones que debe satisfacer la solución en diferentes puntos.

3.2. Neumann

Llamadas condición a la frontera de Neumman, en honor a Carl Neumann, también llamdas de segundo tipo. Se clasifican en esta categoria cuando a una ecuación diferencial o de derivadas parciales se le especifican condiciones a las derividas de las soluciones.

3.3. Robin (mixto)

Llamadas condición a la frontera de Robin, en honor a Victor Gustave Robin, también llamdas de tercer tipo. Se clasifican en esta categoria cuando a una ecuación diferencial o de derivadas parciales se le especifican una combinación lineal de valores que debe tener la función y y los valores de su derivada en la frontera. Se interpretea como una combinación de las condiciones de Dirichlet y de Neumann.

4. Método de diferencias finitas

En el análisis númerico, los métodos de diferencias finitas son métodos numéricos para resolver las ecuaciones diferenciales aproximando las derivadas con diferencias finitas. El dominio espacial y el tiempo se discretizan en número finito de intervalos. Las derivadas se aproximan mediante series de Taylor.

5. Solución de la ecuación de Calor

La ecuación del calor es de la forma

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

donde α es un coeficiente de difusividad.

Aproximamos de la siguiente manera la primera derivada mediante una Serie de Taylor

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Esto se conoce como diferencias finitas hacia enfrente, obtenemos la expresión de diferenias finitas hacia atrás de la siguiente manera

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Si promediamos ambas expresiones obtenemos lo siguiente

$$f'(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - f(x_0-h)}{2h} + \mathcal{O}(h^3)$$

Con esta última ecuación podemos obtener la aproximación de la segunda derivada

$$f''(x_0) \approx \frac{f'(x_0+h) - f'(x_0-h)}{h} + \mathcal{O}(h^2)$$

Sustituyendo obtenemos

$$f''(x_0) \approx \frac{f(x_0+h) - 2f(x_0) + f(x_0-h)}{h^2} + \mathcal{O}(h^3)$$

Para encontrar la solución podemos escribir la ecuación del calor de la siguiente manera

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

De esta manera hemos discretizado el espacio y se requiere la condición t=0 y condiciones a la frontera. Para discretizar también al tiempo declaramos h como el cambio en el espacio siendo h/N-1. k es el avance en el tiempo, de esta manera escribimos la ecuación anterior como

$$\frac{u(x,t+k) - u(x,t)}{k} = \alpha \frac{u(x+h,t) - 2u(x,t) + u(x-h,t)}{h^2}$$

Depejamos $u(x,t+k)$ y obtenemos la siguiente expresión para un valor en un punto para un timepo t

$$u_j^t = \alpha y_{j+1}^{t-1} + (1-2\alpha) u_j^{t-1} \alpha u_{j-1}^{t-1}$$

Actividad 10

`https://github.com/eduardxmartinez/FisicaComputacional/blob/master/Actividad10/Actividad10.ipynb`

6. Solución de la ecuación de Onda

La ecuación de Onda tiene la siguiente forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

u es la función que representa la presión de la onda y c^2 es la velocidad de la información. x pertenece al intervalo de 0 a L y t de 0 a T. Necesitamos dos condiciones iniciales y dos de frontera para poder encontrar la solución. Como se hizo para encontrar la solución de la ecuación de Calor, utilizamos Series de Taylour para discretizar el espacio y obtenemos la siguiente ecuación

$$\frac{u(x,t+h)-2u(x,t)+u(x,t+k)}{k^2}=c^2\frac{u(x+h,t)-2u(x,t)+u(x-h,t)}{h^2}$$

Podemos ver que tenemos cinco puntos diferentes que se mueven en en el tiempo y en el espacio, hacia atrás y hacia enfrente, entonces podemos reescribirlo de la siguiente manera y despejamos para u_j^{n+1}

$$u_j^{n+1}=2u_j^n-u_j^{n-1}+C(u_{j+1}^n-2u_j^n+u_{j-1}^n)$$

$$C=\frac{c^2k^2}{h^2}$$

Actividad 11

`https://github.com/eduardxmartinez/FisicaComputacional/blob/master/Actividad11/Actividad11.ipynb`

7. Solución de la ecuación de Poisson

A diferencia de las ecuaciones anteriores para esta no se necesitan condiciones iniciales, pero si necesitamos condiciones a la frontera. La ecuación tiene la forma

$$-\nabla^2u(x,y,x)=f(x,y,z)$$

Mediante el método de Series de Taylor y ya representado en puntos dentro del dominio y valores a la frontera obtenemos

$$f_{i,k}=-\frac{U_{i+1,k}+U_{i-1,k}}{h_x^2}-\frac{U_{i+1,k}+U_{i-1,k}}{h_y^2}+2\left(\frac{1}{h_x^2}+\frac{1}{h_y^2}\right)U_{i,k}$$

Teniendo condiciones a la frontera de tipo Dirichlet obtenemos un problema matricial $AU=F$ donde A es una matriz diagonal, U es desconocida y F es conocida. Empezamos por establer valores iniciales y fianles para el espacio-tiempo y el tamaño de paso necesario para crear la maya del espacio. Construimos una función que genere matrices f y g, donde g es sólo para ayudar a construir a f. Definimos otra función que nos ayude a establecer las condiciones a la frontera de Dirichlet. Adaptamos las matrices para que puedan ser utilizadas para obtener la solución numérica. Para generar la matriz A definimos los valores que deben de estar en sus diagonales. Ya teniendo las matrices resolvemos con la función de numpy.

Actividad 12

`https://github.com/eduardxmartinez/FisicaComputacional/blob/master/Actividad12/Actividad12.ipynb`

8. Resumen y conclusiones

Estas últimas tres actividades fueron de mucha ayuda para explorar a detalle los diferentes comportamientos de las ecuaciones diferenciales según sus condiciones a la frontera. Exploramos las diferentes funciones que nos ofrece Python para calculos algebraicos y matriciales, los cuales son eficientes. Los ejercicios que resolvimos a en las ultimas tres actividade sirven como base para seguir aprendiendo por nuestra cuenta problemas con mayor dificultad, aunque en mi opinion si batalle un poco con ellas. También las herramientas de graficación son un gran complemento para entender de manera sencilla como se comporta cada una de las ecuaciones y cada una debe tener diferente configuración para visualizarla de la mejor manera.

9. Bibliografía

- https://en.wikipedia.org/wiki/Partial_differential_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Numerical_methods_for_partial_differential_equations
- https://en.wikipedia.org/wiki/Finite_difference_method
- https://en.wikipedia.org/wiki/Heat_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Wave_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Poisson%27s_equation
- https://en.wikipedia.org/wiki/Dirichlet_boundary_condition
- https://en.wikipedia.org/wiki/Robin_boundary_condition
- https://en.wikipedia.org/wiki/Neumann_boundary_condition